بسم الله الرحمن الرحیم

فصل سوم

حل مسائل الکتروستاتیک

(بخش اول)

برای حالتی که درآن توزیع بار در همه جا مشخص شده است

$$\varphi(\mathbf{r})=\frac{۱}{۴\pi\varepsilon_{\circ}}\int\frac{dq'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r})=\frac{۱}{۴\pi\varepsilon_{\circ}}\int\frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}')dq'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^{۳}}$$

ولی بسیاری ازمسائل که درعمل به‌آنها برمی‌خوریم ازاین نوع نیستند. چنانچه توزیع بار ازقبل مشخص نشده باشد، ممکن است لازم شود قبل ازتعیین توزیع بار ۱بتدا۱ میدان الکتریکی را محاسبه کنیم. مثلا یك مسئلهٔ الکتروستاتیك ممکن است شامل چند جسم رسانا باشدکه پتانسیل یا بارکل هریك ازآنها معلوم باشد، اماتوزیع بارهای سطحی به‌طور کلی معلوم نخواهد بود وقبل ازحل کامل مسئله به‌دست نخواهد آمد.

۱.۳ معادلهٔ پواسون

دریك میدان الکتروستاتیکی محض

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho$$

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi$$

$$\nabla \cdot \nabla\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\nabla^2\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

معادله پواسون

عملگر لاپلاسی

نکات

۱- لاپلاسی، یك عملگر نرده‌ای است

۲- عملگر ∇^2 شامل مشتق گیری نسبت به‌بیش ازیك متغیراست

۳- معادلهٔ پواسون معادله‌ای است بامشتقات پاره‌ای

۴- بادردست داشتن بستگی تابعی $\rho(x, y, z)$ وشرایط مرزی مناسب می‌توان آن‌را حل کرد

۵- عملگر ∇^2 به‌دستگاه مختصات خاصی بستگی ندارد.

عملگر لاپلاسی در دستگاههای مختصات مختلف

در دستگاه مختصات قائم:

$$\nabla^2 \varphi \equiv \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}$$

دردستگاه مختصات استوانه‌ای:

$$\nabla^2 \varphi \equiv \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial \varphi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}$$

دردستگاه مختصات کروی:

$$\nabla^2 \varphi \equiv \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin \theta \frac{\partial \varphi}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \phi^2}$$

۲.۳ معادلهٔ لاپلاس

در بعضی مسائل الکتروستاتیک که شامل رساناها هستند، تمام بارها یا درروی سطح رساناها یافت می‌شوند و یا به‌صورت بارهای نقطه‌ای ثابت‌اند. دراین موارد ρ دراکثرنقاط فضا مساوی صفر است، و هرجاکه چگالی بارصفر باشد معادلهٔ پواسون به‌صورت ساده‌تر زیر درمی‌آید

معادله لاپلاس

$$\nabla^{2}\varphi = 0$$

حل معادله لاپلاس

پیدا کردن تابع پتانسیلی که در هر نقطه از فضای مورد نظر بتواند پتانسیل را مشخص سازد

حل معادله لاپلاس در حضور رساناها

فرض کنید N رسانا در پتانسیلهای φ_{I}، φ_{II}، . . . ، φ_{N} قرار دارند. مسئله‌ای که می‌خواهیم

حل کنیم پیدا کردن پتانسیل در تمام نقاط فضای خارج از رساناهاست

باید جوابی برای معادلهٔ لاپلاس پیدا کنیم که مقدار آن درروی سطح رساناها به φ_{I}، φ_{II}، . . . ، φ_{N} تبدیل شود.

چنین جوابی برای معادلهٔ لاپلاس جوابی یکتاست

هیچ جواب دیگری برای معادلهٔ لاپلاس وجود ندارد که درهمان شرایط مرزی صدق کند

جواب معادلهٔ لاپلاس که بدین طریق به‌دست می‌آید در درون رساناها صدق نمی‌کند

روشهای حل معادله لاپلاس

روش اول پیدا کردن یك جواب کلی برای معادلهٔ

ترکیب جوابهای خصوصی معـــادله

روش دوم روش تصویرها

بعضی خواص مهم جواب معادلهٔ لاپلاس

قضیهٔ اول. اگر φ_1، φ_2؛ . . . ، φ_n همگی جوابهای معادلهٔ لاپلاس باشند آنگاه φ،

$$\varphi = C_1\varphi_1 + C_2\varphi_2 + \cdots + C_n\varphi_n \qquad (10.3)$$

که درآن C ها ثابتهای اختیاری‌اند نیزجواب این معادله خواهد بود.

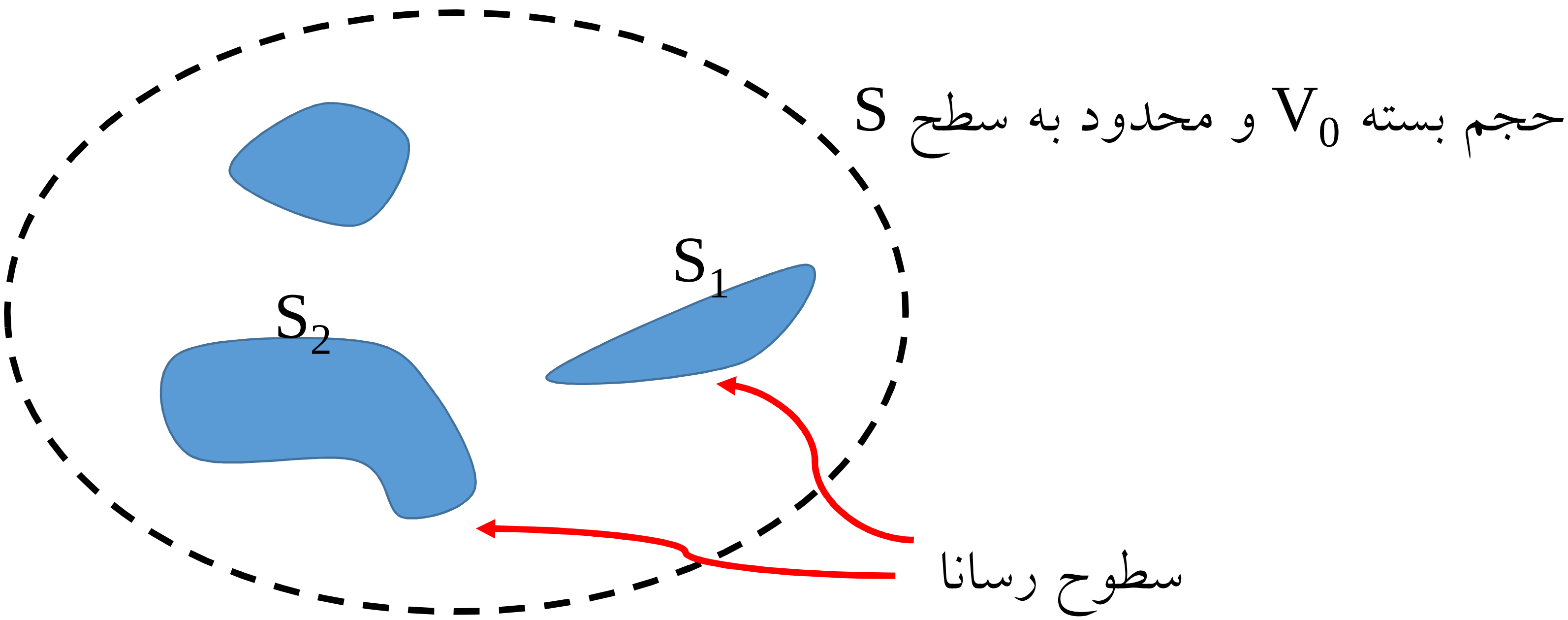
اثبات

$$\begin{aligned}\nabla^2\varphi &= \nabla^2 C_1\varphi_1 + \nabla^2 C_2\varphi_2 + \cdots + \nabla^2 C_n\varphi_n \\ &= C_1\nabla^2\varphi_1 + C_2\nabla^2\varphi_2 + \cdots + C_n\nabla^2\varphi_n \\ &= 0\end{aligned}$$

بااستفاده ازقضیهٔ اول می‌توان دویا چند جواب از معادلهٔ لاپلاس را طوری باهم ترکیب کردکه جواب حاصل درمجموعه‌ای ازشرایط مرزی صدق کند.

قضیهٔ دوم (قضیهٔ یکتایی). دوجواب معادلهٔ لاپلاس‌که در شرایط مرزی یکسانی صدق کنند یا باهم برابرند یا اختلافشان عدد ثابتی است.

اثبات:



فرض کنید φ_1 و φ_2 دوجواب معادلهٔ لاپلاس در فضای V_0 اند

$$\vec{\nabla}\varphi_1 = 0 \qquad , \quad \vec{\nabla}\varphi_2 = 0$$

φ_1 و φ_2 شرایط مرزی یکسانی بر روی سطوح رسانا دارند. $\varphi_1 = \varphi_2$

این شرایط مرزی با تعیین مقدار φ و یا $\partial\varphi/\partial n$ برروی این سطوح مرزی مشخص می‌شوند.

تابع جدید $\Phi = \varphi_1 - \varphi_2$ را تعریف می‌کنیم $\nabla^2\Phi = \nabla^2\varphi_1 - \nabla^2\varphi_2 = 0$

قضیهٔ واگرایی را درمورد بردار $\Phi\nabla\Phi$

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{F}\, dv = \oint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, da$$

$$\int_{V_\circ} \nabla \cdot (\Phi\nabla\Phi)\, dv = \underbrace{\int_{s+s_1+...s_N} \Phi\nabla\Phi \cdot \mathbf{n}\, da}_{\text{صفر}}$$

انتگرال دوم مساوی صفرمی‌شود. Φ و یا $\mathbf{n} \cdot \nabla\Phi$ درروی سطوح‌مرزی‌صفر می‌شود.

$$\varphi_1 = \varphi_2 \quad \rightarrow \quad \Phi = \varphi_1 - \varphi_2 = 0$$

$$\hat{n} \cdot \vec{\nabla}\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial n} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} = 0$$

طرف اول انتگرال

$$\nabla \cdot (\Phi \nabla \Phi) = \Phi \nabla^{2} \Phi + (\nabla \Phi)^{2}$$

$\nabla^{2}\Phi$ در تمام نقاط V_{0} صفر

$$\nabla^2 \Phi = \nabla^2 \varphi_1 - \nabla^2 \varphi_2 = 0 - 0 = 0$$

قضیهٔ واگرایی $\Rightarrow$ $\int_{V_{0}} (\nabla \Phi)^{2}\, dv = 0$

اما $(\nabla\Phi)^{2}$ درهر نقطه در V_{0} باید صفر یا مثبت باشد، وچون انتگرال آن مساوی صفر است، واضح است که فقط $(\nabla\Phi)^{2} = 0$ امکان‌پذیر خواهد بود.

$$\left|\vec{\nabla}\Phi\right|^2 = 0 \quad \rightarrow \quad \vec{\nabla}\Phi = 0 \quad \rightarrow \quad \vec{\nabla}\Phi = \vec{\nabla}(\varphi_1 - \varphi_2) = 0$$

$$\rightarrow \quad \varphi_1 - \varphi_2 = c$$

۳.۳ معادلهٔ لاپلاس با یک متغیر مستقل

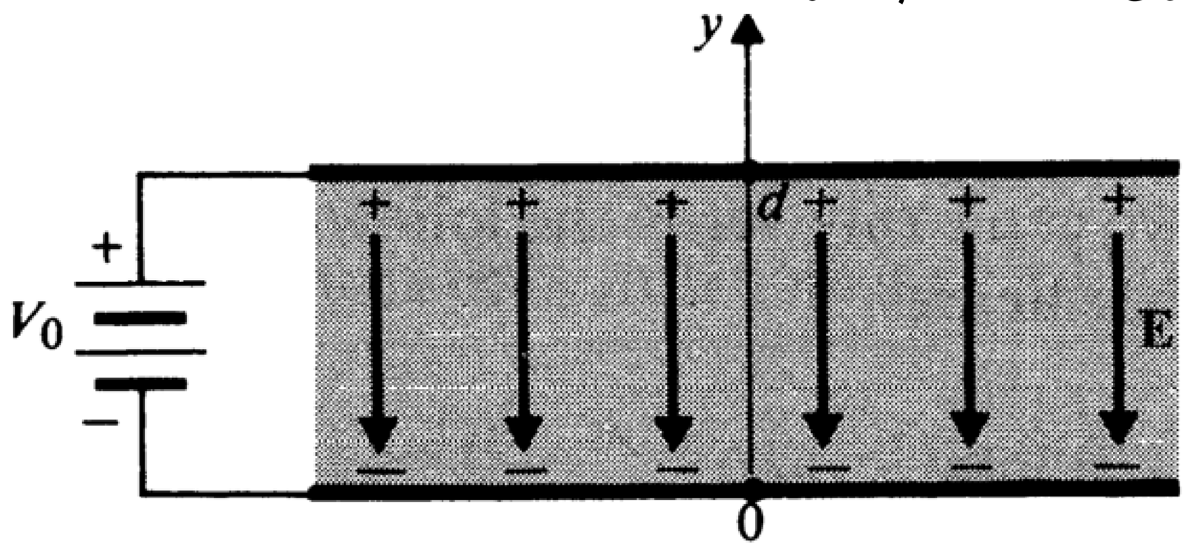
$$\nabla^2\varphi = 0$$

$$\varphi = \varphi(x)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d^2\varphi}{dx^2} = 0 \quad \text{و} \quad \varphi(x) = ax + b$$

درآن a و b ثابتهایی‌اند که بادرنظر گرفتن شرایط مرزی انتخاب می‌شوند.

مثال) دو صفحه رسانای خازن تخت که به موازات و در فاصله d از هم قرار دارند دارای پتانسیل های ثابت صفر و V_0 می باشند. با صرف نظر کردن از لبه ها، پتانسیل را در هر نقطه بین لبه ها مشخص کنید. چگالی بار سطحی روی صفحات چقدر است.



between the plates $\rho = 0 \longrightarrow \nabla^2 V = 0$

$$\frac{d^2V}{dy^2} = 0 \longrightarrow \frac{dV}{dy} = C_1 \longrightarrow V = C_1 y + C_2$$

Two boundary conditions $\begin{cases} \text{At } y = 0, & V = 0. \\ \text{At } y = d, & V = V_0 \end{cases}$

$C_1 = V_0/d$ and $C_2 = 0$

$$V = \frac{V_0}{d} y$$

find the surface charge densities

$$\mathbf{E} = -\nabla V \longrightarrow \mathbf{E} = -\mathbf{a}_y \frac{dV}{dy} = -\mathbf{a}_y \frac{V_0}{d}$$

میدان الکتریکی ثابت و مستقل از y و میدان در خلاف جهت افزایش V

Boundary Conditions

at a Conductor/Free Space Interface

$$\boxed{\begin{aligned} E_t &= 0 \\ E_n &= \frac{\rho_s}{\epsilon_0} \end{aligned}}$$

At the lower plate $\Rightarrow$ $\mathbf{a}_n = \mathbf{a}_y, \quad E_{n\ell} = -\frac{V_0}{d}, \quad \rho_{s\ell} = -\frac{\epsilon V_0}{d}$

At the upper plate $\Rightarrow$ $\mathbf{a}_n = -\mathbf{a}_y, \quad E_{nu} = \frac{V_0}{d}, \quad \rho_{su} = \frac{\epsilon V_0}{d}$

درمختصات کروی که در آن φ به‌صورت $\varphi(r)$

$$\nabla^{۲}\varphi \equiv \frac{۱}{r^{۲}}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^{۲}\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)+\frac{۱}{r^{۲}\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\right)+\frac{۱}{r^{۲}\sin^{۲}\theta}\frac{\partial^{۲}\varphi}{\partial\phi^{۲}}$$

$$\frac{۱}{r^{۲}}\frac{d}{dr}\left(r^{۲}\frac{d\varphi}{dr}\right)=۰\Rightarrow\varphi(r)=-\frac{a}{r}+b$$

در دستگاه مختصات استوانه ای

$$\nabla^{۲}\varphi \equiv \frac{۱}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)+\frac{۱}{r^{۲}}\frac{\partial^{۲}\varphi}{\partial\theta^{۲}}+\frac{\partial^{۲}\varphi}{\partial z^{۲}}$$

$$\varphi = \varphi(r)$$

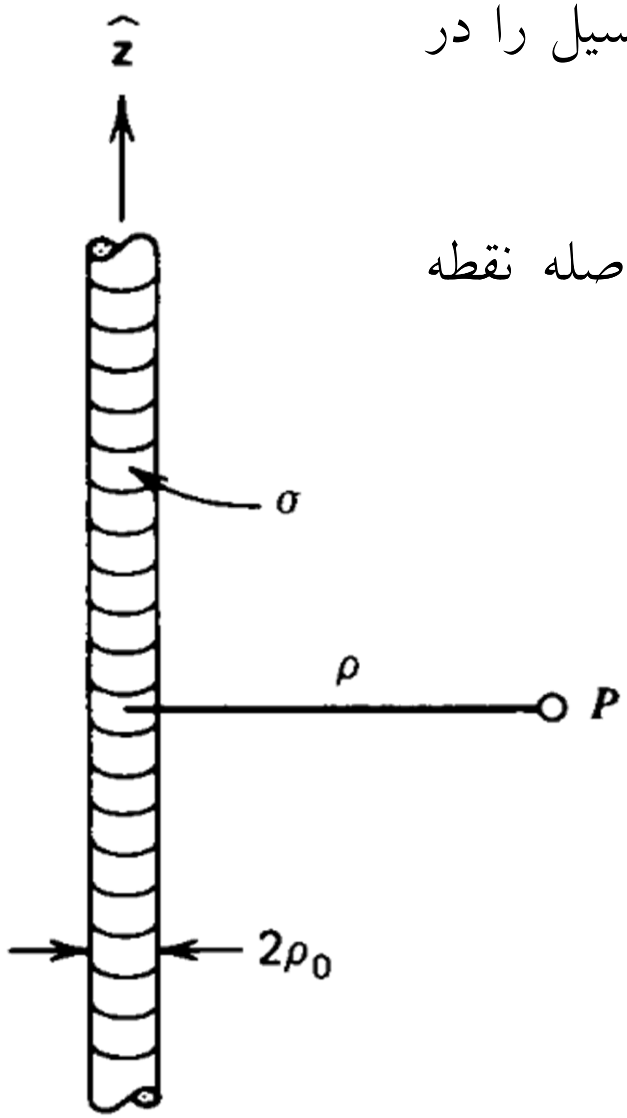
$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{d\varphi}{dr}\right)=0 \quad \rightarrow \quad \frac{d\varphi}{dr}=\frac{a}{r} \quad \rightarrow \quad \varphi = a\ln r + b$$

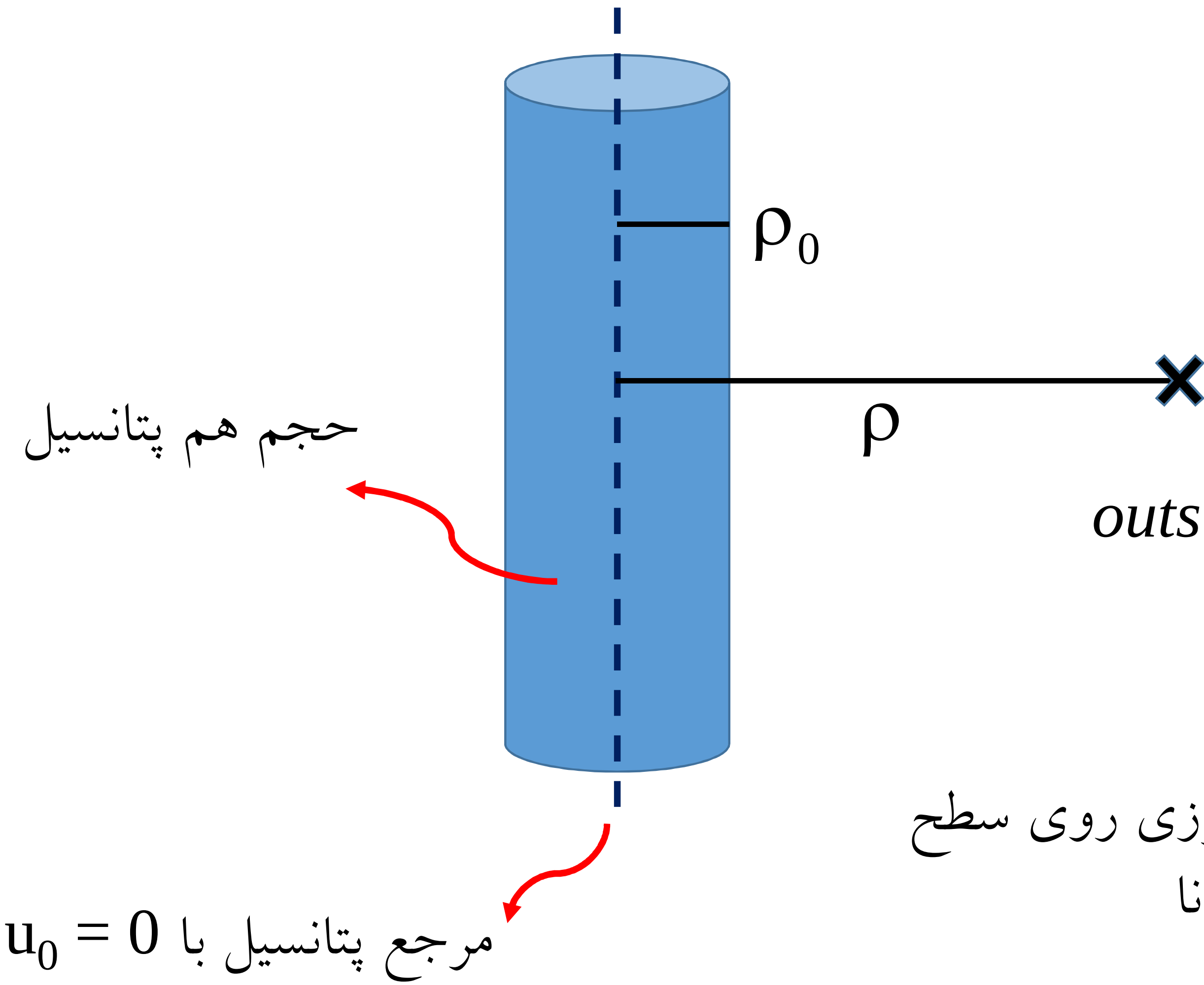
$$or$$

$$\varphi = a\ln\frac{r}{r_0}$$

مثال) یک میله رسانا شامل بار سطحی با چگالی بار σ داریم. پتانسیل را در فاصله ρ از محور میله بدست آورید.

با توجه به تقارن مسئله میدان الکتریکی و پتانسیل وابسته به فاصله نقطه نسبت به محور میله است و وابستگی زاویه ای ندارد.





$$outside: \quad \rho = 0 \quad \rightarrow \quad \nabla^2 \Phi = 0$$

$$\Phi = a \ln(\rho/\rho_0).$$

شرایط مرزی روی سطح
مسله رسانا

$$\Phi(\rho = \rho_0) = 0$$

at the surface of a conductor $E = \sigma/\varepsilon_0$,

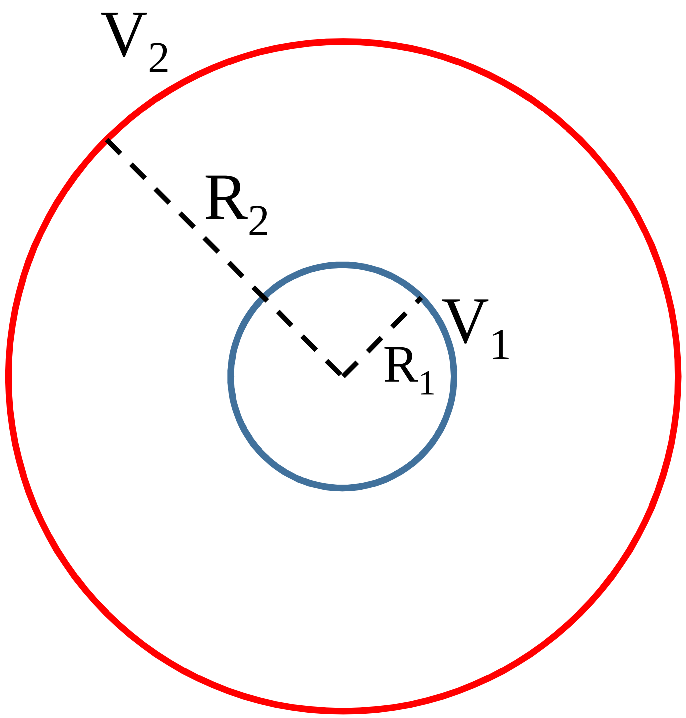
$$-\left.\frac{\partial\Phi}{\partial\rho}\right|_{\rho=\rho_0} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \Rightarrow -\frac{a}{\rho_0} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \quad \text{or} \quad a = -\frac{\rho_0\sigma}{\varepsilon_0}$$

$$\Phi = -\frac{\rho_0\sigma}{\varepsilon_0}\ln\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right) = \frac{-\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right) \qquad \rho > \rho_0$$

λ is the charge per unit length of the rod. $2\pi\rho_0 L\sigma = \lambda L$

مثال) **خازن کروی**: دو پوسته کروی هم مرکز دارای شعاع های R_1 و R_2 می باشند که به ترتیب در پتانسیل های ثابت V_1 و V_2 قرار دارند.

مبداء مختصات مرکز کره ها انتخاب می شود



با توجه به تقارن مسئله پتانسیل مستقل از زوایای θ و ϕ می باشد.

$$\Phi = \frac{a}{r} + b$$

شرایط مرزی

$$\begin{cases} r = R_1 : \quad V_1 = \dfrac{a}{R_1} + b \\ r = R_2 : \quad V_2 = \dfrac{a}{R_2} + b \end{cases} \Rightarrow \quad a \; , \; b$$

پتانسیل یک نقطه بین دو رسانا

$$\Phi = -\left(\frac{V_2 - V_1}{R_2 - R_1}\right)\frac{R_2 R_1}{r} + \frac{R_2 V_2 - R_1 V_1}{R_2 - R_1}$$

میدان در یک نقطه بین دو رسانا

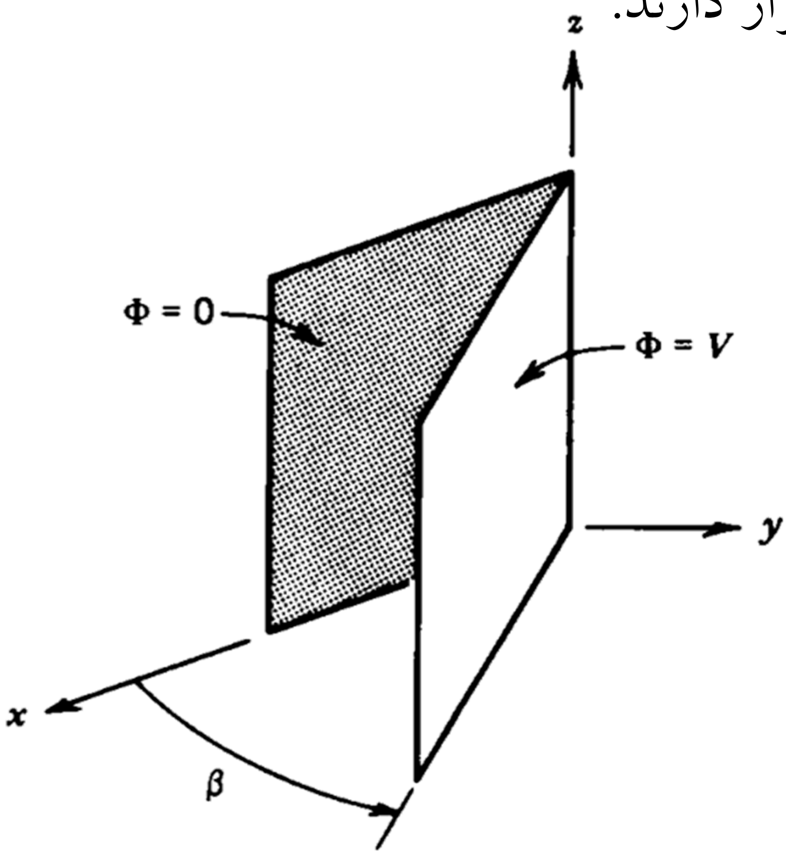
$$\mathbf{E} = -\left(\frac{V_2 - V_1}{R_2 - R_1}\right)\frac{R_2 R_1}{r^2}\,\hat{\mathbf{r}}$$

$$q_1 = \varepsilon_0 \int \mathbf{E}\cdot\hat{\mathbf{r}}\big|_{R_1}\, da = -4\pi\varepsilon_0\left(\frac{V_2 - V_1}{R_2 - R_1}\right)R_1 R_2$$

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{r^2}\,\hat{\mathbf{r}}$$

مثال) **خازن سه کنج (Wedge capacitor)**:

دو صفحه رسانای بزرگ در شکل یک سه کنج با هم زاویه β می سازند صفحات از همدیگر جدا و عایق می باشند. این صفحات در پتانسیل های صفر و V ولت قرار دارند.



در یک دستگاه مختصات استوانه ای، پتانسیل از مختصات z و ρ مستقل می باشد.

پتانسیل فقط تابعی از زاویه ϕ است.

$$\nabla^2 f = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho \frac{\partial f}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

$$\mathbf{E} = -\frac{V}{\beta\rho}\hat{\boldsymbol{\phi}}$$

$$\frac{1}{\rho^2}\frac{d^2\Phi}{d\phi^2} = 0$$

$$\Phi = a\phi + b$$

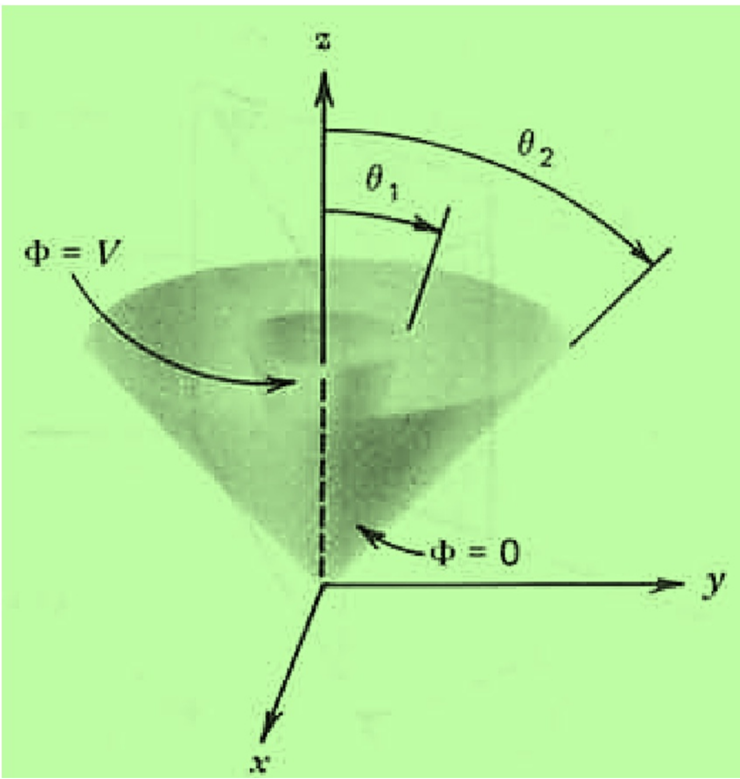
At $\phi = 0$, $\Phi = 0$; $\longrightarrow$ $b = 0$.

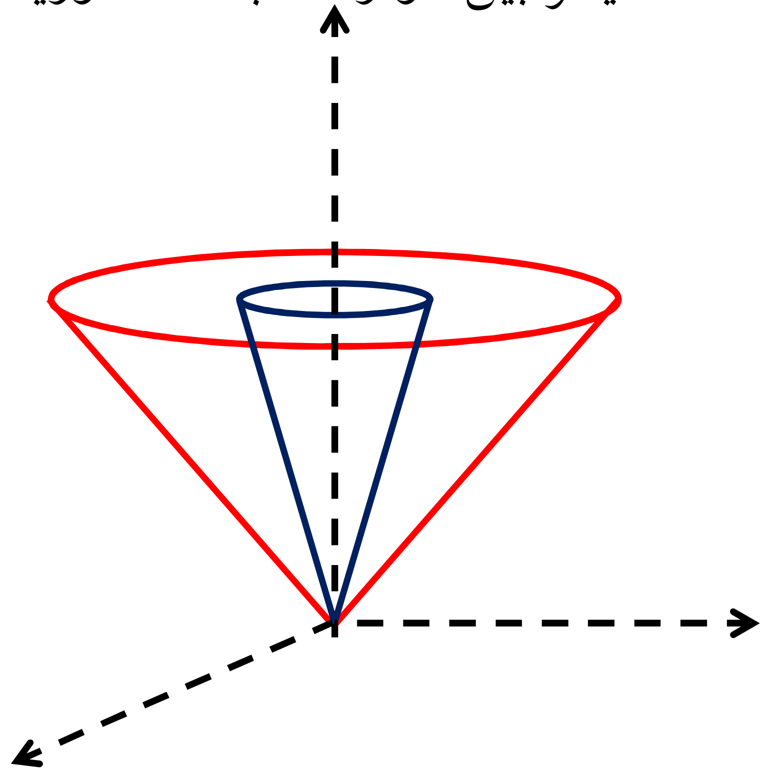
At the other plane ($\phi = \beta$), $\Phi = V$: $\longrightarrow$ $a = V/\beta$.

$$\Phi = \frac{V}{\beta}\phi \qquad \rightarrow \qquad \vec{E} = -\frac{V}{\beta\rho}\hat{\phi}$$

مثال) **خازن مخروطی هم محور** (**Coaxial conic capacitor**):

دو مخروط رسانا هم محور (در امتداد محور z) که مبدا آنها یکسان و در مبدا قرار دارد زاویه راس آنها θ_1 و θ_2 می باشد. مخروط ها از هم عایق و در پتانسیل های صفر و V قرار دارند. تابع پتانسیل را برای نقاط دیگر بین دو رسانا بدست آورید





در دستگاه مختصات کروی و در صورتی که مخروط ها به اندازه کافی بزرگ می باشند:

صرف نظر کردن از اثرت لبه - پتانسیل مستقل از r و ϕ - پتانسیل تابعی از زاویه θ

$$\nabla^{2}\varphi \equiv \frac{1}{r^{2}}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^{2}\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^{2}\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^{2}\sin^{2}\theta}\frac{\partial^{2}\varphi}{\partial\phi^{2}}$$

$$\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d\Phi}{d\theta}\right)=0$$

$$\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d\Phi}{d\theta}\right)=0$$

$$\frac{d\Phi}{d\theta}=\frac{a}{\sin\theta}$$

$$\Phi = a\ln\left(\tan\frac{\theta}{2}\right)+b$$

$$\begin{cases} \text{At } \theta = \theta_1,\ \Phi = V, \\ \theta = \theta_2,\ \Phi = 0; \end{cases}$$

شرایط مرزی

$$a \ln\left(\tan\frac{\theta_1}{2}\right) + b = V \qquad \text{and} \qquad a \ln\left(\tan\frac{\theta_2}{2}\right) + b = 0$$

$$a = \frac{V}{\ln\left[\dfrac{\tan(\theta_1/2)}{\tan(\theta_2/2)}\right]} \qquad \text{and} \qquad b = -a \ln\left(\tan\frac{\theta_2}{2}\right)$$

$$\Phi = V \frac{\ln\left[\dfrac{\tan(\theta/2)}{\tan(\theta_2/2)}\right]}{\ln\left[\dfrac{\tan(\theta_1/2)}{\tan(\theta_2/2)}\right]}$$