بسم الله الرحمن الرحيم

۳.۱ شیب

مشتق جهتی عبارت است ازآهنگ تغییر تابع در یك جهت مشخص

$$d\varphi/ds$$

dx، dy، و dz مؤلفه‌های ds

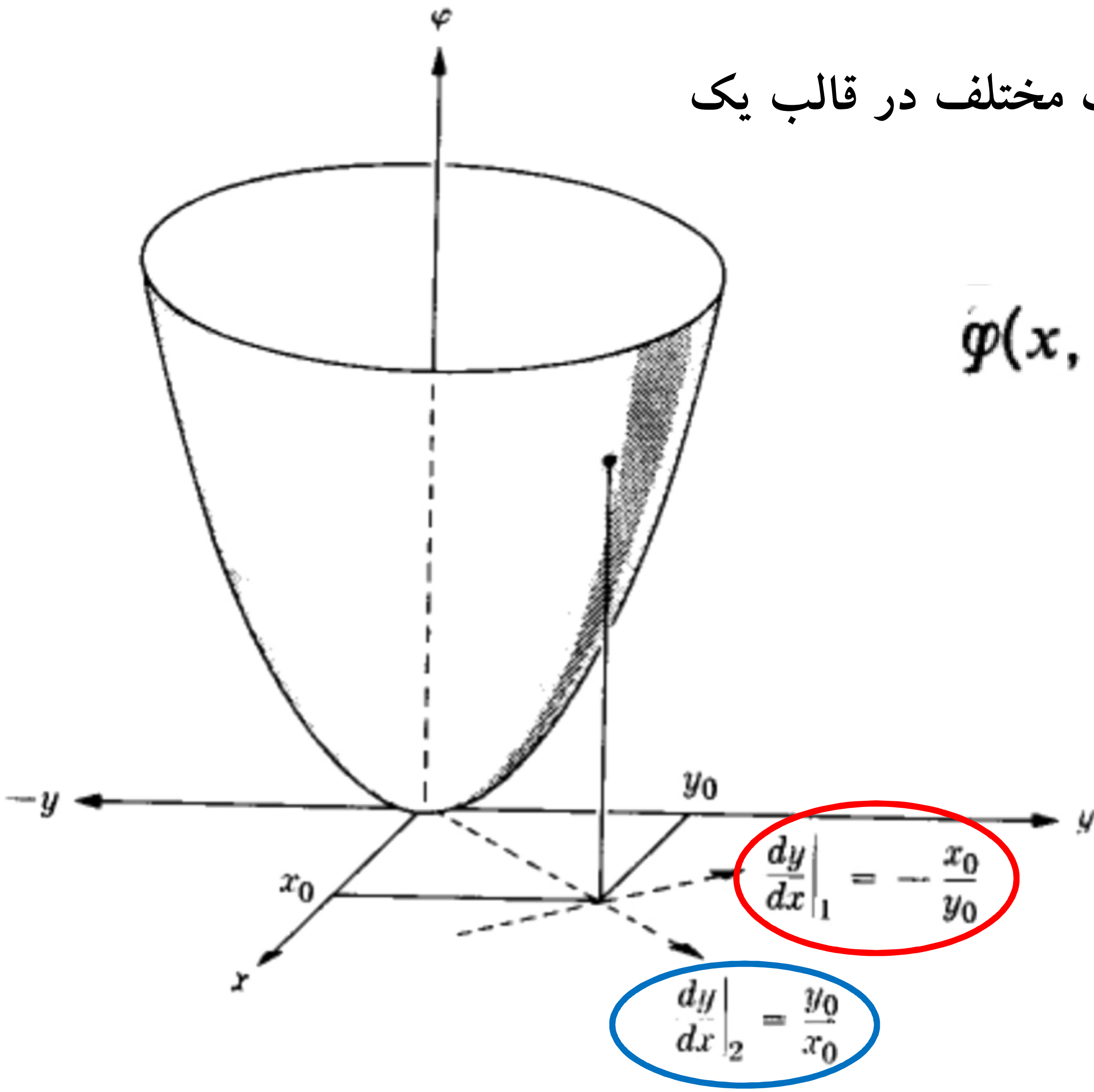
$$\frac{d\varphi}{ds}=\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\varphi(x+\Delta x,\ y+\Delta y,\ z+\Delta z)-\varphi(x,\ y,\ z)}{\Delta s}$$

$$=\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{dx}{ds}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{dy}{ds}+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{dz}{ds}$$

بررسی تفاوت شیب یک منحنی در جهات مختلف در قالب یک مثال

$$\varphi(x, y) = x^۲ + y^۲$$

$$ds = \sqrt{(dx)^۲ + (dy)^۲}$$



جهت متناظر با $dy/dx = -x_0/y_0$

$$\left.\frac{d\varphi}{ds}\right|_{x_0, y_0} = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{dy}{ds} = \left[2x_0 - 2y_0\frac{x_0}{y_0}\right]\frac{dx}{ds} = 0$$

جهت متناظر با $dy/dx = y_0/x_0$

$$\left.\frac{d\varphi}{ds}\right|_{x_0, y_0} = \left(2x_0 + 2\frac{y_0^2}{x_0}\right)\sqrt{\frac{x_0^2}{x_0^2 + y_0^2}} = 2\sqrt{x_0^2 + y_0^2}$$

شیب در جهات مختلف متفاوت است

شیب بیشینه

محاسبه شیب نسبت به خط با شیب α و سپس مشتق گیری نسبت به α

$$\left.\frac{d\varphi}{ds}\right|_{x_0, y_0} = (2x_0 + 2\alpha y_0)(1+\alpha^2)^{-1/2}$$

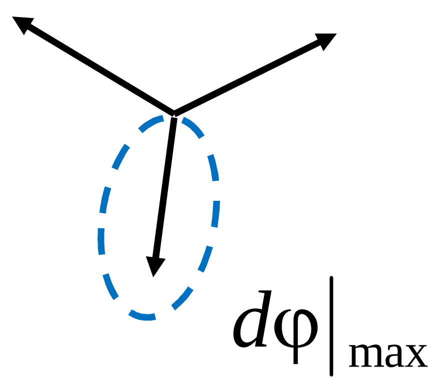
از این عبارت نسبت به α مشتق بگیریم ونتیجه را مساوی صفر قرار دهیم

$$\alpha = y_0/x_0$$

یعنی جهتی که آهنگ تغییرات تابع $\varphi = x^2 + y^2$ بیشینه می‌شود جهت شعاعی است

شیب تابع نرده‌ای φ برداری است که بزرگی آن برابر بیشینهٔ مشتق جهتی درنقطهٔ موردنظر و جهت آن جهت بیشینهٔ مشتق جهتی درآن نقطه است.

$$d\vec{r} \quad \rightarrow \quad d\varphi$$



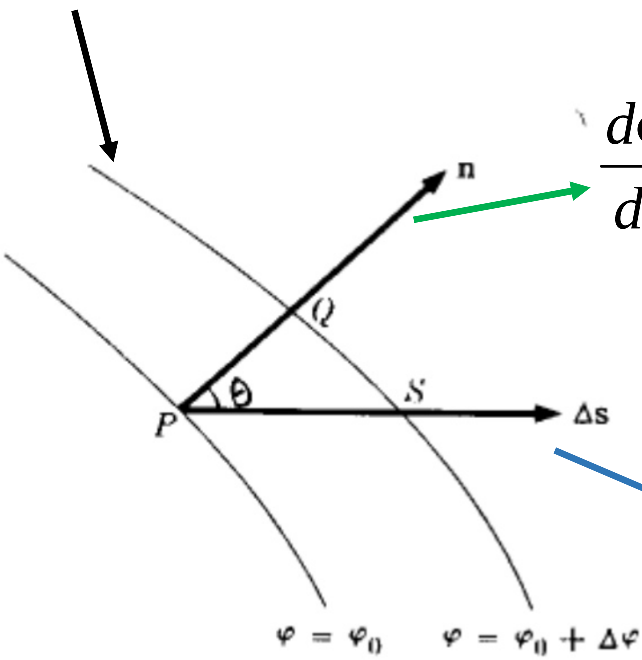
جهت شیب در هرنقطه عموداست برسطح تراز φ درآن نقطه

$$\frac{d\varphi}{ds} = |\mathrm{grad}\,\varphi| \cos\theta$$

$$\left.\frac{d\varphi}{ds}\right|_{\max}$$

θ زاویهٔ میان جهت $d\mathbf{s}$ و جهت شیب

سطح تراز یا هم پتانسیل



$$\left.\frac{d\varphi}{ds}\right|_{\max} = \vec{\nabla}\varphi$$

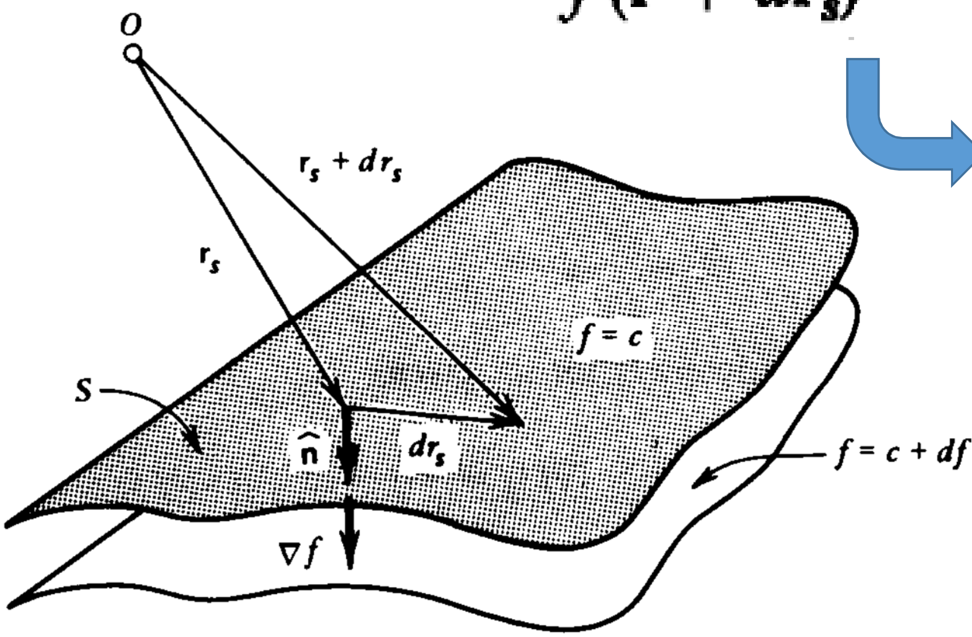
$$\frac{d\varphi}{ds} = \mathrm{grad}\,\varphi \cdot \frac{d\mathbf{s}}{ds}$$

$$\boxed{d\varphi = \vec{\nabla}\varphi . d\vec{s}}$$

مفهومی از گرادیان تابع

در جابه جای dr_s در صفحه بالایی

$$f(\mathbf{r} + d\mathbf{r}_s) = f(\mathbf{r}) = c, \text{ so that } df = 0$$



$$df = (\nabla f) \cdot d\mathbf{r}_s = 0,$$

(∇f) is perpendicular to $d\mathbf{r}_s$.

∇f is *perpendicular* to the surface.

بیشینه مقدار $d\varphi$ در حالی رخ می دهد که جابه جایی در جهت گرادیان باشد

$$\vec{\nabla}\varphi \perp d\vec{r}_s$$

یا به عبارتی گرادیان تابع بر صفحه هم پتانسیل عمود است.

اگر بردار یکه عمود بر سطح $\varphi = \text{constant}$ برابر با n باشد

$$d\varphi = \vec{\nabla}\varphi . \hat{n} dr = \left|\vec{\nabla}\varphi\right| dr$$

$$\vec{\nabla}\varphi = \frac{d\varphi}{dr}\hat{n}$$

در مختصات دکارتی

$$\operatorname{grad}\varphi = \mathbf{i}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial\varphi}{\partial z}$$

در مختصات استوانه ای

$$\nabla f = \hat{\boldsymbol{\rho}}\frac{\partial f}{\partial\rho} + \hat{\boldsymbol{\phi}}\frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial\phi} + \hat{\mathbf{z}}\frac{\partial f}{\partial z}$$

در مختصات کروی

$$\nabla f = \hat{\mathbf{r}}\frac{\partial f}{\partial r} + \hat{\boldsymbol{\theta}}\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial\theta} + \hat{\boldsymbol{\phi}}\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial\phi}$$

مثال: تابعی f به صورت زیر است. شیب بیشینه این تابع و جهت آن را بدست آورید.

$$f = x^2 + y^2 + z^2 \equiv r^2$$

EXAMPLE 2–16 The electrostatic field intensity **E** is derivable as the negative gradient of a scalar electric potential V; that is, $\mathbf{E} = -\nabla V$. Determine **E** at the point (1, 1, 0) if

a) $V = V_0 e^{-x} \sin \dfrac{\pi y}{4}$,

b) $V = E_0 R \cos \theta$.

in Cartesian coordinates

a) $$\mathbf{E} = -\left[\mathbf{a}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{a}_y \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{a}_z \frac{\partial}{\partial z}\right] E_0 e^{-x} \sin \frac{\pi y}{4}$$

$$= \left(\mathbf{a}_x \sin \frac{\pi y}{4} - \mathbf{a}_y \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi y}{4}\right) E_0 e^{-x}.$$

Thus, $$\mathbf{E}(1, 1, 0) = \left(\mathbf{a}_x - \mathbf{a}_y \frac{\pi}{4}\right) \frac{E_0}{\sqrt{2}} = \mathbf{a}_E E,$$

where

$$E = E_0 \sqrt{\frac{1}{2}\left(1 + \frac{\pi^2}{16}\right)},$$

$$\mathbf{a}_E = \frac{1}{\sqrt{1 + (\pi^2/16)}} \left(\mathbf{a}_x - \mathbf{a}_y \frac{\pi}{4}\right).$$

in spherical coordinates

b) $$\mathbf{E} = -\left[\mathbf{a}_R \frac{\partial}{\partial R} + \mathbf{a}_\theta \frac{\partial}{R\partial\theta} + \mathbf{a}_\phi \frac{\partial}{R \sin\theta\, \partial\phi}\right] E_0 R \cos\theta$$
$$= -(\mathbf{a}_R \cos\theta - \mathbf{a}_\theta \sin\theta) E_0.$$

In view of Eq. (2–77), the result above converts very simply to $\mathbf{E} = -\mathbf{a}_z E_0$ in Cartesian coordinates. This is not surprising, since a careful examination of the given V reveals that $E_0 R \cos\theta$ is, in fact, equal to $E_0 z$. In Cartesian coordinates,

$$\mathbf{E} = -\nabla V = -\mathbf{a}_z \frac{\partial}{\partial z}(E_0 z) = -\mathbf{a}_z E_0.$$

■

۴.۱ انتگرال گیری برداری

انتگرالهای خطی، سطحی، وحجمی

انتگرالده می‌تواند بردار یا یك کمیت نرده‌ای باشد

۱- انتگرال خطی بردار

$$\int_{a\,C}^{b} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l}$$

۲- انتگرال خطی کمیت نرداه ای

۳- انتگرال سطحی بردار

$$\int_{S} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, da$$

٤- انتگرال سطحی کمیت نرداه ای

٥- انتگرال حجمی بردار

$$\int_{V} \mathbf{F}\, dv$$

٦- انتگرال حجمی کمیت نرده ای

$$\int_{V} \varphi\, dv$$

انتگرال خطی بردار

$$\int_{a\,C}^{b} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l}$$

نکات:

C منحنی است که انتگرال روی آن محاسبه می شود

a و b نقاط ابتدایی روی مسیر انتگرال گیری است

dl بردار جابه جایی در امتداد منحنی

نتیجه انتگرال گیری اسکالر است

اگر C یک مسیر بسته باشد

$$\oint_{C} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l}$$

مثالهایی از این نوع انتگرال

۱- کار نیروی F

$$W = \int_{a}^{b} \vec{F} . d\vec{r}$$

۲- قانون آمپر

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 i_{\text{enc}} \quad \text{(Ampere's law)}$$

۳- محاسبه پتانسیل الکتریکی

$$V = -\int_{i}^{f} \vec{E} \cdot d\vec{s},$$

$$\oint \vec{F} . d\vec{l} = 0$$

مفهوم این چیه؟

انتگرال سطحی بردار

$$\int_{s} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, da$$

نکات:

S سطحی است که انتگرال روی آن محاسبه می شود

da المان سطح

n بردار یکه در امتداد عمود بر سطح

برای سطوح بسته n به سمت خارج از سطح خواهد بود

نتیجه انتگرال گیری اسکالر است

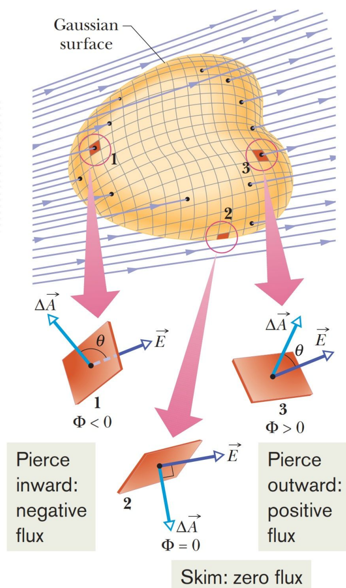
اگر S یک سطح بسته باشد

$$\oint_{s} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, da$$

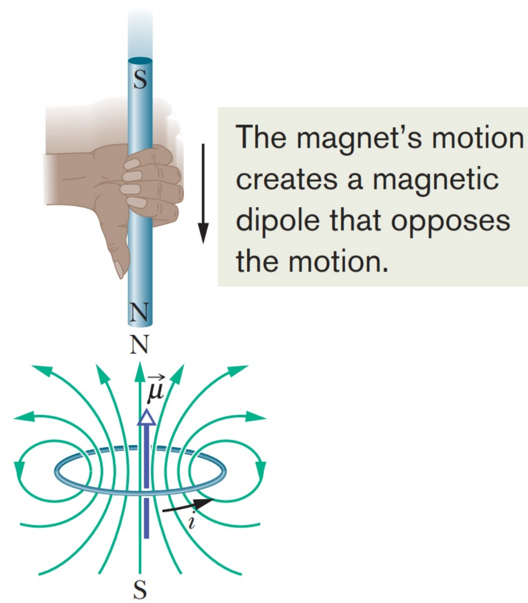
مثالهایی از این نوع انتگرال

محاسبه شار الکتریکی یا مغناطیسی

$$\Phi = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} \quad \text{(net flux)}$$



$$\Phi_B = \int \vec{B} \cdot d\vec{A}$$



انتگرال حجمی بردار

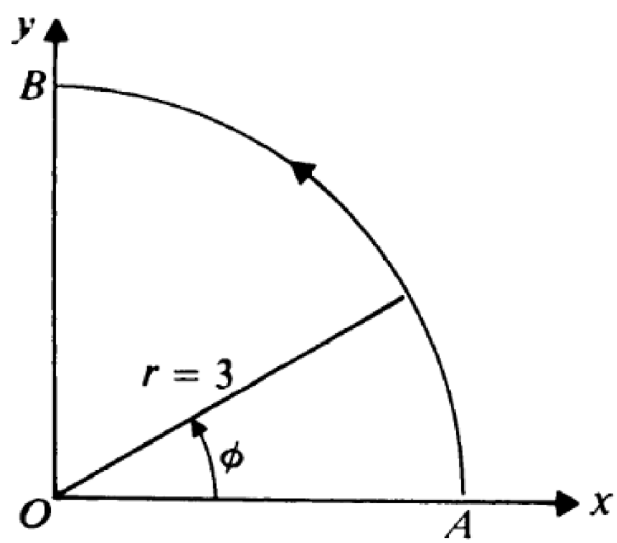
انتگرال حجمی کمیت نرده ای

$$J = \int_V \varphi \, dv, \qquad \mathbf{K} = \int_V \mathbf{F} \, dv$$

EXAMPLE 2–14 Given $\mathbf{F} = \mathbf{a}_x xy - \mathbf{a}_y 2x$, evaluate the scalar line integral

$$\int_A^B \mathbf{F} \cdot d\boldsymbol{\ell}$$

along the quarter-circle shown in Fig. 2–21.



a) *In Cartesian coordinates.* From the given **F** and the expression for $d\boldsymbol{\ell}$ in Eq. (2–44) we have

$$\mathbf{F} \cdot d\boldsymbol{\ell} = xy\,dx - 2x\,dy.$$

The equation of the quarter-circle is $x^2 + y^2 = 9$ $(0 \leq x, y \leq 3)$. Therefore,

$$\begin{aligned}
\int_A^B \mathbf{F} \cdot d\boldsymbol{\ell} &= \int_3^0 x\sqrt{9 - x^2}\,dx - 2\int_0^3 \sqrt{9 - y^2}\,dy \\
&= -\frac{1}{3}(9 - x^2)^{3/2}\Big|_3^0 - \left[y\sqrt{9 - y^2} + 9\sin^{-1}\frac{y}{3}\right]_0^3 \\
&= -9\left(1 + \frac{\pi}{2}\right).
\end{aligned}$$

b) *In cylindrical coordinates.* Here we first transform **F** into cylindrical coordinates. Inverting Eq. (2–61), we have

$$\begin{bmatrix} A_r \\ A_\phi \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix}. \tag{2–84}$$

With the given **F**, Eq. (2–84) gives

$$\begin{bmatrix} F_r \\ F_\phi \\ F_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} xy \\ -2x \\ 0 \end{bmatrix},$$

which leads to

$$\mathbf{F} = \mathbf{a}_r(xy\cos\phi - 2x\sin\phi) - \mathbf{a}_\phi(xy\sin\phi + 2x\cos\phi).$$

For the present problem the path of integration is along a quarter-circle of a radius 3. There is no change in r or z along the path ($dr = 0$ and $dz = 0$); hence Eq. (2–52) simplifies to

$$d\ell = \mathbf{a}_\phi 3\, d\phi$$

and

$$\mathbf{F} \cdot d\ell = -3(xy \sin\phi + 2x \cos\phi)\, d\phi.$$

Because of the circular path, F_r is immaterial to the present integration. Along the path, $x = 3\cos\phi$ and $y = 3\sin\phi$. Therefore

$$\begin{aligned}\int_A^B \mathbf{F} \cdot d\ell &= \int_0^{\pi/2} -3(9\sin^2\phi \cos\phi + 6\cos^2\phi)\, d\phi \\ &= -9(\sin^3\phi + \phi + \sin\phi\cos\phi)\Big|_0^{\pi/2} \\ &= -9\left(1 + \frac{\pi}{2}\right),\end{aligned}$$

عملگر واگرایی

مشتق فضایی از یک میدان برداری

تعریف:

واگرایی هر بردار حد انتگرال سطحی‌آن بردار در واحد حجم است هرگاه حجم محصور شده توسط آن سطح به سمت صفر میل‌کند، یعنی

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \lim_{V \to 0} \frac{1}{V} \oint_{S} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, da$$

شار میدان برداری F که از سطح بسته می گذرد

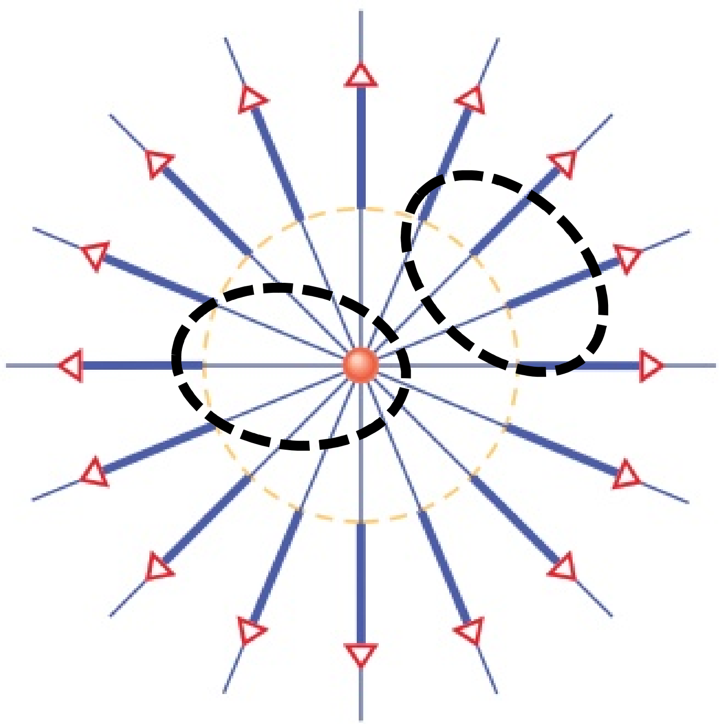
$$\oint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,da$$

اگر سطح بسته شامل منبع (Source) یا چاهک (Sink) نباشد

شار خالص عبوری از سطح صفر است

اگر سطح بسته شامل منبع (Source) یا چاهک (Sink) باشد

شار خالص عبوری از سطح غیر صفر خواهد بود



در مختصات دکارتی

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

در مختصات استوانه ای

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rB_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial B_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial B_z}{\partial z}$$

در مختصات کروی

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial R}(R^2 A_R) + \frac{1}{R\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(A_\theta \sin\theta) + \frac{1}{R\sin\theta}\frac{\partial A_\phi}{\partial \phi}$$

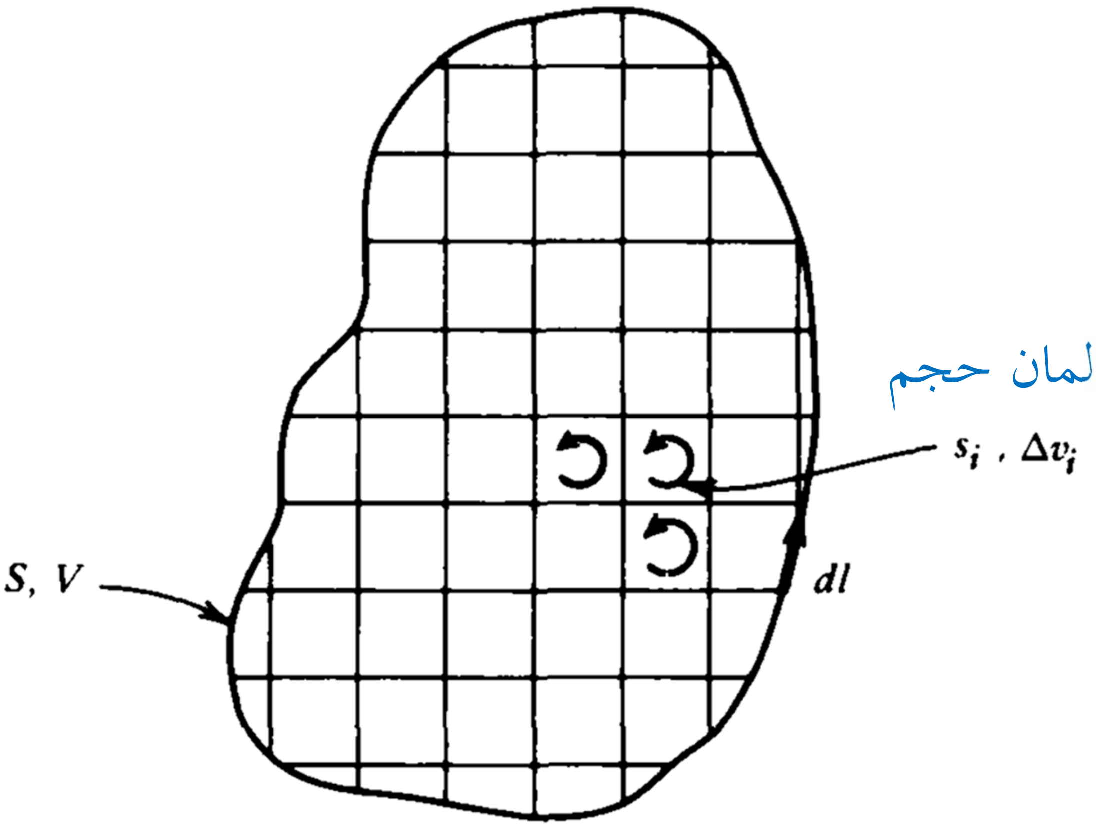
Divergence Theorem قضیه واگرایی

قضیهٔ واگرایی. انتگرال واگرایی یك بـردار در حجم V برابر است باانتگــرال سطحی مؤلفهٔ قائم آن بردار روی سطحی که V را محصور می‌کند؛ یعنی

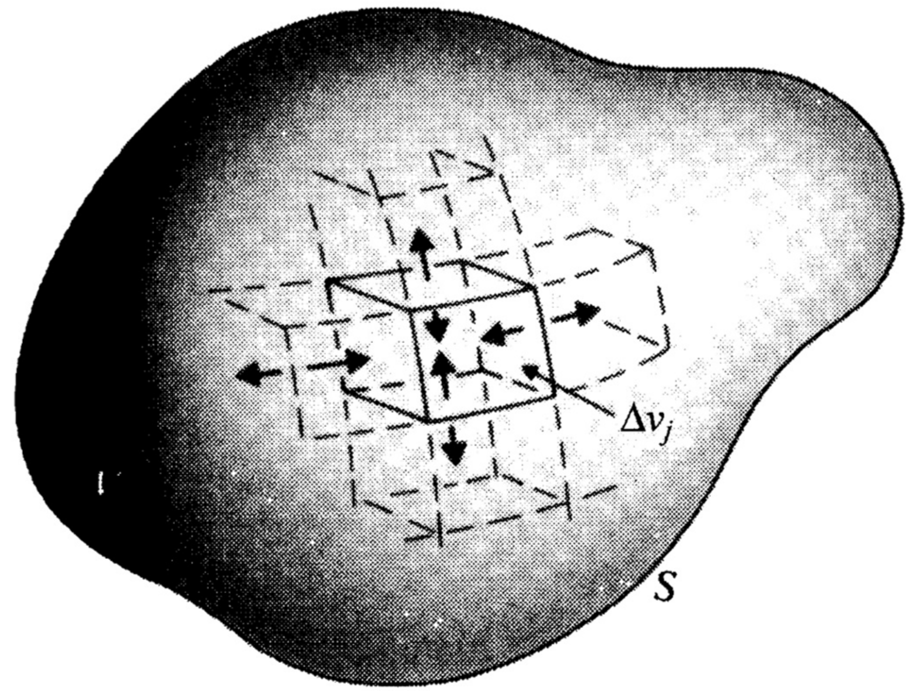
$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{A}\, dv = \oint_S \mathbf{A}\, d\mathbf{a}$$

$\mathbf{n}\, da$

اثبات قضیه دیورژانس



المان حجم



اثبات قضیه دیورژانس

برای یک المان حجم به حجم Δv_j و مساحت سطح S_j

$$(\nabla \cdot \mathbf{A})_j \, \Delta v_j = \oint_{s_j} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s}.$$

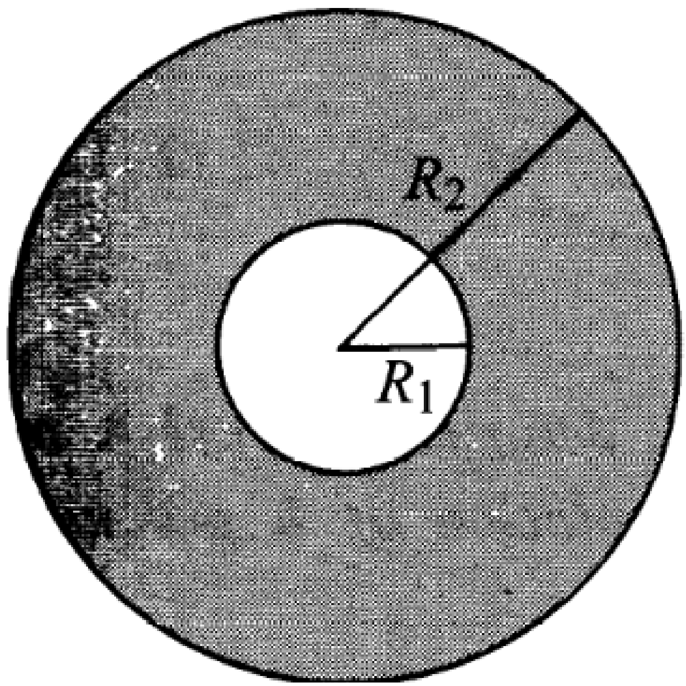
جمع زدن روی همه المانهای سطح بسته S

$$\sum_{i=1}^{N} (\nabla \cdot \mathbf{A})_i \, \Delta v_i = \sum_{i=1}^{N} \oint_{s_i} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{a}$$

$N \to \infty$ and $\Delta v_i \to 0$

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{A} \, dv = \oint_S \mathbf{A} \, d\mathbf{a}$$

EXAMPLE 2–20 Given $\mathbf{F} = \mathbf{a}_R kR$, determine whether the divergence theorem holds for the shell region enclosed by spherical surfaces at $R = R_1$ and $R = R_2 (R_2 > R_1)$ centered at the origin, as shown in Fig. 2–29.



Solution Here the specified region has two surfaces, at $R = R_1$ and $R = R_2$.

At the outer surface: $R = R_2$, $d\mathbf{s} = \mathbf{a}_R R_2^2 \sin\theta \, d\theta \, d\phi$;

$$\int_{\substack{\text{outer}\\\text{surface}}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} (kR_2) R_2^2 \sin\theta \, d\theta \, d\phi = 4\pi k R_2^3.$$

At the inner surface: $R = R_1$, $d\mathbf{s} = -\mathbf{a}_R R_1^2 \sin\theta \, d\theta \, d\phi$;

$$\int_{\substack{\text{inner}\\\text{surface}}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = -\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} (kR_1) R_1^2 \sin\theta \, d\theta \, d\phi = -4\pi k R_1^3.$$

Actually, since the integrand is independent of θ or ϕ in both cases, the integral of a constant over a spherical surface is simply the constant multiplied by the area of the surface ($4\pi R_2^2$ for the outer surface and $4\pi R_1^2$ for the inner surface), and no integration is necessary. Adding the two results, we have

$$\oint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = 4\pi k (R_2^3 - R_1^3). \tag{2-122}$$

To find the volume integral, we first determine $\nabla \cdot \mathbf{F}$ for an $\mathbf{F}$ that has only an F_R component. From Eq. (2–113), we have

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial R}(R^2 F_R) = \frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial R}(kR^3) = 3k.$$

Since $\nabla \cdot \mathbf{F}$ is a constant, its volume integral equals the product of the constant and the volume. The volume of the shell region between the two spherical surfaces with radii R_1 and R_2 is $4\pi(R_2^3 - R_1^3)/3$. Therefore,

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{F}\, dv = (\nabla \cdot \mathbf{F})V = 4\pi k(R_2^3 - R_1^3), \tag{2–123}$$

which is the same as the result in Eq. (2–122).

This example shows that the divergence theorem holds even when the volume has holes inside—that is, even when the volume is enclosed by a multiply connected surface. ■