بسم الله الرحمن الرحيم

فصل دوم

الکتروستاتیک

(بخش سوم)

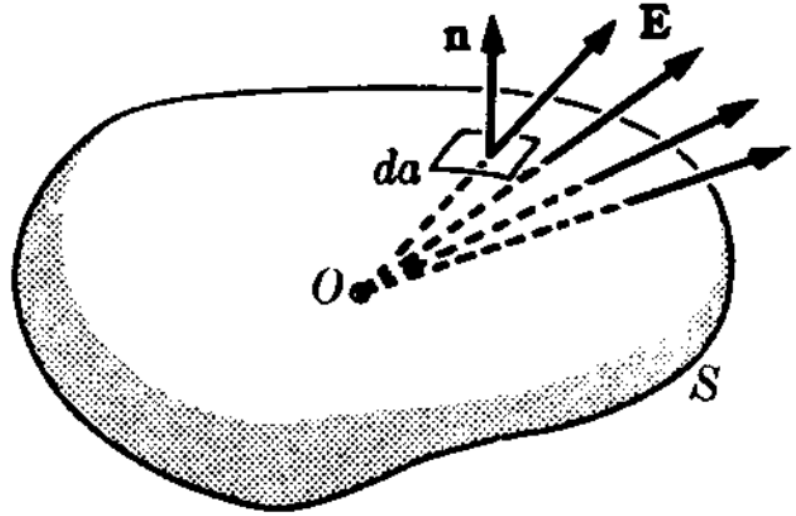
۶.۲ قانون گاؤس

میان انتگرال مؤلفهٔ عمودی میدان الکتریکی برروی یك سطح بسته و مقدار کل بارهای درون این‌سطح رابطهٔ مهمی وجود دارد.

$$\oint_S \mathbf{E}\cdot\mathbf{n}\,da = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{N} q_i$$

$$\oint_S \mathbf{E}\cdot\mathbf{n}\,da = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_V \rho\,dv$$

شار میدان الکتریکی گذرنده از سطح S



بررسی قانون گاوس در قالب میدان بار نقطه ای

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{q}{۴\pi\varepsilon_۰}\frac{\mathbf{r}}{r^۳}$$

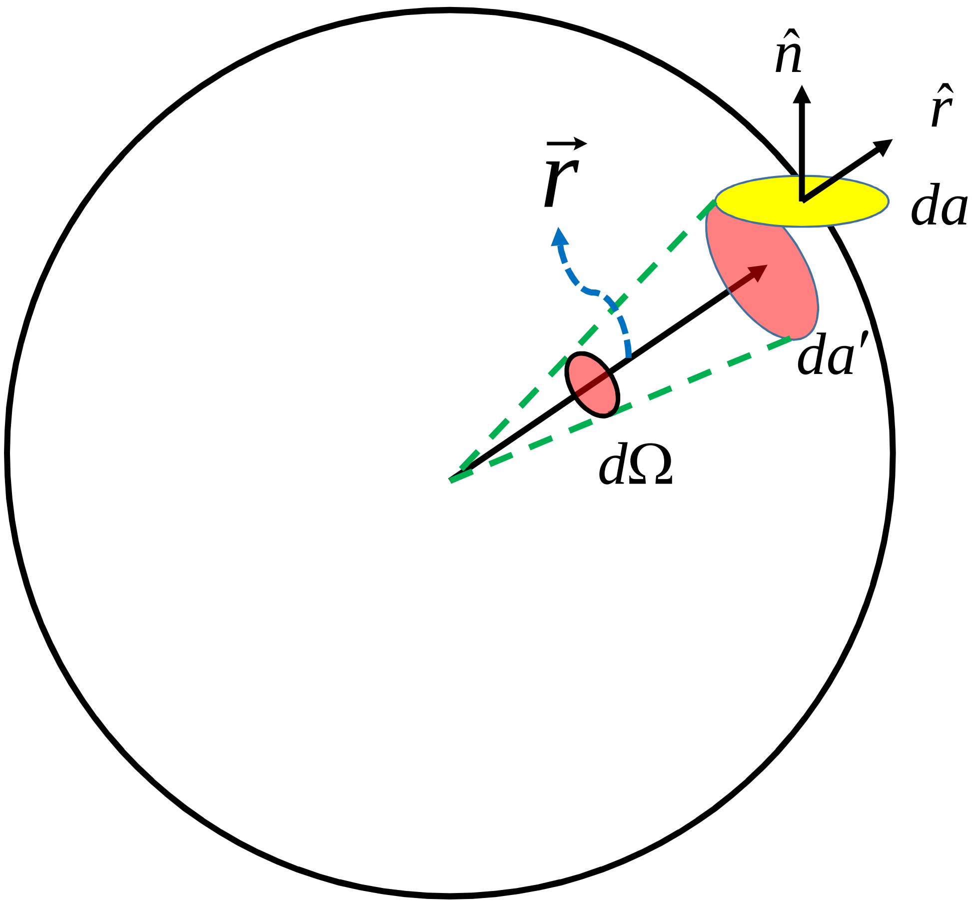
محاسبه انتگرال سطحی مولفه عمودی میدان بار نقطه ای روی سطحی شامل بار الکتریکی

$$\oint_s \mathbf{E}\cdot\mathbf{n}\,da = \frac{q}{۴\pi\varepsilon_۰}\oint_s \frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{n}}{r^۳}\,da$$

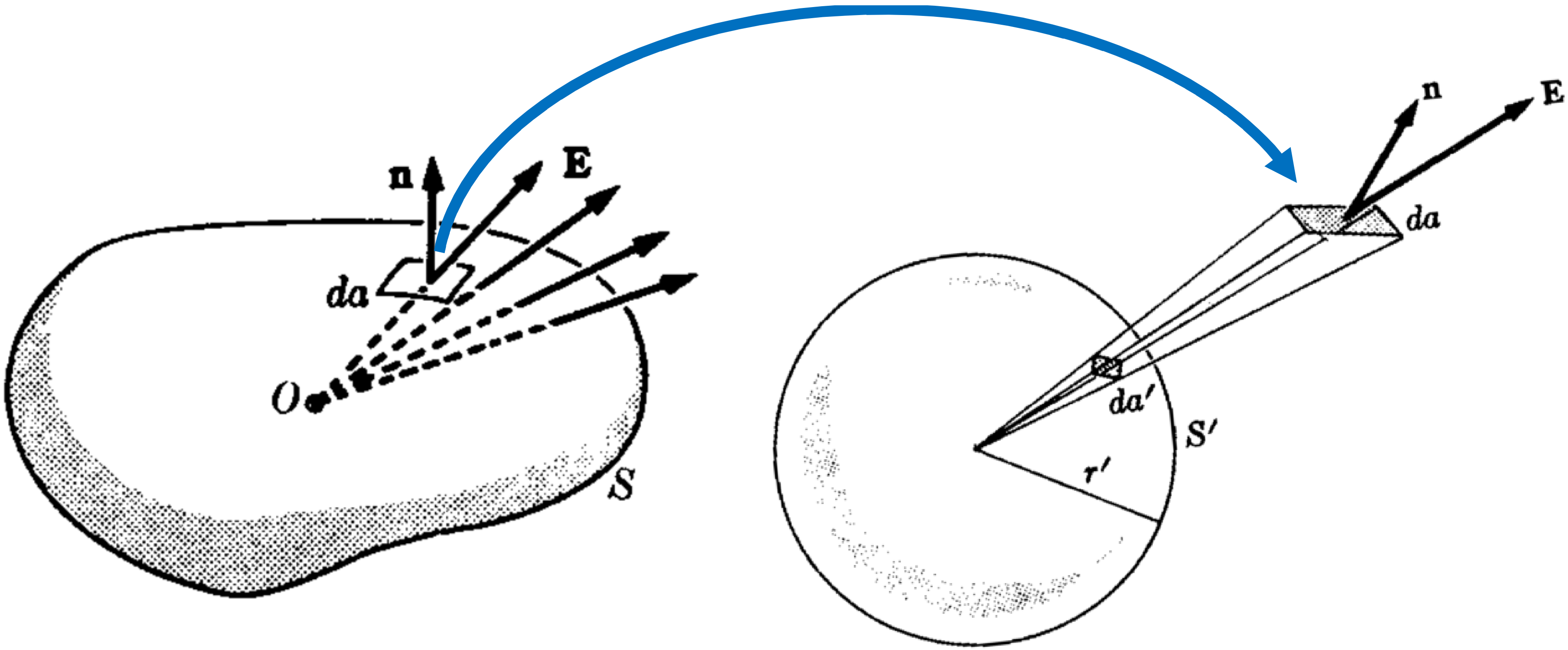
مقدار $(\mathbf{r}/r)\cdot\mathbf{n}\,da$ تصویر سطح da است بر صفحه‌ای عمود بر $\mathbf{r}$.

da'

از تقسیم تصویر سطح da بر $r^۲$ زاویهٔ فضایی که da را دربرمی گیرد به‌دست می آید.



$$d\Omega = \frac{d\vec{a}.\,\hat{r}}{r^2} = \frac{da\ \hat{n}.\,\hat{r}}{r^2}$$



$$\oint_{S} \frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{n}}{r^{۳}}\, da = \oint_{S'} \frac{\mathbf{r}'\cdot\mathbf{n}}{r'^{۳}}\, da' = ۴\pi$$

زاویهٔ فضایی که da را دربرمی‌گیرد برابر است با زاویهٔ فضایی که da' را دربرمی‌گیرد

برای بار نقطه ای قانون گاوس ثابت شد

$$\oint_s \mathbf{E}\cdot\mathbf{n}\,da=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\oint_s\frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{n}}{r^2}\,da=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}4\pi=\frac{q}{\varepsilon_0}$$

اگرسطحی بار نقطه‌ای q را احاطه‌کند، انتگرال سطحی مؤلفهٔ عمودی میدان الکتریکی برابر q/ε_0 است، درحالی‌که اگر q در خارج ازسطح قرارگیرد، مقدار این انتگرال سطحی صفرخواهد بود.

اگرسطح بستهٔ S چندین بار نقطه‌ای q_1، q_2، . . .، q_N را دربرگیرد،

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n}\, da = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_{i=1}^{N} q_i$$

توزیع پیوسته‌ای از بارها، که با یك چگالی بار مشخص

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n}\, da = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \rho\, dv$$

بیان دیگری از قانون گاوس (معادله دیفرانسیلی)

قضیهٔ واگرایی
$$\oint_s \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,da = \int_v \nabla\cdot\mathbf{F}\,dv$$

$\mathbf{F} = \mathbf{E}$

$$\oint_s \mathbf{E}\cdot\mathbf{n}\,da = \int_v \nabla\cdot\mathbf{E}\,dv$$

$$\oint_s \mathbf{E}\cdot\mathbf{n}\,da = \frac{1}{\varepsilon_\circ}\int_v \rho\,dv$$

$$\int_v \nabla\cdot\mathbf{E}\,dv = \frac{1}{\varepsilon_\circ}\int_v \rho\,dv$$

در برقراری برای هر حجمی

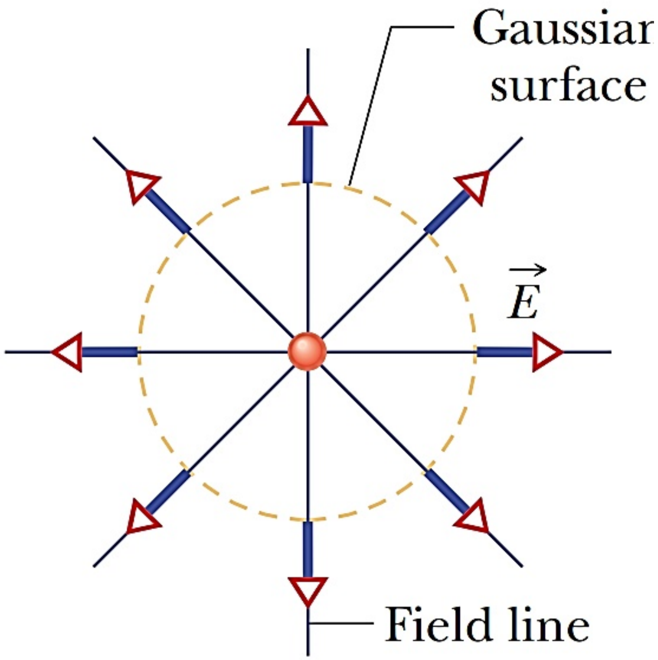
$$\boxed{\nabla\cdot\mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon_\circ}\rho}$$

۷۰۲ کاربرد قانون گاؤس

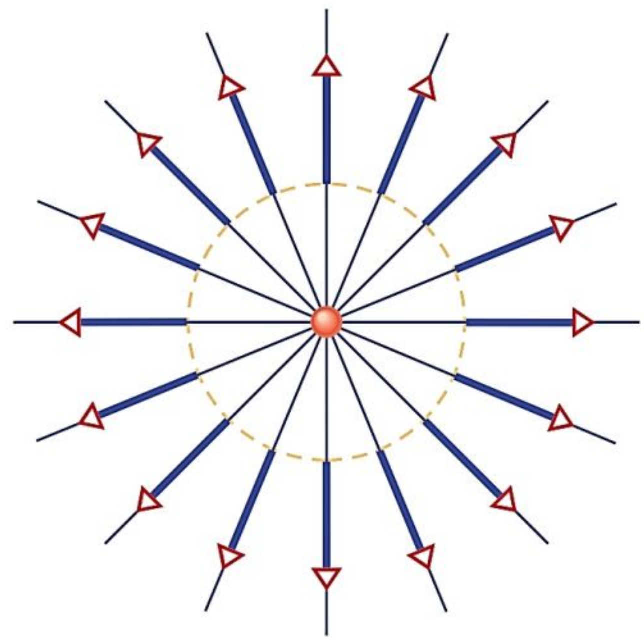
عملی این قانون به‌طور عمده در آن است که در وضعیتهایی که تقارن کافی دارند، روش بسیار راحتی برای محاسبهٔ میدان الکتریکی فراهم می‌آورد. به عبـارت دیگر، در برخی وضعیتهای بسیار متقارن که از لحاظ فیزیکی حائز اهمیت‌اند میدان الکتریکی را می‌توان، به‌جای انتگرالهایی که در بالا داده شد یا روشهای فصل ۳، با استفاده از قانون گاؤس محاسبه کرد. محاسبهٔ میدان الکتریکی با استفاده از قانون گاؤس بسیار راحت است.

نکات پیرامون قانون گاوس

۱- تعداد خطوطی که از یک سطح می گذرند با بار خالص درون آن سطح متناسب است

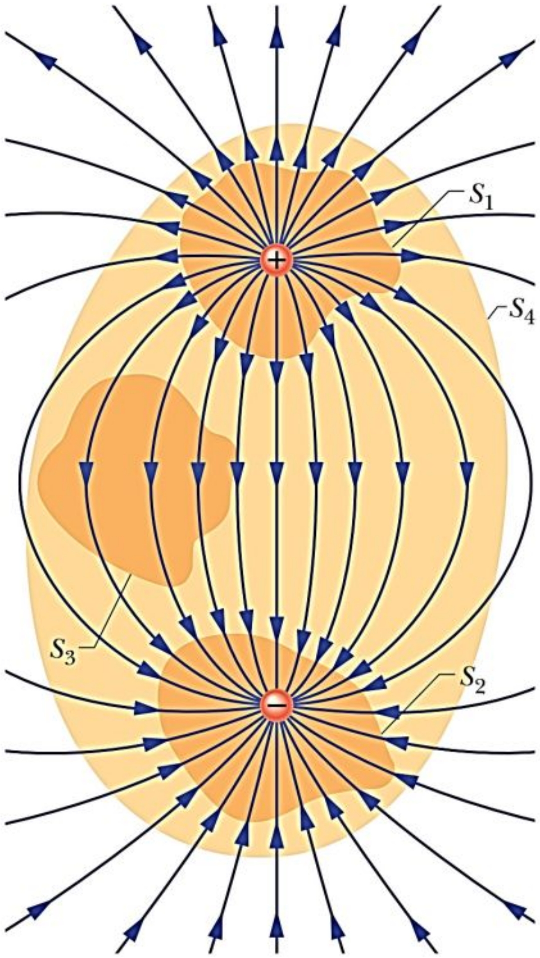


$Q = +q$



$Q = +2q$

نکات پیرامون قانون گاوس



۲- شار خالص عبوری از یک سطح بدون بار خالص صفر است

$$\Phi_1 = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

$$\Phi_2 = \frac{-q}{\varepsilon_0}$$

$$\Phi_3 = \frac{0}{\varepsilon_0} = 0$$

$$\Phi_4 = \frac{+q-q}{\varepsilon_0} = 0$$

نکات پیرامون قانون گاوس

۳- انتخاب سطح گاوس:

سطح گاوس با توجه به تقارن توزیع بار بگونه ای انتخاب می شود تا با ثابت بودن میدان در آن نقطه بتوان E را از انتگرال خارج نمود

$$\Phi = \oint \vec{E} \,.\, d\vec{A} = \vec{E} \,.\oint d\vec{A}$$

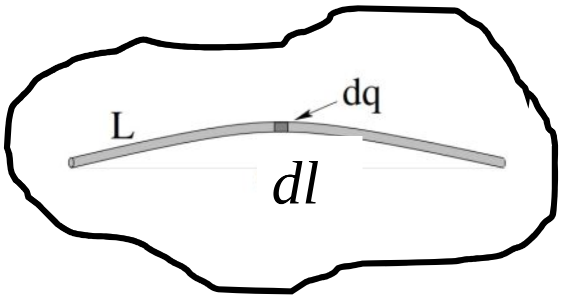
بردار dA در هر نقطه عمود بر سطح گاوس و به سمت خارج می باشد

۳- در هرجا میدان به سمت بیرون از سطح گاوس باشد شار مثبت
و هرجا میدان به سمت داخل سطح گاوس باشد شار منفی است

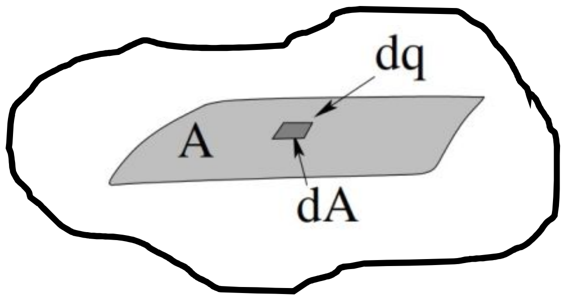
نکات پیرامون قانون گاوس

٤- در استفاده از قانون گاوس تنها بارهای الکتریکی وجود در سطح گاوس در نظر گرفته می شود و با بارهای خارج از آن کاری نداریم

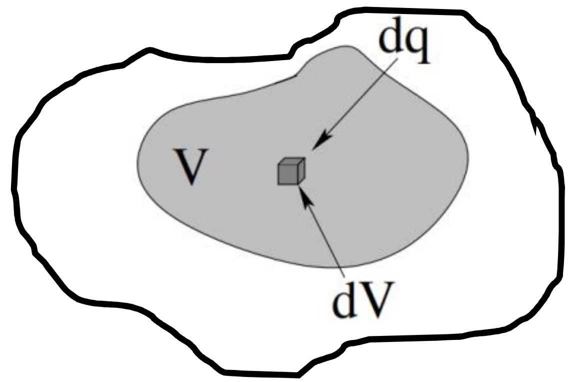
بار محصور در سطح گاوس



$$q = \int \lambda dl$$

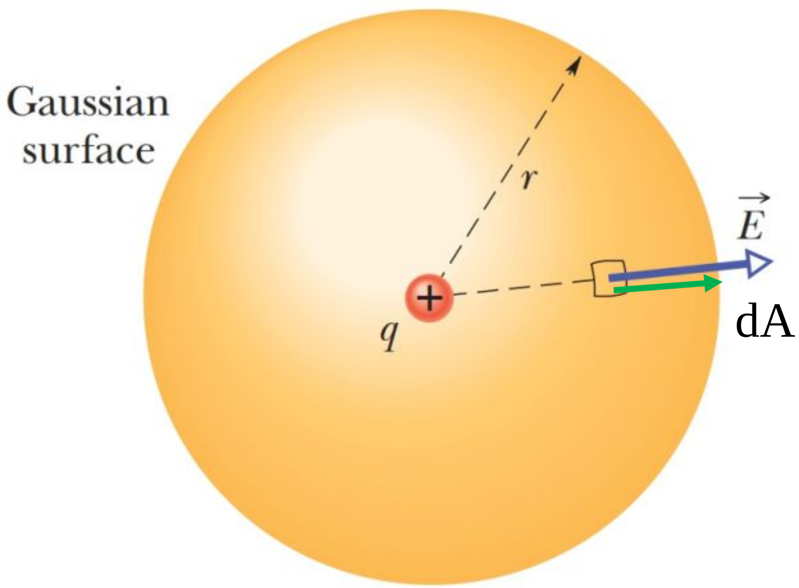


$$q = \int \sigma dA$$



$$q = \int \rho dV$$

میدان الکتریکی ناشی از بار نقطه ای در فاصله r از آن



$$\varepsilon_0 \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \varepsilon_0 \oint E\, dA = q_{\text{enc}}$$

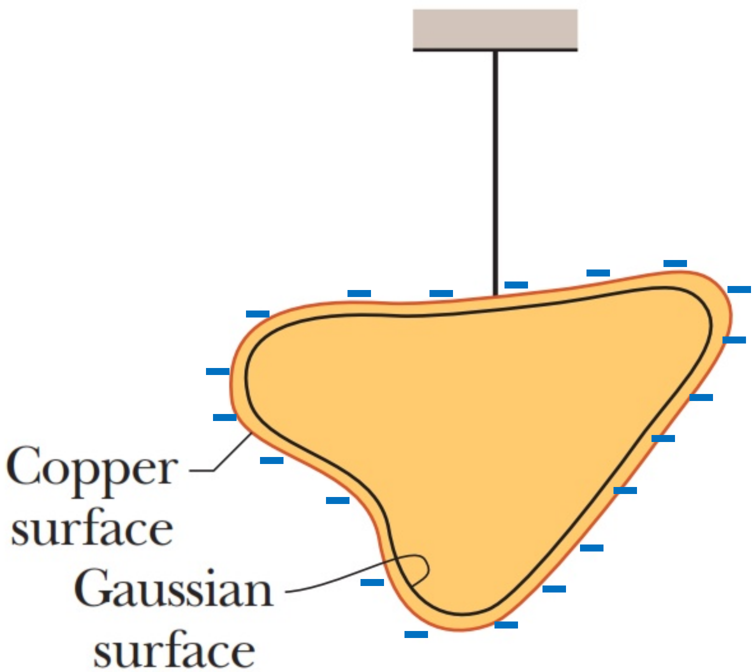
$$\varepsilon_0 E \oint dA = q$$

$$\varepsilon_0 E(4\pi r^2) = q$$

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r^2}.$$

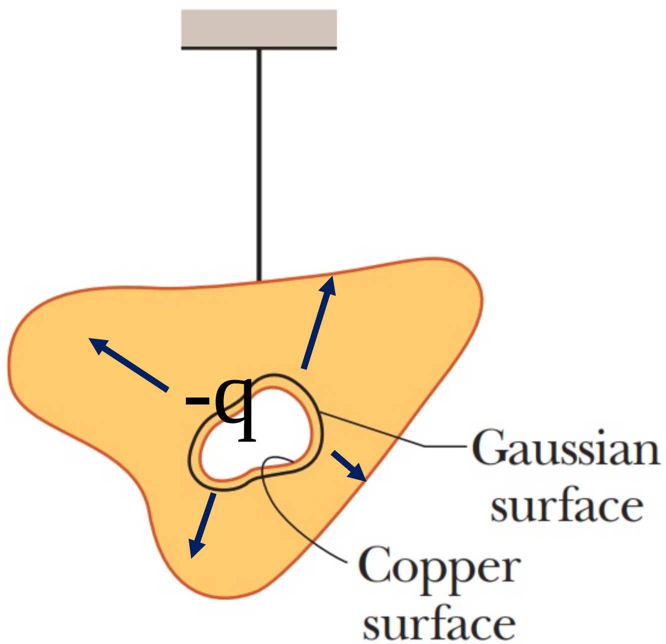
بررسی رساناهای باردار به کمک قانون گاوس

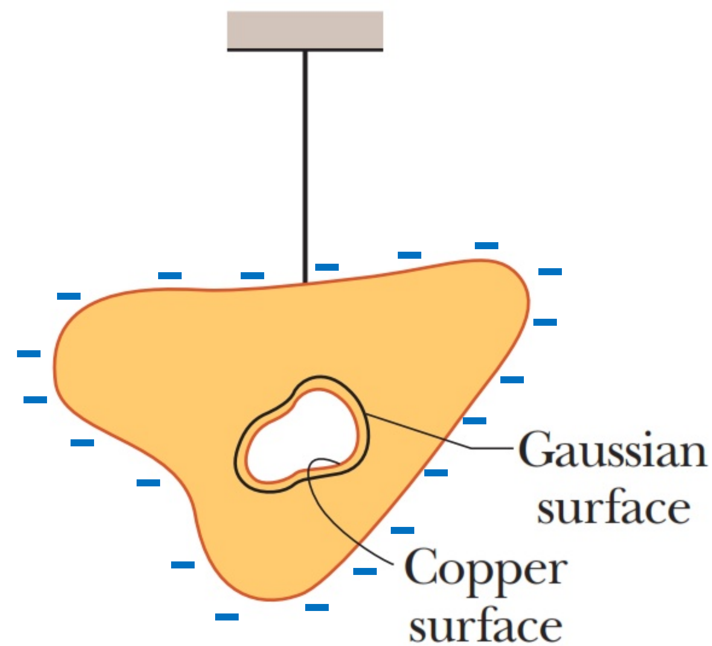
۱- با افزودن هر بار اضافی به یک رسانای منزوی، بار اضافی به سطح خارجی آن منتقل می شود و هیچ بار اضافی در داخل جسم رسانا نخواهد بود

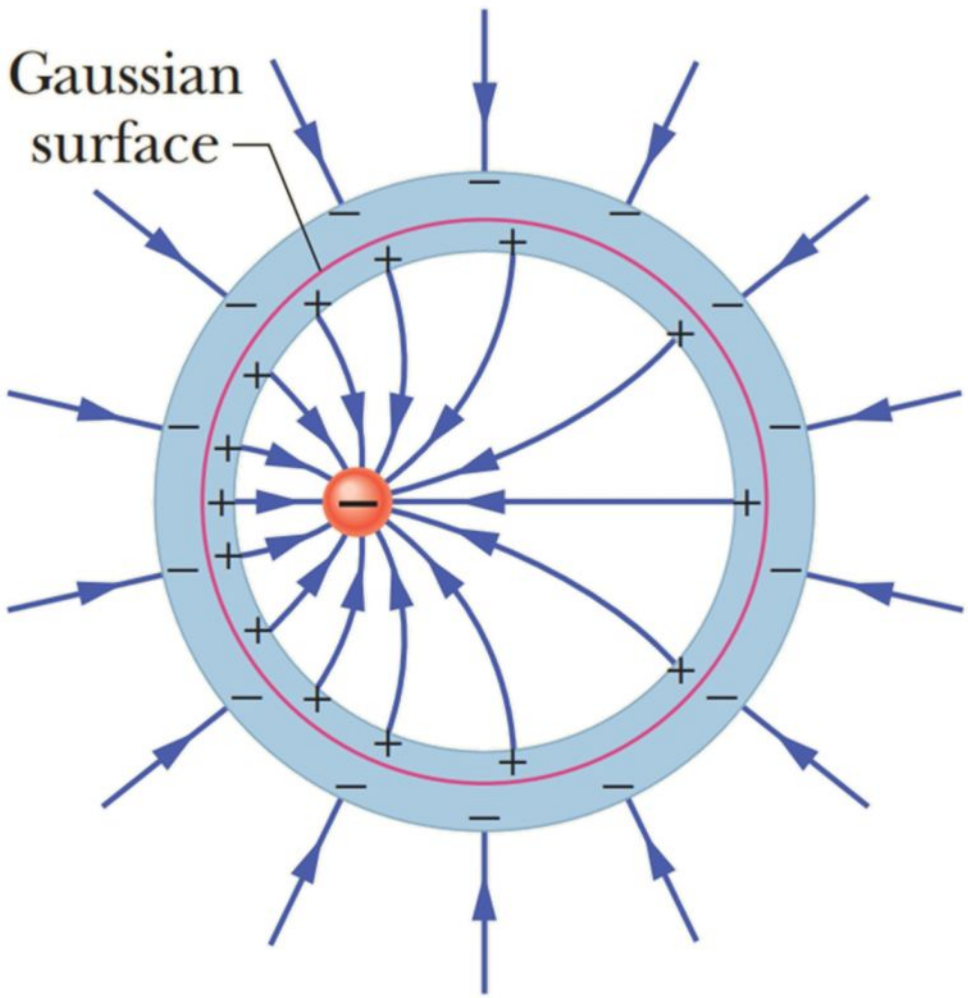


بررسی رساناهای باردار به کمک قانون گاوس

۲- با ایجاد یک حفره درون جسم رسانای منزوی و تزریق بار روی آن بار اضافی فقط روی سطح خارجی جسم رسانا توزیع می شود






Gaussian
surface

بررسی رساناهای باردار به کمک قانون گاوس

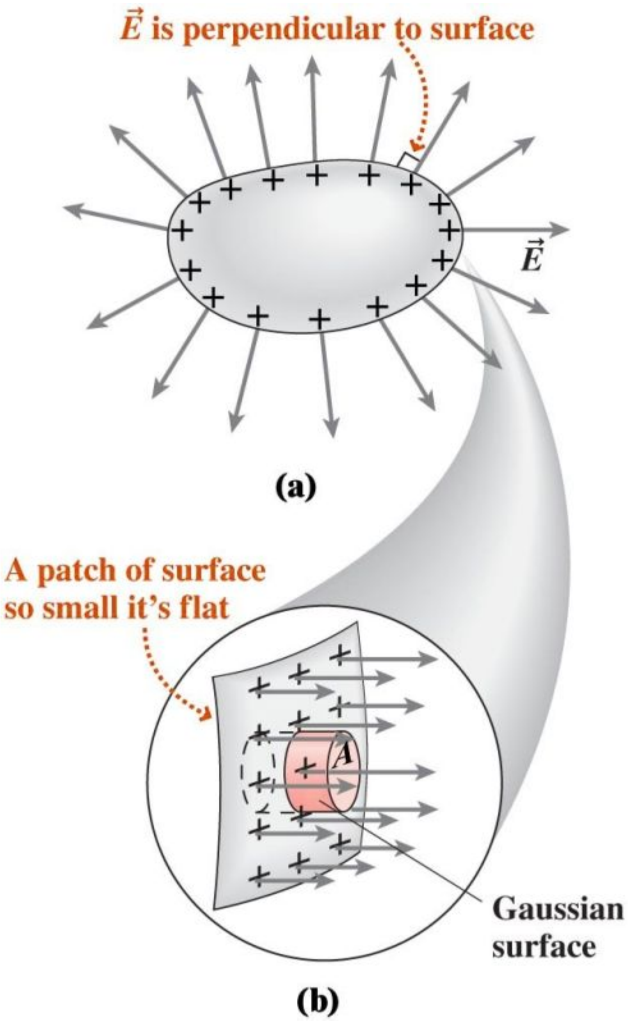
۳- توزیع بار روی سطح رسانا با توجه به هندسه سطح توزیع می شود

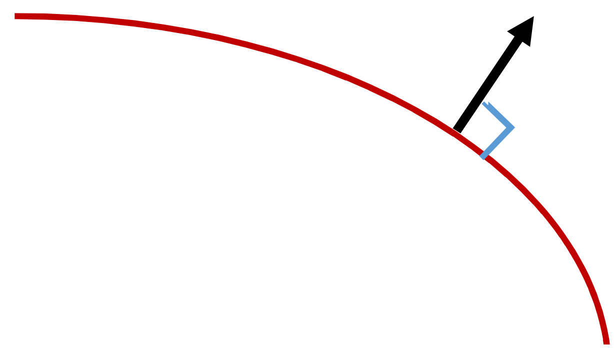
$$\sigma = \sigma(\vec{r})$$

توزیع بار کروی $\quad \sigma = \dfrac{q}{4\pi r^2}$

بررسی رساناهای باردار به کمک قانون گاوس

٤- در یک رسانا و در حالت تعادل الکتروستاتیک، میدان داخل رسانا صفر و در خارج رسانا، میدان الکتریکی در هر نقطه عمود بر سطح رسانا است



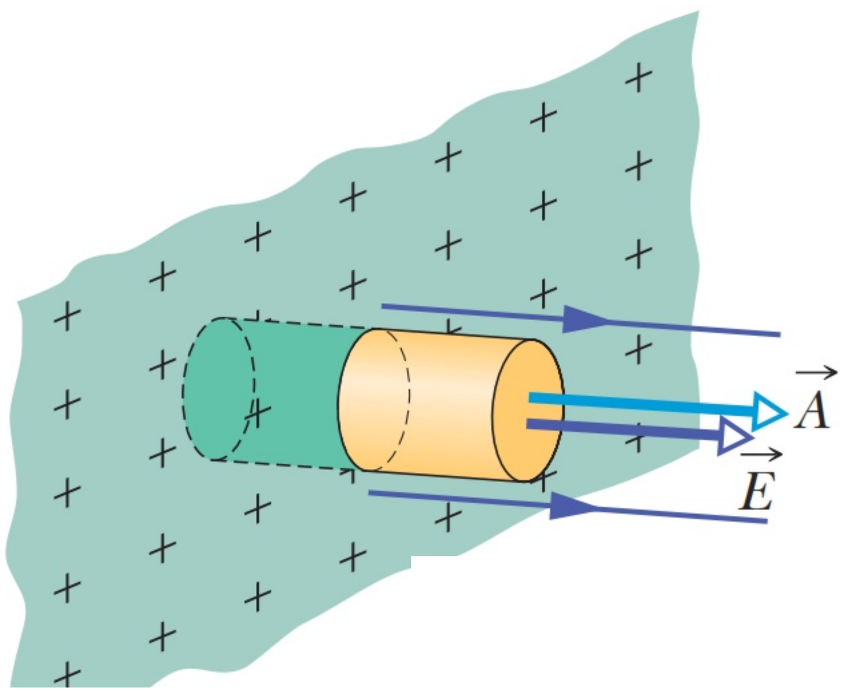


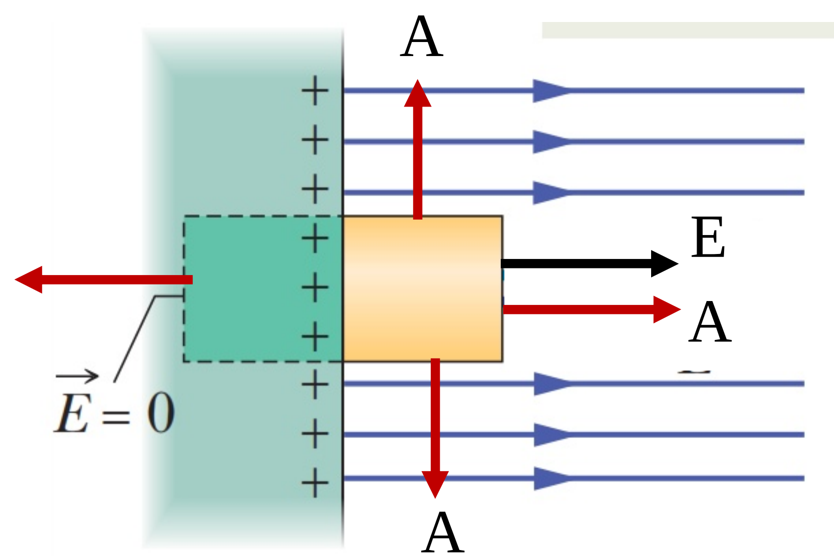
سطح رسانا یك سطح هم پتانسیل است.

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi$$

بررسی رساناهای باردار به کمک قانون گاوس

۴- محاسبه میدان در نزدیک یک جسم رسانا با چگالی موضعی σ





$$\oint \vec{E}\,.\,d\vec{A} = \int \vec{E}\,.\,d\vec{A} + \int \vec{E}\,.\,d\vec{A} + \int \vec{E}\,.\,d\vec{A}$$

سطح قاعده بالایی

سطح قاعده پایینی

سطح جانبی

$\vec{E} \parallel d\vec{A}$ $\qquad$ $\vec{E} = 0$ $\qquad$ $\vec{E} \perp d\vec{A}$

$$\oint \vec{E}\,.\,d\vec{A} = \frac{q}{\varepsilon_0} \quad \rightarrow \quad EA = \frac{q}{\varepsilon_0} \quad \rightarrow \quad E = \frac{q}{A\varepsilon_0}$$

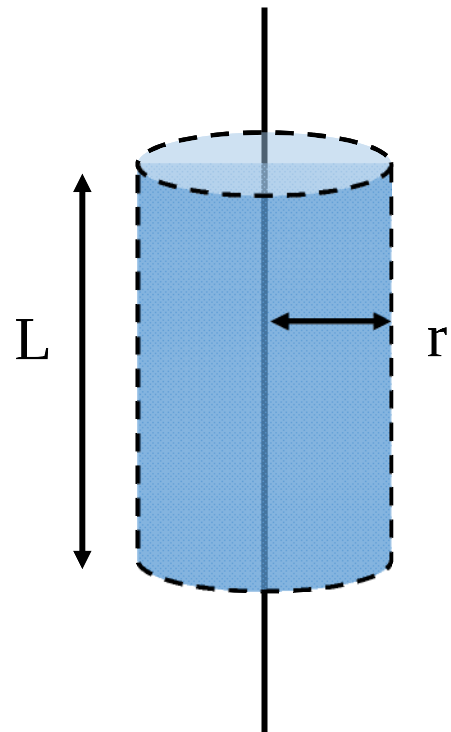
$$\boxed{E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}}$$

بدست آوردن میدان الکتریکی

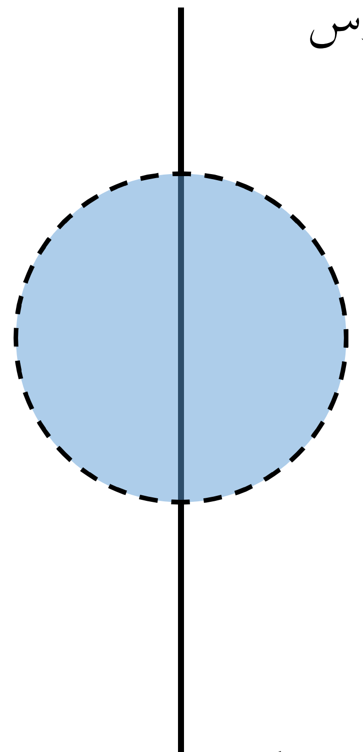
به کمک قانون گاوس

مثال ۱) میدان ناشی از یک خط بار نامتناهی در فاصله r از آن

الف) انتخاب سطح گاوس



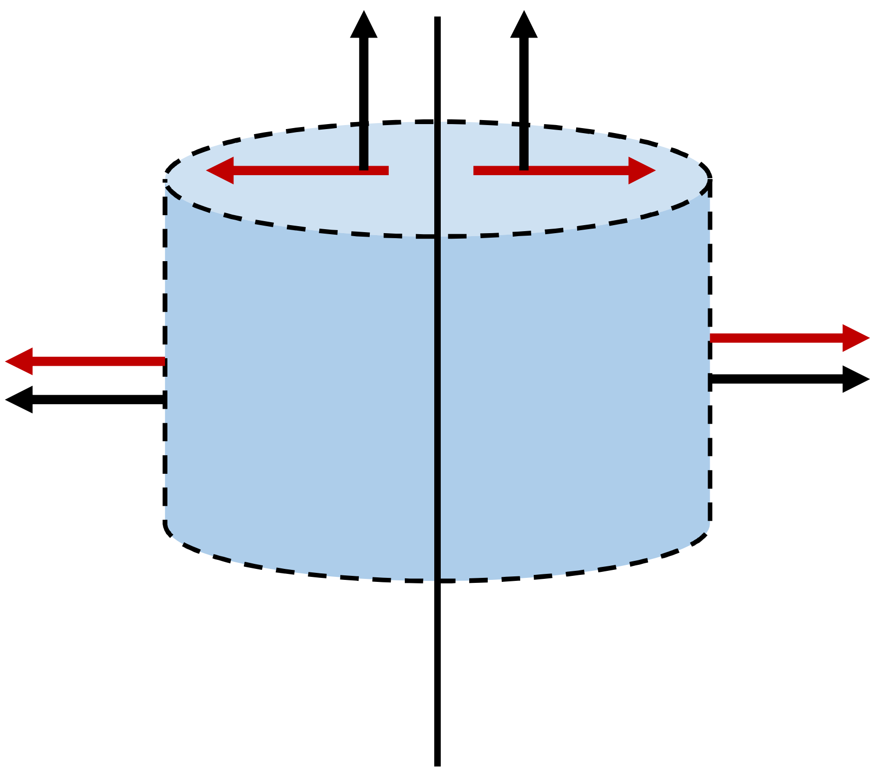
سطح گاوس مناسب



سطح گاوس نامناسب

ب) مشخص کردن میدان روی نقاط مختلف سطح گاوس

مشخص کردن بردار عمود بر سطح روی نقاط مختلف سطح گاوس



ج) نوشتن انتگرال شار

$$\oint \vec{E}.\, d\vec{A} = \int \vec{E}.\, d\vec{A} + \int \vec{E}.\, d\vec{A}$$

روی سطح بسته گاوس   روی سطح جانبی استوانه   روی سطح دو قاعده

$$\oint \vec{E}.\, d\vec{A} = E(2\pi rL) + 0$$

د) محاسبه بار داخل سطح گاوس

برای بار نقطه ای $q = \sum_i q_i$

برای توزیع های پیوسته بار $q = \int \lambda dl \quad , \quad q = \int \sigma da' \quad , \quad q = \int \rho dV$

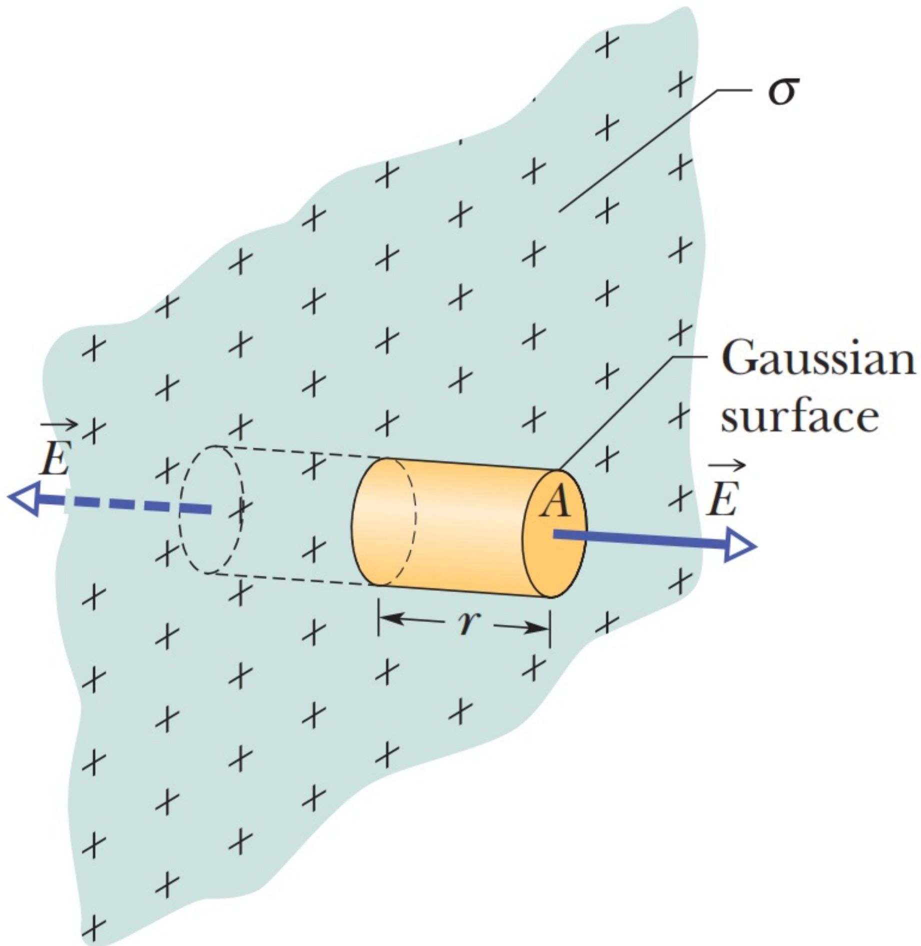
$$\longrightarrow \quad q = \lambda L$$

ه) نوشتن قانون گاوس

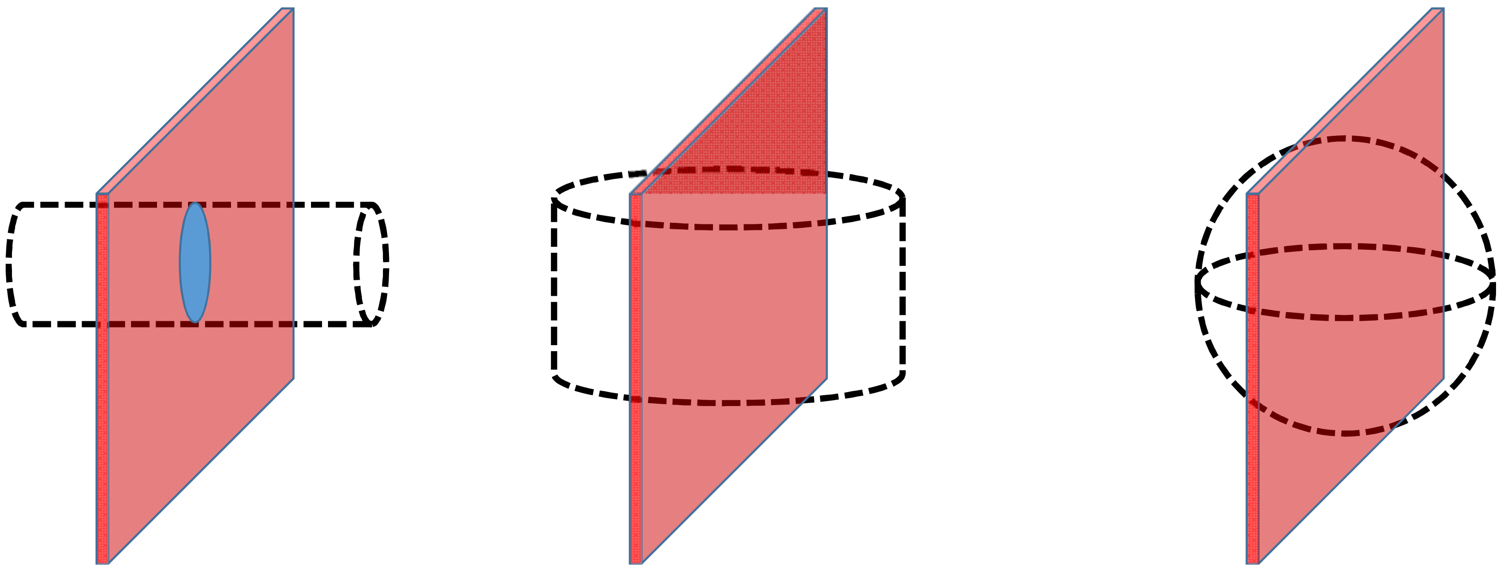
$$\oint \vec{E}.d\vec{a} = \frac{q}{\varepsilon_0} \qquad \rightarrow \qquad E(2\pi rL) = \frac{\lambda L}{\varepsilon_0}$$

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$$

مثال ۲) میدان ناشی از یک ورقه باردار نازک با چگالی بار σ



الف) انتخاب سطح گاوس



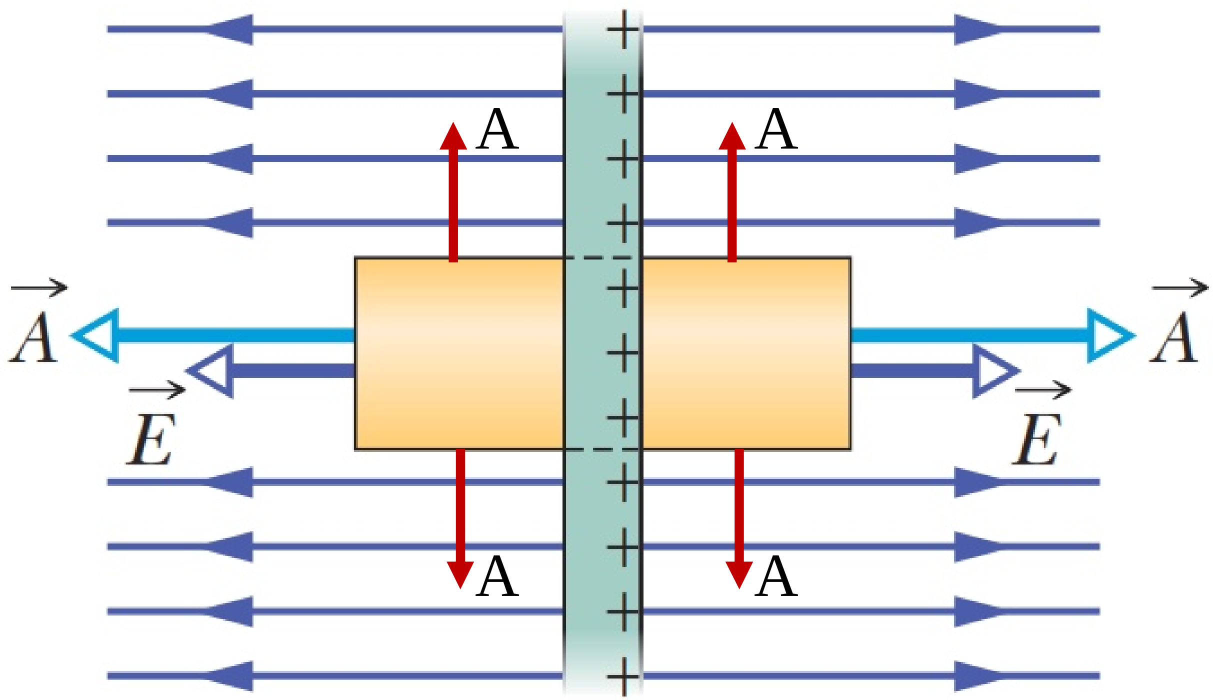
سطح گاوس نامناسب

سطح گاوس نامناسب

سطح گاوس مناسب

ب) مشخص کردن میدان روی نقاط مختلف سطح گاوس

مشخص کردن بردار عمود بر سطح روی نقاط مختلف سطح گاوس



ج) نوشتن انتگرال شار

$$\oint \vec{E}.\,d\vec{A} = \int \vec{E}.\,d\vec{A} + \int \vec{E}.\,d\vec{A}$$

روی سطح بسته گاوس   روی سطح جانبی استوانه   روی سطح دو قاعده

$$\oint \vec{E}.\,d\vec{A} = 0 + 2EA$$

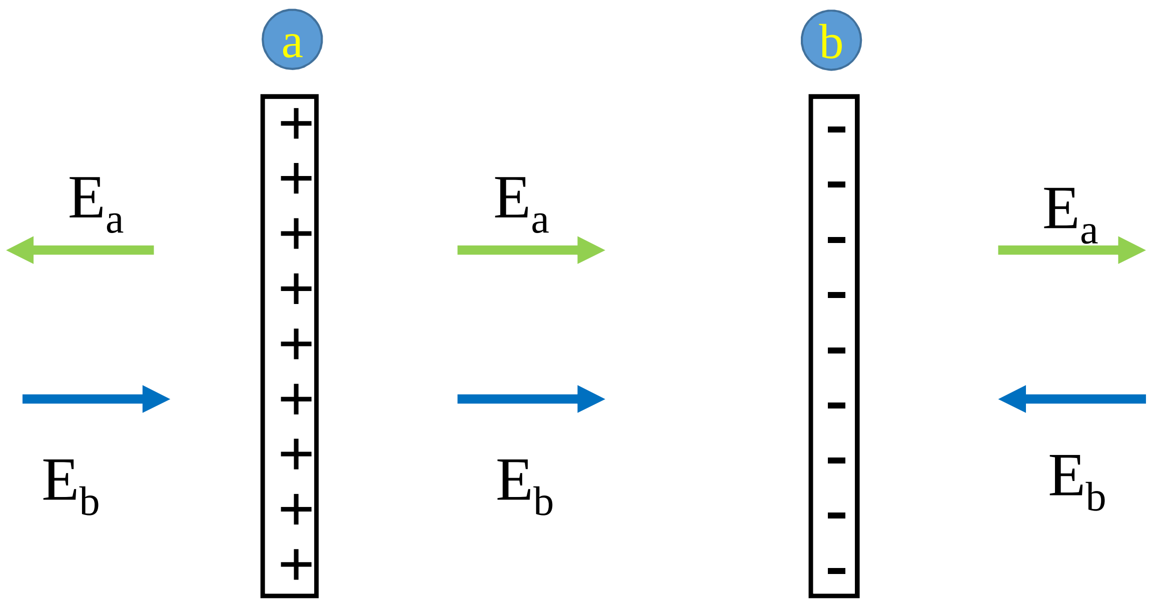
د) محاسبه بار داخل سطح گاوس

$$q = \int \sigma da' = \sigma A$$

ه) قانون گاوس

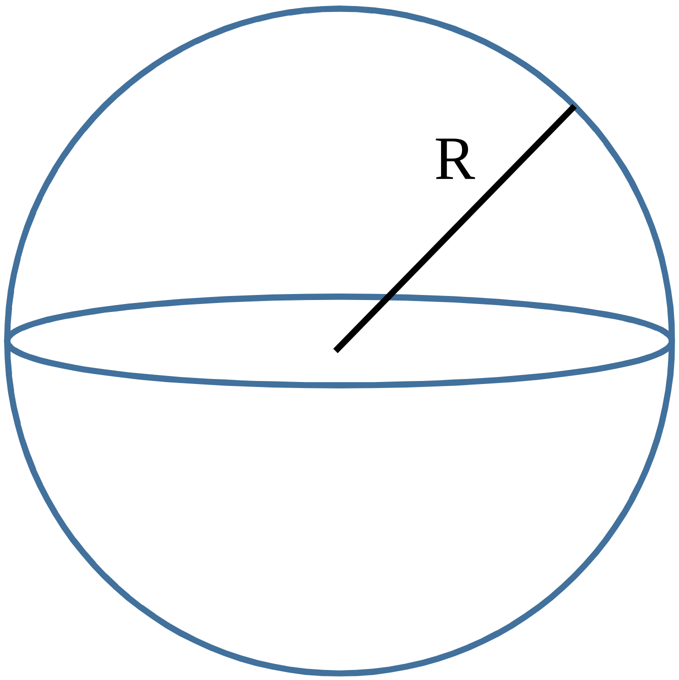
$$2EA = \frac{q}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma A}{\varepsilon_0} \quad \rightarrow \quad E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

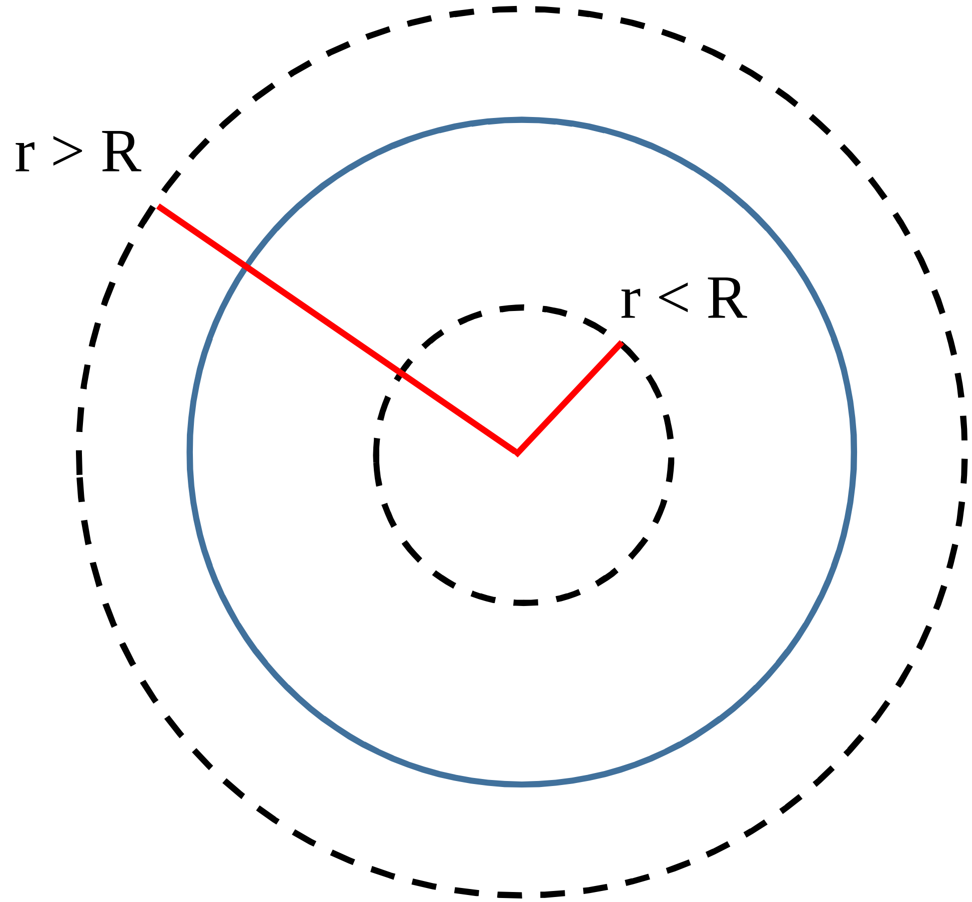
مثال۳) میدان ناشی از یک دو ورقه رسانای باردار نازک با چگالی بار $+\sigma$ و $-\sigma$



$$E = 0 \qquad E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} + \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \qquad E = 0$$

مثال٤) میدان الکتریکی پوسته کروی باردار نازک با شعاع R و بار q



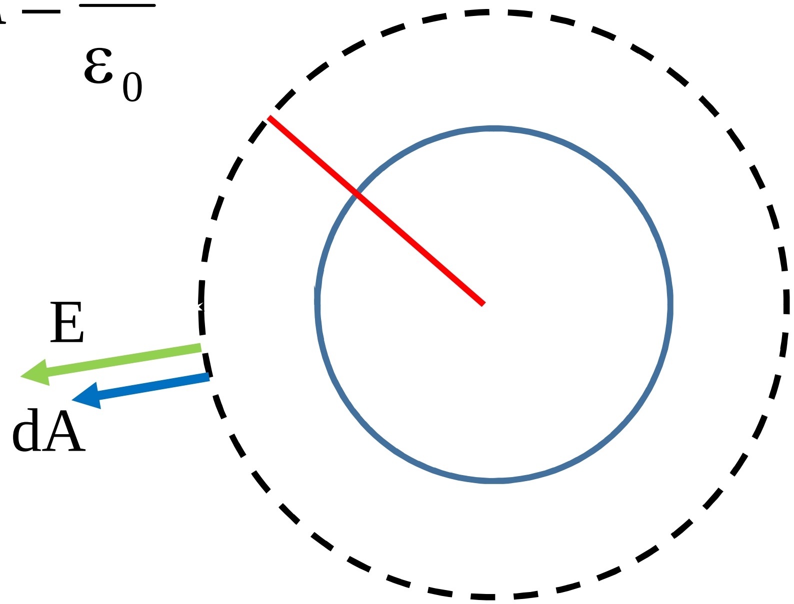


r < R $$q = 0 \quad \rightarrow \quad E = 0$$

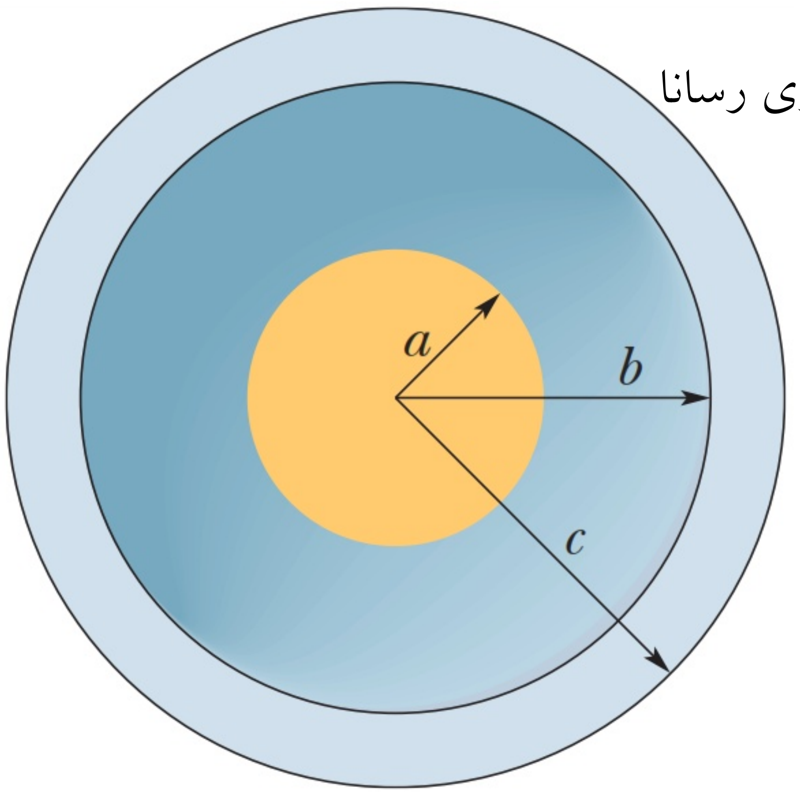
r > R $$\oint \vec{E}.\, d\vec{A} = \frac{q}{\varepsilon_0} \quad \rightarrow \quad E \oint dA = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

$$\rightarrow \quad E(4\pi r^2) = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

$$\rightarrow \quad E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$



مثال۵) یک کره رسانا به شعاع a و بار q+ در مرکز یک پوسته کروی رسانا به شعاع های داخلی و خارجی b و c و بار q− قرار دارد. میدان الکتریکی در نقاط مختلف بدست آورید



پوسته کروی رسانا

نواحی مختلف:

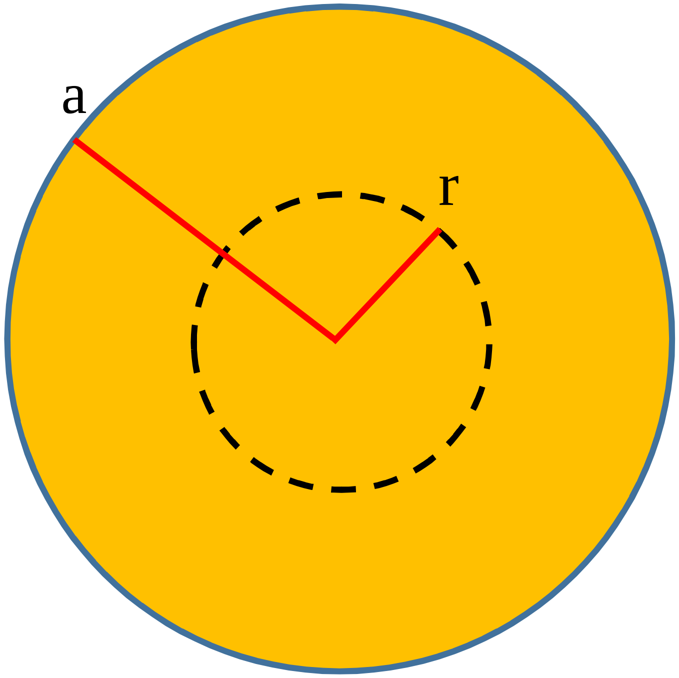
۱- $r < a$

۲- $a < r < b$

۳- $b < r < c$

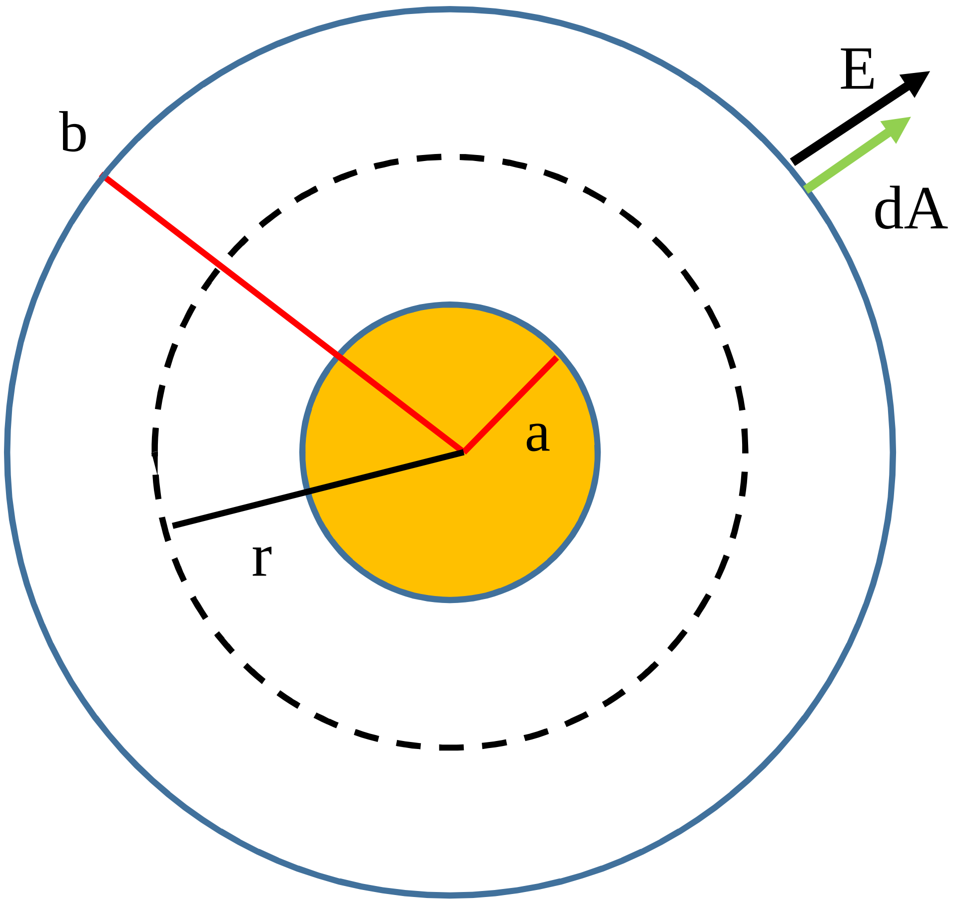
۴- $c < r$

r < a



$$q = 0 \quad \rightarrow \quad E = 0$$

a < r < b



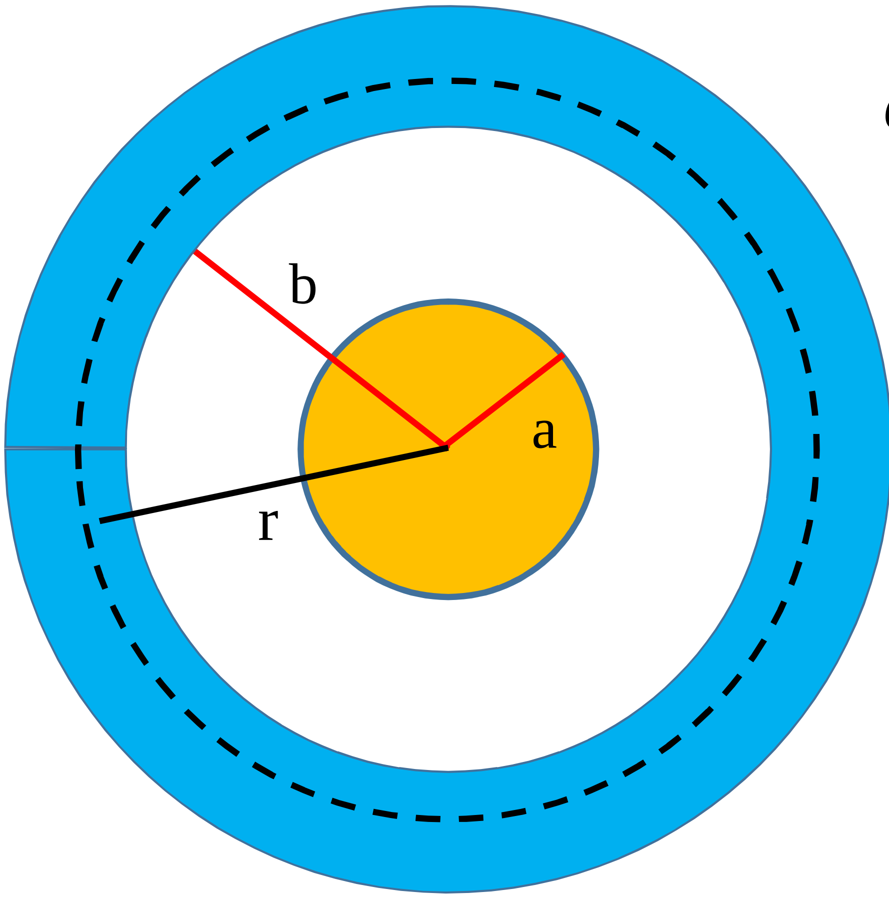
$$\oint \vec{E}.\,d\vec{A} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

$$\rightarrow \quad E\oint dA = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

$$\rightarrow \quad E(4\pi r^2) = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

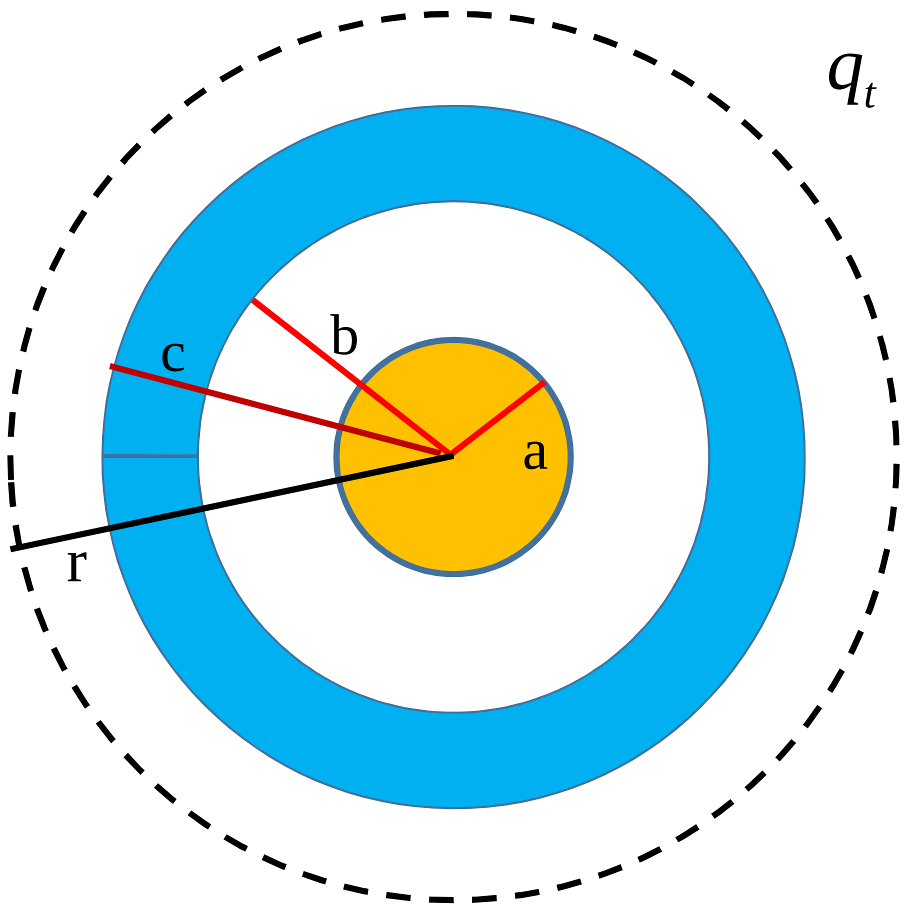
$$\rightarrow \quad E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

b < r < c



$$q_t = +q - q = 0 \quad \rightarrow \quad E = 0$$

c < r



$$q_t = +q - q = 0 \quad \rightarrow \quad E = 0$$

میدان توزیع های بار حجمی

در مواد نارسانا بار می تواند به صورت حجمی ذخیره گردد.

- چگالی بار حجمی
  - چگالی بار ثابت ← میدان به صورت شعاعی

    $$\rho = cons\tan t$$

  - چگالی متغیر با شعاع (تقارن کروی) ← میدان به صورت شعاعی

    $$\rho = \rho(r)$$

  - چگالی متغیر با زاویه ← میدان به صورت غیرشعاعی

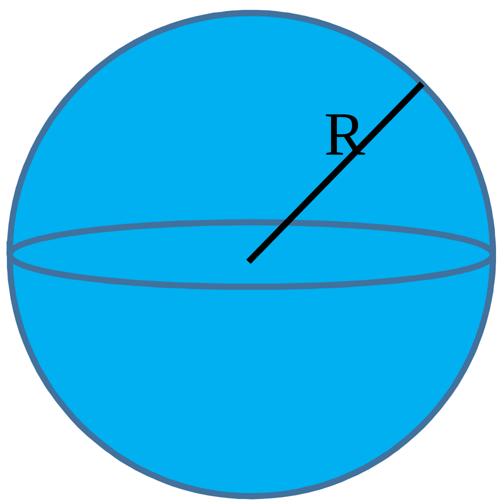
    $$\rho = \rho(r,\Omega)$$

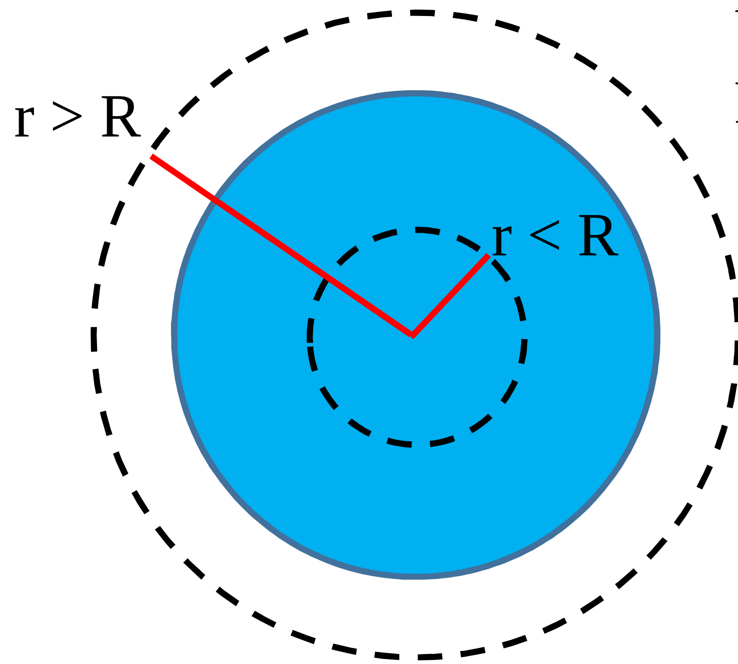
مثال٦) میدان الکتریکی ناشی از یک کره باردار نارسانا با چگالی بار حجمی ثابت ρ و شعاع R

نواحی مختلف:

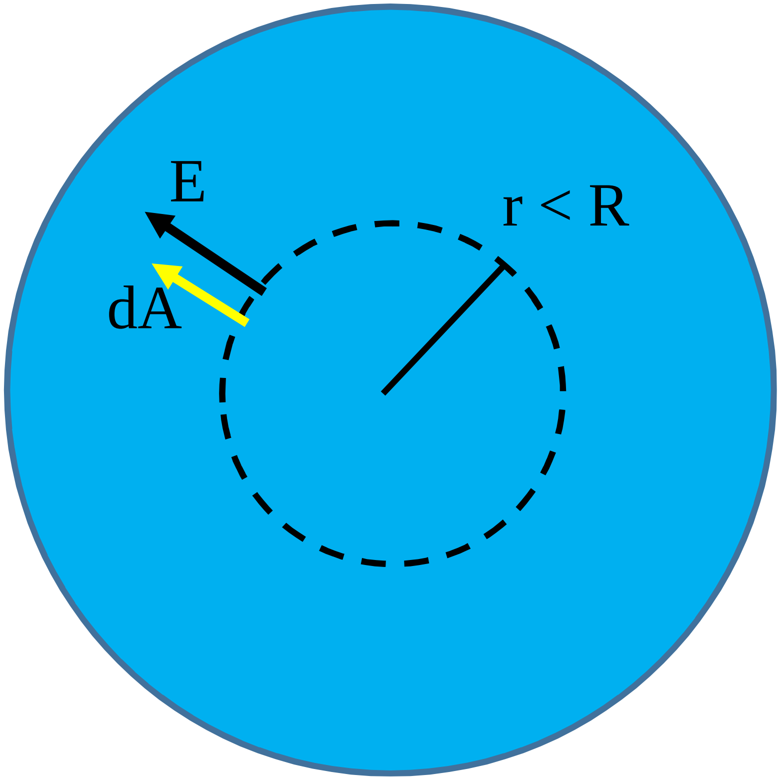
۱- $r < R$

۲- $R < r$





r < R



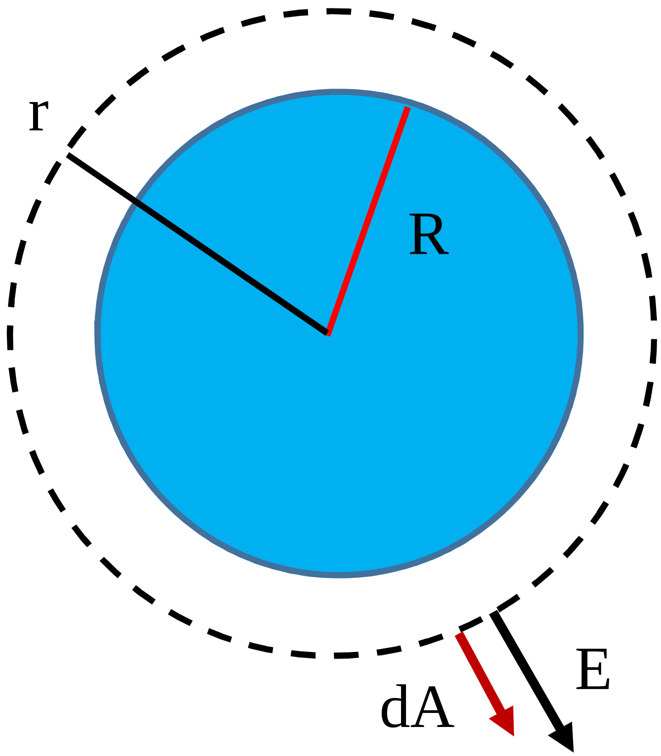
$$\oint \vec{E}.\, d\vec{A} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

$$\rightarrow \quad E\oint dA = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

$$\rightarrow \quad E(4\pi r^2) = \frac{1}{\varepsilon_0}\left(\frac{4}{3}\pi r^3 \rho\right)$$

$$\rightarrow \quad E = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} r$$

R < r

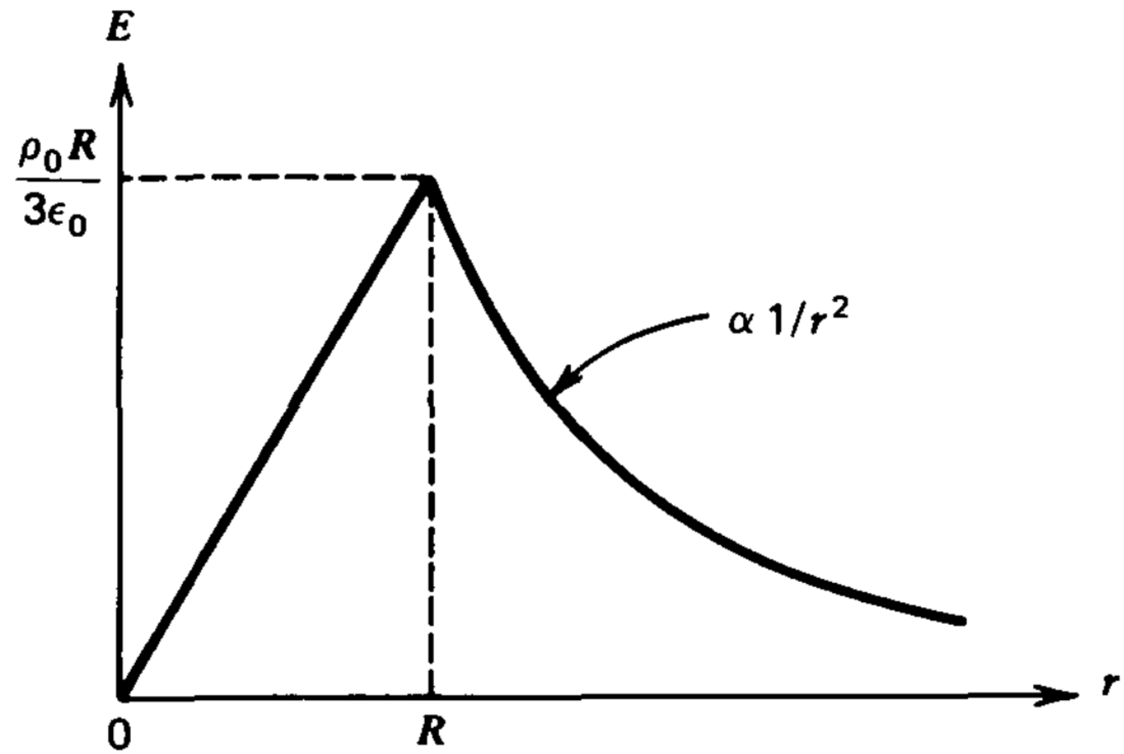


$$\oint \vec{E} . d\vec{A} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

$$\rightarrow \quad E \oint dA = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

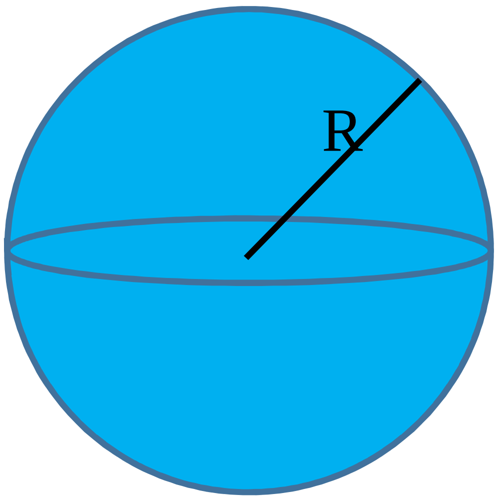
$$\rightarrow \quad E(4\pi r^2) = \frac{1}{\varepsilon_0} (\frac{4}{3} \pi R^3 \rho)$$

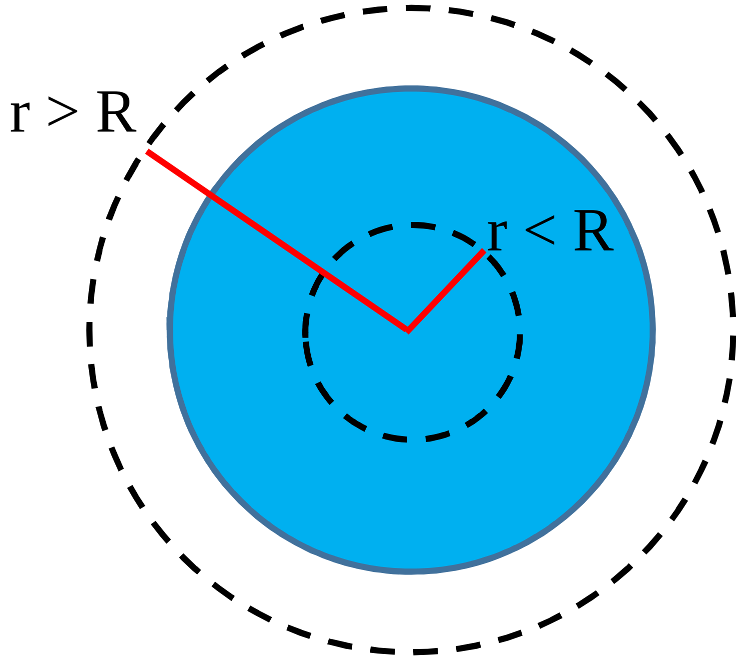
$$\rightarrow \quad E = \frac{\rho}{3\varepsilon_0 r^2} R^3$$


E
$\frac{\rho_0 R}{3\epsilon_0}$
$\alpha\ 1/r^2$
r
0
R

مثال۷) میدان الکتریکی ناشی از یک کره باردار نارسانا با شعاع R و چگالی بار حجمی متغیر به صورت زیر:

$$\rho = \rho_s \frac{r}{R}$$

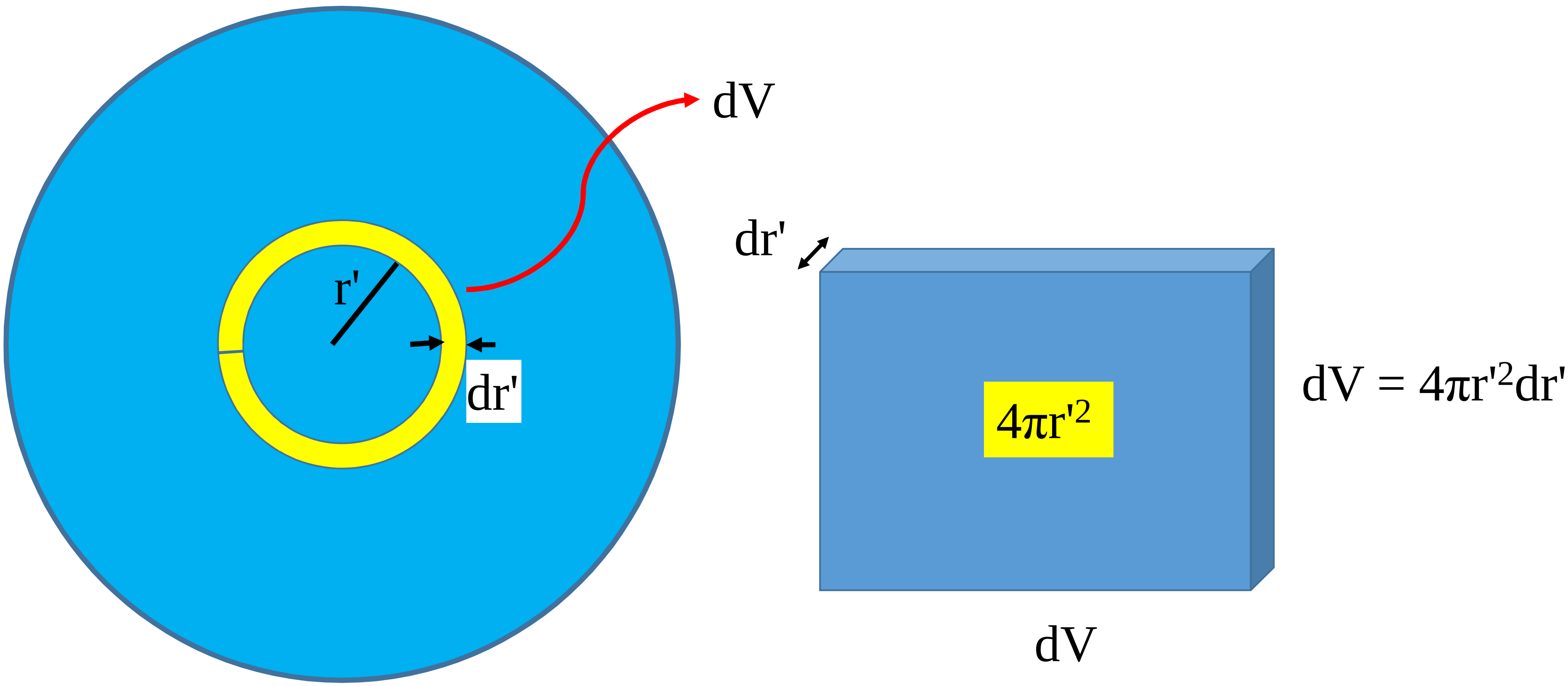




نواحی مختلف:

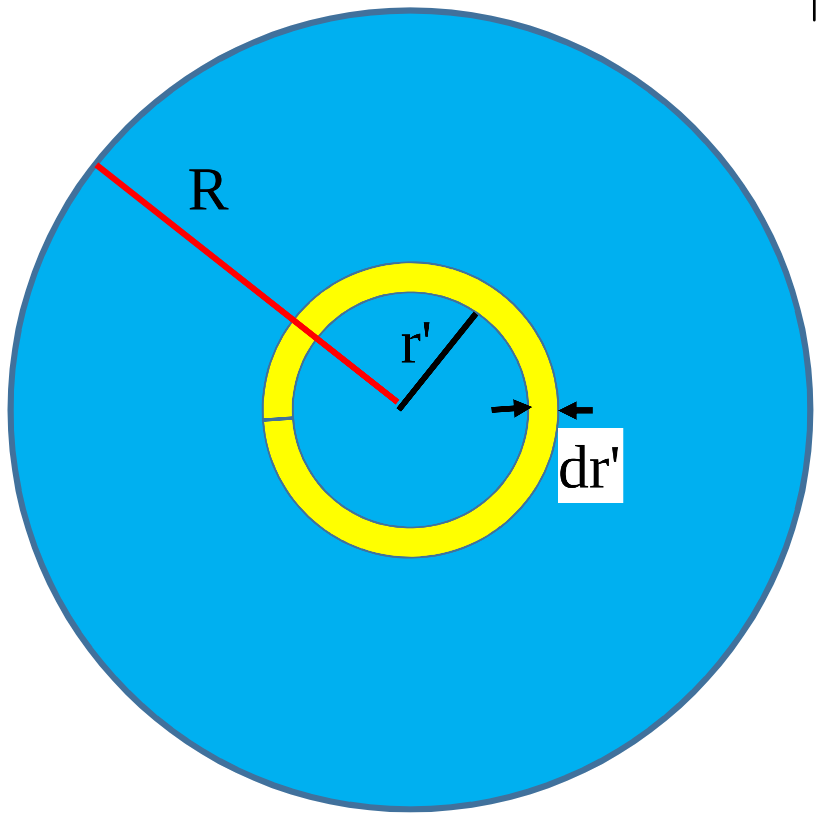
۱- $r < R$

۲- $R < r$

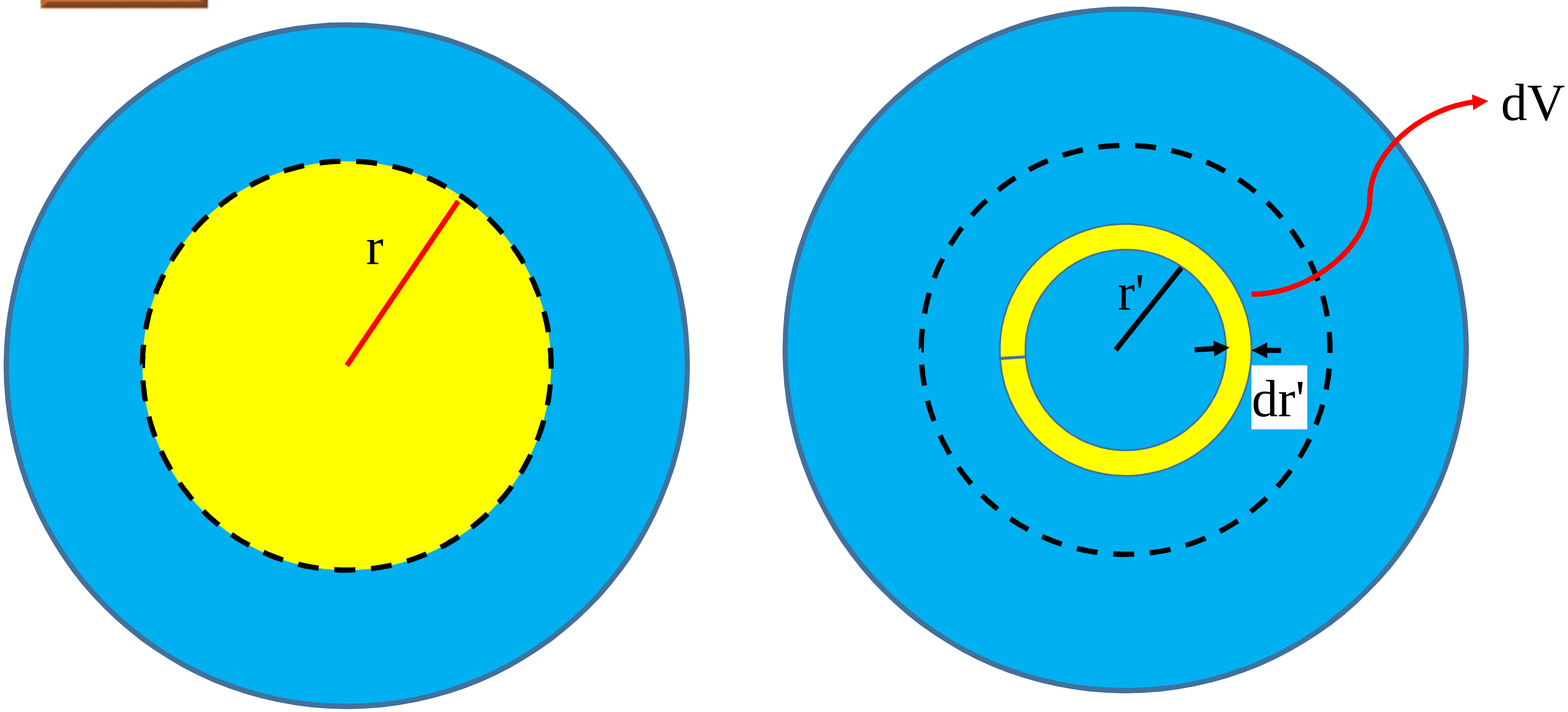

dV
r'
dr'
dr'
4πr'²
dV = 4πr'²dr'
dV

$$Q = \int \rho(r')dV = \int_{r'=0}^{r'=R} \rho\, 4\pi r'^2 dr' = 4\pi\rho \int_{r'=0}^{r'=R} (\rho_s \frac{r'}{R}) r'^2 dr' = \frac{4\pi\rho_s}{R} \frac{r'^4}{4} \Bigg|_{r'=0}^{r'=R}$$

$$Q = \frac{\pi\rho_s}{R} R^4 = \pi\rho_s R^3$$



$r < R$



$$\oint \vec{E}.\, d\vec{A} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

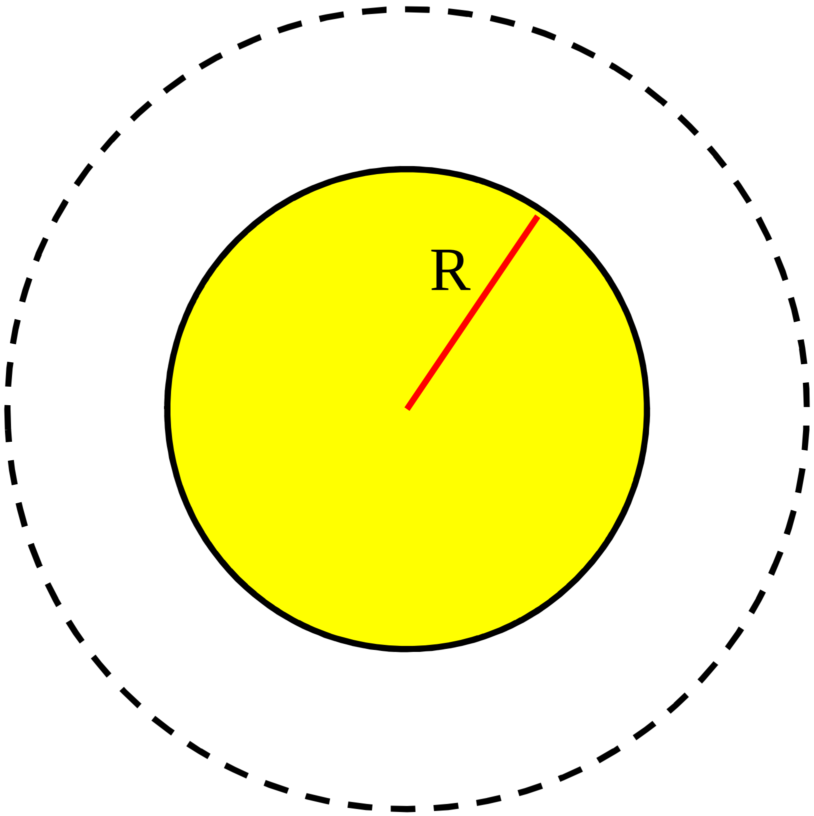
$$\rightarrow \quad E\oint dA = E(4\pi r^2)$$

$$\rightarrow \quad q = \int \rho(r')dV = \int_{r'=0}^{r'=r} \rho\, 4\pi r'^2 dr' \underset{R}{=} 4\pi\rho \int_{r'=0}^{r'=r} (\rho_s \frac{r'}{R}) r'^2 dr' = \frac{4\pi\rho_s}{R} \frac{r'^4}{4}\Bigg|_{r'=0}^{r'=r}$$

$$\rightarrow \quad q = \frac{\pi\rho_s}{R} r^4 = \pi\rho_s R^3$$

$$E(4\pi r^2) = \frac{q}{\varepsilon_0} = \frac{\pi\rho_s}{R\varepsilon_0} r^4 \qquad \rightarrow \qquad E = \frac{\rho_s}{4\varepsilon_0 R} r^2$$

r > R



$$\oint \vec{E}.\,d\vec{A} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

$$\rightarrow \quad E\oint dA = E(4\pi r^2) = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

$$E(4\pi r^2) = \frac{\pi\rho_s R^3}{\varepsilon_0}$$

$$E = \frac{\rho_s R^3}{4\varepsilon_0 r^2}$$