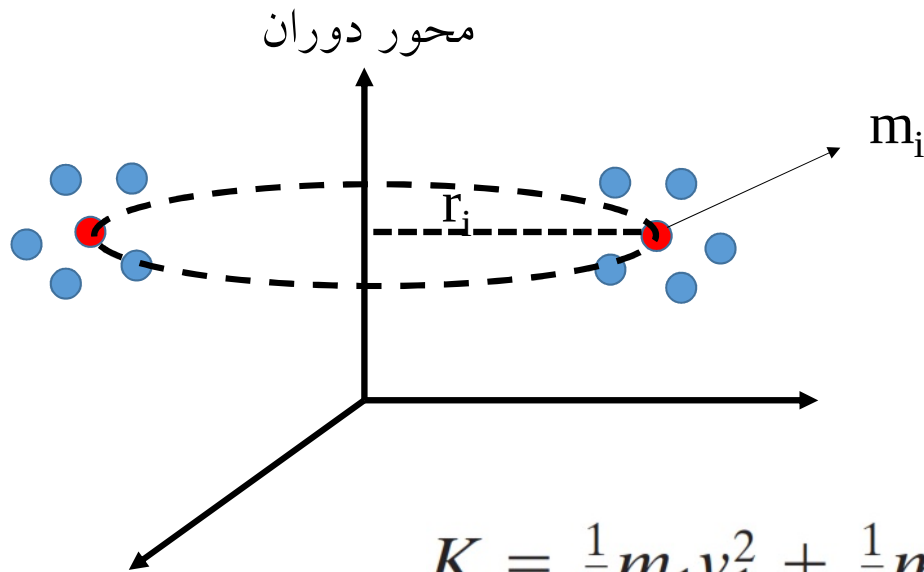


بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

فصل دهم – بخش دوم

چرخش

انرژی جنبشی دورانی



$$K = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 + \frac{1}{2}m_3v_3^2 + \dots = \sum \frac{1}{2}m_iv_i^2$$

$$K = \sum \frac{1}{2}m_i(\omega r_i)^2 = \frac{1}{2} \left(\underbrace{\sum m_i r_i^2}_I \right) \omega^2$$

$$K = \frac{1}{2}I\omega^2$$

I لختی دورانی یا ممان اینرسی

لختی دورانی

کمیتی است که تمایل جسم به حفظ حرکت دورانی را نشان می دهد.

لختی دورانی سیستم ذرات گسسته

$$I = \sum m_i r_i^2$$

جمع روی همه ذرات سیستم

لختی دورانی وابسته است به

❖ جرم جسم یا ذرات سیستم

❖ توزیع جرم حول محور دوران

لختی دورانی جسم صلب

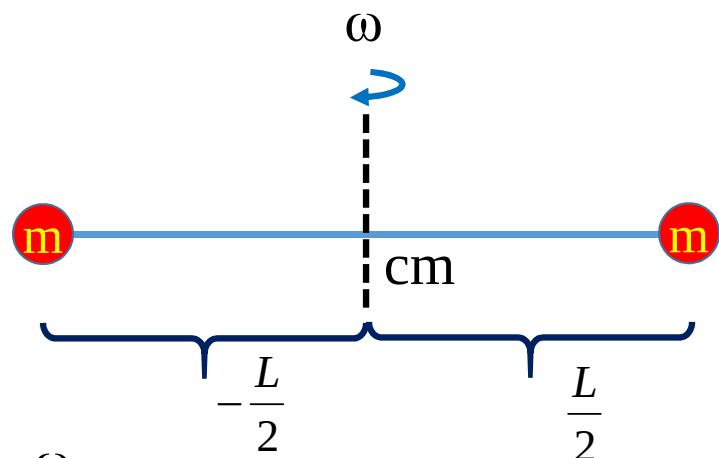
$$I = \int r^2 dm$$

انتگرال روی کل جسم (حدود جسم)

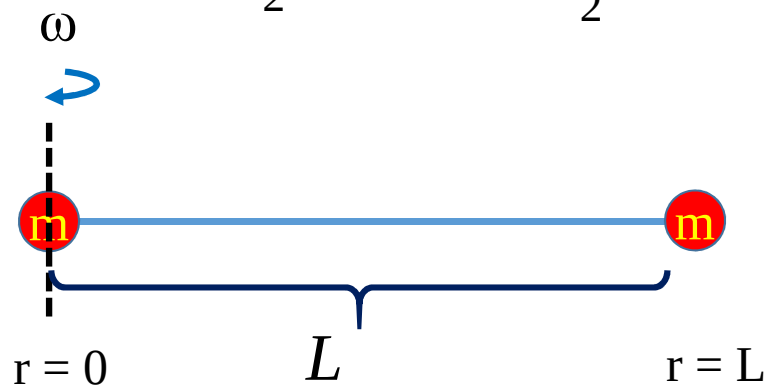
مثال: دو جسم به جرم های m توسط میله بدون جرمی به هم متصل شده اند. مطلوبست لختی دورانی:

الف) حول محور گذرنده از مرکز جرم

ب) حول محور گذرنده از یکی از اجسام



$$I = \sum m_i r_i^2 = m\left(\frac{L}{2}\right)^2 + m\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}mL^2$$

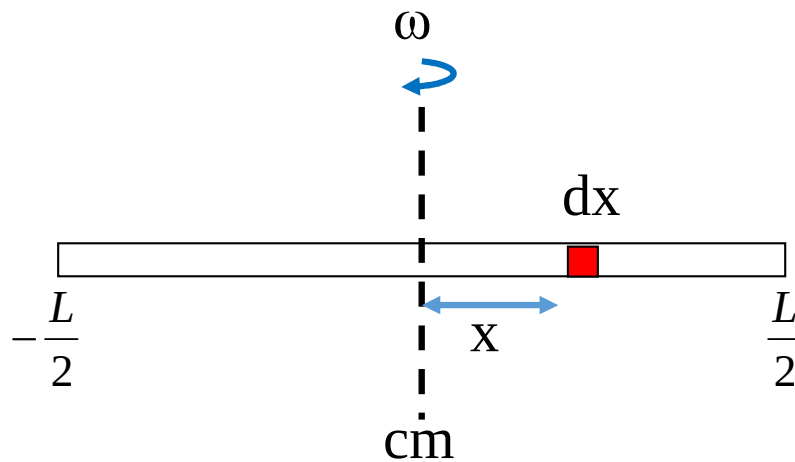


$$I = \sum m_i r_i^2 = m \times 0 + m(L)^2 = mL^2$$

مثال: میله ای به طول L و دارای جرم یکنواخت m داریم. مطلوبست لختی دورانی:

الف) حول محور گذرنده از مرکز جرم

ب) حول محور گذرنده از یکی انتهای آن



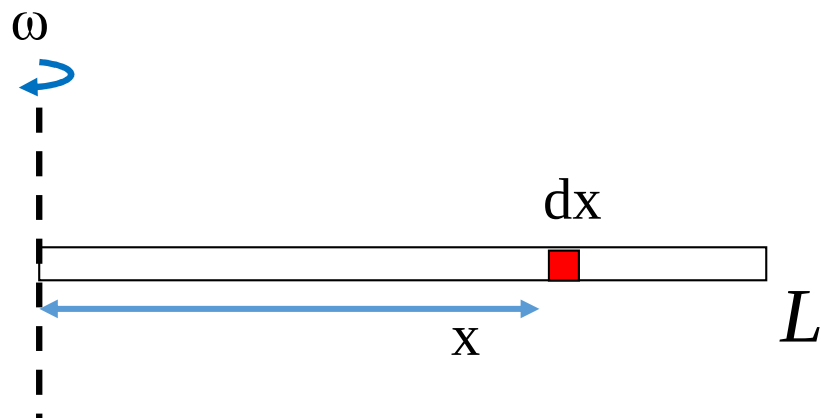
$$dm = \lambda dx$$

$$I = \int_{-\frac{L}{2}}^{+\frac{L}{2}} x^2 dm = \int_{-\frac{L}{2}}^{+\frac{L}{2}} x^2 \lambda dx = \lambda \int_{-\frac{L}{2}}^{+\frac{L}{2}} x^2 dx = \lambda \times \frac{1}{3} x^3 \Big|_{-\frac{L}{2}}^{+\frac{L}{2}} = \frac{\lambda}{3} \left[\left(\frac{L}{2} \right)^3 - \left(-\frac{L}{2} \right)^3 \right] = \frac{1}{12} \lambda L^3$$

$$I = \frac{1}{12} \times \frac{m}{L} \times L^3$$

→

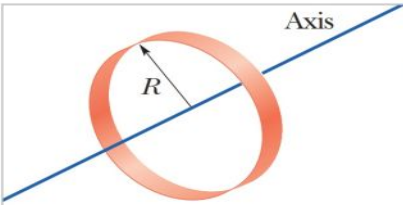
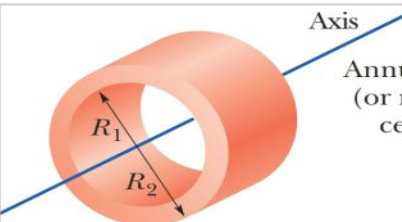
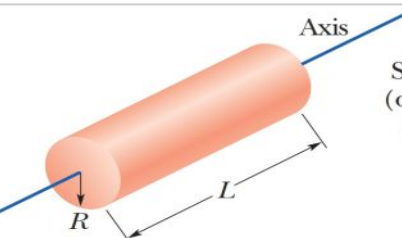
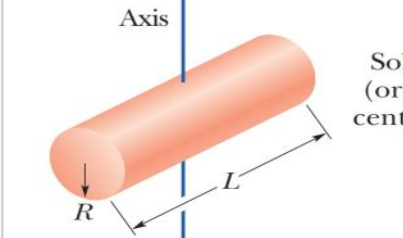
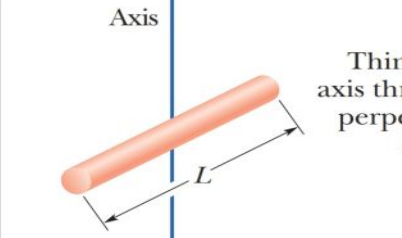
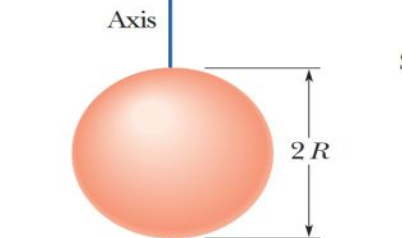
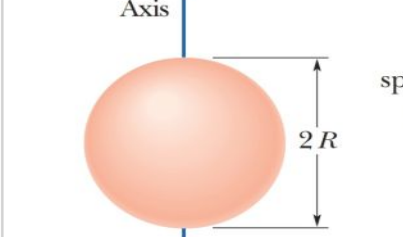
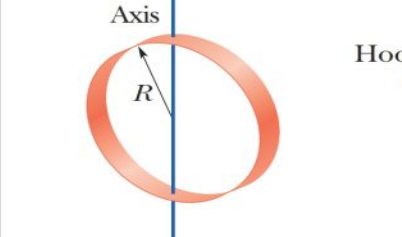
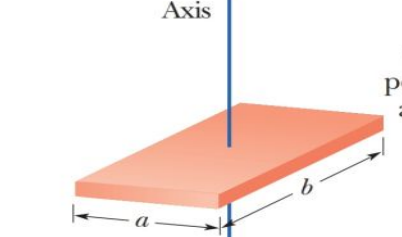
$$I = \frac{1}{12} mL^2$$



$$I = \int_0^L x^2 dm = \int_0^L x^2 \lambda dx = \lambda \int_0^L x^2 dx = \lambda \times \frac{1}{3} x^3 \Big|_0^L = \frac{\lambda}{3} [(L)^3 - 0] = \frac{1}{3} \lambda L^3$$

$$I = \frac{1}{3} \times \frac{m}{L} \times L^3 \quad \rightarrow \quad I = \frac{1}{3} mL^2$$

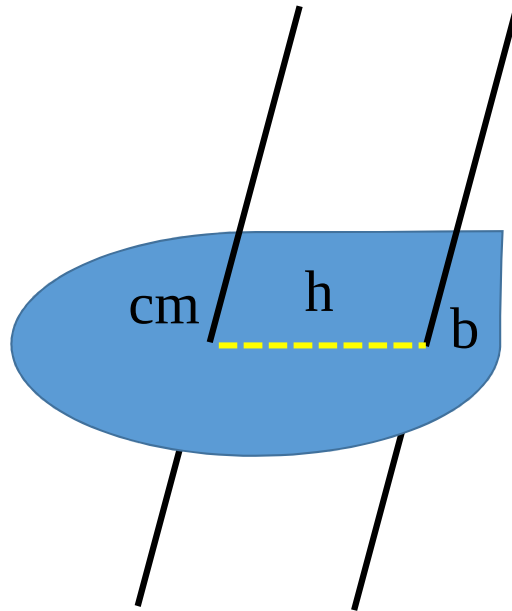
Table 10-2 Some Rotational Inertias

 Hoop about central axis $I = MR^2$ (a)	 Annular cylinder (or ring) about central axis $I = \frac{1}{2}M(R_1^2 + R_2^2)$ (b)	 Solid cylinder (or disk) about central axis $I = \frac{1}{2}MR^2$ (c)
 Solid cylinder (or disk) about central diameter $I = \frac{1}{4}MR^2 + \frac{1}{12}ML^2$ (d)	 Thin rod about axis through center perpendicular to length $I = \frac{1}{12}ML^2$ (e)	 Solid sphere about any diameter $I = \frac{2}{5}MR^2$ (f)
 Thin spherical shell about any diameter $I = \frac{2}{3}MR^2$ (g)	 Hoop about any diameter $I = \frac{1}{2}MR^2$ (h)	 Slab about perpendicular axis through center $I = \frac{1}{12}M(a^2 + b^2)$ (i)

قضیه محورهاى موازى:

اگر لختى دورانى حول محور گذرنده از مرکز جرم مشخص باشد (I_{cm})، آنگاه اگر بخواهيم لختى دورانى را حول محور ديگرى موازى با محور گذرنده از مرکز جرم پيدا کنيم از رابطه زير استفاده مى شود:

$$I_b = I_{cm} + mh^2$$



I_{cm} لختى دورانى حول محور گذرنده از مرکز جرم

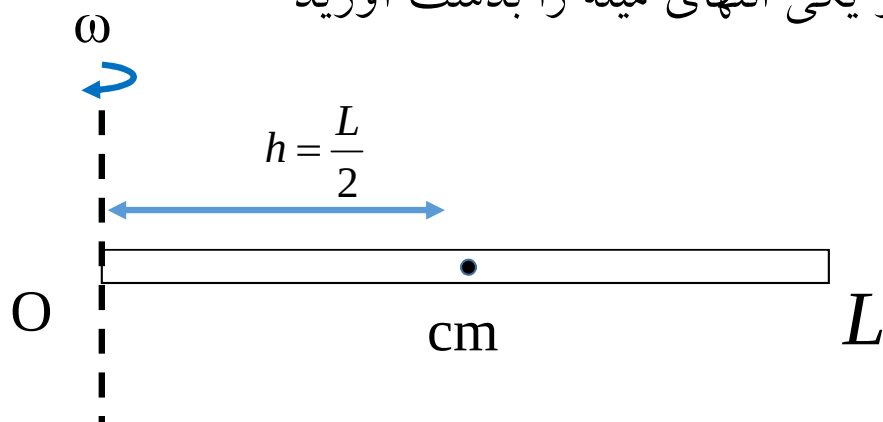
I_b لختى دورانى حول محور گذرنده از نقطه b

m جرم کل جسم

h فاصله بين مرکز جرم تا نقطه b

مثال: برای میله ای به طول L و جرم یکنواخت m لختی دورانی حول محور گذرنده از مرکز جرم به

صورت $\frac{1}{12}mL^2$ است. لختی دورانی حول محور گذرنده از یکی انتهای میله را بدست آورید

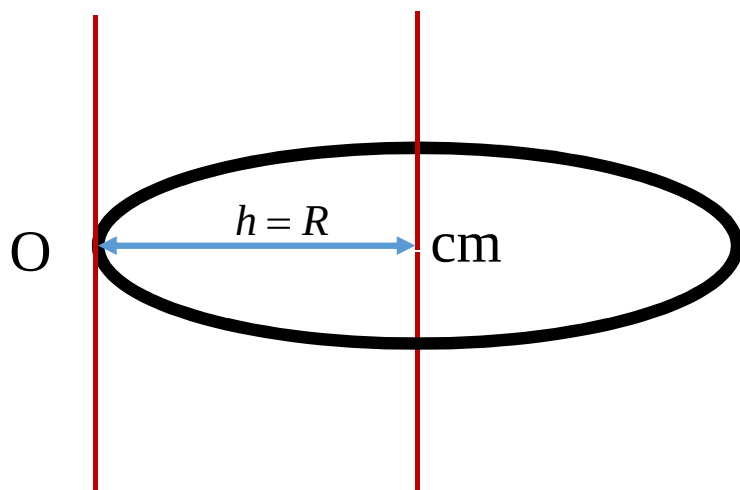


$$I_O = I_{cm} + mh^2$$

$$I_O = \frac{1}{12}mL^2 + m\left(\frac{L}{2}\right)^2$$

$$I_O = \frac{1}{3}mL^2$$

مثال: برای حلقه ای به جرم m و شعاع R لختی دورانی حول محور گذرنده از مرکز جرم و عمود بر سطح حلقه به صورت mR^2 است. لختی دورانی را حول محور گذرنده از روی محیط حلقه و عمود بر سطح حلقه بدست آورید

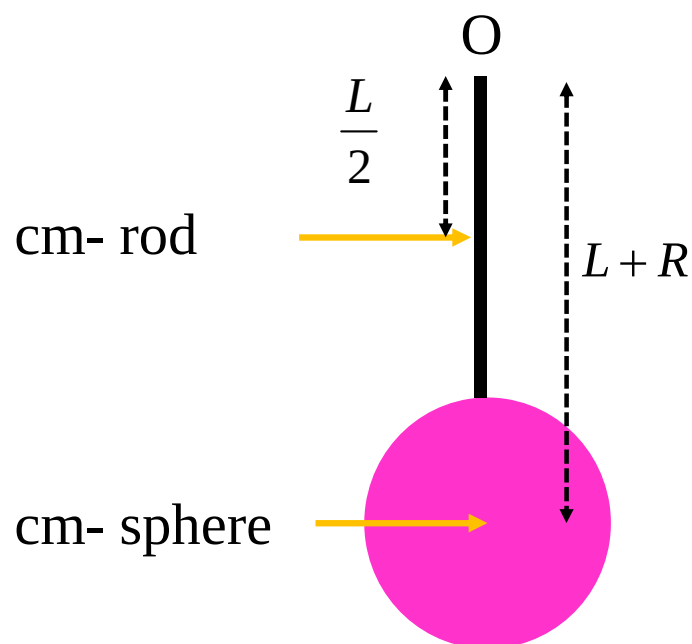


$$I_O = I_{cm} + mh^2$$

$$I_O = mR^2 + mR^2$$

$$I_O = 2mR^2$$

مثال: کره ای توپر به جرم m و شعاع R به میله ای با همان جرم و به طول L متصل شده است بگونه ای که می توانند حول محور گذرنده از انتهای میله دوران نمایند. لختی دورانی را حول این نقطه بدست آورید



$$I_O = I_{\text{sphere}} + I_{\text{rod}}$$

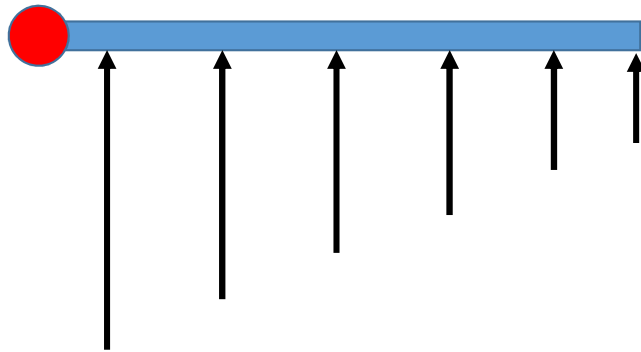
$$I_O = [I_{\text{cm-sphere}} + m(L + R)^2] + [I_{\text{cm-rod}} + m(\frac{L}{2})^2]$$

$$I_O = [\frac{2}{5}mR^2 + m(L + R)^2] + [\frac{1}{12}mL^2 + m(\frac{L}{2})^2]$$

دینامیک دورانی جسم صلب (آشنایی با گشتاور نیرو)

بررسی دوران یک میله حول محور گذرنده از انتهای آن)

محور دوران



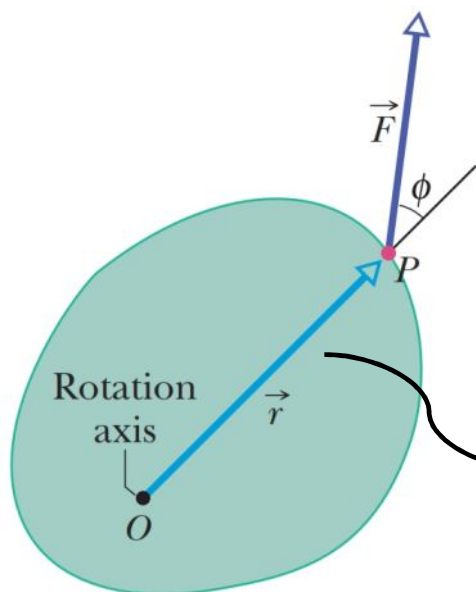
عامل دوران متناسب با نیرو

بدون اعمال نیرو هیچ چرخشی نداریم

عامل دوران متناسب با بازوی گشتاور نیرو



عامل دوران متناسب با سینوس زاویه ای که نیرو با امتداد بازوی گشتاور نیرو می سازد



بازوی گشتاور نیرو

$$\tau = rF \sin \phi \quad \text{عامل دوران}$$

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$$

برداري که محور دوران را به نقطه
اثر نیرو وصل می نماید

نکات:

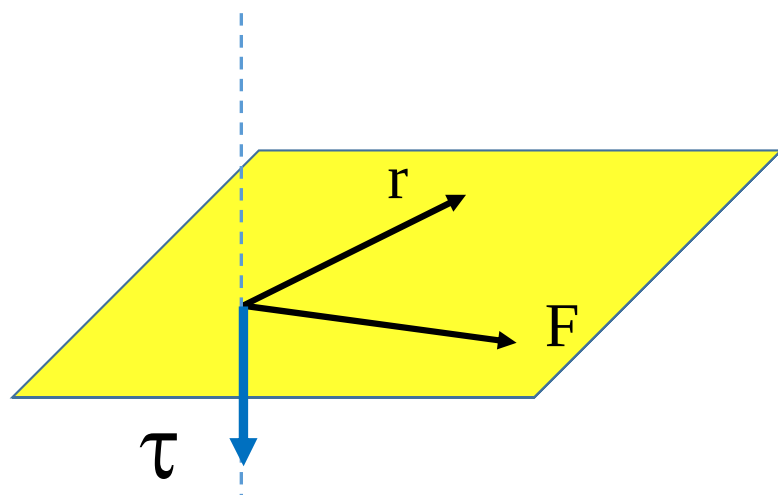
۱- بردار گشتاور نیرو

اندازه:

$$\tau = rF \sin \phi$$

راستا: عمود بر صفحه متشکل از دو بردار r و F

جهت: قاعده دست راست



۲- اگر گشتاور نیروی وارد بر جسم مشخص باشد می توان جهت چرخش جسم را به صورت زیر مشخص نمود:

اگر جهت انگشت شست دست راست در جهت بردار گشتاور باشد جهت بسته شدن جهت چرخش را نشان

می دهد

چرخش پادساعتگرد: $\tau > 0$

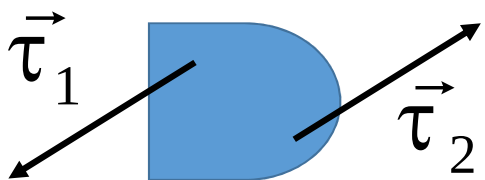
چرخش ساعتگرد: $\tau < 0$

۳- اگر نیروهای مختلفی به جسمی وارد می گردد. گشتاور کل حول یک محور دوران برابر با جمع برداری گشتاور آن نیروها می باشد

$$\sum \vec{\tau} = \vec{\tau}_1 + \vec{\tau}_2 + \dots$$

۴- در حالت تعادل جسم نمی چرخد (شرط تعادل):

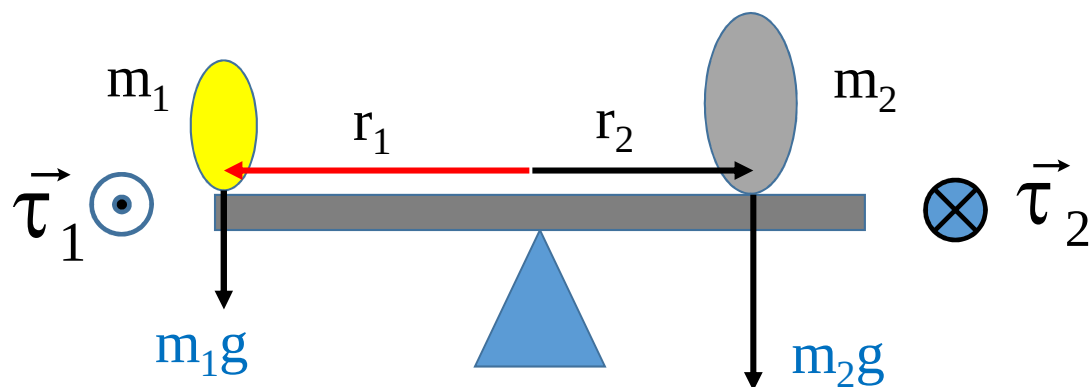
برآیند گشتاور نیروهای وارد بر جسم صفر می باشد



$$\sum \vec{\tau} = \vec{\tau}_2 + \vec{\tau}_1 = 0$$

مثال: الاکلنگ

کودکی به جرم 35 kg در انتهای الاکلنگی با بازوهای 1.5 m نشسته است. کودک دیگری به جرم 45 kg در کجای بازوی مقابل بنشیند تا الاکلنگ در تعادل باشد



در حالت تعادل $\vec{\tau}_1 = \vec{\tau}_2$

$$\tau_1 = \tau_2 \quad \rightarrow \quad r_1 m_1 g = r_2 m_2 g \quad \rightarrow \quad r_2 = \frac{m_2}{m_1} r_1$$

بازنویسی قانون دوم نیوتن برای حرکت دورانی

عامل حرکت خطی

$$\sum F = ma$$

عامل حرکت دورانی

$$\sum \tau = I\alpha$$

اگر برآیند گشتاور نیروهای وارد بر جسمی مخالف صفر باشد آنگاه آن جسم یک حرکت دورانی شتاب دار را انجام خواهد داد

کار و انرژی جنبشی دورانی

کار انجام شده توسط گشتاور نیروهای وارد بر جسم در یک جابه جایی زاویه ای به صورت تغییر انرژی جنبشی ظاهر می شود

در حرکت خطی

$$\Delta K = K_f - K_i = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2 = W$$

قضیه کار - انرژی

$$W = \int_{x_i}^{x_f} F dx$$

کار انجام شده توسط نیروی F

$$P = \frac{dW}{dt} = Fv$$

توان انجام کار نیروی F هنگامی که جسم با سرعت v حرکت می کند

در حرکت دورانی

قضیه کار - انرژی

$$\Delta K = K_f - K_i = \frac{1}{2} I \omega_f^2 - \frac{1}{2} I \omega_i^2 = W$$

کار انجام شده توسط گشتاور τ

$$W = \int_{\theta_i}^{\theta_f} \tau d\theta$$

$$W = \tau \int_{\theta_i}^{\theta_f} d\theta \quad \rightarrow \quad W = \tau(\theta_f - \theta_i)$$

در صورت ثابت بودن گشتاور

$$P = \frac{dW}{dt} = \tau \omega$$

توان انجام کار توسط گشتاور نیروی τ هنگامی که جسم حول محور

دوران با سرعت ω می چرخد

مقایسه پارامترهای حرکت انتقالی محض و دورانی محض

Pure Translation (Fixed Direction)		Pure Rotation (Fixed Axis)	
Position	x	Angular position	θ
Velocity	$v = dx/dt$	Angular velocity	$\omega = d\theta/dt$
Acceleration	$a = dv/dt$	Angular acceleration	$\alpha = d\omega/dt$
Mass	m	Rotational inertia	I
Newton's second law	$F_{\text{net}} = ma$	Newton's second law	$\tau_{\text{net}} = I\alpha$
Work	$W = \int F dx$	Work	$W = \int \tau d\theta$
Kinetic energy	$K = \frac{1}{2}mv^2$	Kinetic energy	$K = \frac{1}{2}I\omega^2$
Power (constant force)	$P = Fv$	Power (constant torque)	$P = \tau\omega$
Work – kinetic energy theorem	$W = \Delta K$	Work – kinetic energy theorem	$W = \Delta K$