

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

الحمد لله
الذي هدانا لهذا
ما كنا لنهتدي لولا أن هدانا الله
١٤٣٠

فصل دهم – بخش سوم

چرخش

بازنویسی قانون دوم نیوتن برای حرکت دورانی

عامل حرکت خطی

$$\sum F = ma$$

عامل حرکت دورانی

$$\sum \tau = I\alpha$$

اگر برآیند گشتاور نیروهای وارد بر جسمی مخالف صفر باشد آنگاه آن جسم یک حرکت دورانی شتاب دار را انجام خواهد داد

کار و انرژی جنبشی دورانی

کار انجام شده توسط گشتاور نیروهای وارد بر جسم در یک جابه جایی زاویه ای به صورت تغییر انرژی جنبشی ظاهر می شود

در حرکت خطی

$$\Delta K = K_f - K_i = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2 = W$$

قضیه کار - انرژی

$$W = \int_{x_i}^{x_f} F dx$$

کار انجام شده توسط نیروی F

$$P = \frac{dW}{dt} = Fv$$

توان انجام کار نیروی F هنگامی که جسم با سرعت v حرکت می کند

در حرکت دورانی

$$\Delta K = K_f - K_i = \frac{1}{2} I \omega_f^2 - \frac{1}{2} I \omega_i^2 = W$$

قضیه کار - انرژی

$$W = \int_{\theta_i}^{\theta_f} \tau d\theta = \tau \int_{\theta_i}^{\theta_f} d\theta$$

کار انجام شده توسط گشتاور τ

$$W = \tau(\theta_f - \theta_i)$$

در صورت ثابت بودن گشتاور

$$P = \frac{dW}{dt} = \tau \omega$$

توان انجام کار توسط گشتاور نیروی τ هنگامی که جسم حول محور

دوران با سرعت ω می چرخد

مقایسه پارامترهای حرکت انتقالی محض و دورانی محض

Pure Translation (Fixed Direction)		Pure Rotation (Fixed Axis)	
Position	x	Angular position	θ
Velocity	$v = dx/dt$	Angular velocity	$\omega = d\theta/dt$
Acceleration	$a = dv/dt$	Angular acceleration	$\alpha = d\omega/dt$
Mass	m	Rotational inertia	I
Newton's second law	$F_{\text{net}} = ma$	Newton's second law	$\tau_{\text{net}} = I\alpha$
Work	$W = \int F dx$	Work	$W = \int \tau d\theta$
Kinetic energy	$K = \frac{1}{2}mv^2$	Kinetic energy	$K = \frac{1}{2}I\omega^2$
Power (constant force)	$P = Fv$	Power (constant torque)	$P = \tau\omega$
Work–kinetic energy theorem	$W = \Delta K$	Work–kinetic energy theorem	$W = \Delta K$

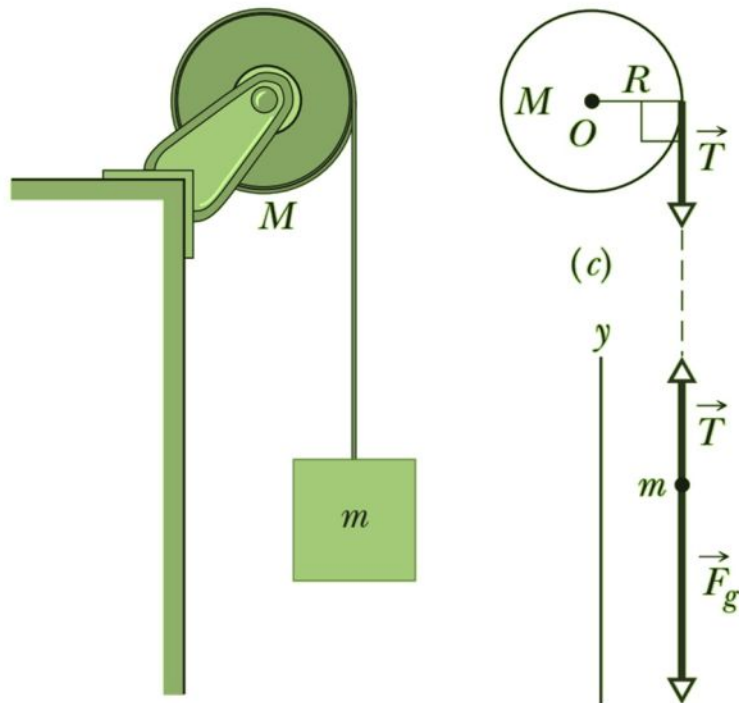
مثال:

قرص یکنواختی به جرم M و شعاع R به پایه ثابتی متصل شده بگونه ای که می تواند حول محور بچرخد. قالبی به جرم m از بند سبکی که به دور طوق قرص پیچیده شده آویزان می باشد. مطلوبست:

الف) شتاب قالب در حال سقوط

ب) کشش بند

ج) شتاب زاویه ای قرص



$$\tau = r F \sin \varphi$$

$$\sum F = ma$$

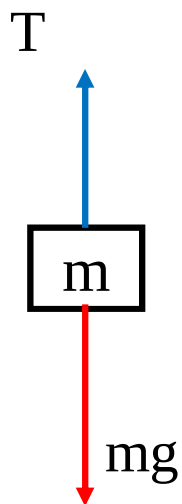
m

حرکت اجسام
حرکت خطی:

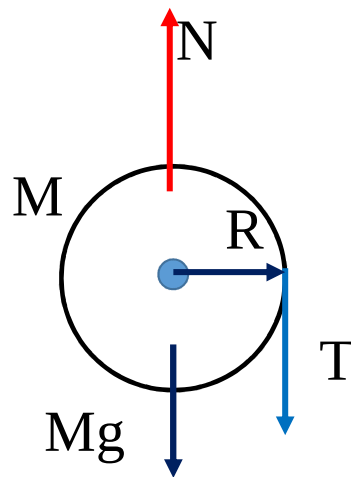
$$\sum \tau = I\alpha$$

M

حرکت دورانی محض:



$$mg - T = ma$$



$$\tau_{mg} = \tau_N = 0$$

$$\tau_T = RT \sin \frac{\pi}{2} = RT$$

$$\sum F = ma \rightarrow mg - T = ma \quad ①$$

$$\sum \tau = I\alpha \rightarrow TR = I\alpha \quad ②$$

نیروی کشش یک گشتاور نیرو به قرص وارد می کند که
سبب دوران آن می گردد

$$a = R\alpha \rightarrow \alpha = \frac{a}{R} \quad ③$$

ارتباط شتاب خطی و زاویه ای:
شتاب خطی جسم m با شتاب خطی محیط قرص برابر
است. همچنین شتاب خطی و شتاب زاویه ای قرص به
صورت $a = R\alpha$ ارتباط دارد

$$I = \frac{1}{2}MR^2 \quad ④$$

$$\textcircled{2} \quad \textcircled{3} \quad TR = I\alpha = I \frac{a}{R} \rightarrow T = I \frac{a}{R^2} \quad \textcircled{5}$$

$$\textcircled{1} \quad \textcircled{5} \quad mg - T = ma \rightarrow mg - I \frac{a}{R^2} = ma \rightarrow mg = a \left(\frac{I}{R^2} + m \right)$$

$$\textcircled{4} \quad \rightarrow a = \frac{mg}{\frac{I}{R^2} + m} = \frac{mg}{\frac{1}{2}MR^2 + m} \rightarrow a = \frac{mg}{\frac{1}{2}M + m} \quad \textcircled{6}$$

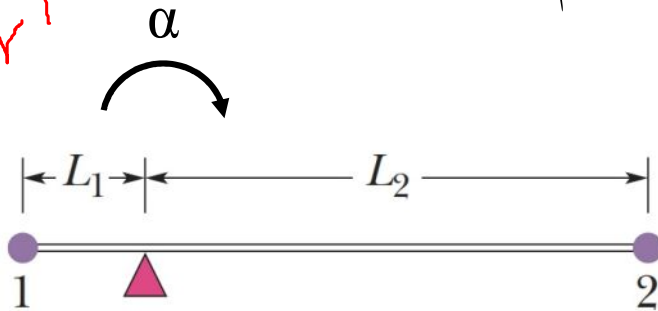
$$\textcircled{5} \quad \textcircled{6} \quad T = I \frac{a}{R^2} = \frac{1}{2}MR^2 \times \frac{mg}{(\frac{1}{2}M + m)R^2} = \frac{\frac{1}{2}Mmg}{(\frac{1}{2}M + m)}$$

مثال:

دو ذره به جرم m به انتهای میله ای بدون جرم و طول $L_1 + L_2$ متصل شده اند. درحالیکه میله به صورت

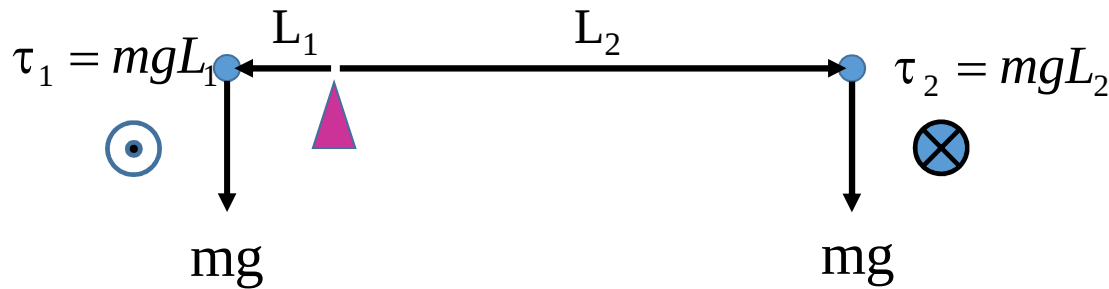
افقی قرار دارد مجموعه را رها می کنیم. شتاب خطی دو جسم را بدست آوردید

$$I = \sum m r^2$$



$$\tau_2 - \tau_1 = mg(L_2 - L_1) = I\alpha$$

$$\alpha = \frac{mg(L_2 - L_1)}{I}$$



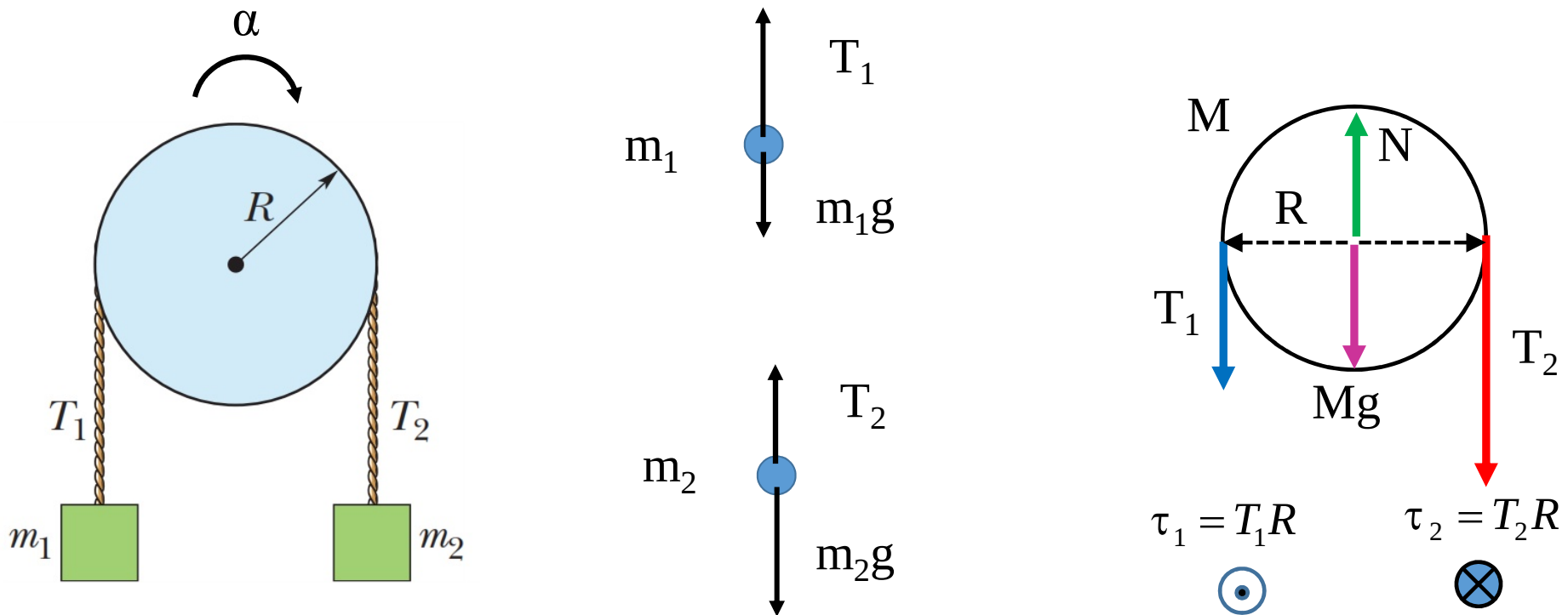
$$I = mL_1^2 + mL_2^2 = m(L_1^2 + L_2^2)$$

$$a_1 = L_1\alpha$$

$$a_2 = L_2\alpha$$

مثال:

در ماشین آتوود دو جرم m_1 و m_2 توسط ریسمان گذرنده از روی یک قرقره (قرص) به جرم M و شعاع R به هم متصل شده اند. شتاب خطی جرم ها و شتاب زاویه ای قرقره را بدست آورید ($m_1 < m_2$)



حرکت اجسام

$$m_1 : T_1 - m_1 g = m_1 a \quad \textcircled{1}$$

m_1, m_2

حرکت خطی:

$$m_2 : m_2 g - T_2 = m_2 a \quad \textcircled{2}$$

M حرکت دورانی محض:

$$M : \begin{cases} \tau_{Mg} = \tau_N = 0 \\ \tau_{T_1} = RT_1 \\ \tau_{T_2} = RT_2 \end{cases} \quad a = R\alpha \rightarrow \alpha = \frac{a}{R} \quad \textcircled{4}$$

$$\sum \tau = R(T_2 - T_1) = I\alpha = \frac{1}{2}MR^2\alpha \quad \textcircled{3}$$

$$\textcircled{1} \quad \textcircled{2} \quad -(T_2 - T_1) + (m_2 - m_1)g = (m_1 + m_2)a \quad \textcircled{5}$$

$$\textcircled{3} \quad R(T_2 - T_1) = \frac{1}{2}MR^2\alpha \quad \rightarrow \quad T_2 - T_1 = \frac{1}{2}MR\alpha \quad \textcircled{6}$$

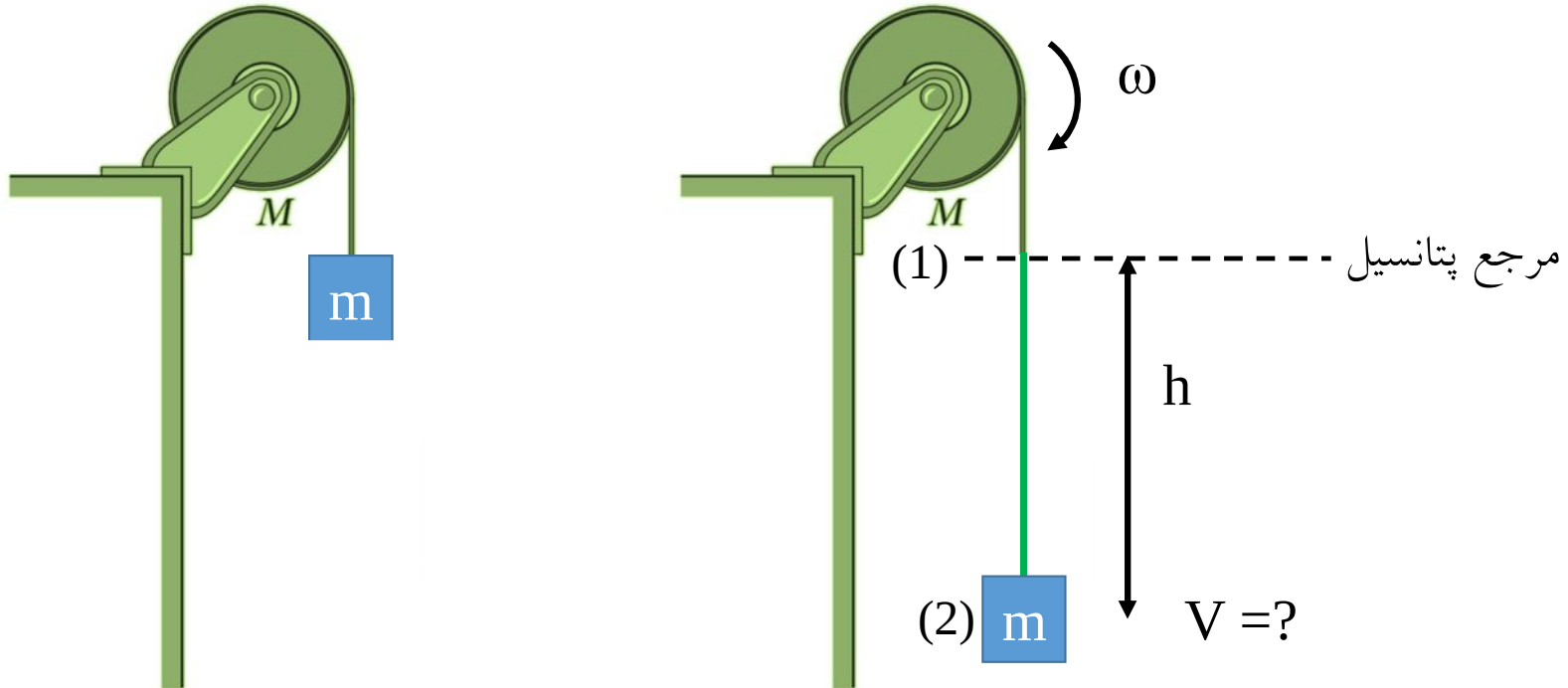
$$\textcircled{4} \quad \textcircled{6} \quad T_2 - T_1 = \frac{1}{2}Ma \quad \textcircled{7}$$

$$\textcircled{5} \quad \textcircled{7} \quad -\frac{1}{2}Ma + (m_2 - m_1)g = (m_1 + m_2)a \quad \rightarrow$$

$$a = \frac{(m_2 - m_1)g}{m_1 + m_2 + \frac{1}{2}M}$$

مثال:

قرص یکنواختی به جرم M و شعاع R به پایه ثابتی متصل شده بگونه ای که می تواند حول محور بچرخد. قالبی به جرم m از بند سبکی که به دور طوق قرص پیچیده شده آویزان می باشد. اگر جرم m از حالت سکون رها شود و به اندازه h پایین بیاید، سرعت جرم m و سرعت دورانی قرقره را بدست آورید



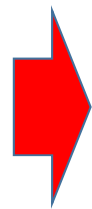
$$E_1 = 0$$

$$E_2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 + (-mgh)$$

$$E_1 = E_2 \quad \rightarrow \quad \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 = mgh$$

$$v = R\omega \quad \rightarrow \quad \omega = \frac{v}{R}$$

$$I = \frac{1}{2}MR^2$$

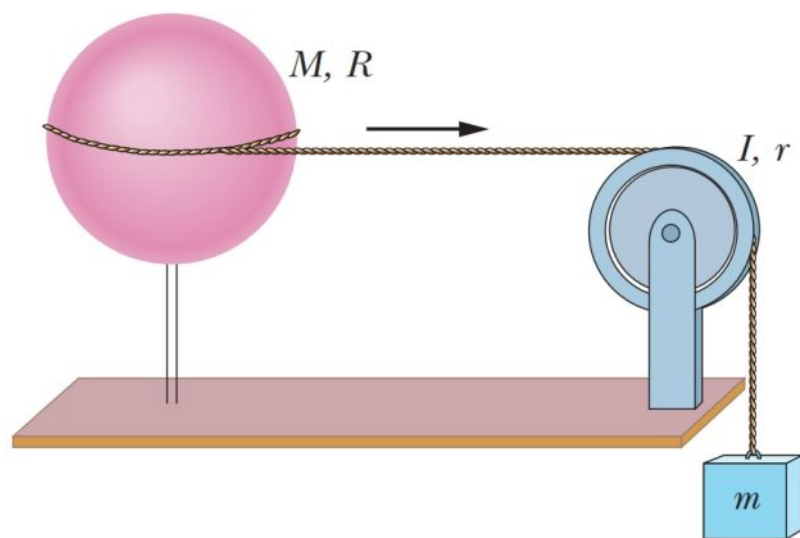


$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}MR^2\right)\left(\frac{v}{R}\right)^2 = mgh \quad \rightarrow$$

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{4}Mv^2 = mgh \quad \rightarrow \quad v^2 = \frac{4mgh}{2m + M}$$

مثال:

پوسته کروی M و قطعه m توسط یک ریسمان که از روی یک قرقره بدون اصطکاک با لختی دورانی I و شعاع r می گذرد به همدیگر متصل شده اند. ریسمان حول محیط پوسته کروی پیچیده شده است به گونه ای که با باز شدن ریسمان از دور کره، کره حول محور بدون اصطکاک گذرنده از مرکز آن می چرخد. اگر جرم m از حالت سکون رها شود و به اندازه h پایین بیاید، سرعت آن را بدست آورید



حرکت اجسام

حرکت خطی: قطعه آویزان

حرکت دورانی محض: پوسته کروی - قرقره

اگر مرجع پتانسیل برای جرم m در حالت سکون آن باشد و از آنجا که با ساکن بودن قطعه m ، پوسته کروی و قرقره هم ساکنند پس در لحظه اولیه انرژی مکانیکی صفر است.

زمانی که جرم m به اندازه h زیر مرجع انرژی پتانسیل می آید؛ سرعت آن به v رسیده و پوسته کروی و قرقره نیز به ترتیب سرعت های زاویه ای ω_1 و ω_2 می رسند.

به همان میزانی که جرم m پایین می آید محیط قرقره و محیط کره می چرخند. پس حرکت خطی m و محیط قرقره و کره یکسان است (با سرعت یکسان v)

$$v = R\omega_1 = r\omega_2$$

$$E_1 = E_2 \quad \rightarrow \quad K_1 + U_1 = K_2 + U_2$$

$$\rightarrow 0 + 0 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I_1\omega_1^2 + \frac{1}{2}I_2\omega_2^2 - mgh$$

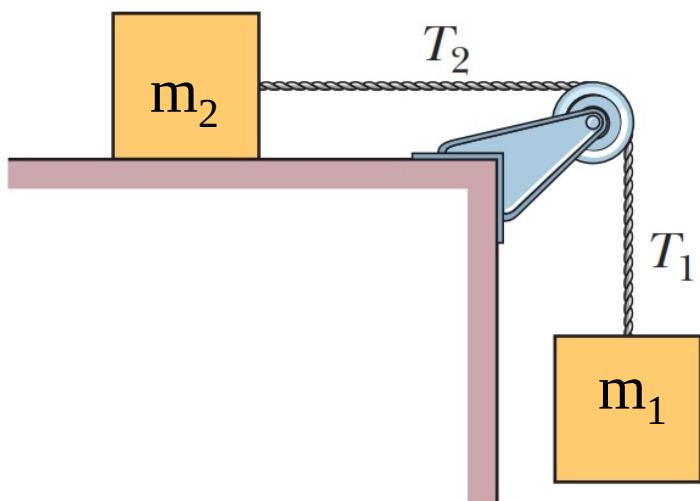
$$\rightarrow \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I_1\omega_1^2 + \frac{1}{2}I_2\omega_2^2 = mgh$$

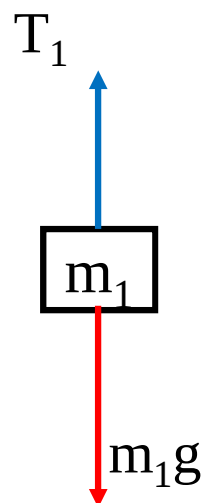
$$\rightarrow \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I_1\left(\frac{v}{R}\right)^2 + \frac{1}{2}I_2\left(\frac{v}{r}\right)^2 = mgh$$

$$\rightarrow v = \sqrt{\frac{2mgh}{m + \frac{I_1}{R^2} + \frac{I_2}{r^2}}}$$

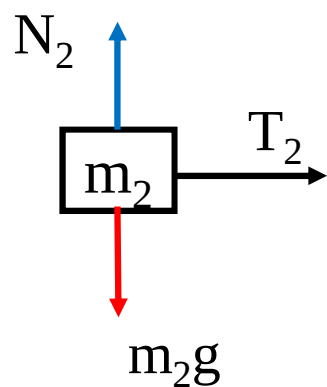
مثال:

جسمی به جرم m_2 روی سطح افقی بدون اصطکاکی قرار دارد. ریسمانی به این جسم متصل شده است و با گذشتن از روی قرقره بدون اصطکاکی با لختی دورانی I و شعاع r به جرم آویزان m_1 متصل شده است. اگر این مجموعه رها شود شتاب حرکتی آنها را بدست آورید. با حرکت جرم m_1 از حالت سکون و پایین آمدن به اندازه h ، سرعت جرمها و سرعت دورانی قرقره را بدست آورید



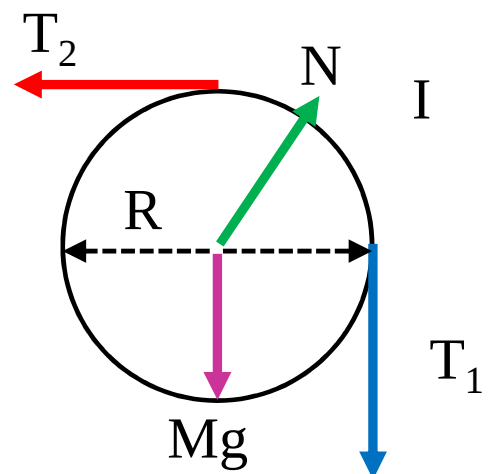


$$m_1 g - T_1 = m_1 a \quad (1)$$



$$T_2 = m_2 a \quad (2)$$

$$\tau_2 = T_2 R$$

$$\tau_1 = T_1 R$$



$$\sum \tau = T_1 R - T_2 R = R(T_1 - T_2) = I \alpha \quad (3)$$

$$a = R \alpha \quad (4)$$

$$\textcircled{3} \quad \textcircled{4} \quad R(T_1 - T_2) = I\alpha \quad \rightarrow \quad T_1 - T_2 = \frac{I}{R}\alpha \quad \textcircled{5}$$

$$\textcircled{4} \quad \textcircled{5} \quad T_1 - T_2 = \frac{I}{R^2}a \quad \textcircled{6}$$

$$\textcircled{1} \quad \textcircled{2} \quad -(T_1 - T_2) + m_1g = (m_1 + m_2)a \quad \textcircled{7}$$

$$\textcircled{6} \quad \textcircled{7} \quad -\frac{I}{R^2}a + m_1g = (m_1 + m_2)a \quad \rightarrow$$

$$a = \frac{m_1g}{m_1 + m_2 + \frac{I}{R^2}}$$

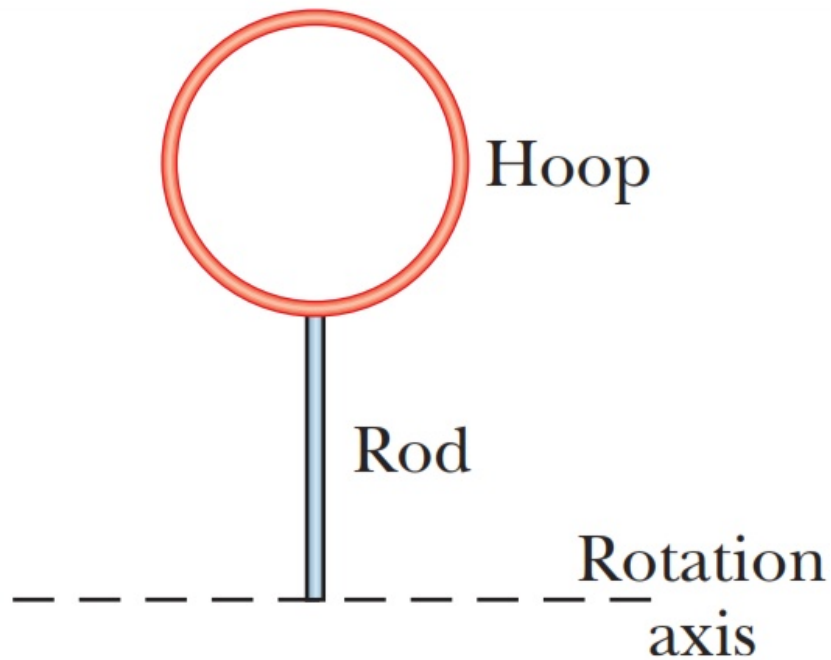
$$v^2 - v_0^2 = 2ah \quad \rightarrow \quad v^2 - 0 = 2 \frac{m_1 g}{m_1 + m_2 + \frac{I}{R^2}} h$$

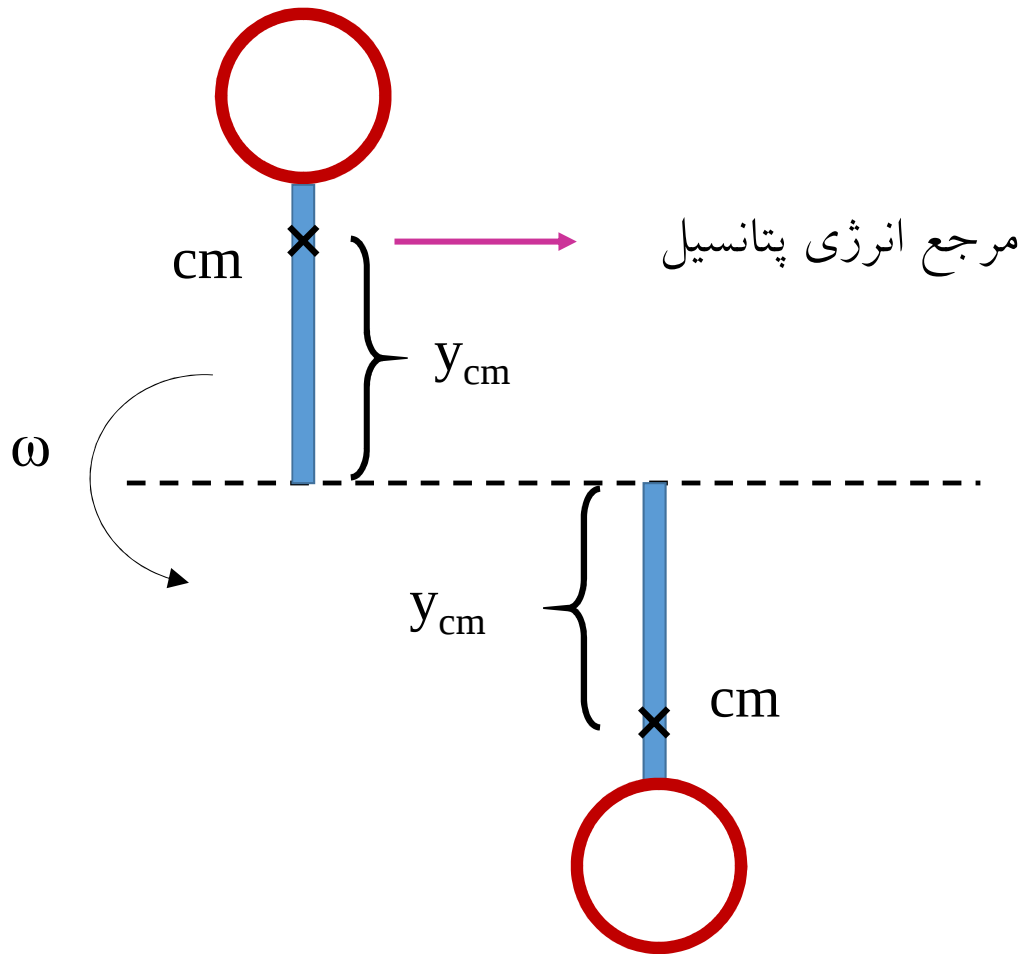
$$\rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{2m_1 gh}{m_1 + m_2 + \frac{I}{R^2}}}$$

$$\omega = \frac{v}{R} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{2m_1 gh}{m_1 + m_2 + \frac{I}{R^2}}}$$

مثال:

مجموعه پایین، شامل حلقه به جرم m و شعاع R به میله ای به جرم m و طول L از حالت عمودی بالای محور دوران از حالت سکون رها می شود. وقتی آنها از حالت عمودی زیر خط دوران می گذرد سرعت زاویه ای را حساب کنید



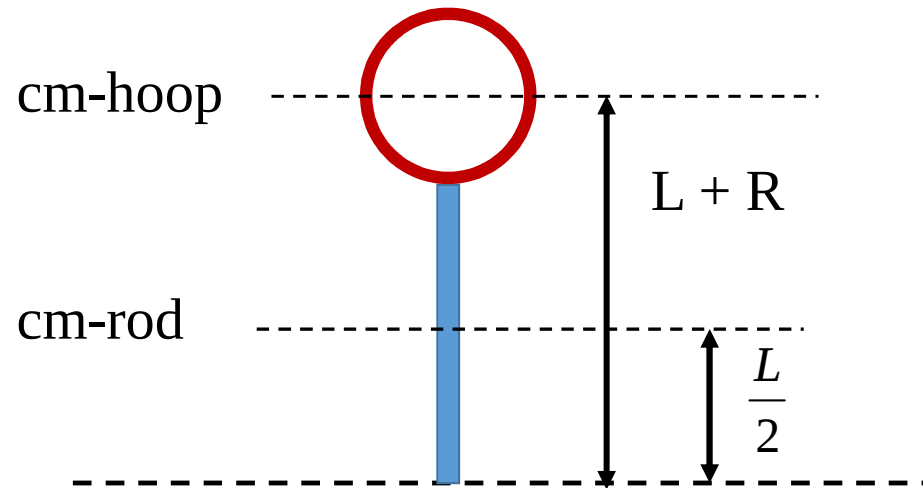


$$\Delta U = -(m + m)g \times 2y_{cm}$$

$$\Delta K = \frac{1}{2} I_{rod} \omega^2 + \frac{1}{2} I_{hoop} \omega^2$$

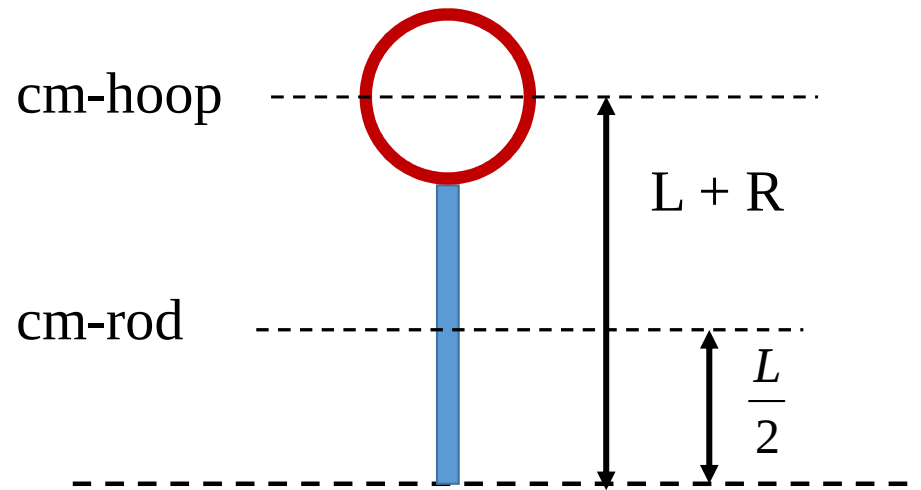
$$\Delta K = \frac{1}{2} (I_{rod} + I_{hoop}) \omega^2$$

محاسبه مرکز جرم



$$y_{cm} = \frac{m(L + R) + m\frac{L}{2}}{2m} = \frac{3}{4}L + \frac{1}{2}R$$

محاسبه لختی دورانی میله و حلقه حول محور دوران



$$I_{rod} = I_{cm-rod} + m\left(\frac{L}{2}\right)^2$$

$$I_{hoop} = I_{cm-hoop} + m(L + R)^2$$

نوشتن قانون پایستگی انرژی مکانیکی

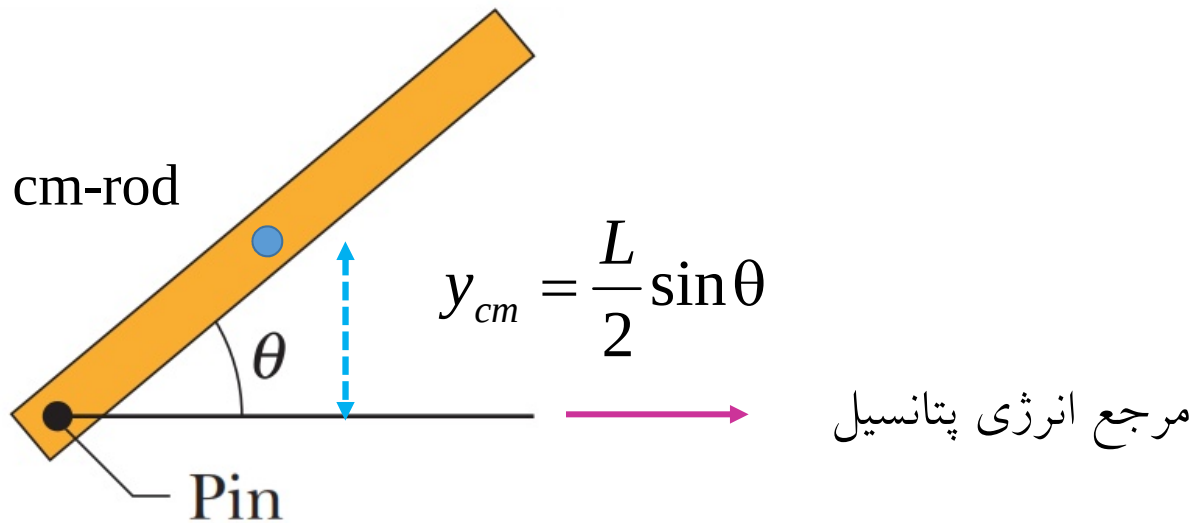
$$E_1 = E_2$$

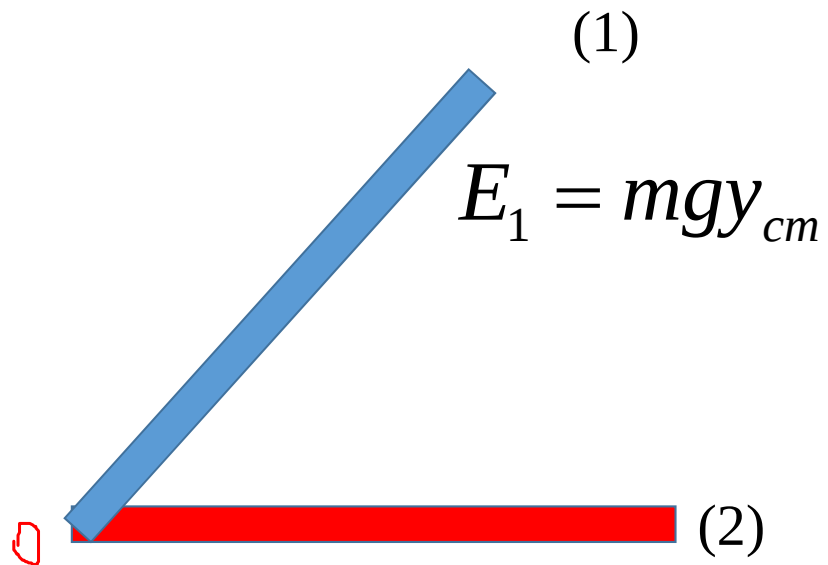
$$0 + 0 = \frac{1}{2}(I_{rod} + I_{hoop})\omega^2 - (m + m)g \times 2y_{cm}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{4(m + m)gy_{cm}}{I_{rod} + I_{hoop}}} = \omega = \sqrt{\frac{4(m + m)g \times (\frac{3}{4}L + \frac{1}{2}R)}{I_{rod} + I_{hoop}}}$$

مثال:

میله ای به جرم m و طول L از زاویه θ و از حالت اولیه سکون رها می شود. سرعت زاویه ای چرخش میله وقتی از حالت افقی می گذرد را حساب کنید





$$E_2 = \frac{1}{2} I \omega^2$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} mL^2 \omega^2$$

$$E_1 = E_2$$

$$mgy_{cm} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} mL^2 \omega^2$$



$$mg \frac{L}{2} \sin \theta = \frac{1}{6} mL^2 \omega^2$$

$$\omega = \sqrt{\frac{3g \sin \theta}{L}}$$