بسم الله الرحمن الرحيم

۸.۶ انرژی پتانسیل در میدان مرکزی عمومی

میدان مرکزی از نوع عکس مجذوری پایسته است

سوال:

آیا هر میدان مرکزی (همسانگرد) نیرو پایسته است یا خیر.

$\mathbf{F} = f(r)\mathbf{e}_r$ میدان مرکزی همسانگرد عمومی

$$\nabla \times \mathbf{F} = \frac{1}{r^2 \sin\theta} \begin{vmatrix} \mathbf{e}_r & \mathbf{e}_\theta r & \mathbf{e}_\phi r \sin\theta \\ \dfrac{\partial}{\partial r} & \dfrac{\partial}{\partial \theta} & \dfrac{\partial}{\partial \phi} \\ F_r & rF_\theta & rF_\phi \sin\theta \end{vmatrix}$$

آزمون پایسته‌بودن، تاو $\mathbf{F}$

مختصات کروی

$F_r = f(r)$، $F_\theta = 0$، و $F_\phi = 0$

$f(r)$ به مختصات زاویه‌ای θ و ϕ بستگی ندارد

$$\nabla \times \mathbf{F} = \frac{\mathbf{e}_\theta}{r \sin\theta} \frac{\partial f}{\partial \phi} - \frac{\mathbf{e}_\phi}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} = 0$$

میدان مرکزی عمومی پایسته است.

$$V(r) = -\int_{r_{ref}}^{r} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = -\int_{r_{ref}}^{r} f(r) dr$$

حد پایین r_{ref} مقدار مرجع r است انرژی پتانسیل آن است

نیروهای از نوع توان معکوس ← غالباً r_{ref} بینهایت

$$V(r) = -\int_{r_{ref}}^{r} f(r)dr$$

$$f(r) = -\frac{dV(r)}{dr}$$

۹.۶ معادلهٔ انرژی مدار در میدان مرکزی

$$\mathbf{v} = \dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta$$

مجذور سرعت در مختصات قطبی

$$\mathbf{v}\cdot\mathbf{v} = v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2$$

به‌علت پایستگی نیروی مرکزی

$$T + V = constant$$

$$\frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + V(r) = E = \text{ثابت}$$

$$u = 1/r$$

$$\frac{1}{2}ml^2\left[\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + u^2\right] + V(u^{-1}) = E$$

معادلهٔ انرژی مدار

مثال ۱.۹.۶

در مثال ۱.۵.۶ برای مدار مارپیچی داشتیم $r = c\theta^2$

معادلهٔ انرژی مدار

$$\frac{1}{2} m l^2 \left[\left(\frac{du}{d\theta} \right)^2 + u^2 \right] + V(u^{-1}) = E$$

$$u = \frac{1}{r} = \frac{1}{c\theta^2} \Rightarrow \frac{du}{d\theta} = \frac{-2}{c}\theta^{-3} = -2c^{1/2}u^{3/2}$$

$$\frac{1}{2} m l^2 (4cu^3 + u^2) + V = E$$

$$V(r) = E - \frac{1}{2} m l^2 \left(\frac{4c}{r^3} + \frac{1}{r^2} \right) \Rightarrow f(r) = -dV/dr$$

۱۰.۶ انرژیهای مداری در میدان عکس مجذور

$$\frac{۱}{۲}ml^{۲}\left[\left(\frac{du}{d\theta}\right)^{۲}+u^{۲}\right]+V(u^{-۱})=E$$ معادلهٔ انرژی مدار

تابع انرژی پتانسیل برای میدان نیروی عکس مجذور

$$V(r)=-\frac{k}{r}=-ku$$

$$\frac{۱}{۲}ml^{۲}\left[\left(\frac{du}{d\theta}\right)^{۲}+u^{۲}\right]-ku=E$$

$$\left(\frac{du}{d\theta}\right)^{۲}+u^{۲}=\frac{۲E}{ml^{۲}}+\frac{۲ku}{ml^{۲}}$$

$$\frac{du}{d\theta} = \sqrt{\frac{۲E}{ml^۲} + \frac{۲ku}{ml^۲} - u^۲} \longrightarrow$$

$$d\theta = \frac{du}{\sqrt{\frac{۲E}{ml^۲} + \frac{۲ku}{ml^۲} - u^۲}}$$

$$d\theta = \frac{du}{\sqrt{au^۲ + bu + c}} \qquad a = -۱ \qquad b = \frac{۲k}{ml^۲} \qquad c = \frac{۲E}{ml^۲}$$

$$\theta - \theta_۰ = \int \frac{du}{\sqrt{au^۲ + bu + c}} = \frac{۱}{\sqrt{-a}} \cos^{-۱}\left(-\frac{b + ۲au}{\sqrt{b^۲ - ۴ac}}\right)$$

$$\theta - \theta_0 = \frac{1}{\sqrt{-a}} \cos^{-1}\left(-\frac{b + 2au}{\sqrt{b^2 - 4ac}} \right)$$

$$-\frac{b + 2au}{\sqrt{b^2 - 4ac}} = \cos[\sqrt{-a}(\theta - \theta_0)]$$

$$u = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{-2a} \cos[\sqrt{-a}(\theta - \theta_0)] + \frac{b}{-2a}$$

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{4k^2}{m^2 l^4} + \frac{8E}{ml^2}} \cos(\theta - \theta_0) + \frac{k}{ml^2}$$

$$\frac{۱}{r} = \frac{۱}{۲}\sqrt{\frac{۴k^۲}{m^۲l^۴} + \frac{۸E}{ml^۲}}\cos(\theta - \theta_۰) + \frac{k}{ml^۲}$$

$$\frac{۱}{r} = \frac{k}{ml^۲}\left[\sqrt{۱ + \frac{۲Eml^۲}{k^۲}}\cos(\theta - \theta_۰) + ۱\right]$$

$$r = \frac{ml^۲/k}{۱ + \sqrt{۱ + ۲Eml^۲/k^۲}\cos(\theta - \theta_۰)}$$ معادلهٔ یک مقطع مخروطی

$$\theta_۰ = ۰ \qquad r = \frac{ml^۲/k}{۱ + \sqrt{۱ + ۲Eml^۲/k^۲}\cos\theta}$$

$$\begin{cases} r = \dfrac{\alpha}{۱ + \epsilon \cos\theta} \\[2ex] \alpha = \dfrac{ml^{۲}}{k} \\[2ex] \epsilon = \dfrac{Aml^{۲}}{k} \end{cases}$$

$$\alpha = ml^{۲}/k = (۱ - \epsilon^{۲})a$$

$$\begin{cases} r = \dfrac{ml^{۲}/k}{۱ + \sqrt{۱ + ۲Eml^{۲}/k^{۲}}\cos\theta} \\[2ex] \epsilon = \sqrt{۱ + \dfrac{۲E}{k}\dfrac{ml^{۲}}{k}} \end{cases}$$

خروج از مرکز

$$-\frac{۲E}{k} = \frac{۱ - \epsilon^{۲}}{\alpha} = \frac{۱}{a}$$

$$E = -\frac{k}{۲a}$$

مدارهای بسته (بیضی یا دایره)	$\epsilon < ۱$	$E < ۰$
مدار سهمی	$\epsilon = ۱$	$E = ۰$
مدارهای هذلولی	$\epsilon > ۱$	$E > ۰$

ثابت $E = T + V$

مدارهای بسته آنهایی‌اند که برای آنها $T < |V|$

مدارهای باز عبارت‌اند از مدارهایی که برای آنها $T \geq |V|$

در میدان گرانشی خورشید، ثابت نیرو عبارت است از $k = GM_\odot m$

$M_\odot$ جرم خورشید

m جرم جسم

$$\frac{mv^۲}{۲} - \frac{GM_\odot m}{r} = E = \text{ثابت}$$

$v^۲$ کمتر از $۲GM_\odot/r$ $\longleftarrow$ مدار بیضی

$v^۲$ مساوی $۲GM_\odot/r$ $\longleftarrow$ مدار سهمی

$v^۲$ بزرگتر از $۲GM_\odot/r$ $\longleftarrow$ مدار هذلولی

۱۱.۶ حدود حرکت شعاعی: پتانسیل مؤثر

تکانهٔ زاویه‌ای ذرهٔ متحرک در هر میدان مرکزی همسانگرد ثابت حرکت است

$$\frac{m}{۲}\left(\dot{r}^{۲}+\frac{l^{۲}}{r^{۲}}\right)+V(r)=E$$

پتانسیل مؤثر $U(r)=\frac{ml^{۲}}{۲r^{۲}}+V(r)$ $\longrightarrow$ $\frac{m}{۲}\dot{r}^{۲}+U(r)=E$

پتانسیل مرکزگریز

این ذره دقیقاً مانند ذره‌ای به جرم متحرک m در یک بعد تحت تأثیر تابع انرژی پتانسیل $U(r)$ رفتار می‌کند

حدود حرکت شعاعی (نقاط برگشت)، با قراردادن $\dot{r} = ۰$ به‌دست می‌آید

این حدود عبارت‌اند از ریشه‌های معادلهٔ

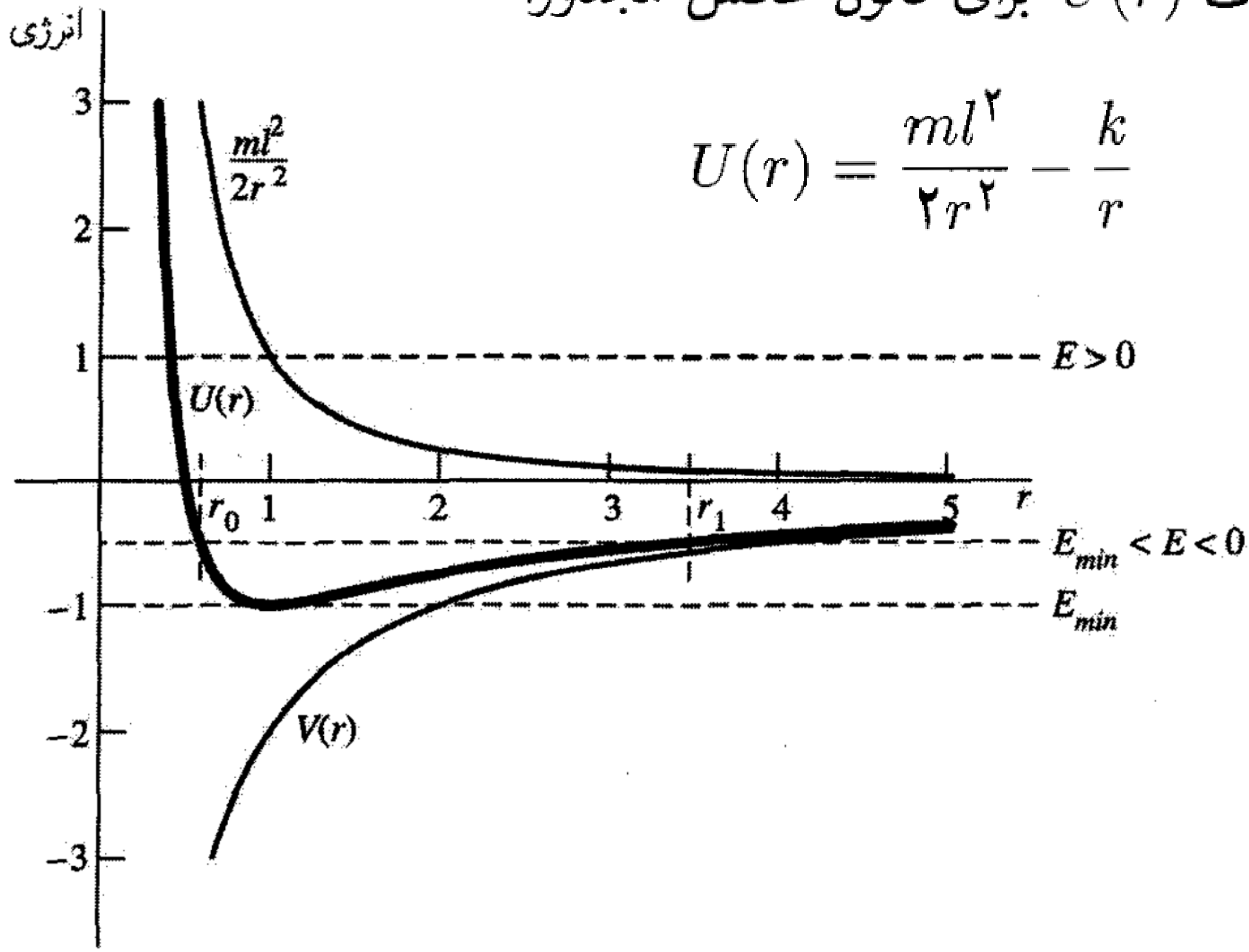
$$U(r) - E = ۰$$

$$\frac{m}{۲}\left(\dot{r}^۲ + \frac{l^۲}{r^۲}\right) + V(r) = E \quad \xrightarrow{\dot{r} = ۰} \quad \frac{ml^۲}{۲r^۲} + V(r) - E = ۰$$

مقادیر مجاز r، عبارت‌اند از مقادیری که به‌ازای آنها $U(r) \leq E$؛ زیرا $\dot{r}^۲$ باید مثبت یا صفر باشد.

نمودار نمایش تغییرات $U(r)$ برای قانون عکس مجذور

$$U(r) = \frac{ml^{2}}{2r^{2}} - \frac{k}{r}$$

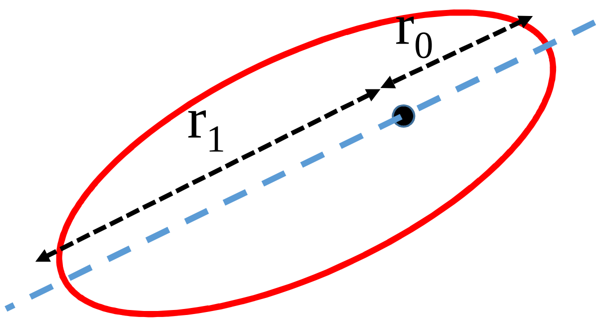


$$\begin{cases} U(r) - E = ۰ \\ U(r) = \dfrac{ml^۲}{۲r^۲} - \dfrac{k}{r} \end{cases} \Rightarrow -۲Er^۲ - ۲kr + ml^۲ = ۰$$

دو ریشهٔ این معادله $$r_{۱,۰} = \frac{k \pm (k^۲ + ۲Eml^۲)^{۱/۲}}{-۲E}$$

که مقادیر بیشینه (علامت بالایی) و کمینهٔ (علامت پایینی) فاصلهٔ شعاعی r را تحت قانون عکس مجذور نیرو به‌دست می‌دهد.

وقتی $E < ۰$، مدارها مقید، هر دو ریشه مثبت‌اند، و مدار حاصل بیضی است که $r_۰$ و $r_۱$، به‌ترتیب، فواصل حضیض و اوج‌اند.



وقتی انرژی با مقدار ممکن کمینه‌اش مساوی باشد:

$$E_{\min} = -\frac{k^۲}{۲ml^۲}$$

معادلهٔ (۵.۱۱.۶) فقط یک ریشه دارد ← مدارش دایره است.

$$r_۰ = -\frac{k}{۲E_{\min}}$$

وقتی $E \geq ۰$، معادلهٔ فقط یک ریشهٔ حقیقی مثبت، متناظر با سهمی $(E = ۰)$ یا هذلولی $(E > ۰)$، دارد.