
بسم الله الرحمن الرحيم

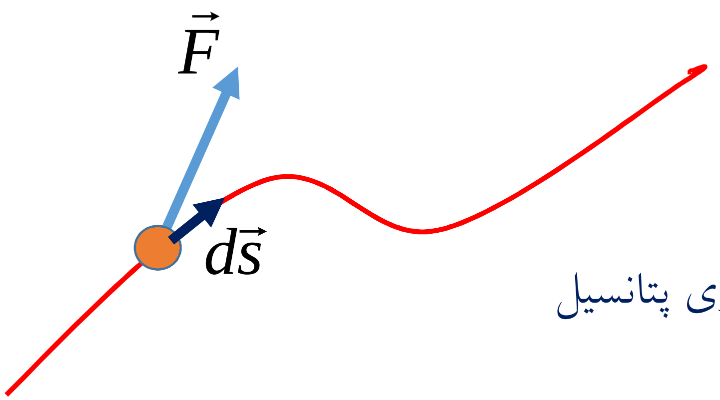
فصل چهارم

پتانسیل الکتریکی

تعریف انرژی پتانسیل

کار انجام شده توسط یک نیروی پایستار در یک جابه جایی به صورت تغییر در انرژی پتانسیل سیستم ظاهر می شود

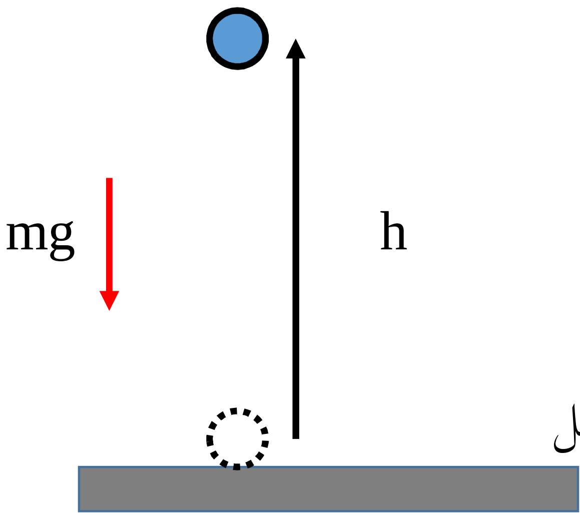
$$\Delta U = U_b - U_a = -\int_a^b \vec{F} \cdot d\vec{s}$$



مرجع انرژی پتانسیل

$$U_a = 0 \quad \rightarrow \quad U_b = -\int_a^b \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{s}$$

محاسبه انرژی پتانسیل جسمی به جرم m در ارتفاع h



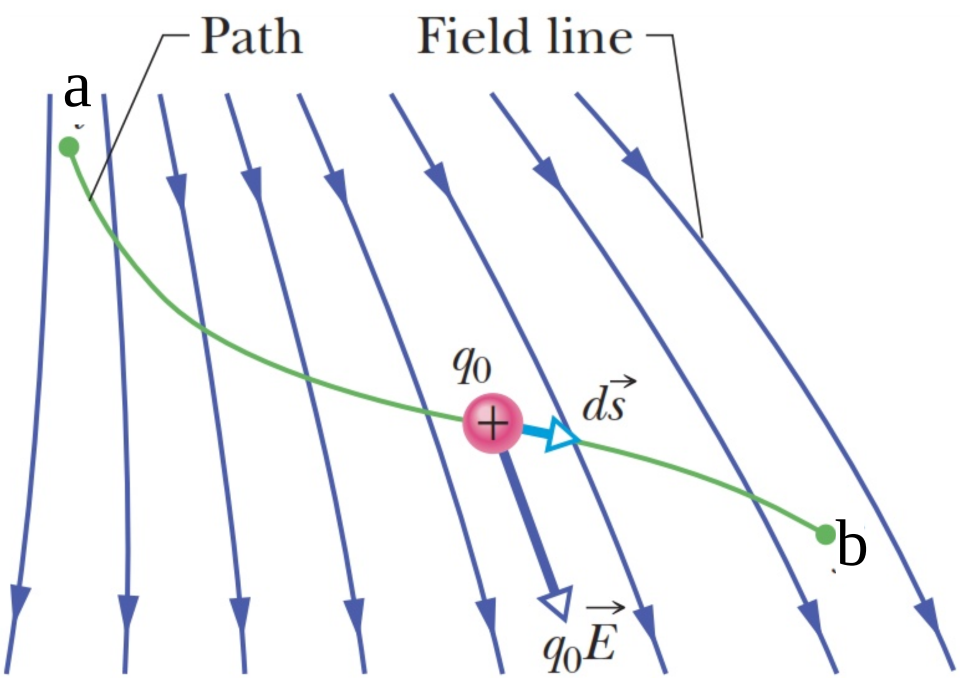
U_0 مرجع انرژی پتانسیل

$$U(h) = U_0 - W_{mg} = 0 - (-mgh)$$

$$U(h) = mgh$$

انرژی پتانسیل الکتریکی

نیروی الکتریکی یک نیروی پایستار بوده و لذا می توان برای آن انرژی پتانسیل را تعریف نمود



$$\vec{F}(\vec{r}) = q\vec{E}(\vec{r})$$

$$\Delta U = -\int_a^b \vec{F}.\, d\vec{s}$$

$$\Delta U = -q\int_a^b \vec{E}(\vec{r}).\, d\vec{s}$$

نکات

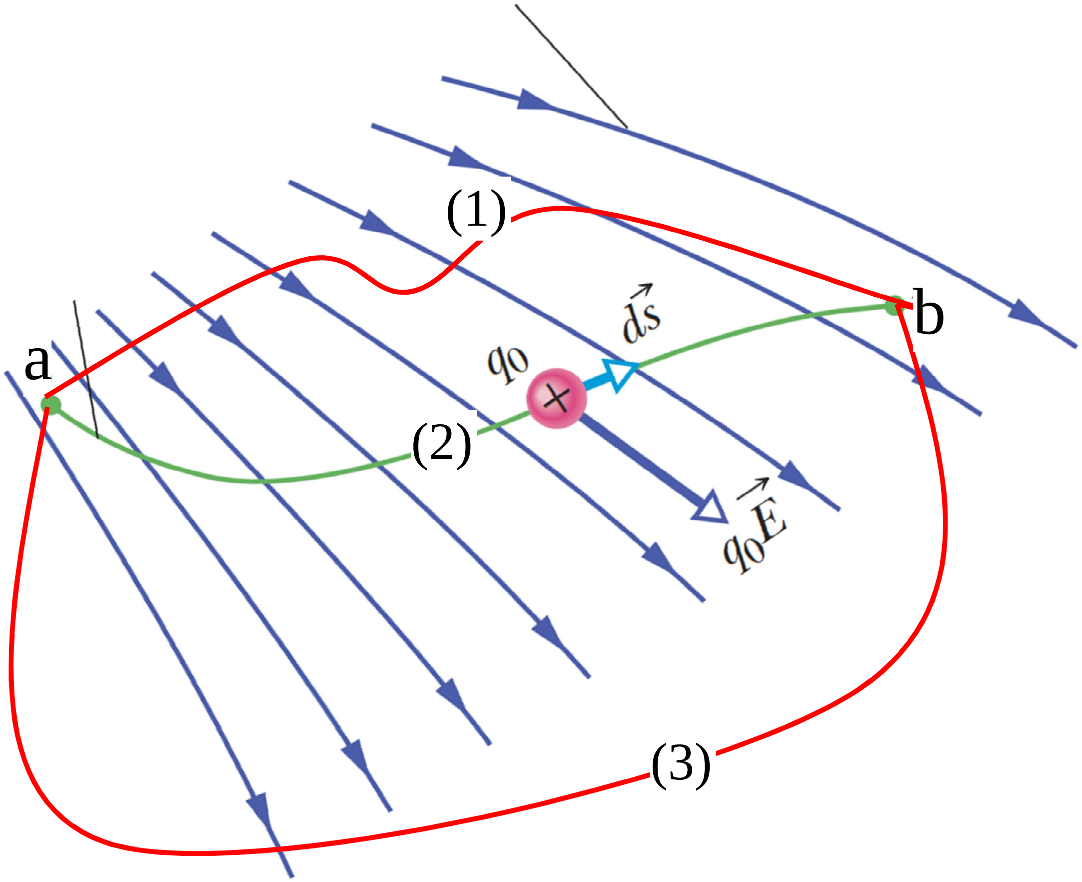
۱- رابطه فوق تغییر انرژی ذره باردار در میدان الکتریکی و در جابه جایی بین دو نقطه را نشان می دهد.

۲- با توجه به آنکه نیروی الکتریکی یک نیروی پایستار است کار آن مستقل از مسیر است

$$\int_a^b \vec{E}(\vec{r}).\, d\vec{s}$$

مستقل از مسیر

۳- از هر مسیری از a به b برویم جواب انتگرال تغییر انرژی پتانسیل یکسان بوده و فقط به نقاط ابتدایی و انتهایی بستگی دارد.

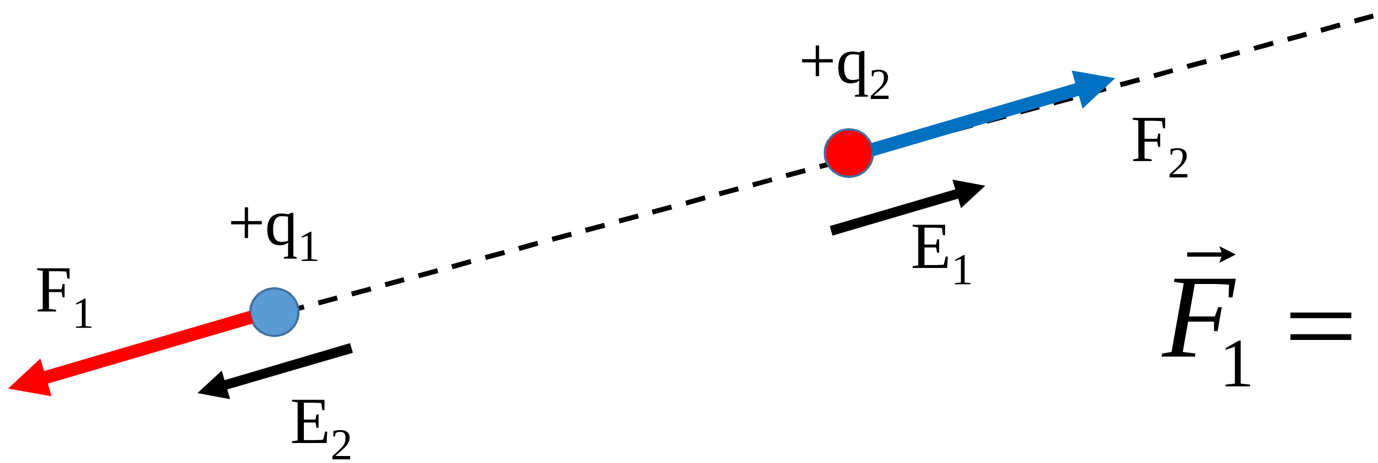


$$\underbrace{\int_a^b \vec{E}(\vec{r}).d\vec{s}}_{1} = \underbrace{\int_a^b \vec{E}(\vec{r}).d\vec{s}}_{2} = \underbrace{\int_a^b \vec{E}(\vec{r}).d\vec{s}}_{3}$$

انرژی پتانسیل الکتریکی سیستم دو ذره ای

فرضها:

- سیسیتم شامل بارهای q_1 و q_2
- بار q_1 ساکن و بار q_2 در میدان بار q_1 از نقطه a به نقطه b می رود.
- جابه جایی q_2 نسبت به q_1 به صورت شعاعی است



$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$$

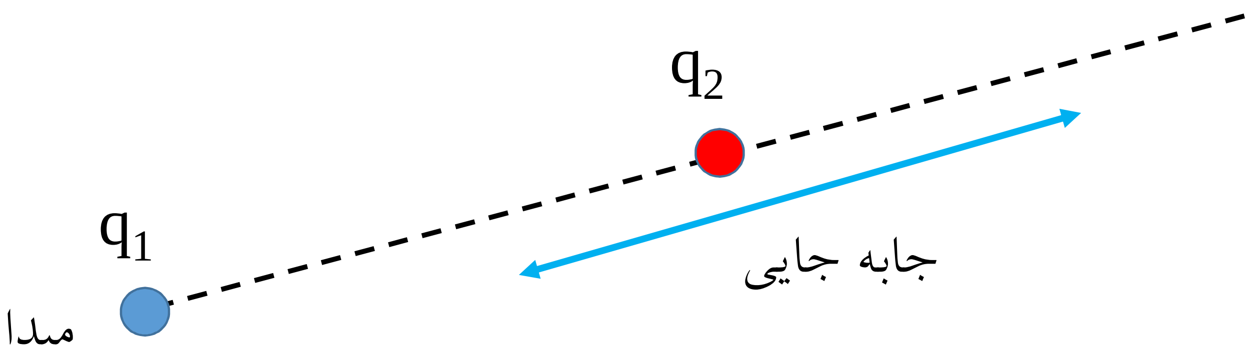
محاسبه کار انجام شده روی ذرات:

ذره q_1 ساکن

$$W = 0 \quad \rightarrow \quad \Delta U_1 = 0$$

ذره q_2 متحرک

$$W \neq 0 \quad \rightarrow \quad \Delta U_2 = ?$$



$$\Delta U = \Delta U_1 + \Delta U_2 = \Delta U_2$$

تغییر انرژی پتانسیل سیستم دو ذره ای وقتی بار q_2 در حضور میدان ذره q_1 از نقطه a به نقطه b می رود

$$\Delta U = -q_2 \int_a^b \vec{E}_1 \cdot d\vec{s} = ?$$

میدان ذره q_1 در محل ذره q_2

$$\vec{E}_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{r^2}\hat{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{r^3}\vec{r}$$

جابه جایی در راستای شعاع

$$d\vec{s} = dr\ \hat{r}$$

$$\vec{E}_1 \cdot d\vec{s} = E_1 dr$$

$$\Delta U = -q_2 \int_a^b \vec{E}_1 \cdot d\vec{s} = -q_2 \int_{r_a}^{r_b} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1}{r^2} dr = \frac{-q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{-1}{r}\right)\Big|_{r_a}^{r_b}$$

$$\boxed{\Delta U = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{1}{r_b} - \frac{1}{r_a}\right)}$$

اگر تغییر انرژی پتانسیل الکتریکی در مقایسه با مرجع انرژی پتانسیل بیان شود

مرجع انرژی پتانسیل در بینهایت فیزیکی انتخاب می شود جایی که دو ذره نیرویی برهم وارد

نمی سازند با انرژی $U_a = 0$

$$\Delta U = U_b - U_a = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{1}{r_b} - \frac{1}{\infty}\right)$$

انرژی پتانسیل سیستم دو ذره ای هنگامی
که در فاصله r از هم قرار دارند

$$\boxed{U(r) = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r}}$$

حالتهای مختلف برای رابطه تغییر انرژی پتانسیل

$$\Delta U = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_b} - \frac{1}{r_a}\right)$$

در هر جابه جایی بسته به نوع بارهای q_1 و q_2 و نیز دور یا نزدیک شدن بارها نسبت به هم تغییر انرژی پتانسیل متفاوت است

بارهای هم نام – بارهای غیر همنام $\quad q_1 q_2 > 0 \quad , \quad q_1 q_2 < 0$

دور شدن بارها – نزدیک شدن بارها $\quad r_a > r_b \quad , \quad r_a < r_b$

حالت اول) بارهای مخالف از هم دور شوند

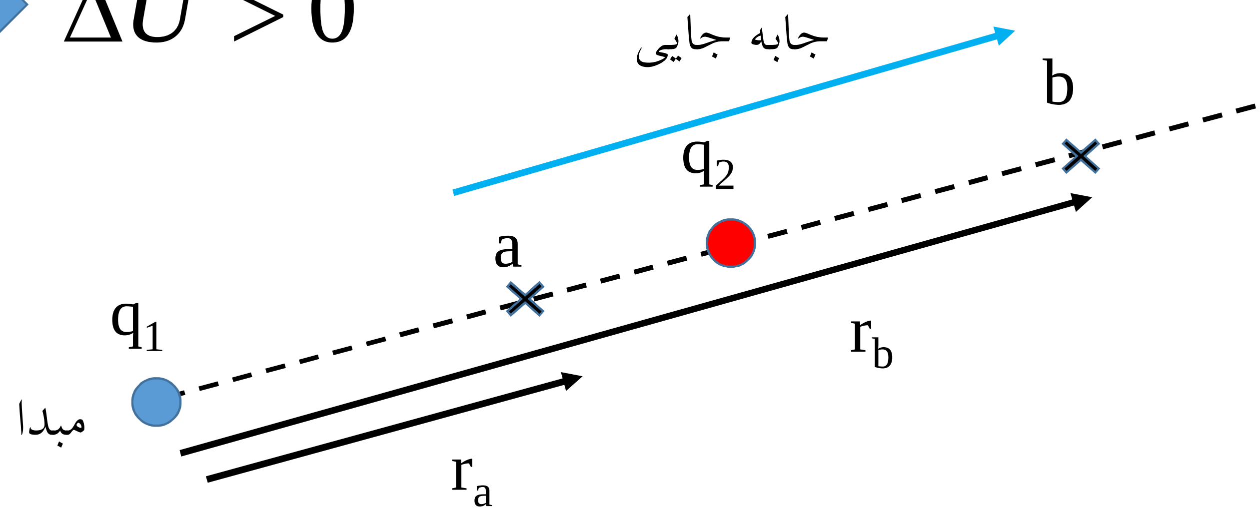
نیروی بین دو ذره جاذبه

q_2 از q_1 دور می شود $r_a < r_b$

$$r_a < r_b \quad \rightarrow \quad \frac{1}{r_b} - \frac{1}{r_a} < 0$$

$$\rightarrow \quad q_1 \cdot q_2 < 0$$

$$\Delta U > 0$$



حالت دوم) بارهای مخالف به همدیگر نزدیک شوند

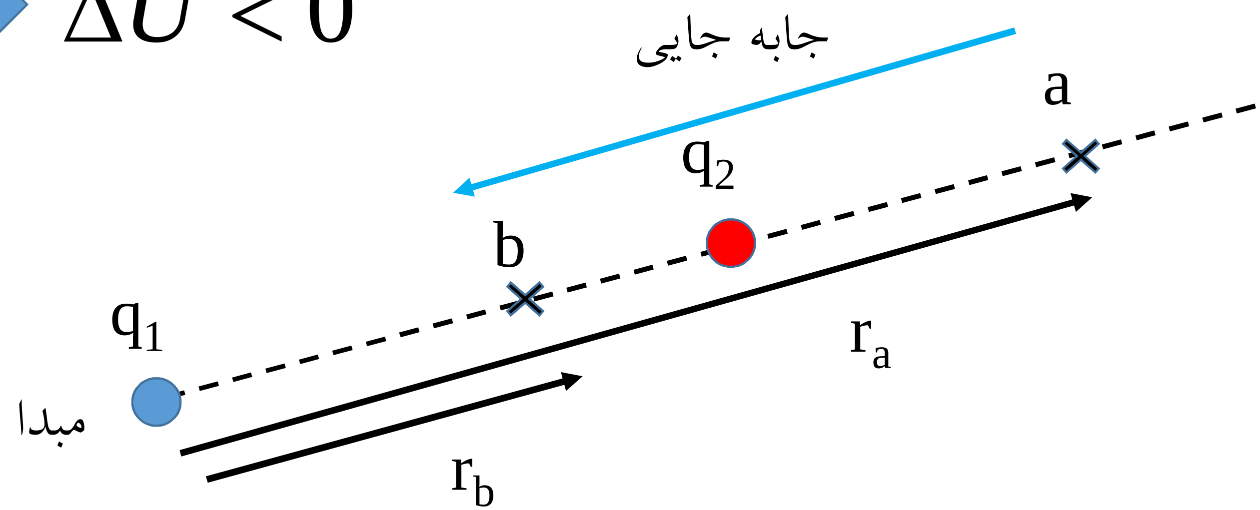
$$r_a > r_b \quad \rightarrow \quad \frac{1}{r_b} - \frac{1}{r_a} > 0$$

نیروی بین دو ذره جاذبه

q_2 به q_1 نزدیک شود $r_a > r_b$

$$\rightarrow \quad q_1 . q_2 < 0$$

$$\Delta U < 0$$



حالت سوم) بارهای هم علامت از هم دور شوند

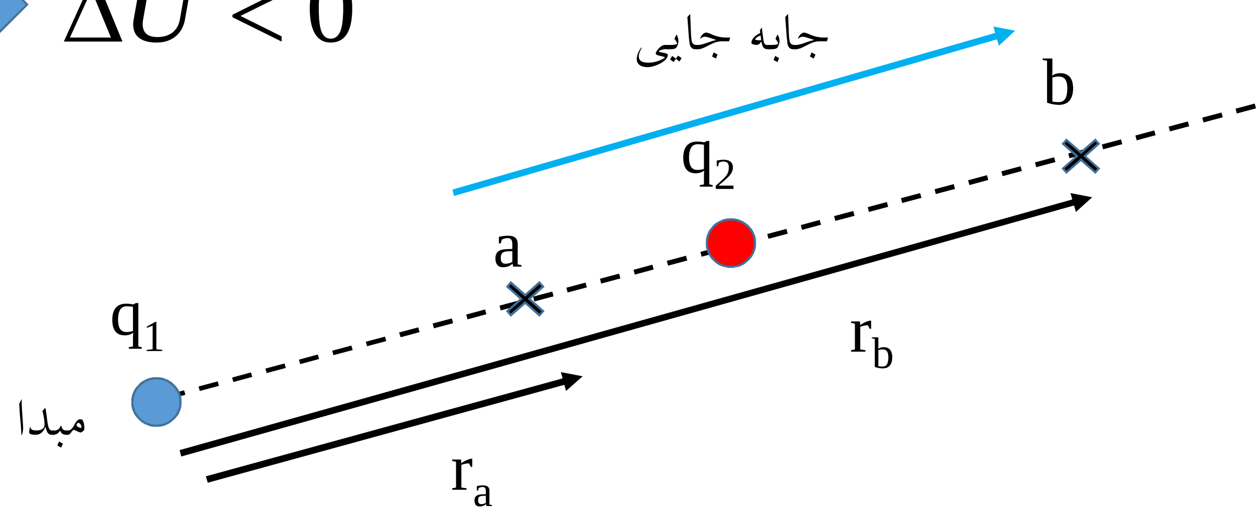
نیروی بین دو ذره دافعه

q_2 از q_1 دور می شود $r_a < r_b$

$$r_a < r_b \quad \rightarrow \quad \frac{1}{r_b} - \frac{1}{r_a} < 0$$

$$\rightarrow \quad q_1 \cdot q_2 > 0$$

$$\Delta U < 0$$



حالت چهارم) بارهای هم علامت به همدیگر نزدیک شوند

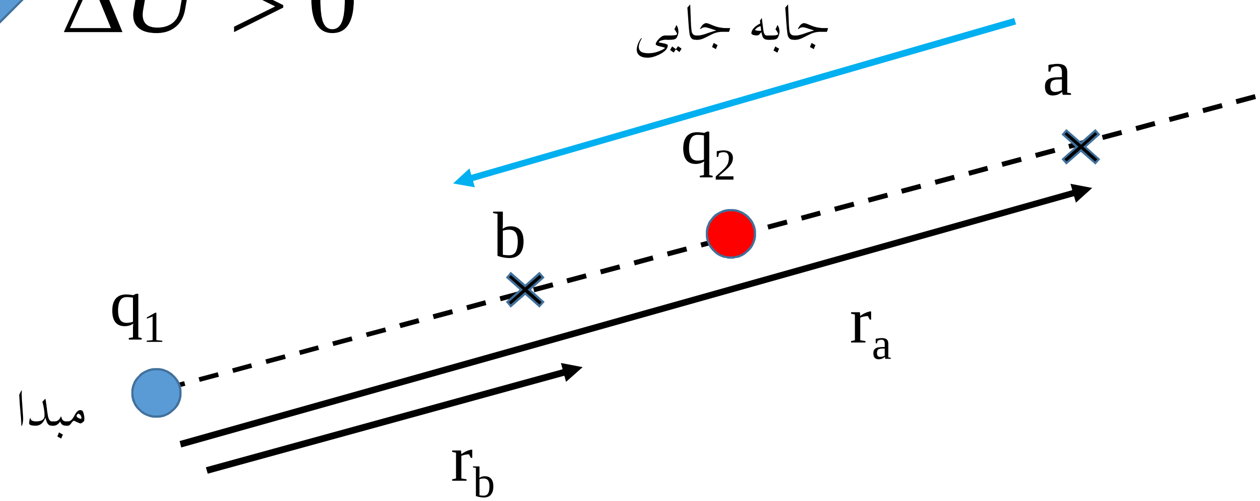
نیروی بین دو ذره دافعه

q_2 به q_1 نزدیک شود $r_a > r_b$

$$r_a > r_b \quad \rightarrow \quad \frac{1}{r_b} - \frac{1}{r_a} > 0$$

$$\rightarrow \quad q_1 \,.\, q_2 > 0$$

$$\Delta U > 0$$



خلاصه حالتها)

۱- هنگامی که بارهای مخالف به همدیگر نزدیک می شوند با توجه به اینکه در جهت تمایل حرکتی آنها، حرکت می کنند انرژی پتانسیل کاهش می یابد.

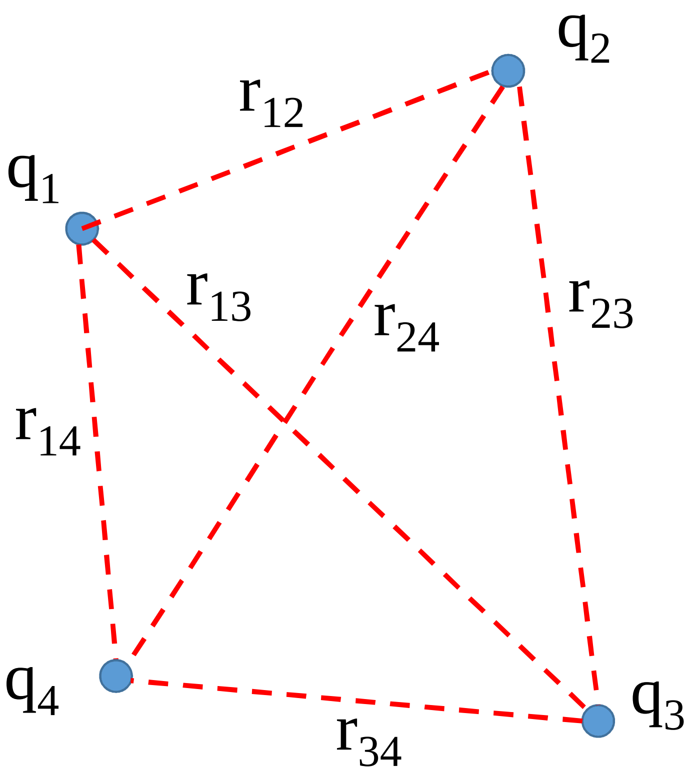
۲- هنگامی که بارهای مخالف از همدیگر دور می شوند با توجه به اینکه در خلاف جهت تمایل حرکتی آنها، حرکت می کنند لذا انرژی پتانسیل سیستم افزایش می یابد.

خلاصه حالتها)

۳- هنگامی که بارهای هم علامت به همدیگر نزدیک می شوند با توجه به اینکه در خلاف جهت تمایل حرکتی آنها، حرکت می کنند لذا انرژی پتانسیل سیستم افزایش می یابد.

٤- هنگامی که بارهای هم علامت از همدیگر دور می شوند با توجه به اینکه در جهت تمایل حرکتی آنها، حرکت می کنند انرژی پتانسیل کاهش می یابد.

انرژی پتانسیل الکتریکی سیستم ذرات باردار

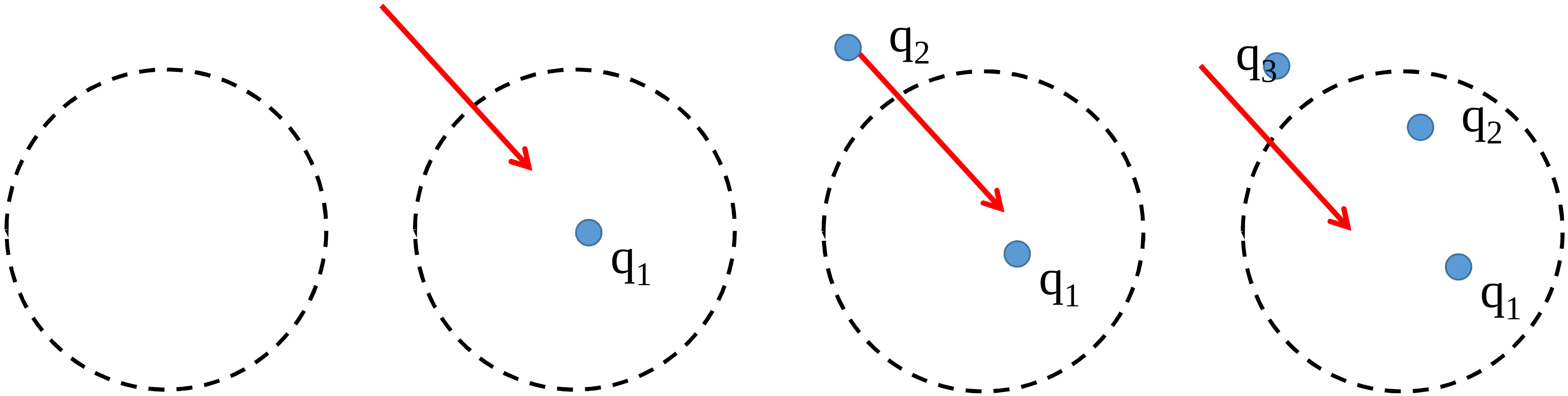


انرژی پتانسیل کل سیستم ذرات برابر با حاصلجمع جبری انرژی پتانسیل ذخیره شده بین دو به دوی ذرات باردار است

$$U_{total} = U_{12} + U_{13} + U_{14} + U_{23} + U_{24} + U_{34}$$

$$U_{total} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{q_1q_2}{r_{12}} + \frac{q_1q_3}{r_{13}} + \frac{q_1q_4}{r_{14}} + \frac{q_2q_3}{r_{23}} + \frac{q_2q_4}{r_{24}} + \frac{q_3q_4}{r_{34}}\right\}$$

تعبیر فیزیکی از رابطه انرژی پتانسیل الکتریکی سیستم ذرات باردار



فضای خالی

انتقال بار q_1

انتقال بار q_2 در حضور بار q_1

انتقال بار q_3 در حضور بار q_1 و q_2

$$U_0 = 0$$

$$U_1 = 0$$

$$U_2 = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_{12}}$$

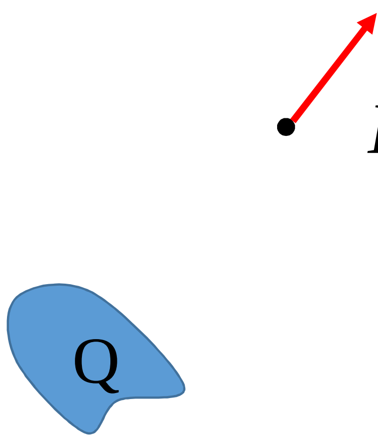
$$U_3 = \frac{q_1 q_3}{4\pi\varepsilon_0 r_{13}} + \frac{q_2 q_3}{4\pi\varepsilon_0 r_{23}}$$

$$U_t = \sum U_i$$

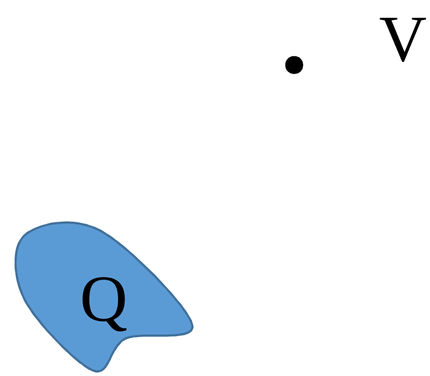
پتانسیل الکتریکی

تعریف: پتانسیل الکتریکی در یک نقطه از فضا، انرژی پتانسیل الکتریکی سیستم است هنگامی که یک بار آزمون q_0 در آن نقطه قرار گیرد.

در حضور میدان الکتریکی هر نقطه از فضای میدان دارای پتانسیلی است که اگر ذره بارداری در آن نقطه قرار گیرد به آن ذره نیرو وارد خواهد شد.

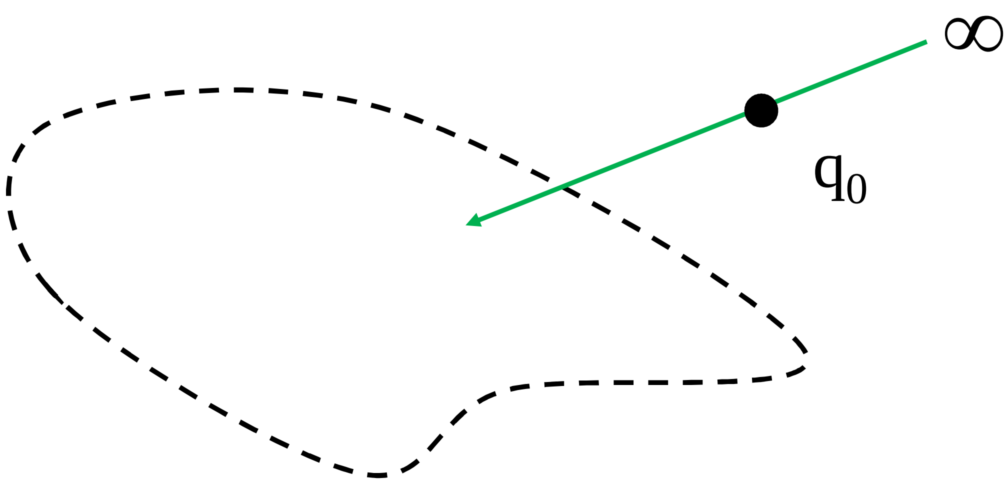


$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0}$$



ملاک تشخیص پتانسیل الکتریکی

با آوردن بار آزمون از بی نهایت به نقطه مورد نظر تغییرات انرژی پتانسیل الکتریکی ذخیره شده در سیستم محاسبه شده و از رابطه زیر پتانسیل الکتریکی در آن نقطه بدست می آید.

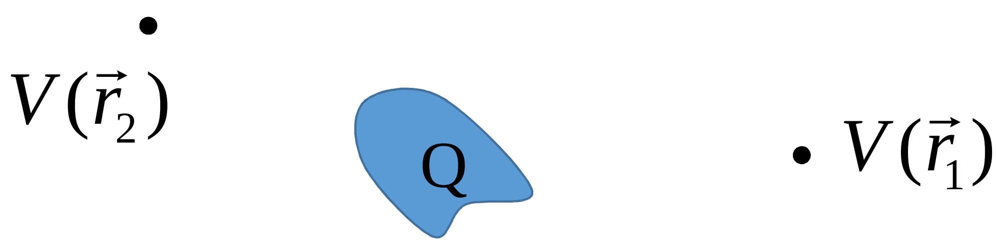


$$V(\vec{r}) = \frac{U(\vec{r})}{q_0}$$

نکات

۱- پتانسیل الکتریکی یک کمیت نرده ای است در حالی که میدان کمیت برداری است

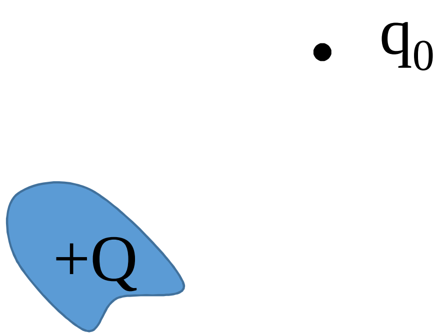
۲- پتانسیل می تواند وابسته به مکان در فضا باشد.



۳- بار آزمون ناچیز است تا بر پتانسیل نقطه تاثیری نگذارد.

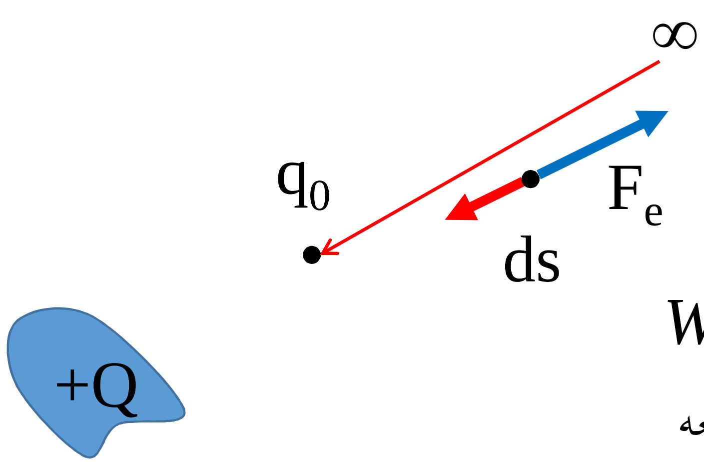
نکات

۴- پتانسیل الکتریکی حوالی توزیع بارهای مثبت، مثبت است



$$U \propto Qq_0 \quad \rightarrow \quad U > 0$$

$$V = \frac{U}{q_0} \quad \rightarrow \quad V > 0$$

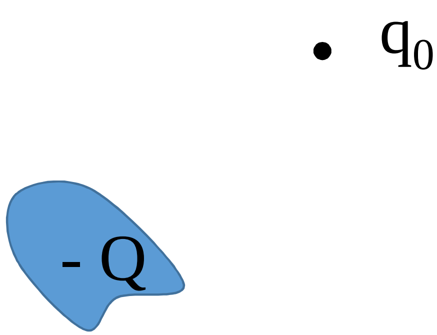


$$W_{F_e} < 0 \quad \rightarrow \quad U = -W_{F_e} > 0 \quad \rightarrow \quad V > 0$$

نیروی دافعه

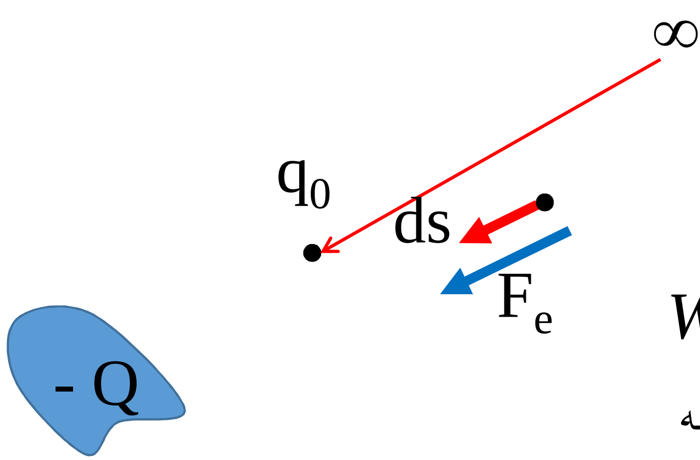
نکات

۵- پتانسیل الکتریکی حوالی توزیع بارهای منفی، منفی است



$$U \propto Qq_0 \quad \rightarrow \quad U < 0$$

$$V = \frac{U}{q_0} \quad \rightarrow \quad V < 0$$



$$W_{F_e} > 0 \quad \rightarrow \quad U = -W_{F_e} < 0 \quad \rightarrow \quad V < 0$$

نیروی جاذبه

نکات

۶- نقطه با پتانسیل صفر $\qquad \Delta U = 0 \quad \rightarrow \quad V = 0$

در انتقال بار از بی نهایت تا چنین نقطه ای تغییر انرژی پتانسیل صفر خواهد بود

۷- پتانسیل صفر الزاما به معنای میدان صفر نیست

$$V_t = V_+ + V_- = 0$$

$$E_t = E_+ + E_- \neq 0$$

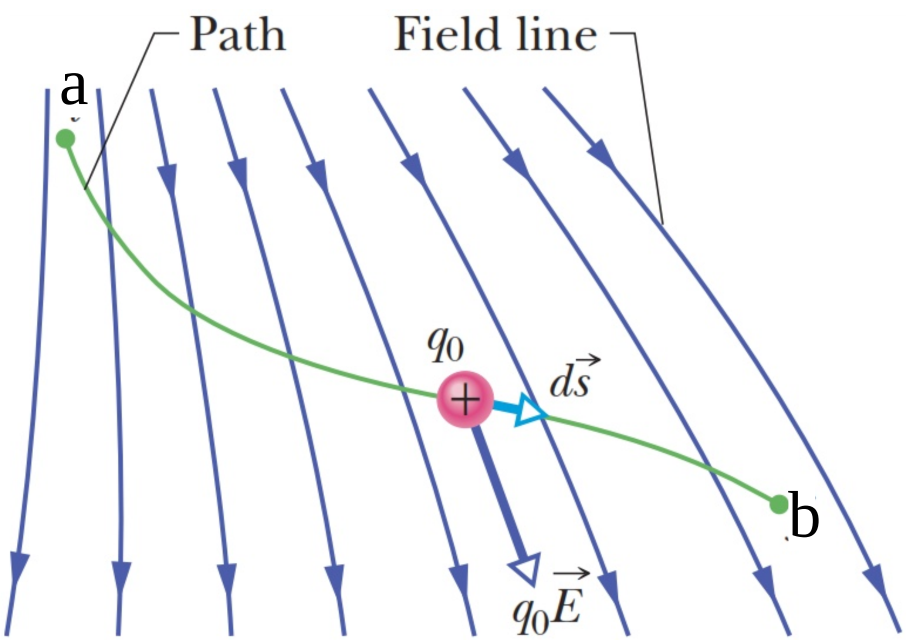
۸- میدان صفر به معنای پتانسیل صفر نیست

$$V_t = V_+ + V_+ \neq 0$$

$$E_t = E_+ + E_+ = 0$$

نکات

۹- اختلاف پتانسیل الکتریکی بین دو نقطه



$$\Delta V = V_b - V_a = \frac{U_b}{q_0} - \frac{U_a}{q_0}$$

$$\Rightarrow \qquad \Delta V = \frac{\Delta U}{q_0}$$

$$\Delta U = U_b - U_a = -W_{e(a\to b)}$$

$$\Rightarrow \Delta V = -\frac{W_{e(a\to b)}}{q_0}$$

نکات

۱۰- کار نیروی الکتریکی:

- نیروی الکتریکی در جابه جایی بار مثبت (منفی) از نقطه ای با پتانسیل کمتر به پتانسیل بیشتر کار منفی (مثبت) انجام می دهد

$$V_b > V_a \quad \rightarrow \quad \Delta V > 0 \quad \rightarrow \quad \Delta U > 0 \quad \rightarrow \quad W_e < 0$$

- نیروی الکتریکی در جابه جایی بار مثبت (منفی) از نقطه ای با پتانسیل بیشتر به پتانسیل کمتر کار مثبت (منفی) انجام می دهد

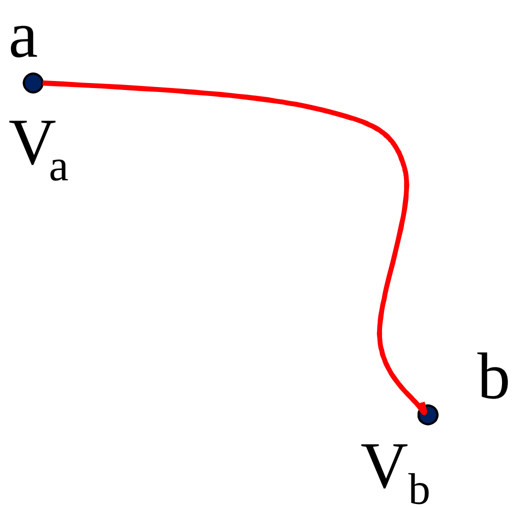
$$V_b < V_a \quad \rightarrow \quad \Delta V < 0 \quad \rightarrow \quad \Delta U < 0 \quad \rightarrow \quad W_e > 0$$

- نیروی الکتریکی در جابه جایی بار مثبت بین نقاط هم پتانسیل کاری انجام نمی دهد

نکات

۱۱- ذره باردار در اختلاف پتانسیل

در جابه جایی بار q از نقطه ای به نقطه دیگر با اختلاف پتانسیل ΔV ، انرژی پتانسیل ذره باردار به اندازه ΔU تغییر می کند



$$\Delta U = q\Delta V$$

نکات

۱۲- قضیه کار – انرژی

❖ در انتقال بار مثبت از ناحیه ای با پتانسیل بیشتر به ناحیه با پتانسیل کمتر، ذره حرکت شتابدار تندشونده می نماید

$$\Delta V = V_b - V_a < 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta U = +q\Delta V < 0 \quad \Rightarrow \quad W_{(a\to b)} = -\Delta U > 0$$

$$work - energy\ theorem: \quad \Delta K = W > 0 \quad \Rightarrow \quad V_2 > V_1$$

❖ در انتقال بار منفی از ناحیه ای با پتانسیل کمتر به ناحیه با پتانسیل بیشتر، ذره حرکت شتابدار تندشونده می نماید

$$\Delta V = V_b - V_a > 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta U = q\Delta V < 0 \quad \Rightarrow \quad W_{(a\to b)} = -\Delta U > 0$$

$$work - energy\ theorem: \quad \Delta K = W > 0 \quad \Rightarrow \quad V_2 > V_1$$

نکات

۱۳- واحد

$$V = \frac{U}{q}$$

J/C = V

$$\Delta U = q\Delta V$$

J or eV

محاسبه پتانسیل از میدان الکتریکی

$$\begin{tikzcd} \vec{E}(\vec{r}) \arrow[r, bend left, "\text{؟}"] & V(\vec{r}) \arrow[l, bend left, "\text{؟}"] \end{tikzcd}$$

تعریف کار نیروی الکتریکی – تعریف اختلاف پتانسیل بین دو نقطه

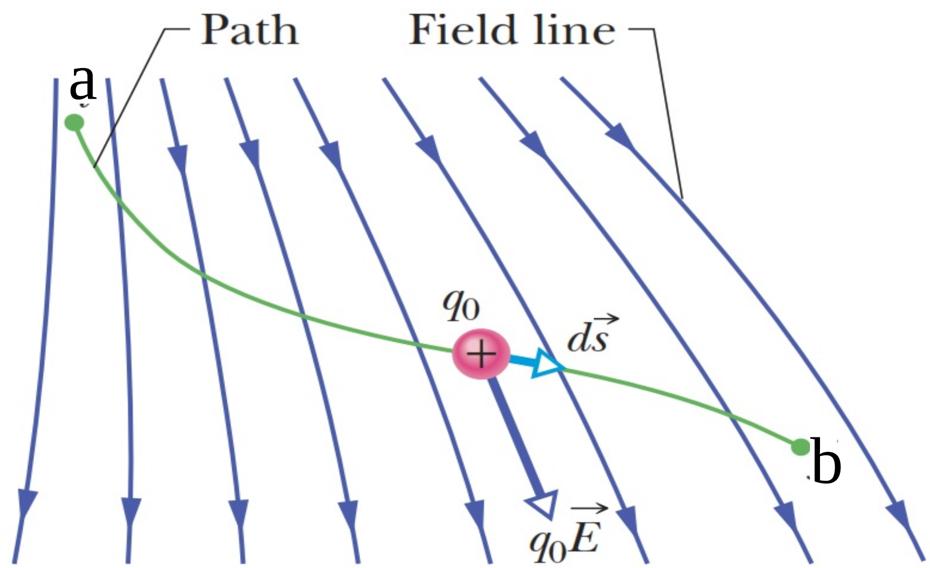
محاسبه کار نیروی الکتریکی در جابه جایی بار q_0 از نقطه a تا b – اختلاف پتانسیل بین a و b

$$\vec{F}(\vec{r}) = q_0\vec{E}(\vec{r})$$

$$W_e = \int_a^b \vec{F}.\,d\vec{s} = q_0\int_a^b \vec{E}(\vec{r}).\,d\vec{s} \quad (1)$$

$$\Delta V = V_b - V_a = \frac{\Delta U}{q_0} = -\frac{W_e}{q_0}$$

$$\Delta V = -\frac{W_e}{q_0} \quad \rightarrow W_e = -q_0\Delta V \quad (2)$$



(1) (2) ⇒

$$\boxed{V_b - V_a = -\int_a^b \vec{E}(\vec{r}).\,d\vec{s}}$$

محاسبه پتانسیل یک نقطه نسبت به نقطه مرجع

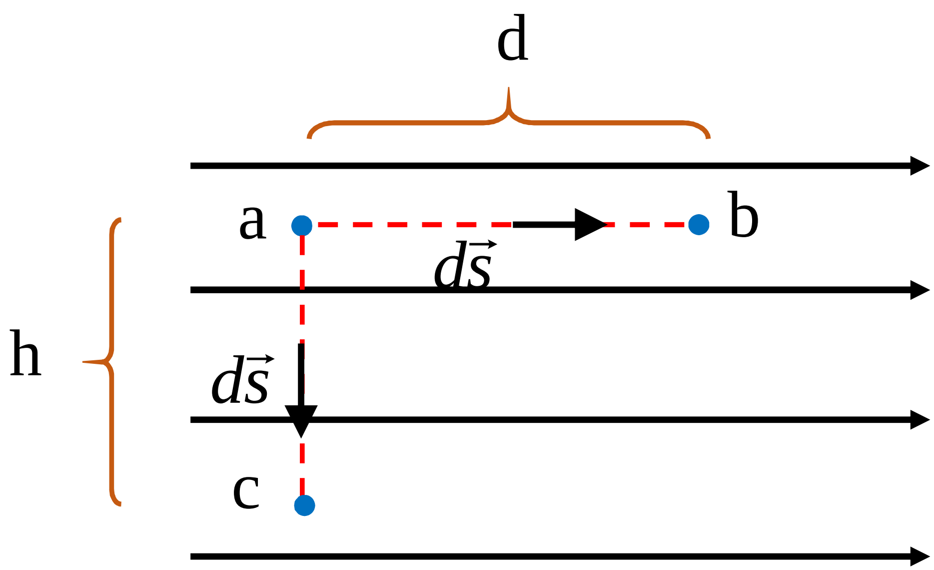
اگر نقطه a در بی نهایت فیزیکی باشد جایی که پتانسیل منسوب به آن را می توان صفر قرار داد داریم

$$V_b - V_a = -\int_a^b \vec{E}(\vec{r}).\, d\vec{s}$$

نقطه a مرجع پتانسیل

$$\boxed{V_b = -\int_\infty^b \vec{E}(\vec{r}).\, d\vec{s}}$$

مثال ۱) محاسبه اختلاف پتانسیل در میدان الکتریکی یکنواخت

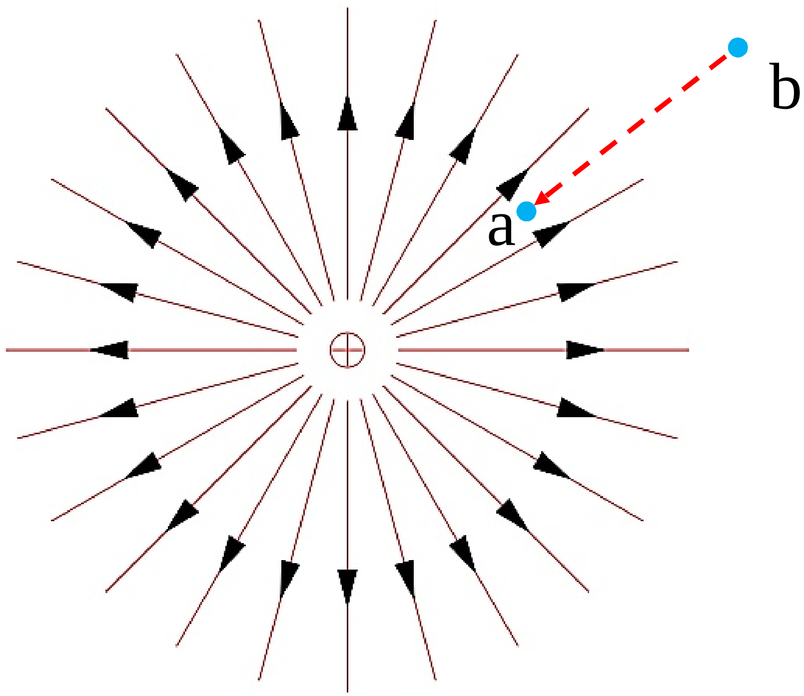


$$\vec{E}(\vec{r}) = Constant$$

$$\vec{E} \parallel d\vec{s}: \qquad V_b - V_a = -\int_a^b \vec{E}.d\vec{s} = -E\int_a^b ds \qquad \rightarrow \qquad V_b - V_a = -Ed$$

$$\vec{E} \perp d\vec{s}: \qquad V_c - V_a = -\int_a^c \vec{E}.d\vec{s} = 0 \qquad \rightarrow \qquad V_c = V_a$$

مثال۲) محاسبه اختلاف پتانسیل الکتریکی میان دو نقطه در میدان بار q



$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\hat{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^3}\vec{r}$$

$$d\vec{s} = dr\,\hat{r}$$

$$V_b - V_a = -\int_a^b \vec{E}.\,d\vec{s} = -\int_a^b \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\hat{r}.\,dr\,\hat{r}$$

$$V_b - V_a = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int_{r_a}^{r_b}\frac{dr}{r^2} = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{-1}{r}\right)\Big|_{r_a}^{r_b}$$

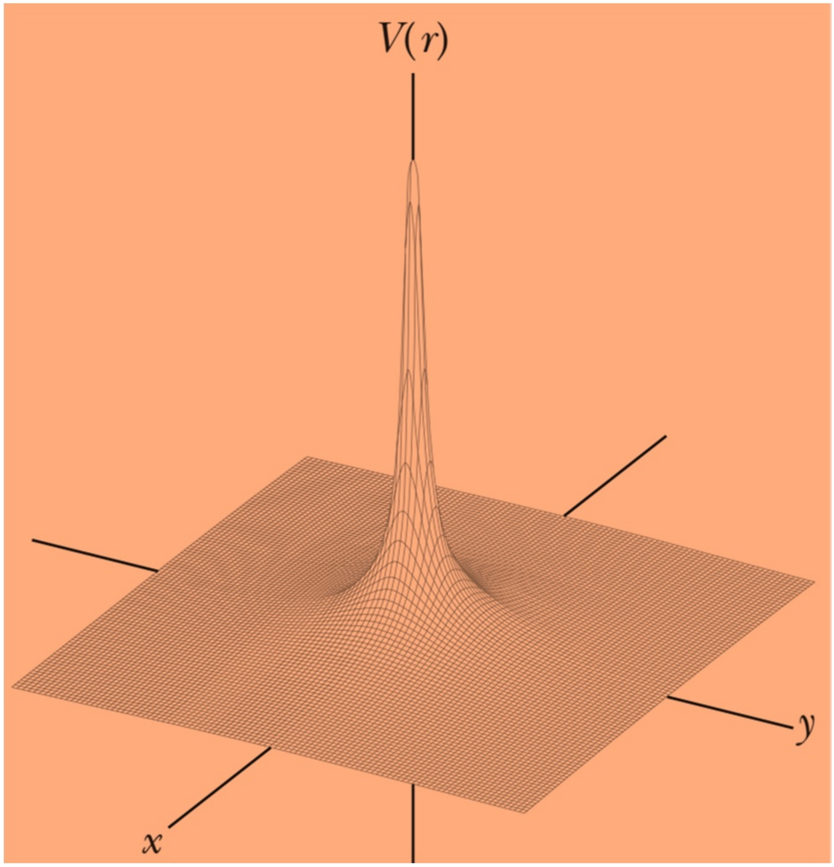
$$V_b - V_a = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_b} - \frac{1}{r_a}\right)$$

اگر نقطه a مرجع پتانسیل باشد

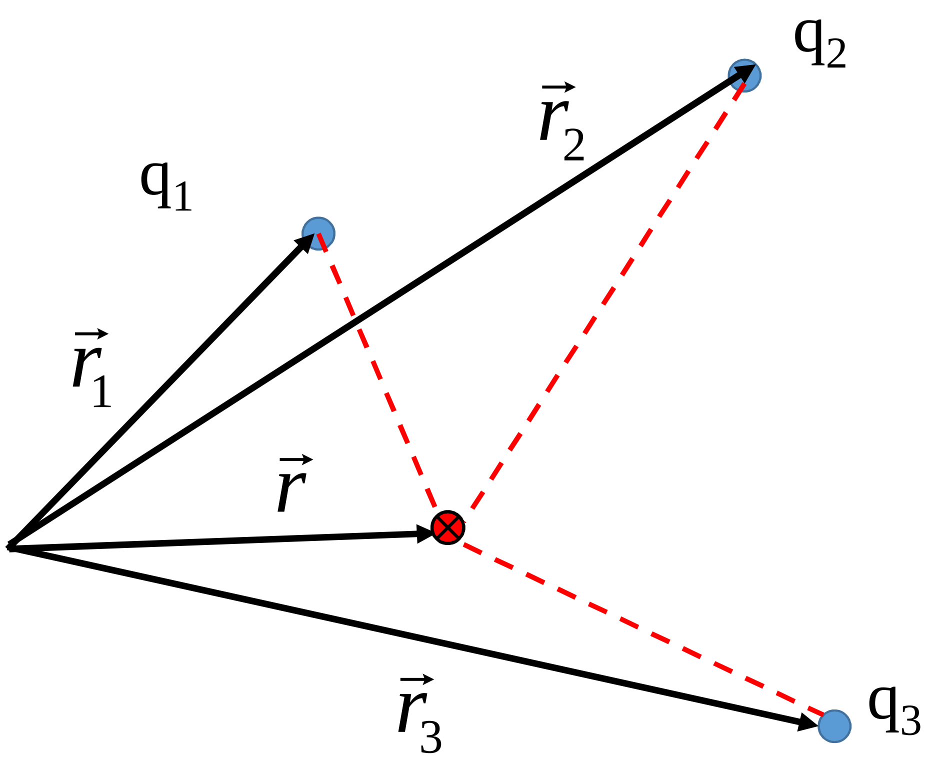
$$V_b - V_a = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_b} - \frac{1}{r_a}\right)$$

$$V_b - 0 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_b} - \frac{1}{\infty}\right)$$

$$\boxed{V(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\, r}}$$

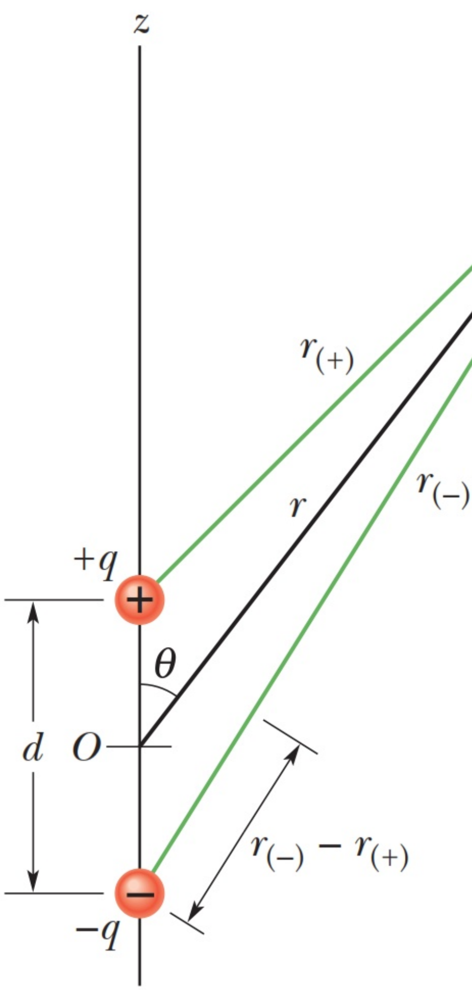


پتانسیل ناشی از مجموعه ای از بارهای نقطه ای گسسته



$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum \frac{q_i}{\left|\vec{r}-\vec{r}_i\right|}$$

مثال ۳) پتانسیل الکتریکی ناشی از یک دو قطبی الکتریکی



$$V_P = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-}\right\} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-}\right\}$$

$$r_+ = [x^2 + (z - \frac{d}{2})^2]^{\frac{1}{2}} \quad , \quad r_- = [x^2 + (z + \frac{d}{2})^2]^{\frac{1}{2}}$$

الف) در مبدا x = 0 و z = 0

$$V = 0$$

ب) روی محور x ها (z = 0)

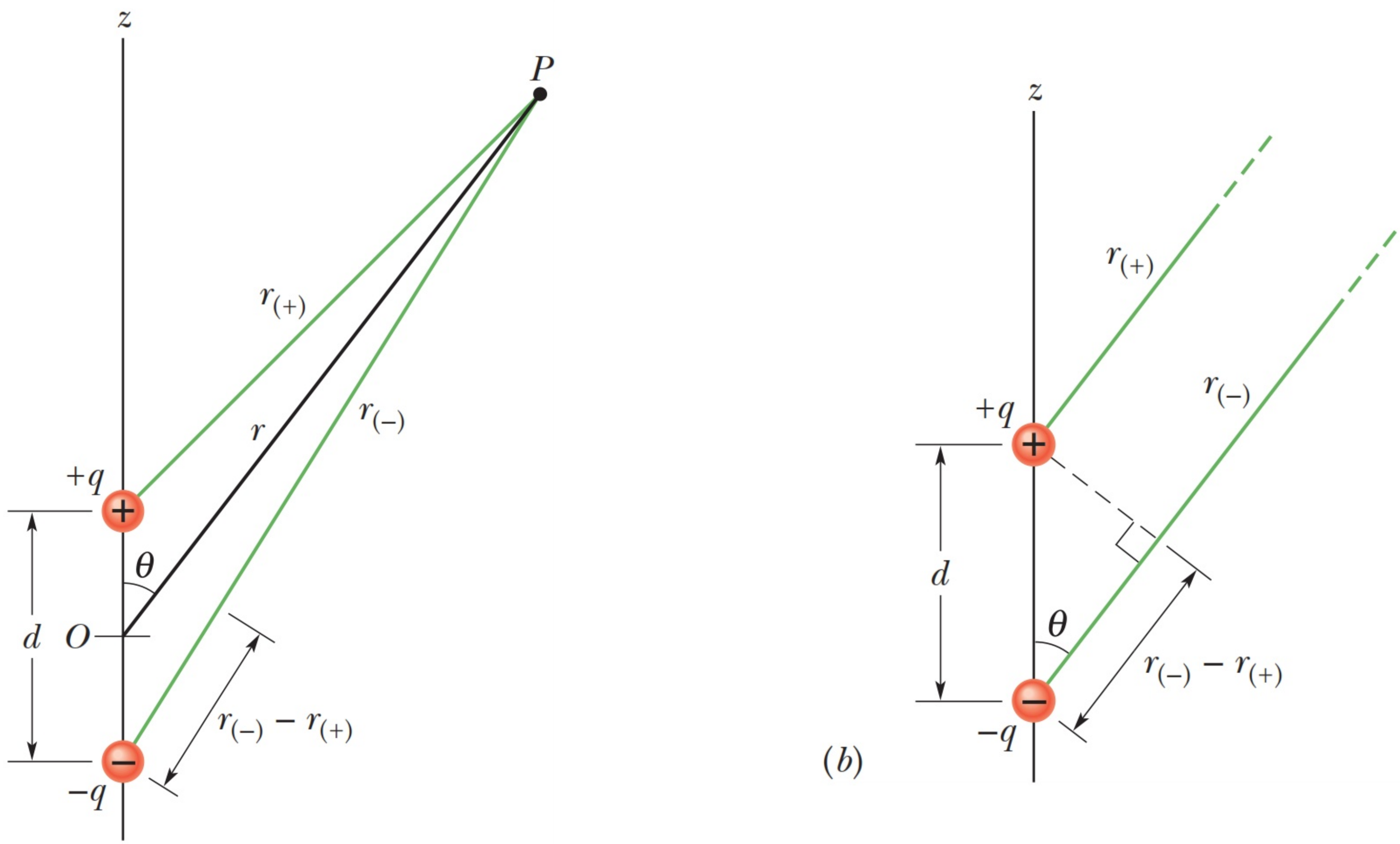
$$V = 0$$

پ) روی محور z ها (x = 0)

$$V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{1}{(z-\frac{d}{2})} - \frac{1}{(z+\frac{d}{2})}\right\}$$

$$V = \frac{qd}{4\pi\varepsilon_0(z^2-\frac{d^2}{4})}$$

مثال ٤) پتانسیل الکتریکی ناشی از یک دو قطبی الکتریکی در فواصل دور ($r >> d$)



$$V = \sum_{i=1}^{2} V_i = V_{(+)} + V_{(-)} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{r_{(+)}} + \frac{-q}{r_{(-)}}\right)$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{r_{(-)} - r_{(+)}}{r_{(-)}r_{(+)}}.$$

$$r_{(-)} - r_{(+)} \approx d\cos\theta \quad \text{and} \quad r_{(-)}r_{(+)} \approx r^2$$

$$V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{d\cos\theta}{r^2} \qquad \boxed{V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{p\cos\theta}{r^2}}$$

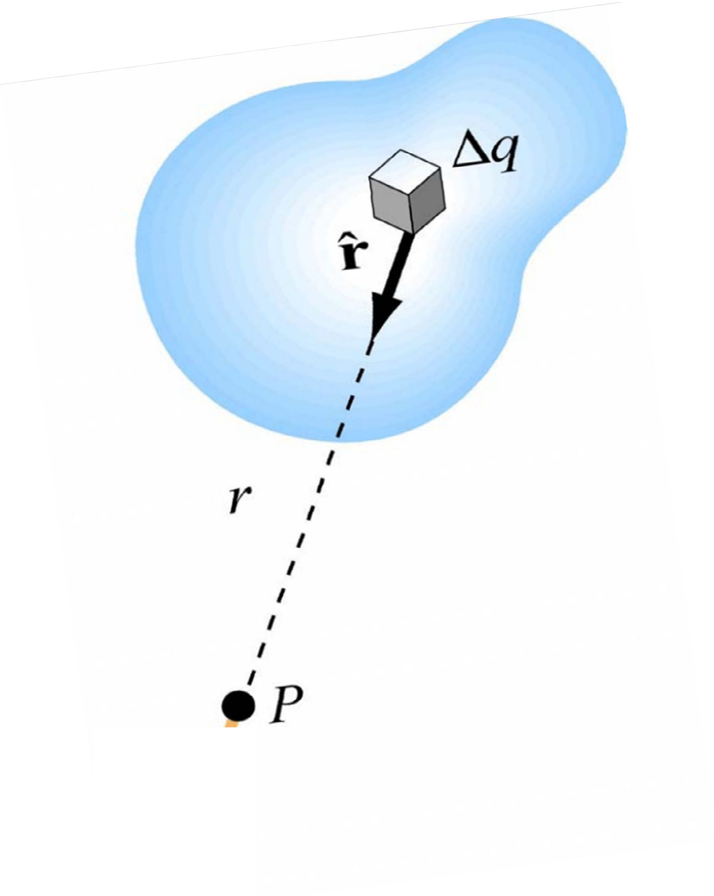
پتانسیل الکتریکی ناشی از توزیع های بار پیوسته

روش اول) در توزیع بار غیر کروی از روش المان گیری و محاسبه پتانسیل المانهای بار استفاده می شود

روش دوم) در توزیع بارهای کروی از انتگرال مستقیم جهت محاسبه پتانسیل در نقاط مختلف استفاده می گردد

روش اول:

الف) در نظر گرفتن المانهای بار نقطه ای dq



$$q = \sum \Delta q \quad \rightarrow \quad = \int dq$$

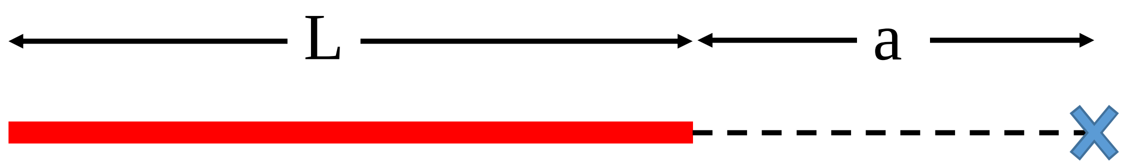
ب) مشخص نمودن پتانسیل ناشی از هر المان در نقطه مشخص

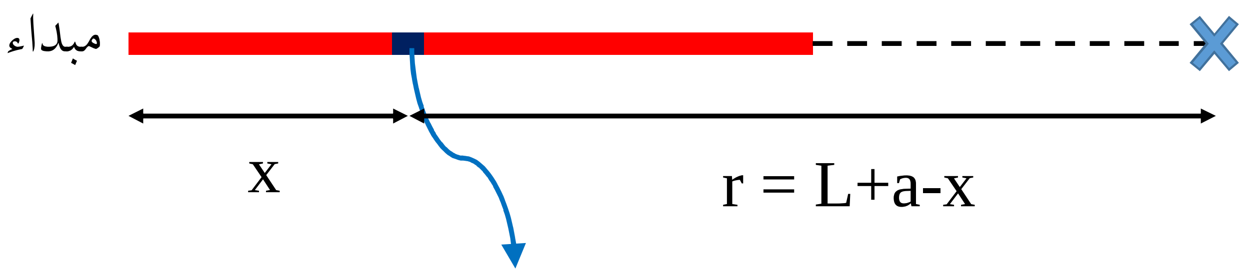
$$dV = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r}$$

ج) انتگرال گیری روی کل توزیع بار

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{dq}{r}$$

مثال ۵) پتانسیل الکتریکی ناشی از خط بار متناهی به طول L و چگالی بار خطی ثابت λ در امتداد آن در فاصله a از انتهای آن





$dx \quad , \quad dq=\lambda dx$

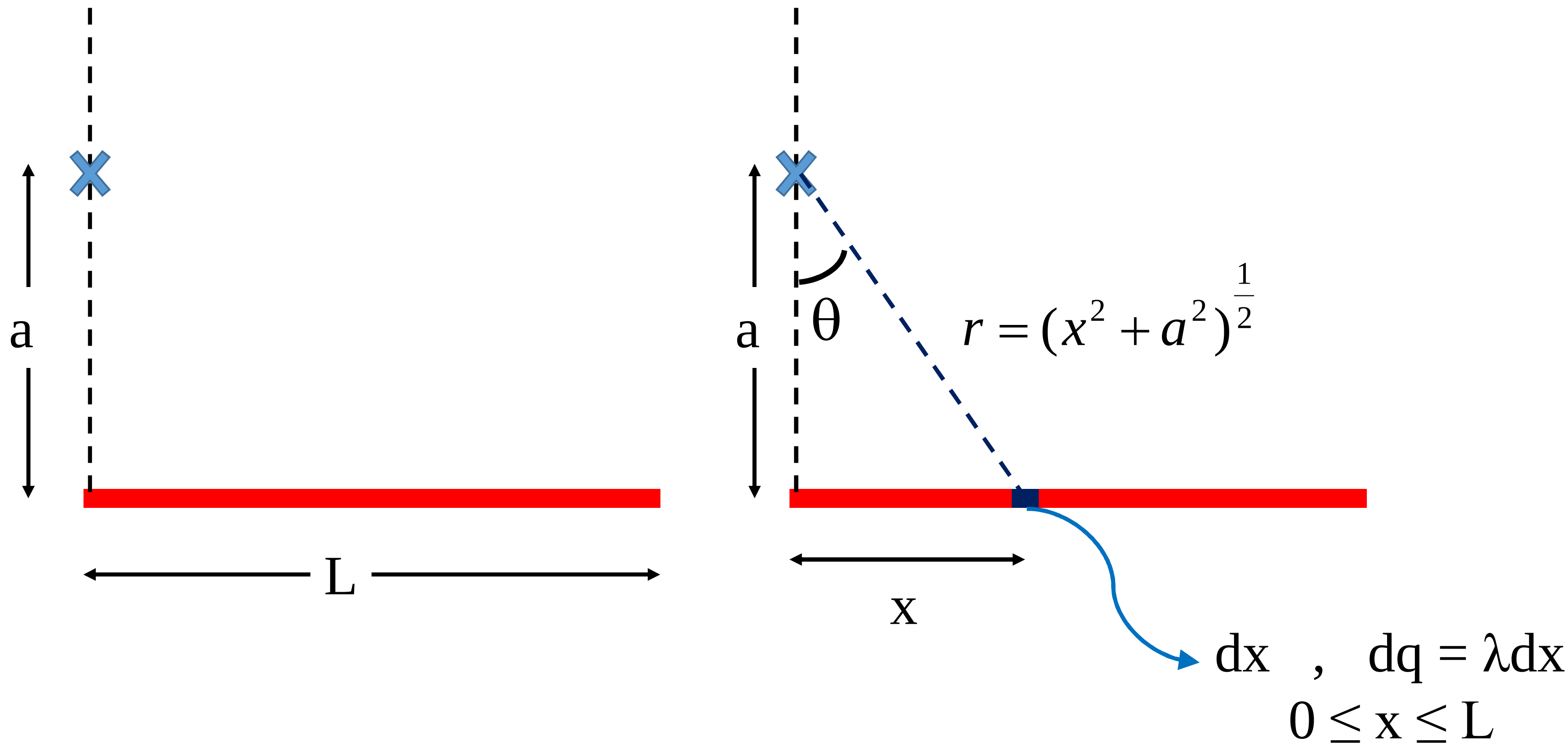
$$dV = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda dx}{L+a-x}$$

$$V = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_{x=0}^{x=L}\frac{dx}{L+a-x} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\left[-Ln(L+a-x)\right]_{x=0}^{x=L}$$

$$V = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\times -1 \times Ln\frac{a}{L+a}$$

$$V = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}Ln\frac{L+a}{a}$$

مثال ٦) پتانسیل الکتریکی ناشی از خط بار متناهی به طول L و چگالی بار خطی ثابت λ در امتداد آن در فاصله a از انتهای آن



$$dV = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda dx}{(x^2+a^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$V = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_{x=0}^{x=L}\frac{dx}{(x^2+a^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\theta=0}^{\theta=\tan^{-1}(\frac{L}{a})}\frac{a(1+\tan^2\theta)d\theta}{a(1+\tan^2\theta)^{\frac{1}{2}}}$$

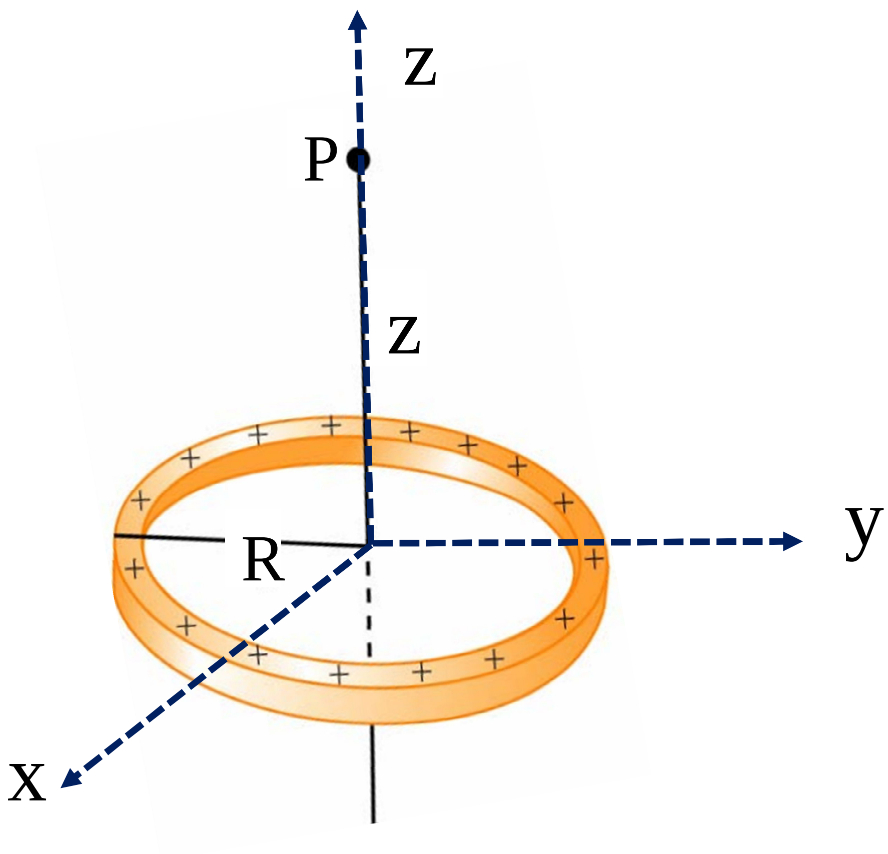
$$x = a\tan\theta$$

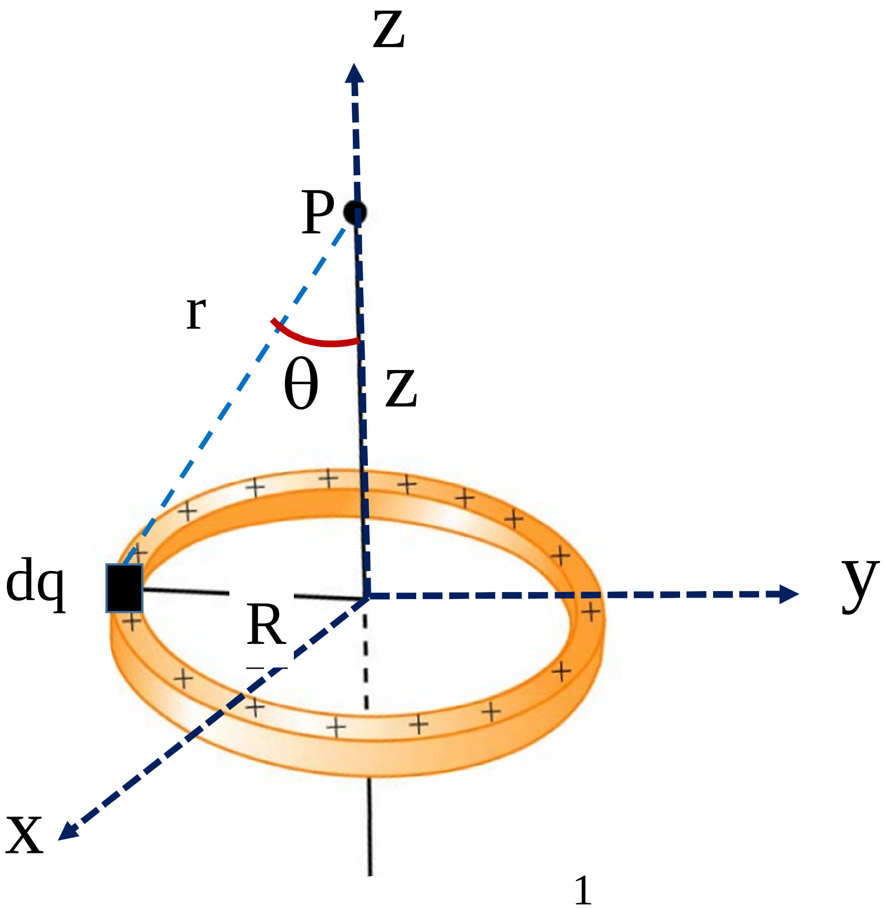
$$\rightarrow \quad dx = a(1+\tan^2\theta)d\theta$$

$$V = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\theta=0}^{\theta=\tan^{-1}(\frac{L}{a})}(1+\tan^2\theta)^{\frac{1}{2}}d\theta = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\theta=0}^{\theta=\tan^{-1}(\frac{L}{a})}\frac{1}{\cos\theta}d\theta$$

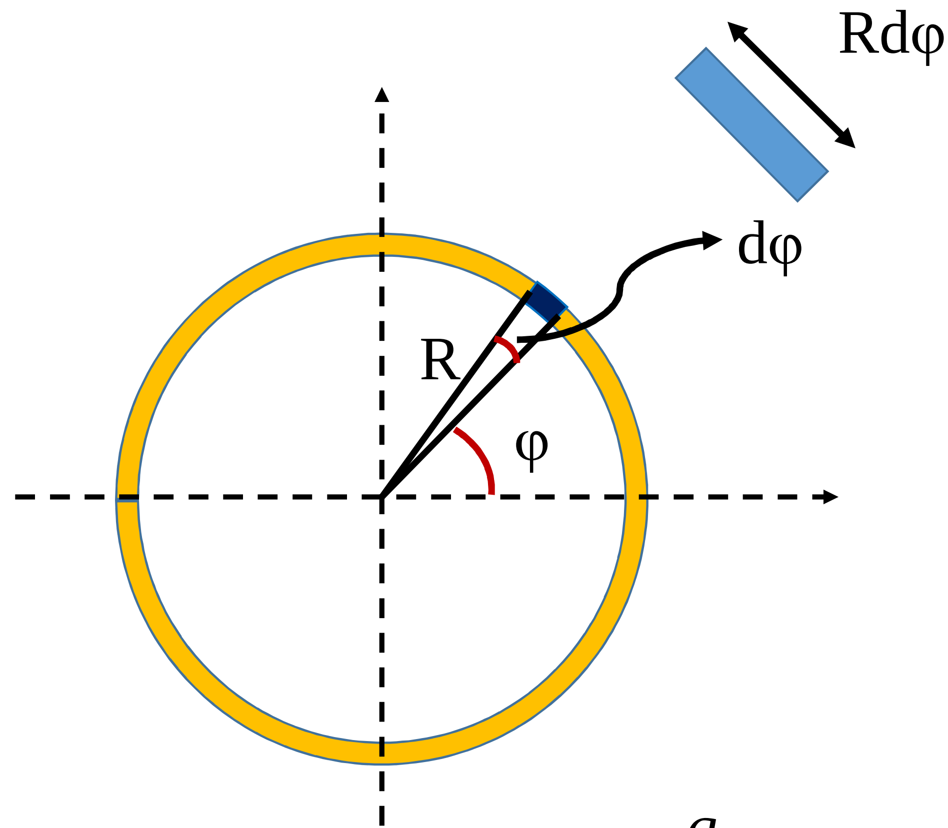
$$V = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\theta=0}^{\theta=\tan^{-1}(\frac{L}{a})}\sec\theta\ d\theta$$

مثال۷) پتانسیل یک حلقه باردار نازک با بار q و شعاع R در نقطه ای روی محور حلقه در فاصله z نسبت به مرکز حلقه





$$r = (z^2 + R^2)^{\frac{1}{2}}$$



$$dq = \lambda R d\varphi \quad , \quad \lambda = \frac{q}{2\pi R}$$

$$0 < \varphi < 2\pi$$

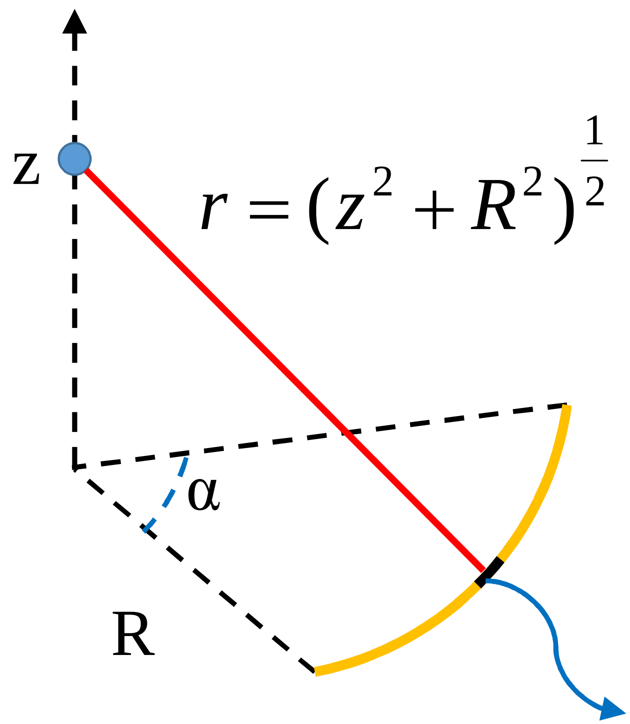
$$dV = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda R d\varphi}{(z^2 + R^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$V = \frac{\lambda R}{4\pi\varepsilon_0 (z^2 + R^2)^{\frac{1}{2}}} \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} d\varphi$$

$$V = \frac{\lambda R 2\pi}{4\pi\varepsilon_0 (z^2 + R^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 (z^2 + R^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$z = 0 \quad \rightarrow \quad V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

مثال۸) پتانسیل یک کمان باردار نازک به شعاع R و چگالی بار خطی λ و مقابل به زاویه α در نقطه ای روی محور حلقه در فاصله z نسبت به مرکز حلقه



$$r = (z^2 + R^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$dq = \lambda R \, d\varphi$$

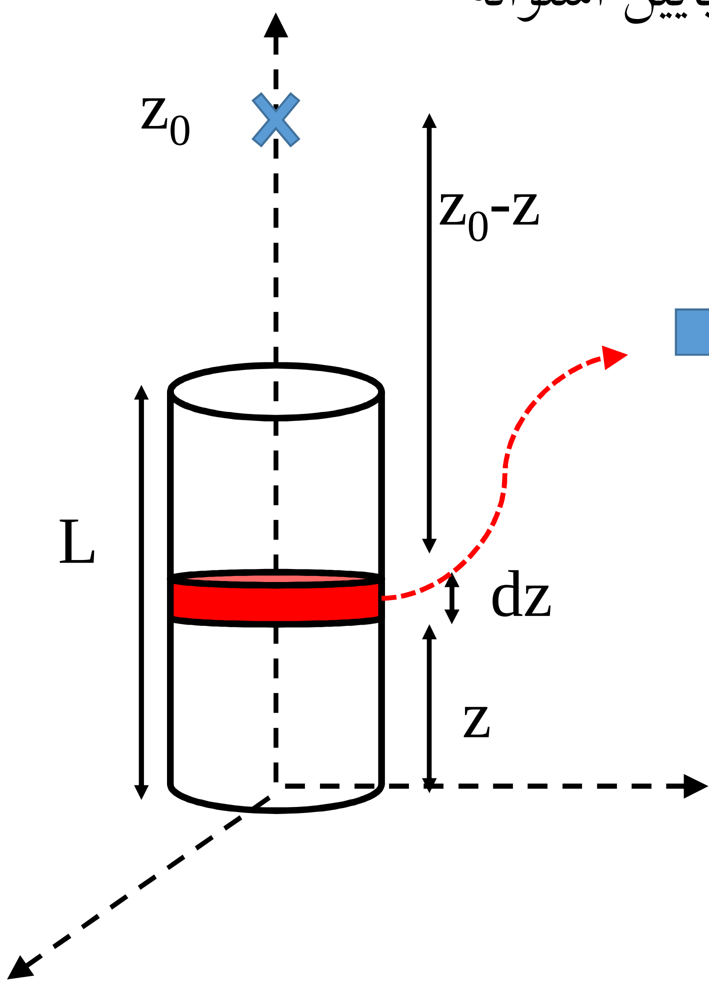
$$0 \le \varphi \le \alpha$$

$$dV = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda R d\varphi}{(z^2+R^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$V = \frac{\lambda R}{4\pi\varepsilon_0 (z^2+R^2)^{\frac{1}{2}}}\int_{\varphi=0}^{\varphi=\alpha} d\varphi$$

$$V = \frac{\lambda R \alpha}{4\pi\varepsilon_0 (z^2+R^2)^{\frac{1}{2}}}$$

مثال۹) پتانسیل الکتریکی ناشی از یک پوسته استوانه ای نازک باردار با چگالی بار σ و شعاع R و طول L در نقطه ای روی محور استوانه در فاصله z نسبت به پایین استوانه



بار المان

$$dq = \sigma dA = \sigma\, 2\pi R dz$$

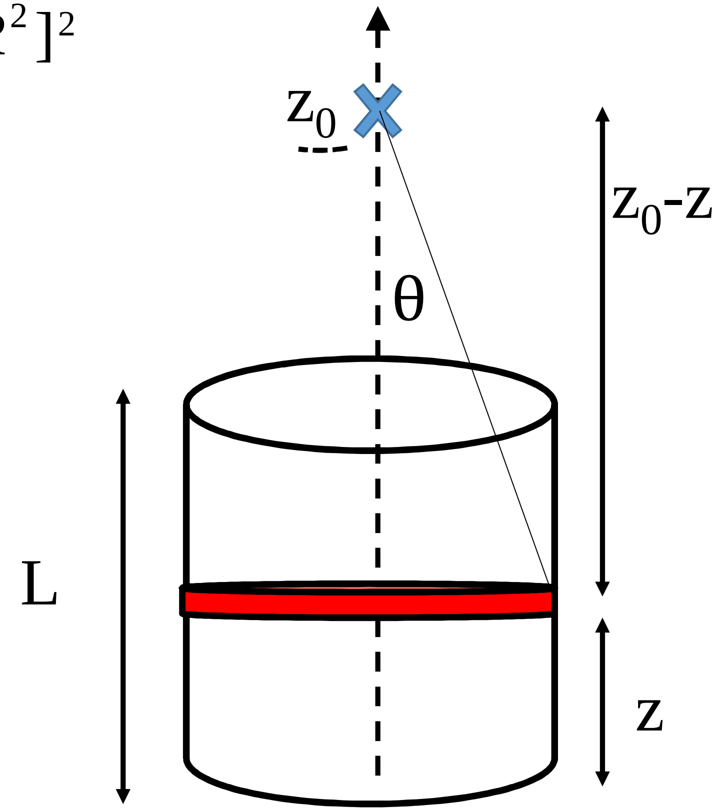
پتانسیل حلقه باردار

$$V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 (z^2 + R^2)^{\frac{1}{2}}}$$

بازنویسی رابطه پتانسیل برای المان حلقوی باردار

$$dV = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0[(z_0 - z)^2 + R^2]^{\frac{1}{2}}} = \frac{\sigma\ 2\pi R\, dz}{4\pi\varepsilon_0[(z_0 - z)^2 + R^2]^{\frac{1}{2}}}$$

$$V = \frac{\sigma\ 2\pi R}{4\pi\varepsilon_0}\int_{z=0}^{z=L}\frac{dz}{[(z_0 - z)^2 + R^2]^{\frac{1}{2}}}$$



$$z_0 - z = R\tan\theta$$

$$-dz = R(1+\tan^2\theta)d\theta$$

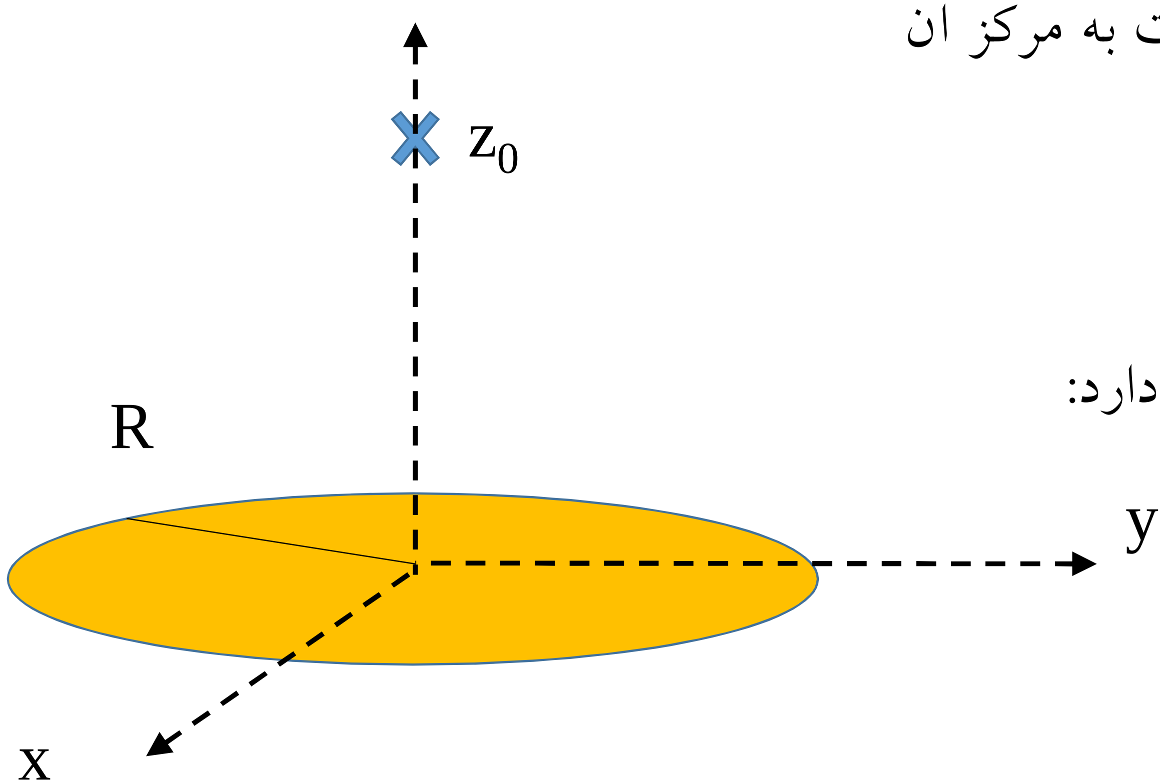
$$z = 0 \quad \rightarrow \quad \theta_1 = \tan^{-1}(\frac{z_0}{R})$$

$$z = L \quad \rightarrow \quad \theta_2 = \tan^{-1}(\frac{z_0 - L}{R})$$

$$V=\frac{\sigma\ 2\pi R}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\frac{-R(1+\tan^2\theta)d\theta}{R(1+\tan^2\theta)^{\frac{1}{2}}}=\frac{-\sigma R}{2\varepsilon_0}\int(1+\tan^2\theta)^{\frac{1}{2}}d\theta$$

$$V=\frac{-\sigma R}{2\varepsilon_0}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\sec\theta\ d\theta=\frac{-\sigma R}{2\varepsilon_0}Ln[\sec\theta+\tan\theta]_{\theta_1}^{\theta_2}$$

مثال۱۰) پتانسیل الکتریکی ناشی از یک دیسک نازک باردار با شعاع R و چگالی بار σ در نقطه ای روی محور قرص در فاصله z نسبت به مرکز آن

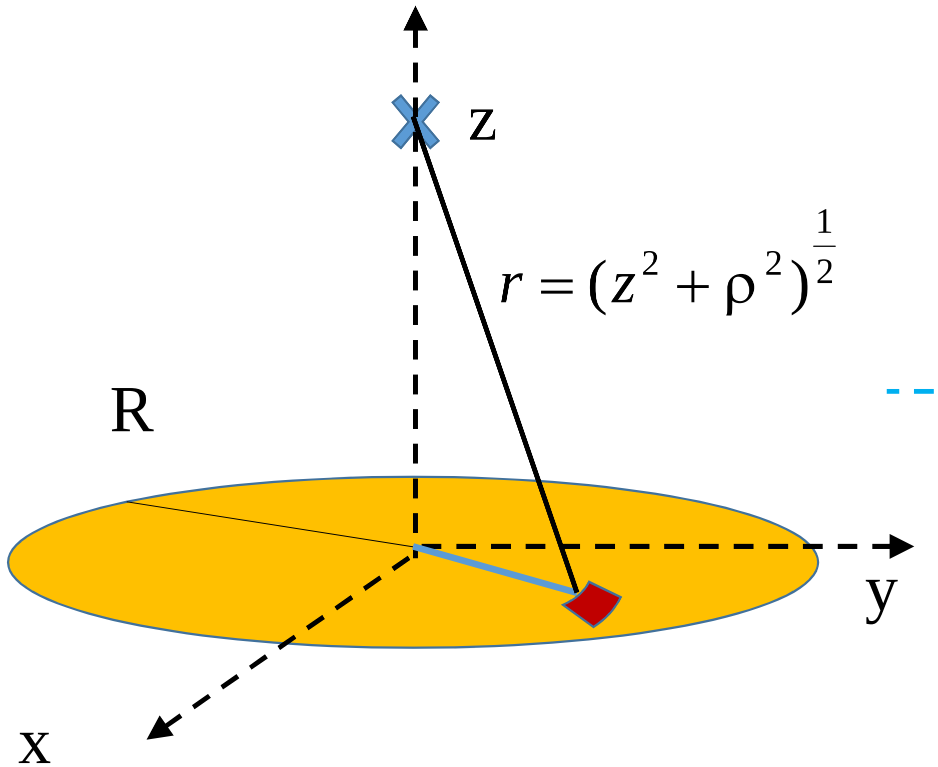


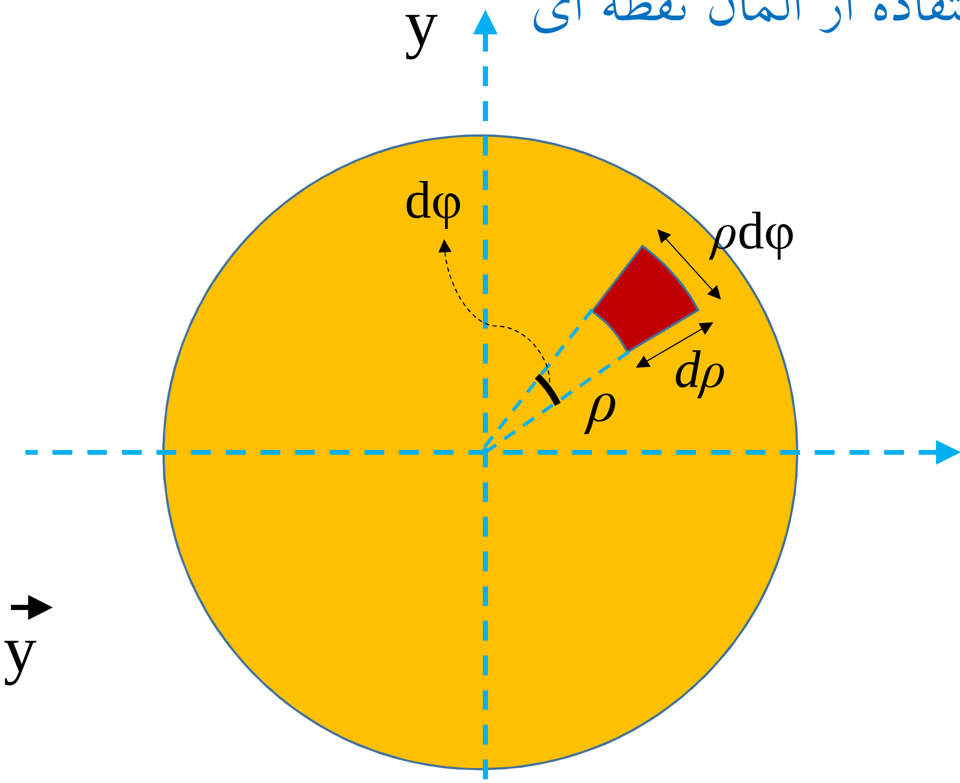
دو روش برای حل این مثال وجود دارد:

الف) استفاه از المان گسترده

ب) استفاده از المان نقطه ای

ب) استفاده از المان نقطه ای





$$dq = \sigma \rho \, d\varphi \, d\rho$$

$$0 \le \rho \le R$$

$$0 \le \varphi \le 2\pi$$

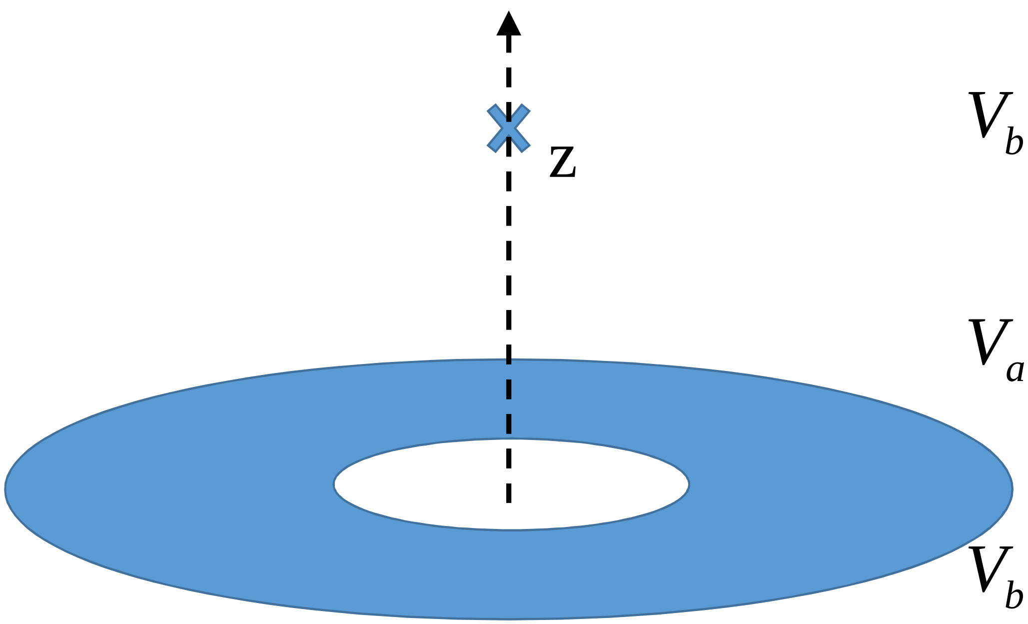
$$dV = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sigma\rho\ d\varphi\ d\rho}{(z^2+\rho^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$V = \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\rho=0}^{\rho=R}\frac{\rho\ d\rho}{(z^2+\rho^2)^{\frac{1}{2}}}\int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi}d\varphi = \frac{\sigma\ 2\pi}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\rho=0}^{\rho=R}\frac{1}{2}\times 2\rho(z^2+\rho^2)^{-\frac{1}{2}}d\rho$$

$$V = \frac{\sigma\ 2\pi}{4\pi\varepsilon_0}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{-\frac{1}{2}+1}(z^2+\rho^2)^{-\frac{1}{2}+1}\Bigg|_{\rho=0}^{\rho=R}$$

$$V = \frac{\sigma\ 2\pi}{4\pi\varepsilon_0}\left\{(z^2+R^2)^{\frac{1}{2}} - z\right\} \xrightarrow{\text{در مرکز دیسک}} V = \frac{2\pi\sigma}{4\pi\varepsilon_0}R = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}R$$

مثال۱۱) پتانسیل الکتریکی ناشی از یک دیسک نازک باردار به شعاع b و چگالی بار σ که در وسط آن سوراخی به شعاع a ایجاد شده را در نقطه ای روی محور قرص در فاصله z نسبت به مرکز آن

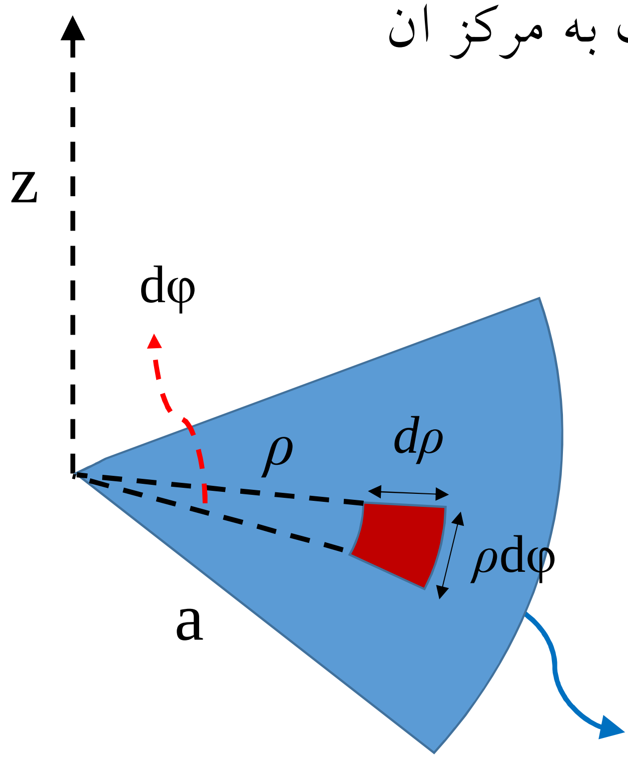


$$V_b = \frac{+\sigma\ 2\pi}{4\pi\varepsilon_0}\left\{(z^2+b^2)^{\frac{1}{2}} - z\right\}$$

$$V_a = \frac{-\sigma\ 2\pi}{4\pi\varepsilon_0}\left\{(z^2+a^2)^{\frac{1}{2}} - z\right\}$$

$$V_b - V_b = \frac{\sigma\ 2\pi}{4\pi\varepsilon_0}\left\{(z^2+b^2)^{\frac{1}{2}} - (z^2+a^2)^{\frac{1}{2}}\right\}$$

مثال۱۲) پتانسیل الکتریکی ناشی از یک قطاع نازک باردار با بار q و شعاع a ، چگالی بار σ و مقابل به زاویه α را در نقطه ای روی محور قرص در فاصله z نسبت به مرکز آن



$$dq = \sigma\rho\, d\varphi\, d\rho$$

$$0 \le \rho \le a$$

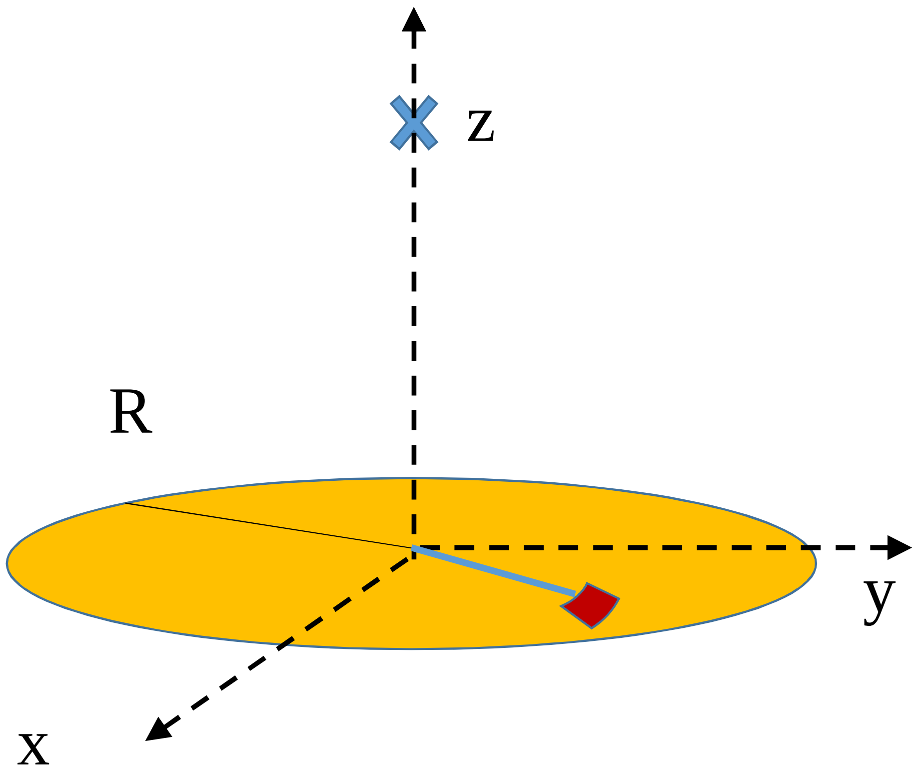
$$0 \le \varphi \le \alpha$$

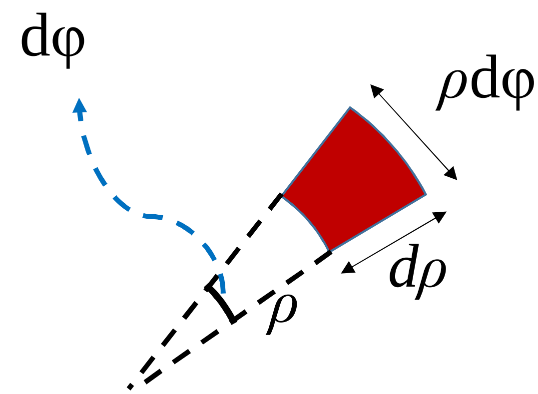
$$V = \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0} \int_{\rho=0}^{\rho=a} \frac{\rho \; d\rho}{(z^2+\rho^2)^{\frac{1}{2}}} \int_{\varphi=0}^{\varphi=\alpha} d\varphi$$

$$V = \frac{\sigma \; \alpha}{4\pi\varepsilon_0} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{-\frac{1}{2}+1} (z^2+\rho^2)^{-\frac{1}{2}+1} \Bigg|_{\rho\,=\,0}^{\rho\,=\,a}$$

$$V = \frac{\sigma \; \alpha}{4\pi\varepsilon_0} \left\{ (z^2+a^2)^{\frac{1}{2}} - z \right\}$$

مثال۱۳) پتانسیل الکتریکی ناشی از یک دیسک نازک باردار با چگالی بار $\sigma = \sigma_0 r$ و شعاع a در نقطه ای روی محور قرص در فاصله z نسبت به مرکز آن





$$dq = \sigma\rho\, d\varphi\, d\rho = (\sigma_0 \rho)\rho\, d\varphi\, d\rho$$

$$0 \le \rho \le a$$

$$0 \le \varphi \le 2\pi$$

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{\rho=0}^{\rho=a} \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \frac{(\sigma_0 \rho)\rho \, d\rho \, d\varphi}{(z^2 + \rho^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$V = \frac{\sigma_0}{4\pi\varepsilon_0} \underbrace{\int_{\rho=0}^{\rho=a} \frac{\rho^2 d\rho}{(z^2 + \rho^2)^{\frac{1}{2}}}}_{\text{حل جزء به جزء}} \underbrace{\int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} d\varphi}_{2\pi}$$

$$u = \rho \quad \rightarrow \quad du = d\rho \qquad , \qquad dv = \frac{\rho d\rho}{(z^2 + \rho^2)^{\frac{1}{2}}} \quad \rightarrow \quad v = (z^2 + \rho^2)^{\frac{1}{2}}$$

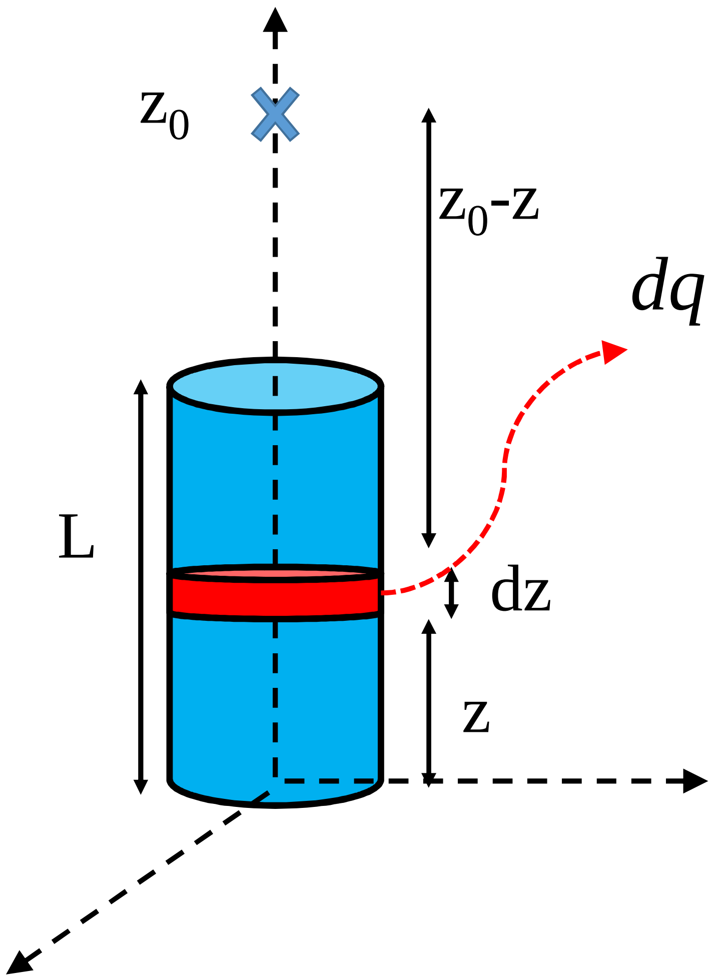
$$\int u dv = uv - \int v du$$

$$V = \frac{\sigma_0}{4\pi\varepsilon_0} \int_{\rho=0}^{\rho=a} \frac{\rho^2 d\rho}{(z^2+\rho^2)^{\frac{1}{2}}} \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} d\varphi$$

$$V = \frac{\sigma_0 2\pi}{4\pi\varepsilon_0} \left\{ \rho (z^2+\rho^2)^{\frac{1}{2}} \Big|_{\rho=0}^{\rho=a} - \int_{\rho=0}^{\rho=a} (z^2+\rho^2)^{\frac{1}{2}} d\rho \right\}$$

$$\int \sqrt{x^2 \pm a^2}\, dx = \frac{1}{2} x \sqrt{x^2 \pm a^2} \pm \frac{1}{2} a^2 \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right|$$

مثال۱٤) پتانسیل الکتریکی ناشی از یک استوانه توپر باردار به شعاع a و چگالی بار حجمی ρ در نقطه ای روی محور قرص در فاصله z نسبت به مرکز آن



$$dq = \rho\pi a^2 dz$$ المان دیسکی شکل

پتانسیل الکتریکی ناشی از یک دیسک
باردار با چگالی σ در امتداد محور دیسک

$$V = \frac{\sigma\ 2\pi}{4\pi\varepsilon_0}\left\{(z^2 + R^2)^{\frac{1}{2}} - z\right\}$$

پتانسیل الکتریکی ناشی از یک دیسک
باردار با بار q در امتداد محور دیسک

$$V = \frac{q}{2\pi a^2\varepsilon_0}\left\{(z^2 + a^2)^{\frac{1}{2}} - z\right\}$$

پتانسیل الکتریکی ناشی از یک المان
دیسکی بار dq در ارتفاع z در امتداد
محور دیسک در فاصله z_0-z

$$dV = \frac{dq}{2\pi a^2\varepsilon_0}\left\{((z_0 - z)^2 + a^2)^{\frac{1}{2}} - (z_0 - z)\right\}$$

$$V = \frac{\rho\pi a^2}{2\pi a^2\varepsilon_0}\int_{z=0}^{z=L}\left\{((z_0 - z)^2 + a^2)^{\frac{1}{2}} - (z_0 - z)\right\}dz$$

روش دوم) انتگرال مستقیم

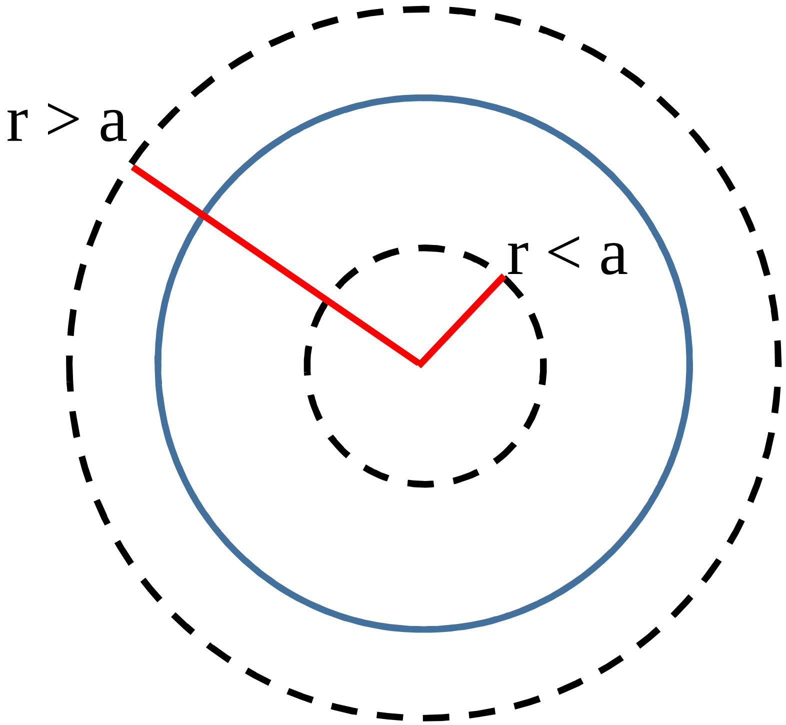
اگر توزیع بار کروی باشد برای محاسبه پتانسیل در یک نقطه از محاسبه انتگرال زیر در جابه جایی از نقطه مرجع بی نهایت تا نقطهمورد نظر استفاده خواهد شد.

$$\boxed{V(r) = -\int_{\infty}^{r} \vec{E}.\, d\vec{s}}$$

در این روش باید ابتدا میدان در هر ناحیه توسط قانون گاوس بدست آورده شود و سپس در جابه جایی از بی نهایت تا نقطه مورد نظر از میدانها انتگرال گرفته شود.

با توجه به تقارن کروی توزیع بار، میدان الکتریکی شعاعی بوده و لذا جابه جایی را شعاعی می گیریم

مثال۱۵) پتانسیل الکتریکی ناشی از یک پوسته کروی به شعاع a و بار q در نواحی مختلف



r < a

$$q = 0 \quad \rightarrow \quad E_{\text{int}} = 0$$

r > a

$$\oint \vec{E}.\, d\vec{A} = \frac{q}{\varepsilon_0} \quad \rightarrow \quad E(4\pi r^2) = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

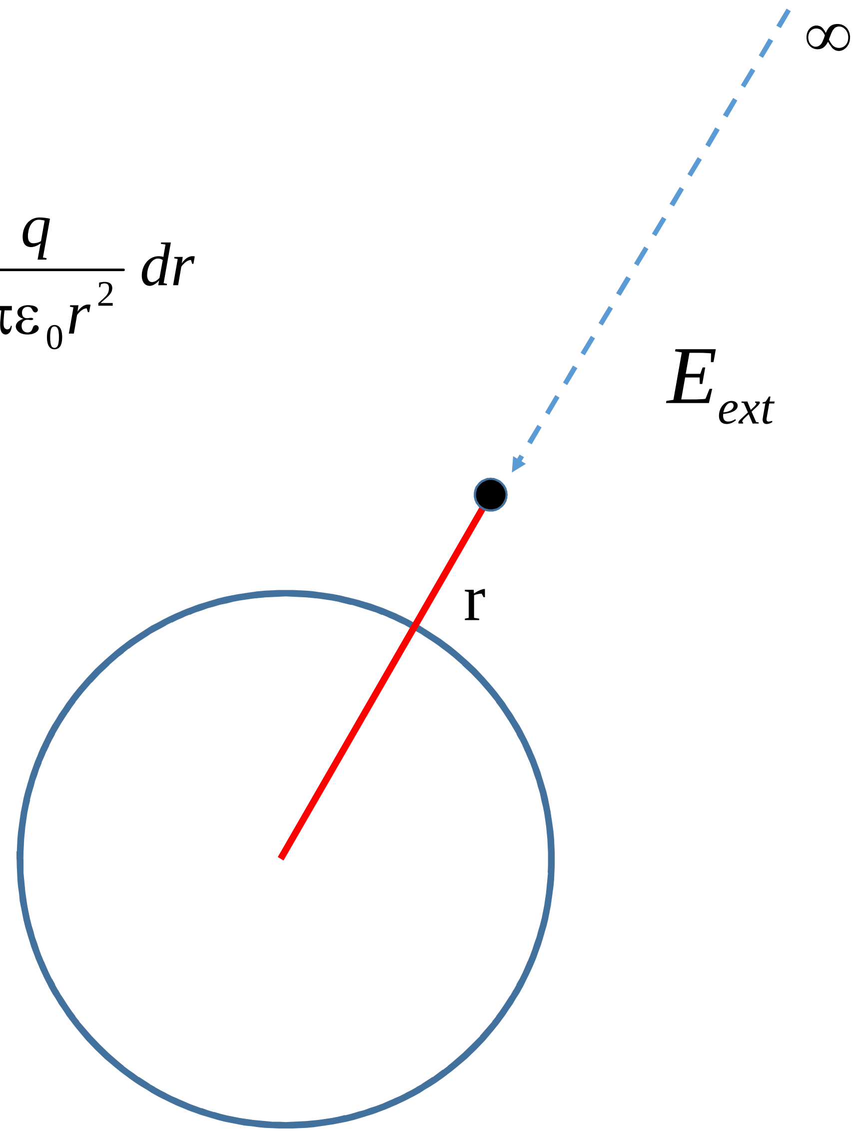
$$\rightarrow \quad E_{ext} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

V (r > a) = ?

$$V(r) = -\int_{\infty}^{r} \vec{E}_{ext} . d\vec{s} = -\int_{\infty}^{r} E_{ext}\ dr = -\int_{\infty}^{r} \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\ dr$$

$$V(r) = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\infty}^{r} \frac{dr}{r^2} = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{-1}{r}\right)_{\infty}^{r}$$

$$V(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

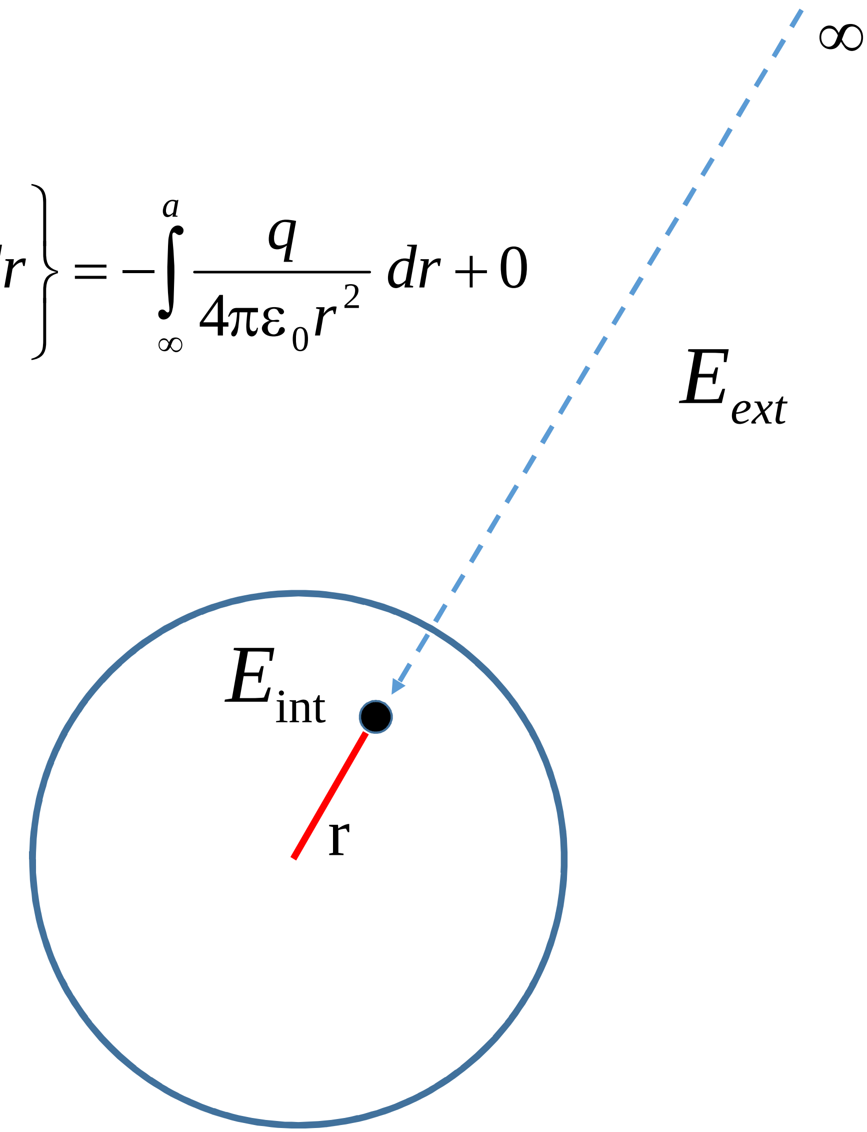


V (r < a) = ?

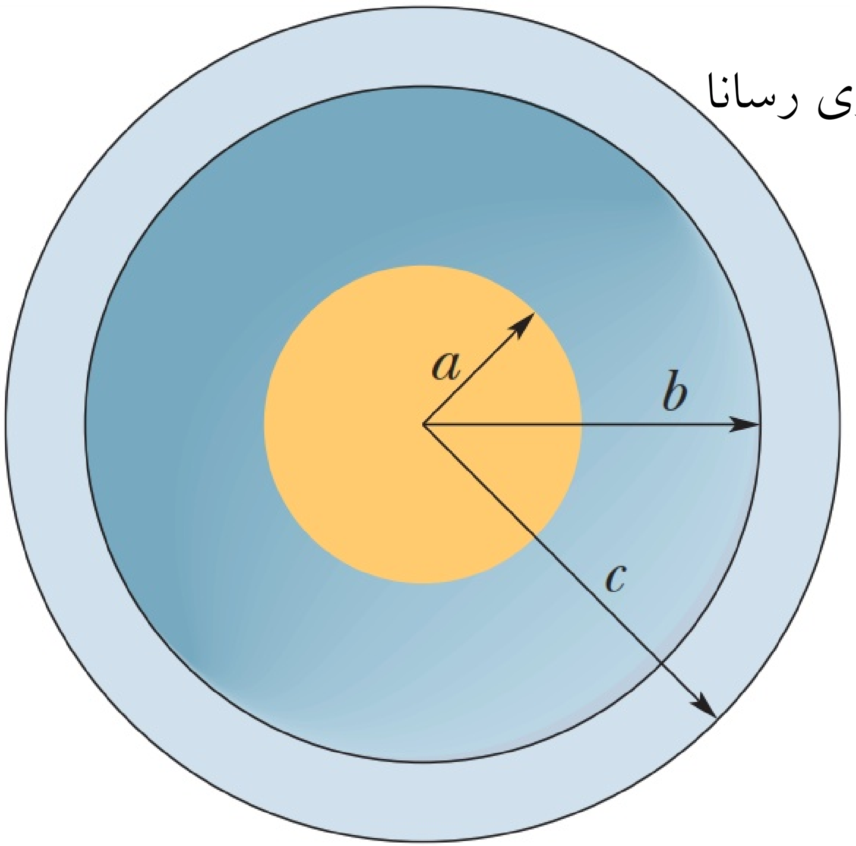
$$V(r) = -\int_{\infty}^{r} \vec{E}\ .\ d\vec{s} = -\left\{ \int_{\infty}^{a} E_{ext}\ dr + \int_{a}^{r} E_{\text{int}}\ dr \right\} = -\int_{\infty}^{a} \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\, dr + 0$$

$$V(r) = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \int_{\infty}^{a} \frac{dr}{r^2} = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{-1}{r}\right)_{\infty}^{a}$$

$$V(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a}$$



مثال۱٦) یک کره رسانا به شعاع a و بار q+ در مرکز یک پوسته کروی رسانا به شعاع های داخلی و خارجی b و c و بار 2q− قرار دارد. پتانسیل الکتریکی در نقاط مختلف بدست آورید



پوسته کروی رسانا

نواحی مختلف:

۱- $r < a$

۲- $a < r < b$

۳- $b < r < c$

٤- $c < r$

r < a

$$E_1 = 0$$

a < r < b

$$E_2 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

b < r < c

$$E_3 = 0$$

c < r

$$E_4 = \frac{-q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

c < r

$$V(r) = -\int_{\infty}^{r} \vec{E}_{ext} \cdot d\vec{s} = -\int_{\infty}^{r} E_4 \; dr = -\int_{\infty}^{r} \frac{-q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \; dr$$

$$V(r) = +\frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \int_{\infty}^{r} \frac{dr}{r^2} = +\frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{-1}{r}\right)_{\infty}^{r}$$

$$V(r) = \frac{-q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

b < r < c

$$V(r) = -\int_{\infty}^{r} \vec{E}\ .\ d\vec{s} = -\left\{ \int_{\infty}^{c} E_4\ dr + \int_{c}^{r} E_3\ dr \right\} = -\int_{\infty}^{c} \frac{-q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\ dr + 0$$

$$V(r) = +\frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \int_{\infty}^{c} \frac{dr}{r^2} = +\frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{-1}{r}\right)_{\infty}^{c}$$

$$V(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 c}$$

a < r < b

$$V(r) = -\int_{\infty}^{r} \vec{E}\,.\,d\vec{s} = -\left\{\int_{\infty}^{c} E_4\,dr + \int_{c}^{b} E_3\,dr + \int_{b}^{r} E_2\,dr\right\} = -\int_{\infty}^{c} \frac{-q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\,dr + 0 - \int_{b}^{r} \frac{+q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\,dr$$

$$V(r) = +\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\infty}^{c}\frac{dr}{r^2} - \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int_{b}^{r}\frac{dr}{r^2} = +\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{-1}{r}\right)_{\infty}^{c} + \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{-1}{r}\right)_{b}^{r}$$

$$V(r) = \frac{-q}{4\pi\varepsilon_0 c} + \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{r}\right)$$

r < a

$$V(r) = -\int_{\infty}^{r} \vec{E} \, . \, d\vec{s} = -\left\{ \int_{\infty}^{c} E_4 \, dr + \int_{c}^{b} E_3 \, dr + \int_{b}^{a} E_2 \, dr + \int_{a}^{r} E_1 \, dr \right\}$$

$$V(r) = -\int_{\infty}^{c} \frac{-q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \, dr + 0 - \int_{b}^{a} \frac{+q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \, dr + 0$$

$$V(r) = +\frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \int_{\infty}^{c} \frac{dr}{r^2} - \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \int_{b}^{a} \frac{dr}{r^2} = +\frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{-1}{r}\right)_{\infty}^{c} + \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{-1}{r}\right)_{b}^{a}$$

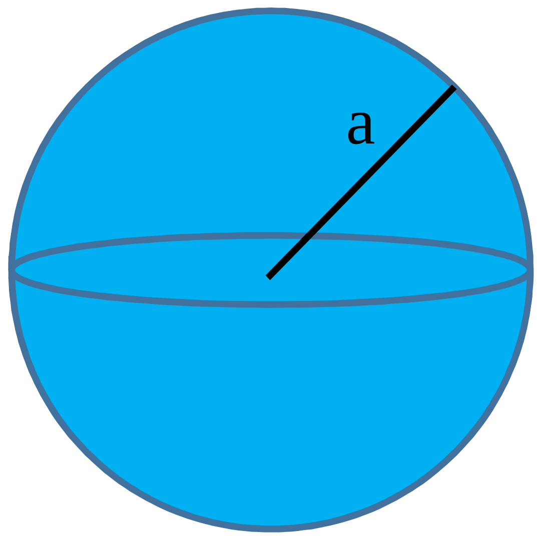
$$V(r) = \frac{-q}{4\pi\varepsilon_0 c} + \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right)$$

مثال۱۷) پتانسیل الکتریکی ناشی از یک کره باردار نارسانا با چگالی بار حجمی ثابت ρ و شعاع a

نواحی مختلف:

۱- $r < a$

۲- $a < r$



r < a

$$\oint \vec{E}.\,d\vec{A} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

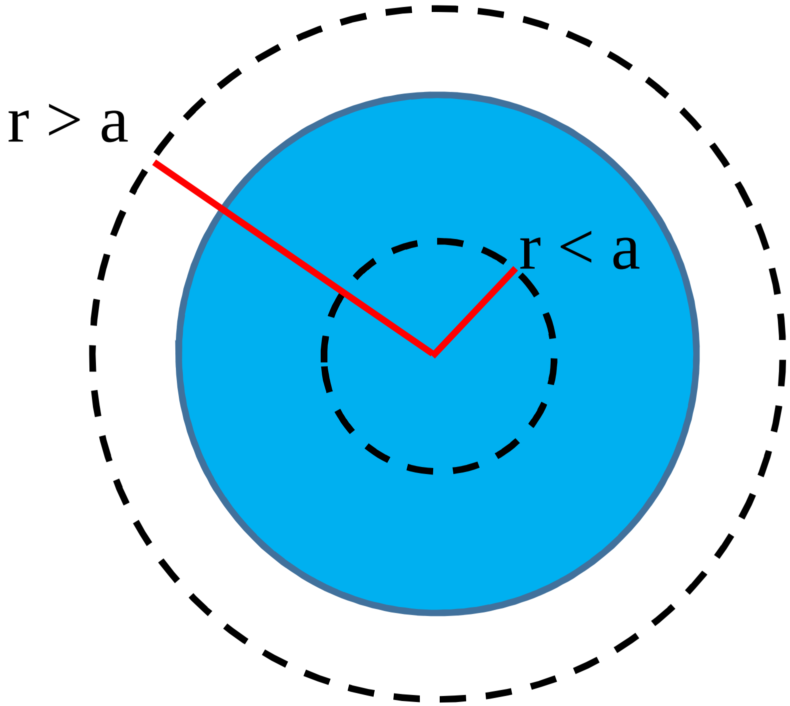
$$\rightarrow \quad E(4\pi r^2) = \frac{1}{\varepsilon_0}\left(\frac{4}{3}\pi r^3 \rho\right)$$

$$\rightarrow \quad \boxed{E_{\text{int}} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} r}$$

r > a

$$\rightarrow \quad E(4\pi r^2) = \frac{1}{\varepsilon_0}\left(\frac{4}{3}\pi r a^3 \rho\right)$$

$$\rightarrow \quad \boxed{E_{ext} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0 r^2} a^3}$$



r > a

$$V(r) = -\int_{\infty}^{r} \vec{E}_{ext} . d\vec{s} = -\int_{\infty}^{r} E_{ext}\ dr$$

$$V(r) = -\int_{\infty}^{r} \frac{\rho a^3}{3\varepsilon_0 r^2}\, dr$$

$$V(r) = -\frac{\rho a^3}{3\varepsilon_0}\int_{\infty}^{r} \frac{dr}{r^2} = -\frac{\rho a^3}{3\varepsilon_0}\left(\frac{-1}{r}\right)_{\infty}^{r}$$

$$V(r) = \frac{\rho a^3}{3\varepsilon_0 r}$$

r < a

$$V(r) = -\int_{\infty}^{r} \vec{E}.\, d\vec{s} = -\left\{ \int_{\infty}^{a} E_{ext}\ dr + \int_{a}^{r} E_{\text{int}}\ dr \right\}$$

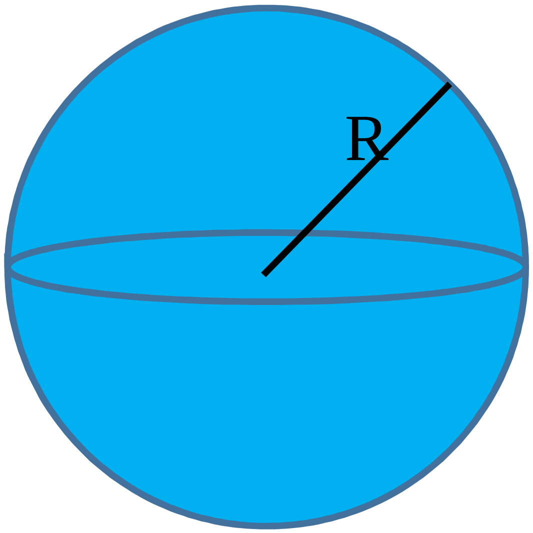
$$V(r) = -\int_{\infty}^{a} \frac{\rho}{3\varepsilon_0 r^2}\, dr - \int_{a}^{r} \frac{\rho}{3\varepsilon_0} r\ dr = -\frac{\rho a^3}{3\varepsilon_0} \int_{\infty}^{a} \frac{dr}{r^2} - \frac{\rho}{3\varepsilon_0} \int_{a}^{r} r\ dr$$

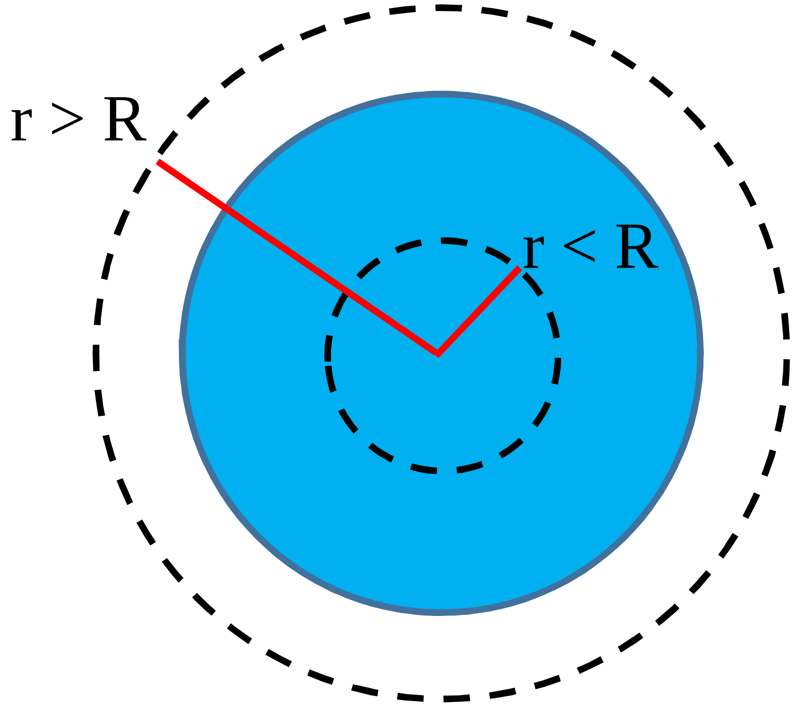
$$V(r) = -\frac{\rho a^3}{3\varepsilon_0} \left(\frac{-1}{r}\right)\Big|_{\infty}^{a} - \frac{\rho}{3\varepsilon_0} \left(\frac{r^2}{2}\right)\Big|_{a}^{r} = \frac{\rho a^3}{3\varepsilon_0 a} - \frac{\rho}{6\varepsilon_0}(r^2 - a^2)$$

$$V(r) = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} a^2 - \frac{\rho}{6\varepsilon_0}(r^2 - a^2) = \frac{\rho}{2\varepsilon_0} a^2 - \frac{\rho}{6\varepsilon_0} r^2$$

مثال۱۸) پتانسیل الکتریکی ناشی از یک کره باردار نارسانا با شعاع a و چگالی بار حجمی متغیر به صورت زیر:

$$\rho = \rho_0 r$$

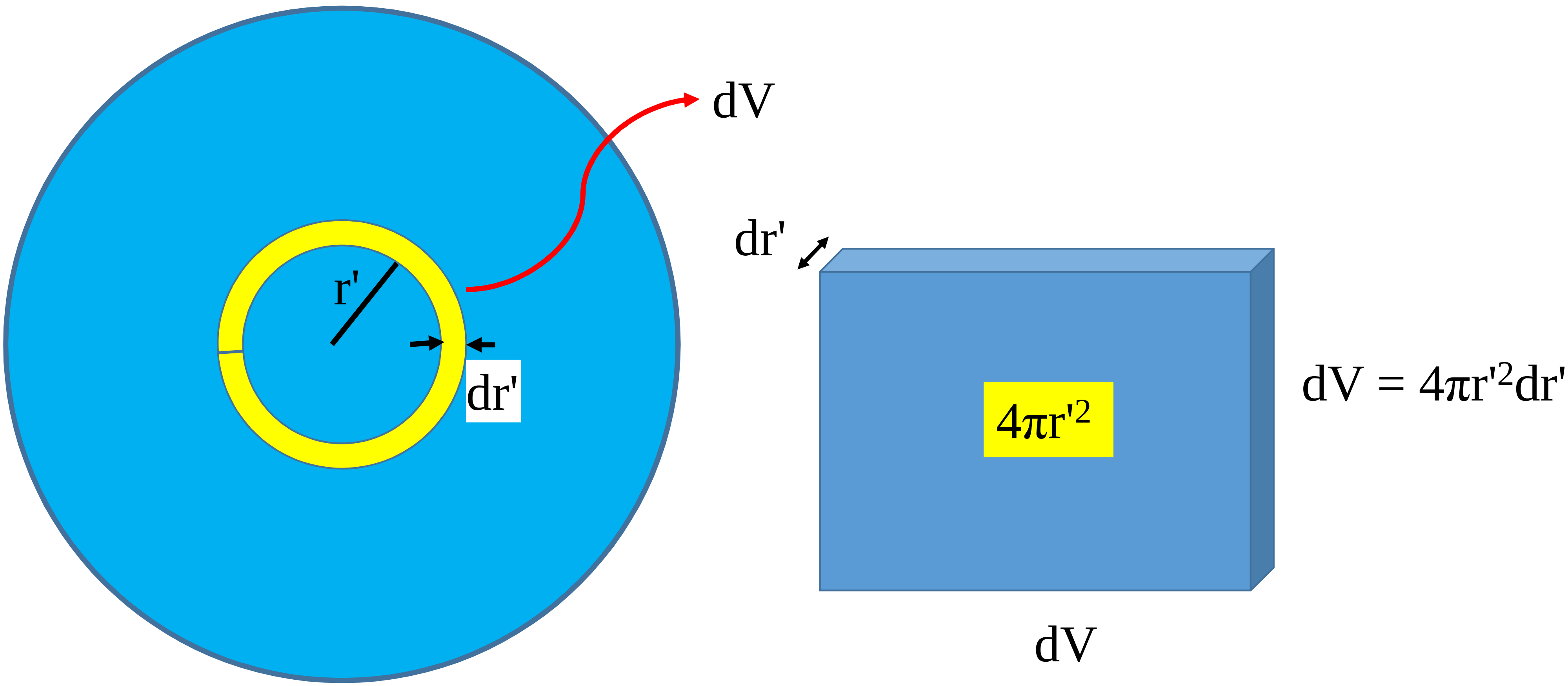




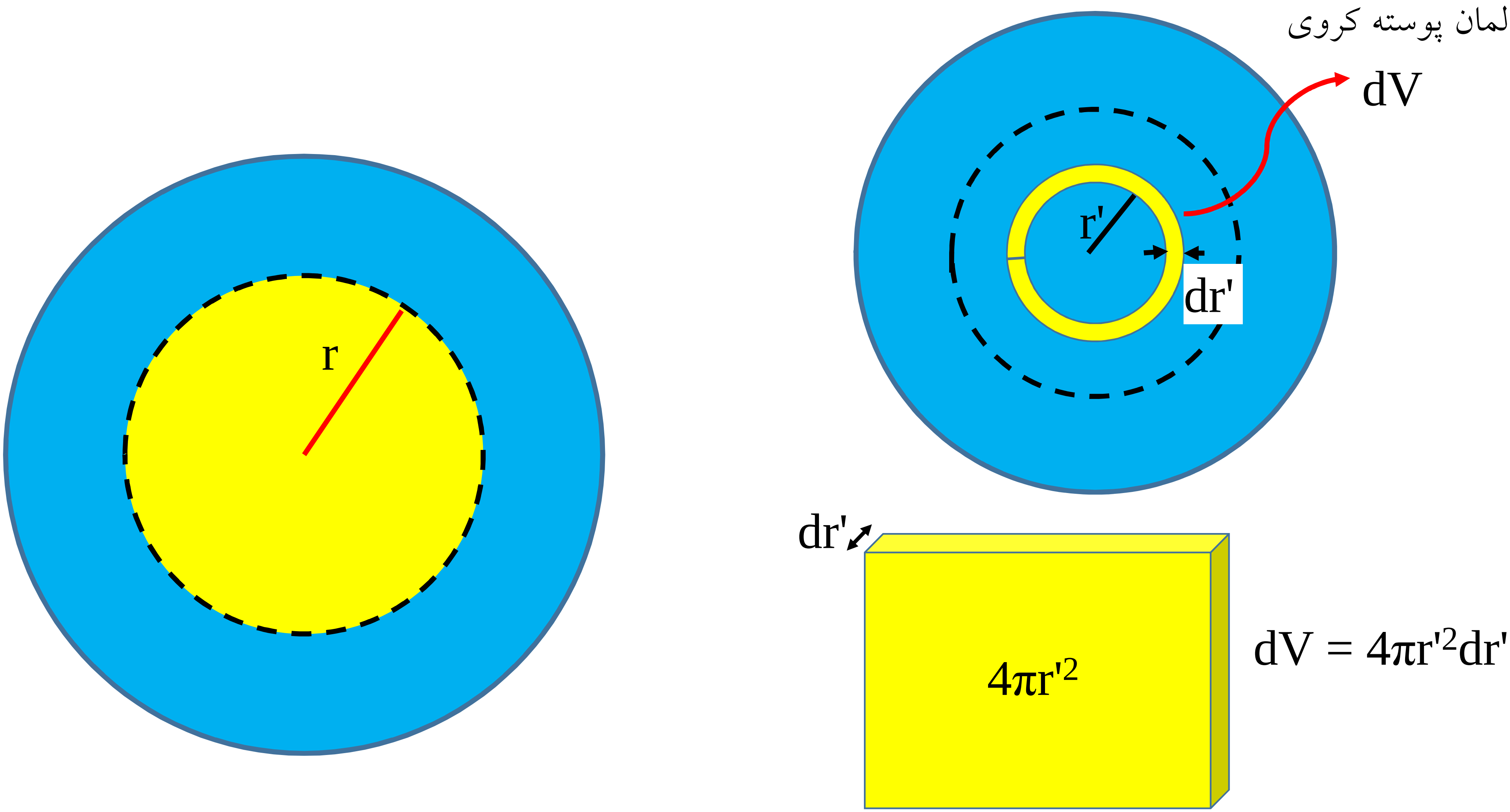
نواحی مختلف:

۱- $r < R$

۲- $R < r$



dV
r'
dr'
dr'
4πr'²
dV = 4πr'²dr'
dV


المان پوسته کروی
dV
r
r'
dr'
dr'
4πr'2
dV = 4πr'2dr'

E = (r < R)

$$\oint \vec{E}.\, d\vec{A} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

$$\rightarrow \quad E(4\pi r^2) = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_{r'=0}^{r'=r} \rho\, 4\pi r'^2 dr' = \frac{4\pi}{\varepsilon_0}\int_{r'=0}^{r'=r} (\rho_0 r') r'^2 dr' = \frac{4\pi\rho_0}{\varepsilon_0}\int_{r'=0}^{r'=r} r'^3 dr'$$

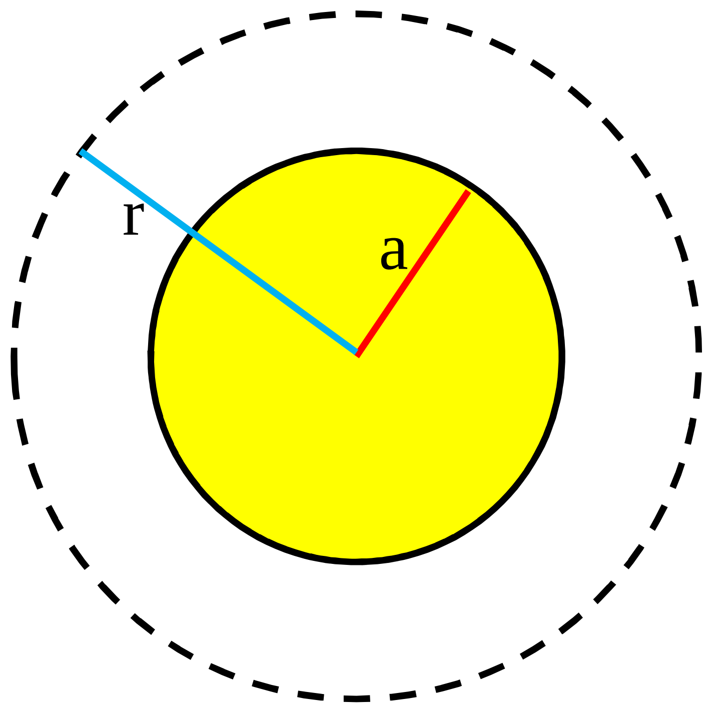
$$E(4\pi r^2) = \frac{4\pi\rho_0}{\varepsilon_0} \times \frac{r^4}{4} \quad \rightarrow \quad E_{\text{int}} = \frac{\rho_0}{4\varepsilon_0} r^2$$

E = (r > R)

$$\oint \vec{E}.\,d\vec{A} = \frac{q}{\varepsilon_0} \quad \rightarrow \quad E(4\pi r^2) = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_{r'=0}^{r'=r} \rho\, 4\pi r'^2 dr' = \frac{4\pi}{\varepsilon_0}\int_{r'=0}^{r'=a} (\rho_0 r') r'^2 dr'$$

$$\rightarrow \quad E(4\pi r^2) = \frac{4\pi\rho_0}{\varepsilon_0}\int_{r'=0}^{r'=a} r'^3 dr' = \frac{4\pi\rho_0}{\varepsilon_0}\times\frac{a^4}{4}$$

$$\rightarrow \quad E_{ext} = \frac{\rho_0 a^4}{4\varepsilon_0 r^2}$$



V (r > a) =?

$$V(r) = -\int_{\infty}^{r} \vec{E}_{ext} \cdot d\vec{s} = -\int_{\infty}^{r} E_{ext}\ dr$$

$$V(r) = -\int_{\infty}^{r} \frac{\rho_0 a^4}{4\varepsilon_0 r^2}\, dr$$

$$V(r) = -\frac{\rho a^4}{4\varepsilon_0}\int_{\infty}^{r} \frac{dr}{r^2} = -\frac{\rho a^3}{3\varepsilon_0}\left(\frac{-1}{r}\right)_{\infty}^{r}$$

$$V(r) = \frac{\rho a^4}{4\varepsilon_0 r}$$

V = (r < a) =?

$$V(r) = -\int_{\infty}^{r} \vec{E}.\,d\vec{s} = -\left\{ \int_{\infty}^{a} E_{ext}\ dr + \int_{a}^{r} E_{\text{int}}\ dr \right\}$$

$$V(r) = -\int_{\infty}^{a} \frac{\rho_0 a^4}{4\varepsilon_0 r^2}\, dr - \int_{a}^{r} \frac{\rho_0}{4\varepsilon_0} r^2\ dr = -\frac{\rho_0 a^4}{4\varepsilon_0} \int_{\infty}^{a} \frac{dr}{r^2} - \frac{\rho_0}{4\varepsilon_0} \int_{a}^{r} r^2\ dr$$

$$V(r) = -\frac{\rho_0 a^4}{4\varepsilon_0} \left(\frac{-1}{r}\right)_{\infty}^{a} - \frac{\rho_0}{4\varepsilon_0} \left(\frac{r^3}{3}\right)_{a}^{r} = \frac{\rho_0 a^4}{4\varepsilon_0 a} - \frac{\rho_0}{12\varepsilon_0}(r^3 - a^3)$$

$$V(r) = \frac{\rho_0}{4\varepsilon_0} a^3 - \frac{\rho_0}{12\varepsilon_0}(r^3 - a^3)$$

سطوح هم پتانسیل

بیان فضای پیرامون بارها بر اساس میدان الکتریکی

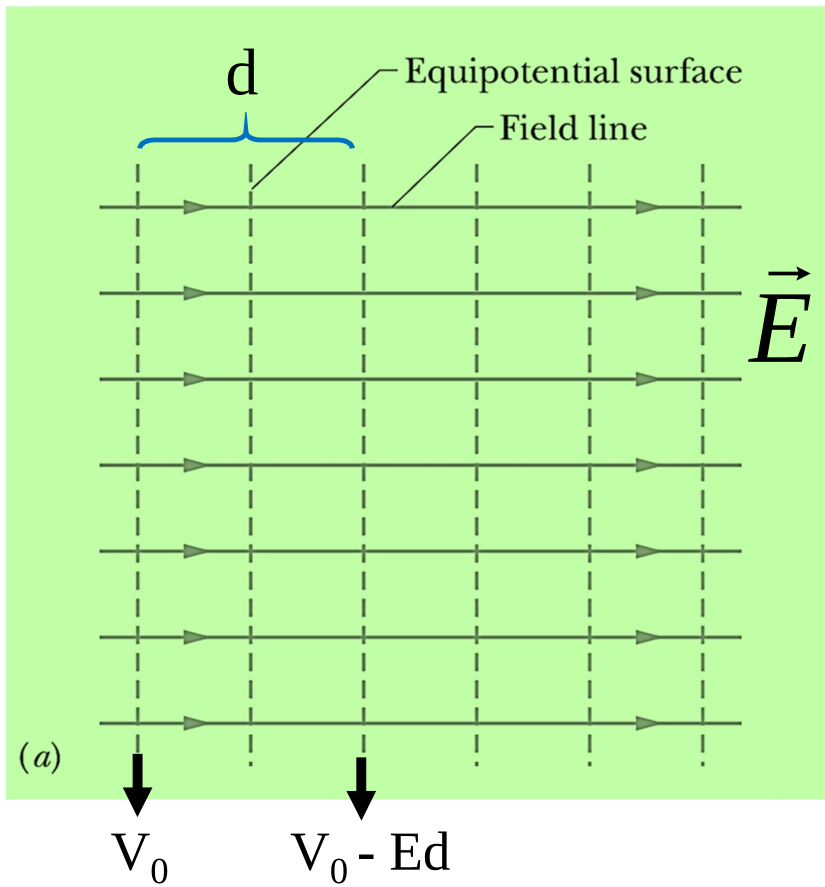
نمودار خطوط نیرو

بیان فضای پیرامون بارها بر اساس پتانسیل الکتریکی

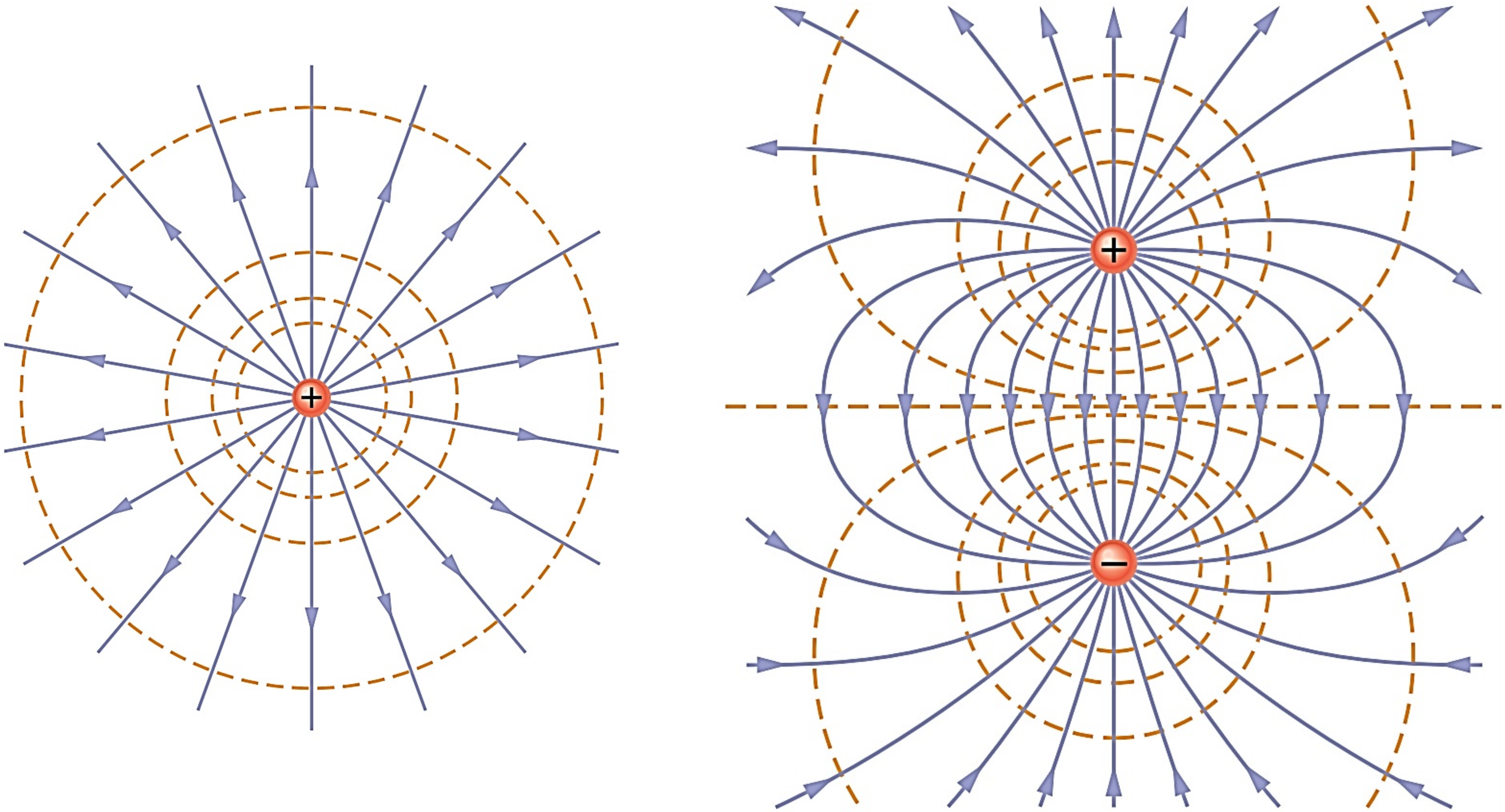
نمودار سطوح هم پتانسیل ؟

نمودار سطوح هم پتانسیل:

مکان هندسی نقاطی (سطوح در فضا) که دارای پتانسیل الکتریکی یکسانی می باشند

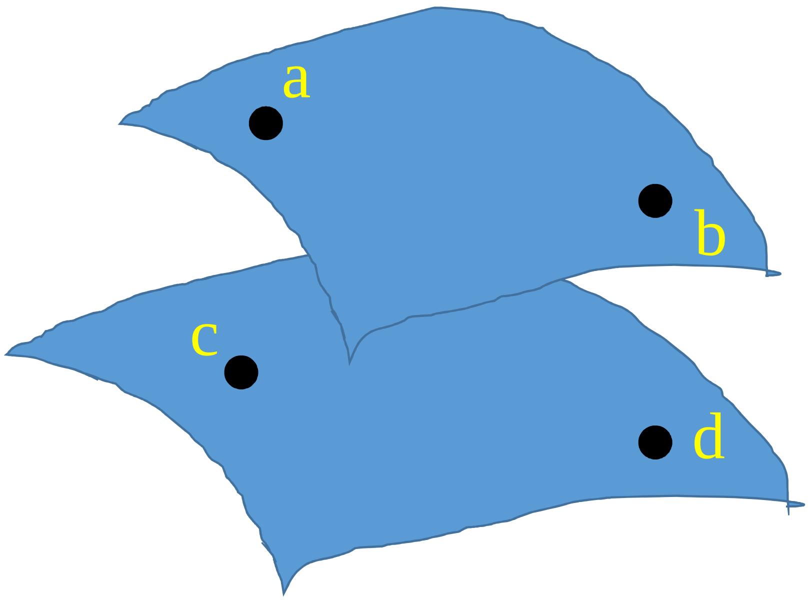


سطوح هم پتانسیل در حضور میدان الکتریکی یکنواخت



ویژگیهای سطوح هم پتانسیل

۱- همه نقاط روی یک سطح هم پتانسیل دارای پتانسیل یکسانی هستند



$$V_a = V_b$$

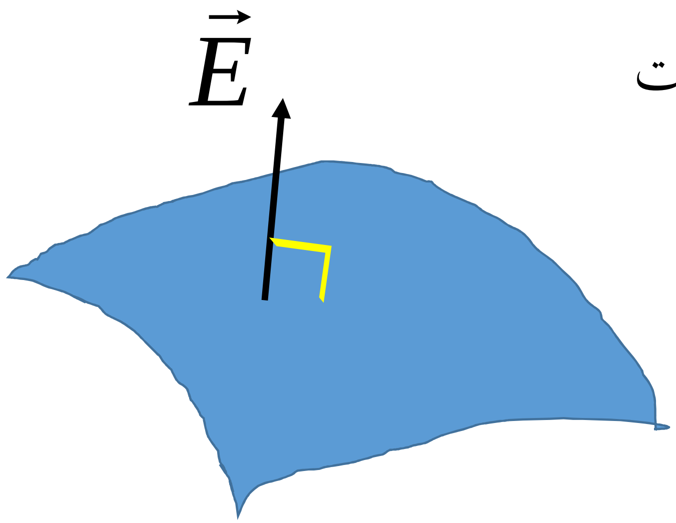
$$V_c = V_d$$

$$V_c \neq V_a$$

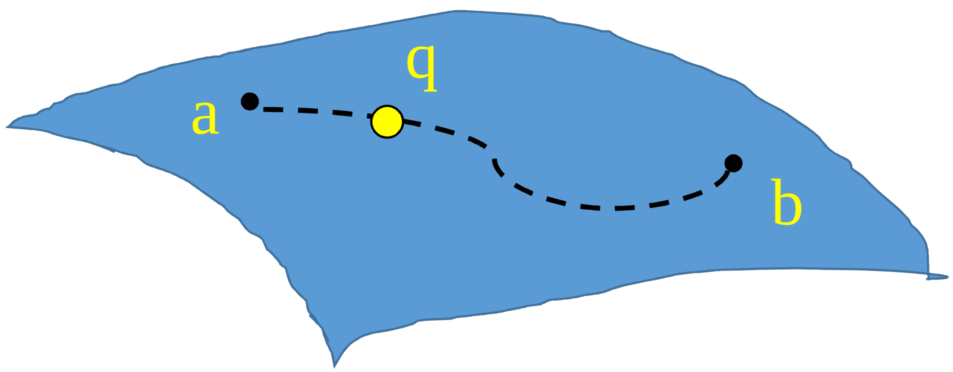
۲- همه نقاط روی دو صفحه هم پتانسیل مجزا، دارای اختلاف پتانسیل یکسانی هستند

$$V_a - V_c = V_b - V_d = V_a - V_d = V_b - V_c$$

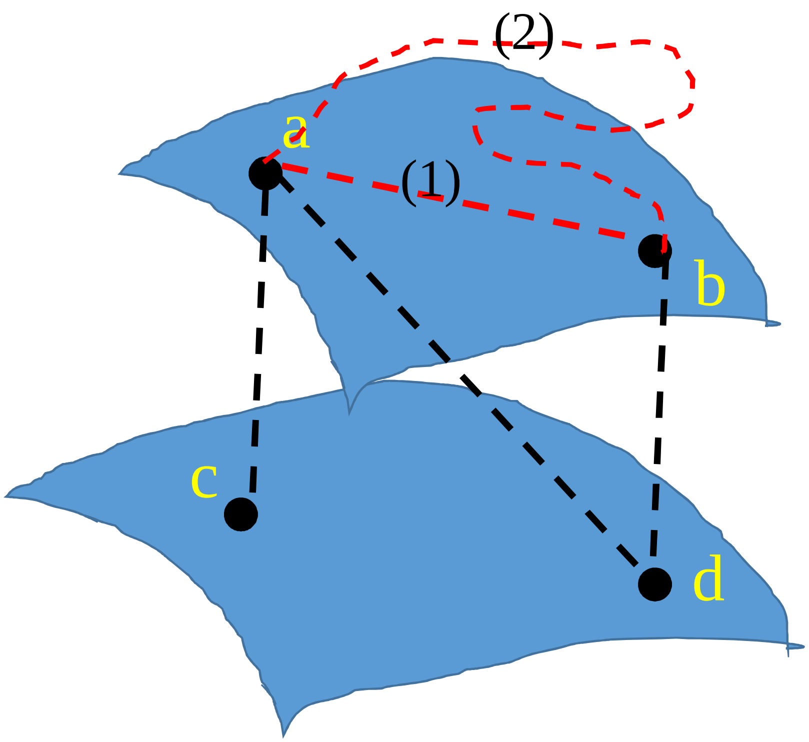
۳- همواره میدان الکتریکی بر سطوح هم پتانسیل عمود است



٤- با جابه جایی یک بار الکتریکی روی یک سطح هم پتانسیل، کار خالص میدان الکتریکی روی بار صفر است



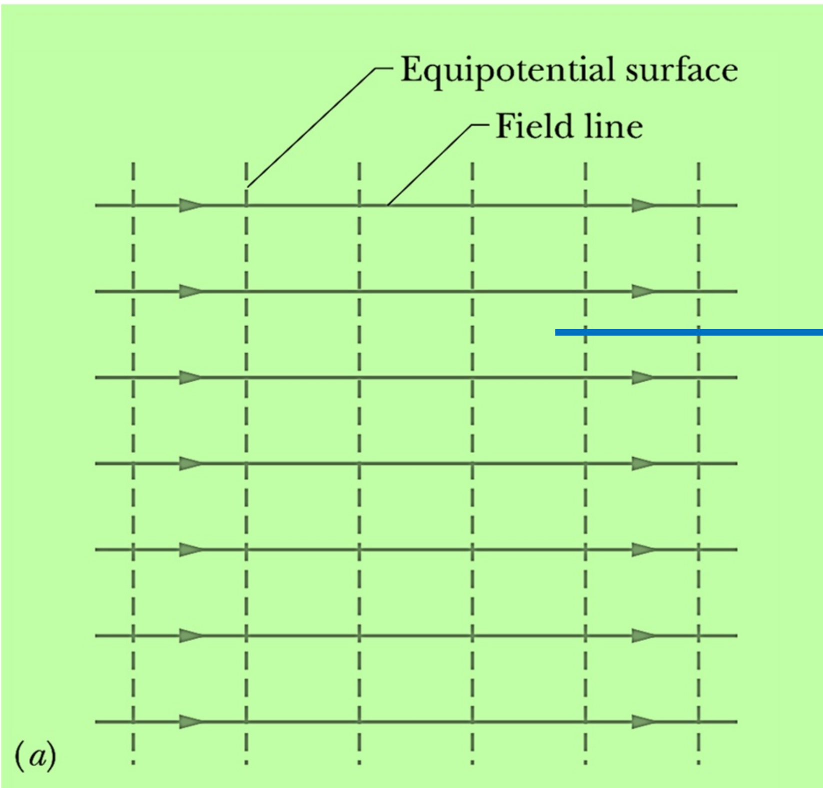
۵- کار انجام شده روی ذره باردار بین صفحات هم پتانسیل مجزا، فقط به پتانسیل صفحه ابتدایی و پتانسیل انتهایی بستگی دارد نه مسیر (نیروی الکتریکی پایستار است)



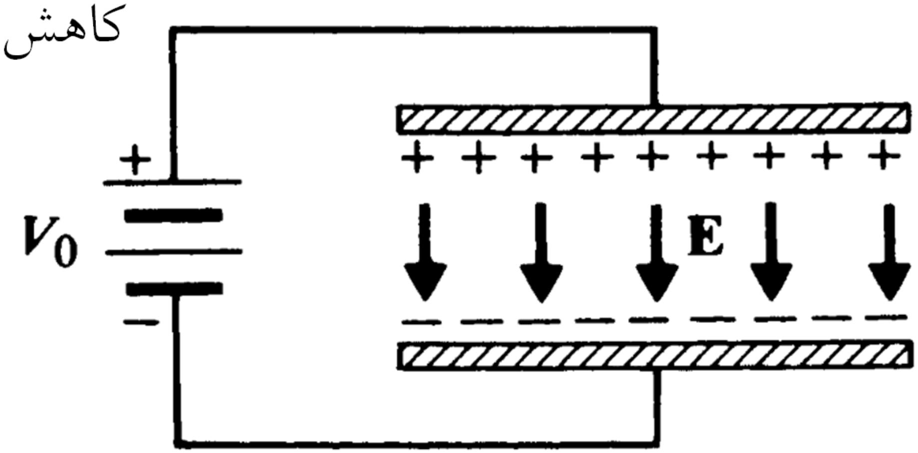
$$W_{a\to b}^{(1)} = 0 \quad , \quad W_{a\to b}^{(2)} = 0$$

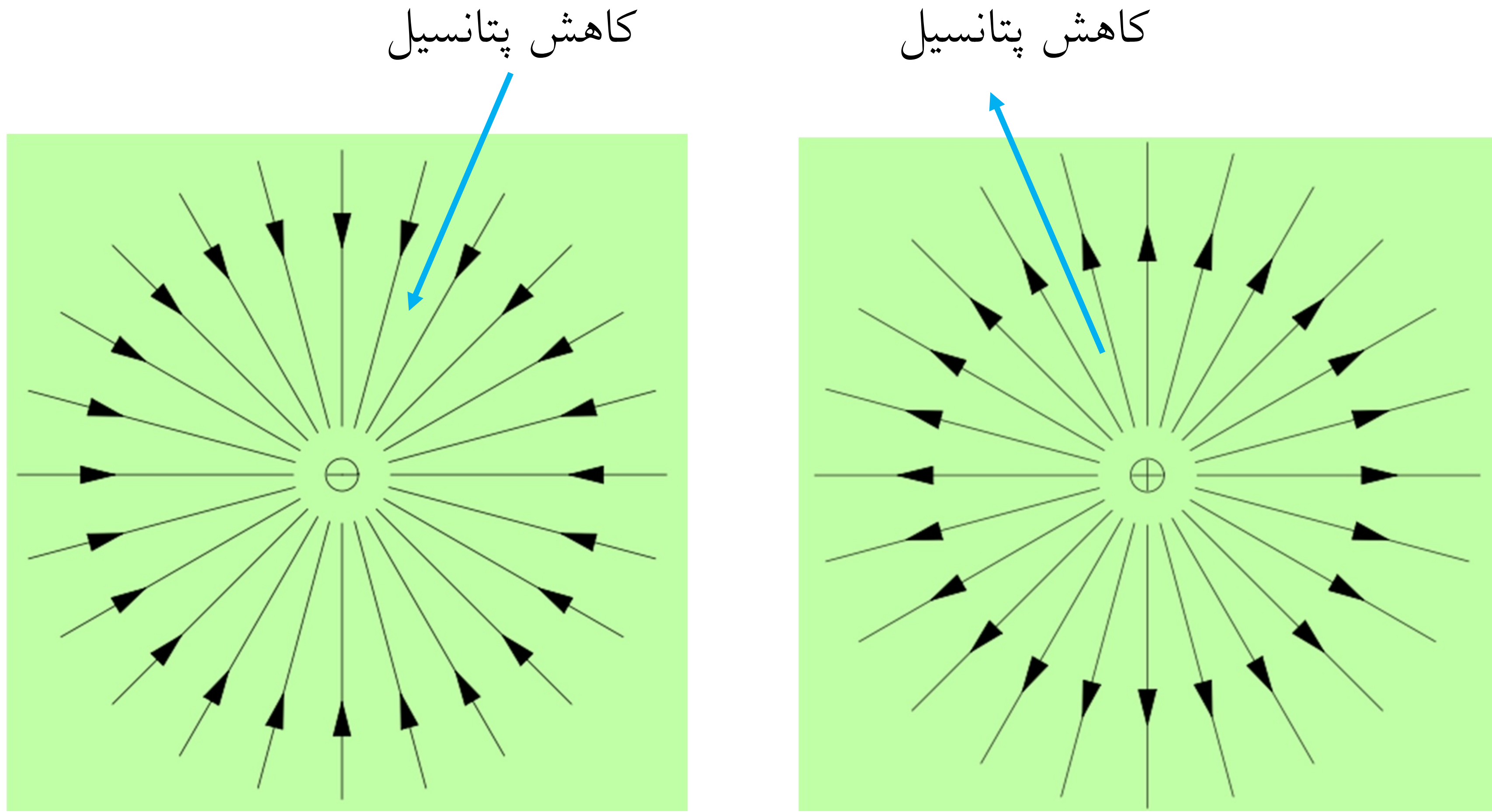
$$W_{a\to c} = W_{a\to d} = W_{c\to d}$$

۶- جهت میدان همواره از ناحیه با پتانسیل بیشتر به پتانسیل کمتر است



کاهش پتانسیل




کاهش پتانسیل
کاهش پتانسیل

۷- در یک رسانا و در حالت الکتروستاتیک، همه نقاط داخل رسانا هم پتانسیل و در پتانسیلی برابر با پتانسیل سطح خارجی آن می باشد

محاسبه میدان الکتریکی از پتانسیل الکتریکی

$$V(r) = -\int_{\infty}^{r} \vec{E}(r)\,.\,d\vec{s}$$

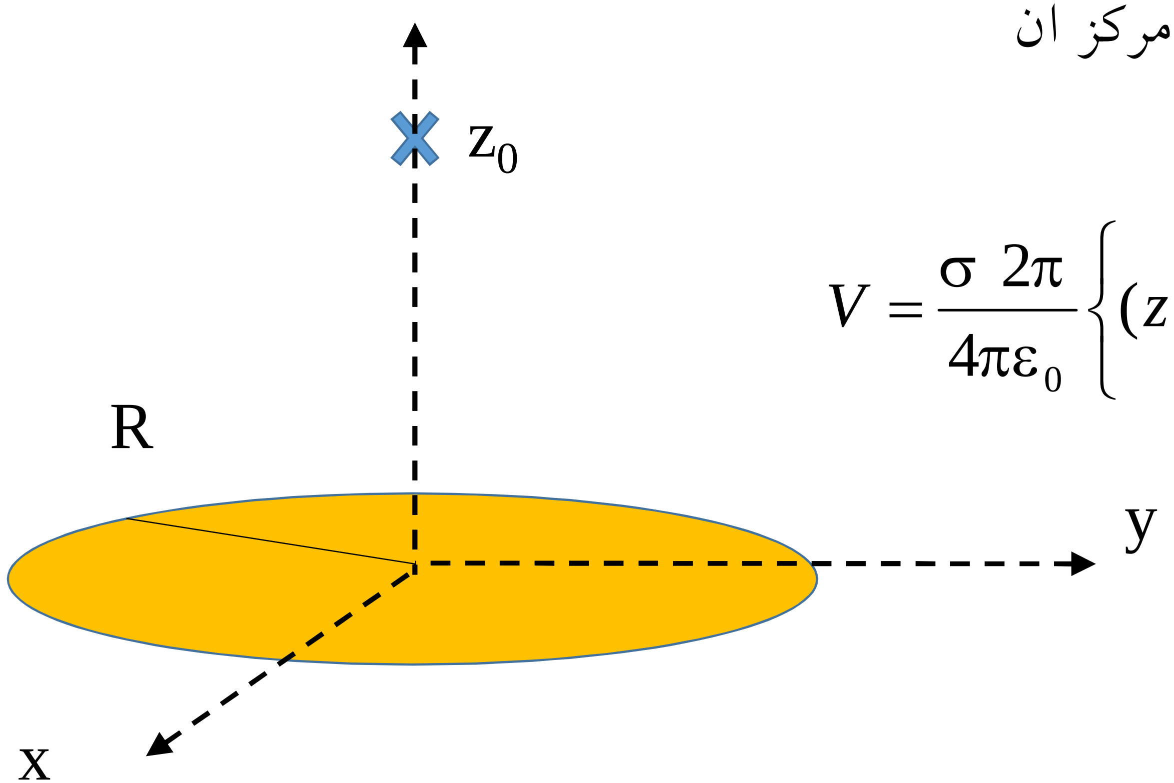
$$\begin{tikzcd} \vec{E}(\vec{r}) \arrow[r, bend left] & V(\vec{r}) \arrow[l, bend left, "\text{؟}"] \end{tikzcd}$$

$$\boxed{\vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla} V}$$

در دستگاه مختصات دکارتی

$$\vec{\nabla} V = \frac{\partial V}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial V}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial V}{\partial z}\hat{k}$$

مثال۱۹) میدان الکتریکی ناشی از یک دیسک نازک باردار با شعاع a و چگالی بار σ در نقطه ای روی محور قرص در فاصله z نسبت به مرکز آن



$$V=\frac{\sigma\ 2\pi}{4\pi\varepsilon_0}\left\{(z^2+R^2)^{\frac{1}{2}}-z\right\}$$

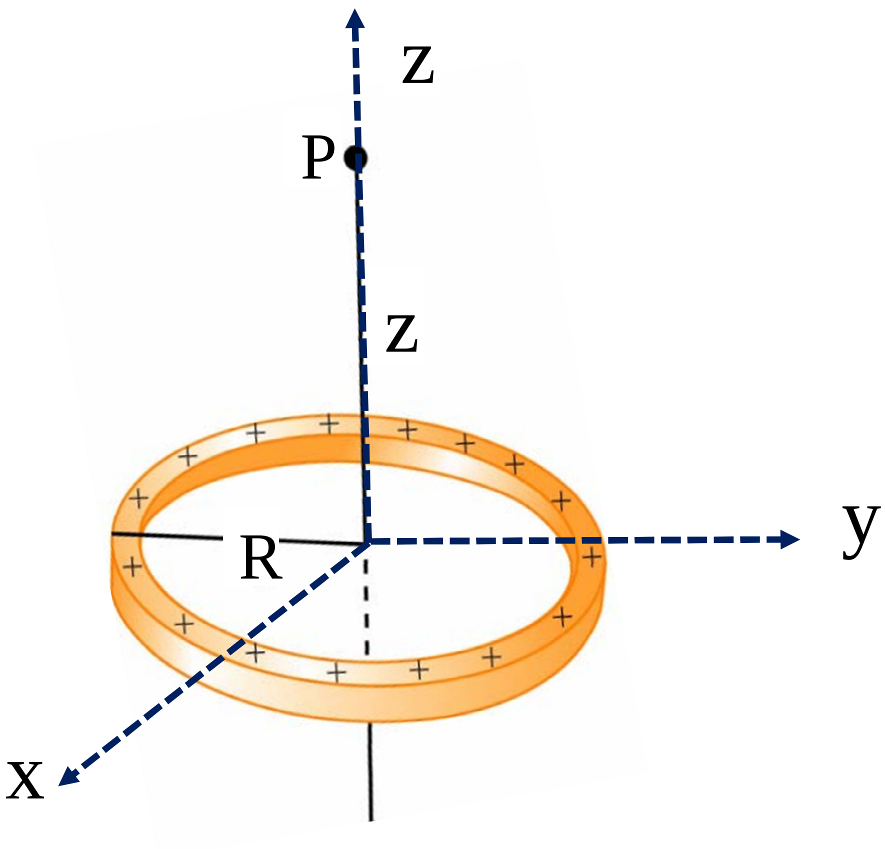
$$V = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left\{(z^2 + R^2)^{\frac{1}{2}} - z\right\}$$

$$E_z = -\frac{dV}{dz}$$

$$E_z = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\frac{d}{dz}\left[(z^2 + R^2)^{\frac{1}{2}} - z\right]$$

$$E_z = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[1 - \frac{z}{(z^2 + R^2)^{\frac{1}{2}}}\right]$$

مثال۲۰) میدان یک حلقه باردار نازک با بار q و شعاع R در نقطه ای روی محور حلقه در فاصله z نسبت به مرکز حلقه

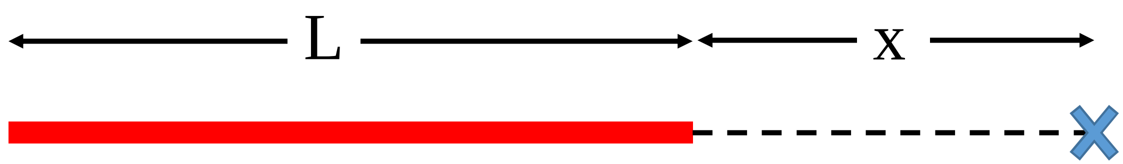


$$V=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0(z^2+R^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$E_z=-\frac{dV}{dz}=\frac{-q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{d}{dz}\left[\frac{1}{(z^2+R^2)^{\frac{1}{2}}}\right]$$

$$E_z=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{z}{(z^2+R^2)^{\frac{3}{2}}}$$

مثال ۲۱) میدان الکتریکی ناشی از خط بار متناهی به طول L و چگالی بار خطی ثابت λ در امتداد آن در فاصله a از انتهای آن



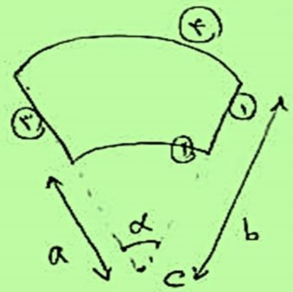
$$V=\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}Ln\frac{L+x}{x}$$

$$E_z=-\frac{dV}{dx}=-\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\frac{d}{dx}\left[Ln\frac{L+x}{x}\right]=-\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\times\frac{\dfrac{x-(L-x)}{x^2}}{\dfrac{L+x}{x}}$$

$$E_z=\frac{\lambda L}{4\pi\varepsilon_0 x(L+x)}$$

تمرین های سری دوم

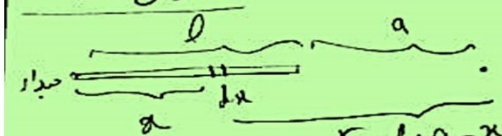
۱- میله ی بارداری بصورت شکل زیر درآمده است. چگالی خطی بار روی میله λ است پتانسیل را در نقطه c که مرکز کمانهای باشد بدست آورید



جواب: این مجموعه شامل دو خط بار تساوی ① و ③ و دو کمان ② و ④ است

$$V = \int \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

پتانسیل خط بار در امتداد



$$V = \int_0^l \frac{\lambda\, dx}{4\pi\varepsilon_0 (l+a-x)}$$

$$= \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \times -\ln(l+a-x)\Big|_{x=0}^{l}$$

$$V_{\text{خط بار}} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \times -\{\ln a - \ln(l+a)\} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \ln\frac{l+a}{a}$$

۲

پتانسیل ناشی از کمان در مرکز

ادامه جواب سوال ۱

$$V_{\text{کمان}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\lambda R\, d\varphi}{R} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\,\alpha$$

$$V_{\text{کل مجموعه}} = V_1 + V_2 + V_3 + V_4 =$$

طول خط بار — فاصله انتهای خط بار تا نقطه

$$= \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\ln\frac{(b-a)+a}{a} + \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\alpha + \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\ln\frac{b-a+a}{a} + \frac{\lambda\alpha}{4\pi\varepsilon_0}$$

$$V = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\left\{\ln\frac{b}{a} + \alpha\right\}$$

۲- کره‌ای به شعاع R نارسانا دارای چگالی ρ^{+} می‌باشد این کره در مرکز یک پوسته رسانایی به شعاع داخلی $3R$ و خارجی $4R$ قرار دارد. بار ذاتی پوسته رسانا $-2q$ است. پتانسیل الکتریکی را با فرض صفر بودن پتانسیل در بی‌نهایت در نواحی مختلف بدست آورید

$$\left.\begin{array}{l} r<R \\ R<r<3R \\ 3R<r<4R \\ r>4R \end{array}\right\}$$ چهار ناحیه

$r<R$ (داخل کره نارسانا)

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = \frac{q_{\text{محصور}}}{\varepsilon_0}$$

$$E_1(4\pi r^2) = \frac{\frac{4}{3}\pi r^3 \rho}{\varepsilon_0}$$

$$E_1 = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} r$$

$R<r<3R$ (در فضای خالی)

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = \frac{\text{کل بار نارسانا}}{\varepsilon_0} \Rightarrow E_2(4\pi r^2) = \frac{\frac{4}{3}\pi R^3 \rho}{\varepsilon_0}$$

$$E_2 = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^2}$$

ادامه جواب سوال ۲

$3R<r<4R$ (داخل رسانا) $E_3 = 0$

کره نارسانا به اندازه ی بار منفی $-\frac{4}{3}\pi R^3\rho$ بار روی سطح داخلی کره پوسته کروی القا می کند

بار روی سطح خارجی پوسته $\left(\frac{4}{3}\pi R^3\rho + (-2q_1)\right)$ خواهد بود

$4R<r$ (در فضای بیرون از مجموعه)

$$E_4(4\pi r^2) = \frac{q_{\text{خالص}}}{\varepsilon_0} = \frac{\frac{4}{3}\pi R^3\rho - 2q_1}{\varepsilon_0}$$

$$E_4 = \frac{\frac{4}{3}\pi R^3\rho - 2q_1}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

محاسبه پتانسیل در نواحی مختلف $\quad V = -\int_\infty^r \vec{E}\cdot d\vec{s}$

پتانسیل یک نقطه در ناحیه $r>4R$ $\longrightarrow$ فقط شامل میدان E_4

$$V(r) = -\int_\infty^r \vec{E}_4\cdot d\vec{r} = -\left(\frac{\frac{4}{3}\pi R^3\rho - 2q_1}{4\pi\varepsilon_0}\right)\underbrace{\int_\infty^r \frac{dr}{r^2}}_{-\frac{1}{r}}$$

$$V(r) = \frac{\frac{4}{3}\pi R^3\rho - 2q_1}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

۵

ادامه جواب سوال ۲

$3R<r<4R$

$$V=-\int_{\infty}^{r}\vec{E}\cdot d\vec{r}=-\int_{\infty}^{4R}\vec{E}_4\cdot d\vec{r}-\underbrace{\int_{4R}^{r}\vec{E}_3\cdot d\vec{r}}_{0}$$

$$=\frac{\frac{4}{3}\pi R^3\rho-2q}{4\pi\varepsilon_0\times 4R}$$

$2R<r<3R$

$$V=-\left\{\underbrace{\int_{\infty}^{4R}\vec{E}_4\cdot d\vec{r}}_{\text{شکل قبل}}+\underbrace{\int_{4R}^{3R}\vec{E}_3\cdot d\vec{r}}_{0}+\int_{3R}^{r}\vec{E}_2\cdot d\vec{r}\right\}$$ در نارسانا

$$=\frac{\frac{4}{3}\pi R^3\rho-2q}{4\pi\varepsilon_0\times 4R}-\int_{3R}^{r}\frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^2}\,dr$$

$$=\frac{\frac{4}{3}\pi R^3\rho-2q}{4\pi\varepsilon_0\times 4R}-\frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0}\underbrace{\int_{3R}^{r}\frac{1}{r^2}\,dr}_{-\frac{1}{r}+\frac{1}{3R}}$$

$$V=\frac{\frac{4}{3}\pi R^3\rho-2q}{4\pi\varepsilon_0\times 4R}+\frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{3R}\right)$$

ادامه جواب سوال ۲

$r < R$

$$V = -\left\{ \underbrace{-\int_{\infty}^{4R} \vec{E}_4 \cdot d\vec{r}}_{\frac{\frac{4}{3}\pi R^3 \rho - 2q}{4\pi\varepsilon_0 \times 4R}} - \underbrace{\int_{4R}^{3R} \vec{E}_3 \cdot d\vec{r}}_{0} - \underbrace{\int_{R}^{3R} \vec{E}_2 \cdot d\vec{r}}_{\frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{3R}\right)} - \int_{R}^{r} \vec{E}_1 \cdot d\vec{r} \right.$$

$$\int_{R}^{r} \frac{\rho}{3\varepsilon_0} r\,dr = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} \times \frac{1}{2}\left(r^2 - R^2\right)$$

$$V = \frac{\frac{4}{3}\pi R^3 \rho - 2q}{4\pi\varepsilon_0 \times 4R} + \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{3R}\right) + \frac{\rho}{6\varepsilon_0}\left(r^2 - R^2\right)$$

۷

۳- میله ی باردار به طول محدود l و با چگالی بار متغیر $\lambda = cx$ داریم که c یک عدد ثابت است و x فاصله هر نقطه از میله تا مبداء است. پتانسیل را در نقطه P بدست آورید

$$dq = \lambda\, dx = cx\, dx$$

$$V = \int \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 r} = \int_{x=0}^{l} \frac{cx\, dx}{4\pi\varepsilon_0 (l+a-x)}$$

$$= \frac{c}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{x\, dx}{l+a-x}$$

حل انتگرال به روش جزء به جزء

$$x = u \quad \Rightarrow \quad du = dx$$

$$\frac{dx}{l+a-x} = dv \qquad v = -\ln(l+a-x)$$

$$V = \frac{c}{4\pi\varepsilon_0} \left\{ -x \ln(l+a-x) \Big|_0^l - \int_{x=0}^{l} -\ln(l+a-x)\, dx \right\}$$

در اینترنت ببینید $\int \ln x\, dx = x \ln x - x$

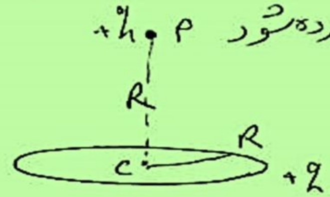
و $\int \ln(b-x)\, dx = -(b-x)\ln(b-x) - x$

ادامه جواب سوال ۳

$$V = \frac{c}{4\pi\varepsilon_0} \left\{ l \ln a + \left(-(l+a-x)\ln(l+a-x) - x\right)\Big|_{x=0}^{l} \right\}$$

$$= \frac{c}{4\pi\varepsilon_0} \left\{ l \ln a + \left(-a \ln a - l - (l+a)\ln(l+a)\right) \right\}$$

۴- حلقه‌ای به شعاع R و بار $+q_1$ داریم. بار نقطه‌ای روی محور حلقه و در فاصله R از مرکز آن قرار دارد. بار نقطه $+q_2$ است. یک نیروی خارجی چه‌قدر باید کار انجام دهد تا بار $+q_2$ به مرکز حلقه آورده شود



کار نیروی خارجی در جابه‌جایی = تغییر انرژی پتانسیل الکتریکی وقتی بار از نقطه‌ای به نقطه دیگر می‌رود

$$W_{\text{خارجی}} = \Delta U = q_2\,(V_C - V_P)$$

پتانسیل ناشی از حلقه در نقطه C

پتانسیل در مرکز حلقه $V_C = \dfrac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 R}$

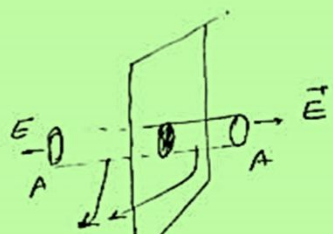
روی محور حلقه ... $V_P = \dfrac{q_1}{4\pi\varepsilon_0\,(z^2+R^2)^{1/2}} = \dfrac{q_1}{4\pi\varepsilon_0\,(R^2+R^2)^{1/2}} = \dfrac{q_1}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{2}R}$

$$W_{\text{خارجی}} = q_2\left(\frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 R} - \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{2}R}\right) = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 R}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

۵- صفحه ی باردار بی نهایتی با چگالی بار σ مفروض است. اختلاف پتانسیل بین دو نقطه در نزدیکی صفحه را بدست آورید

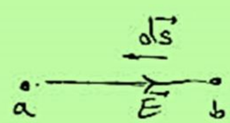
$$V_a - V_b = ?$$

محاسبه میدان ناشی از یک صفحه باردار



$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

$$2EA = \frac{\sigma A}{\varepsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$



$$V_a - V_b = -\int_b^a \vec{E}\cdot d\vec{s}$$

$$= E\int_b^a ds = Ex = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}x$$