

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

فصل سوم

حل مسائل الکتروستاتیک

(بخش سوم)

معادله لاپلاس سه بعدی در مختصات قائم

هنگامی که در غیاب بار، سیستمی از رساناها داریم که در پتانسیل های ثابتی نگه داشته شده اند. در چنین مواردی از معادله لاپلاس سه متغیره می توان استفاده نمود

method of separation of variables.

$$\nabla^2 \varphi \equiv \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}$$

این معادله شامل معادلات دیفرانسیلی پاره ای با شرایط مرزی می باشد

Boundary-value problems for potential functions can be classified into three types:

- (1) ***Dirichlet problems***, in which the value of the potential is specified everywhere on the boundaries;
- (2) ***Neumann problems***, in which the normal derivative of the potential is specified everywhere on the boundaries;
- (3) ***Mixed boundary-value problems***, in which the potential is specified over some boundaries and the normal derivative of the potential is specified over the remaining ones.

The solutions of Laplace's equation are often called ***harmonic functions***.

$$\nabla^2 \varphi \equiv \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}$$

$$\varphi(x, y, z) = f_1(x) f_2(y) f_3(z)$$

$$\underbrace{\frac{1}{f_1(x)} \frac{d^2 f_1}{dx^2} + \frac{1}{f_2(y)} \frac{d^2 f_2}{dy^2}}_{\text{تابعی از X و Y}} = \underbrace{\frac{1}{f_3(z)} \frac{d^2 f_3}{dz^2}}_{\text{تابعی از Z}} = k$$

تابعی از X و Y

تابعی از Z

ثابت جداسازی اول



$$\frac{d^2 f_3}{dz^2} + k f_3 = 0 \quad \textcircled{1}$$

$$\frac{1}{f_1(x)} \frac{d^2 f_1}{dx^2} + \frac{1}{f_2(y)} \frac{d^2 f_2}{dy^2} = k$$



$$\underbrace{\frac{1}{f_2} \frac{d^2 f_2}{dy^2}}_{\text{تابعی از } y} = k - \underbrace{\frac{1}{f_1} \frac{d^2 f_1}{dx^2}}_{\text{تابعی از } x} = -m$$

تابعی از y

تابعی از x

ثابت جداسازی دوم



$$\begin{cases} \frac{d^2 f_2}{dy^2} + m f_2 = 0 \\ \frac{d^2 f_1}{dx^2} - (k + m) f_1 = 0 \end{cases}$$

2

3

$$\begin{array}{l}
 \textcircled{1} \left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2 f_z}{dz^2} + k f_z = 0 \end{array} \right. \rightarrow f_3(z) \propto \cos k^{\frac{1}{2}} z \quad \text{or} \quad \sin k^{\frac{1}{2}} z \\
 \textcircled{2} \left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2 f_y}{dy^2} + m f_y = 0 \end{array} \right. \rightarrow f_2(y) \propto \cos m^{\frac{1}{2}} y \quad \text{or} \quad \sin m^{\frac{1}{2}} y \\
 \textcircled{3} \left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2 f_x}{dx^2} - (k+m) f_x = 0 \end{array} \right. \rightarrow f_1(x) \propto e^{-(k+m)^{\frac{1}{2}} x} \quad \text{or} \quad e^{(k+m)^{\frac{1}{2}} x}
 \end{array}$$



$$\varphi(x, y, z) = A e^{-(k+m)^{\frac{1}{2}} x} \cos m^{\frac{1}{2}} y \cos k^{\frac{1}{2}} z$$

مقادیر ثابت A ، k و m توسط شرایط مرزی مشخص می شود

شرایط مرزی مسئله معمولا k (یا m) را به مجموعه گسسته ای از مقادیر مثبت یا منفی محدود می کند

$$\varphi(x, y, z) = Ae^{-(k+m)^{1/2}x} \cos m^{1/2}y \cos k^{1/2}z$$

$$k = q^2 \quad m = p^2$$

جواب خصوصی برای پتانسیل

$$\varphi(x, y, z) = \sum_p \sum_q A_{pq} e^{-(p^2+q^2)^{1/2}x} \cos py \cos qz$$

جواب کلی برای پتانسیل

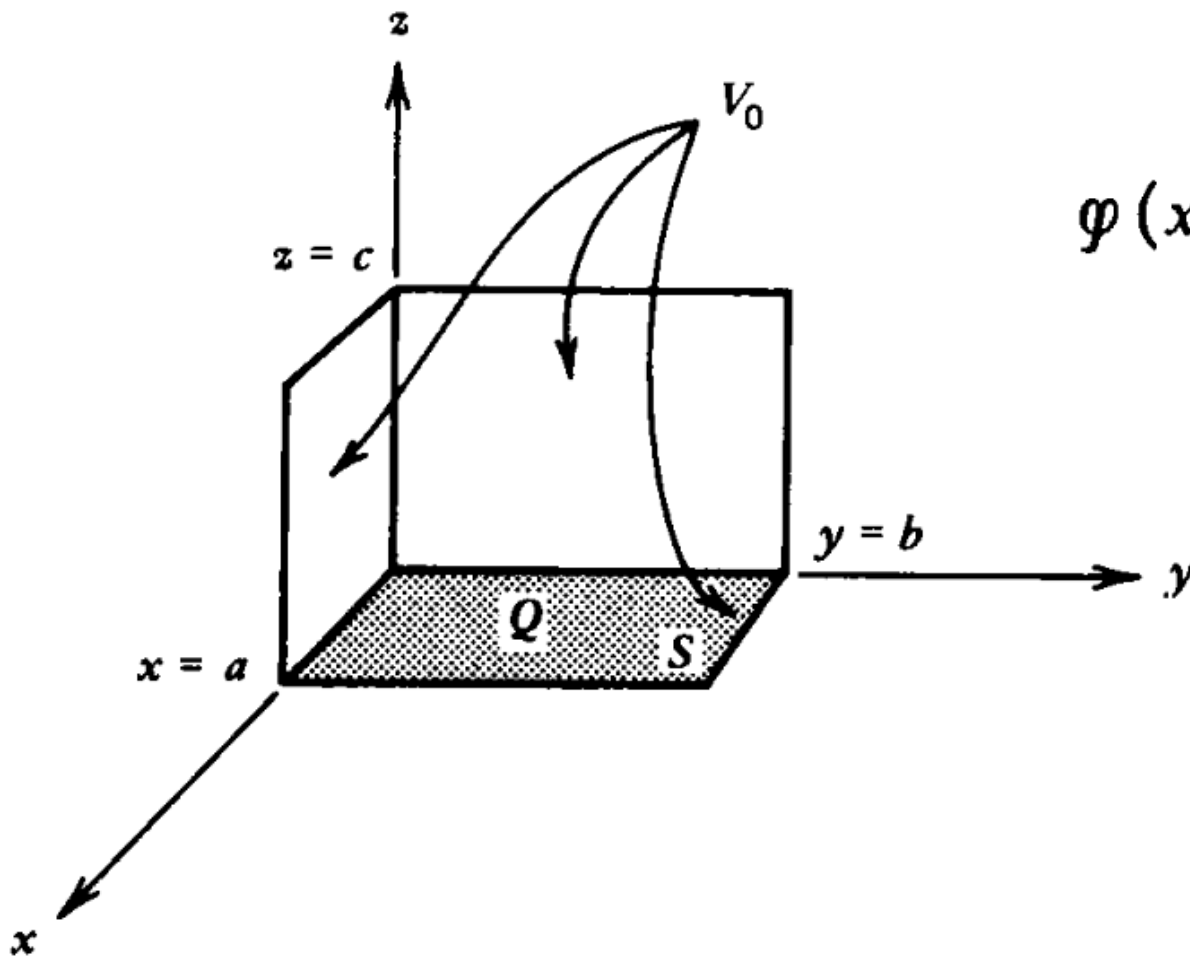
$$\begin{array}{l}
 \text{if } k=0, \quad m=0 \quad \rightarrow \\
 \frac{d^2 f_1}{dx^2} = 0 \quad \rightarrow \quad f_1(x) = a_1 x + a'_1 \\
 \frac{d^2 f_2}{dy^2} = 0 \quad \rightarrow \quad f_2(y) = a_2 y + a'_2 \\
 \frac{d^2 f_3}{dz^2} = 0 \quad \rightarrow \quad f_3(z) = a_3 z + a'_3
 \end{array}$$

$$\varphi(x, y, z) = \sum A_i f_1(x) f_2(y) f_3(z)$$

$$\begin{aligned}
 \varphi(x, y, z) = & A_{\Delta} x y z + A_{\Upsilon} x y + A_{\Psi} y z + A_{\Phi} x z \\
 & + A_{\Omega} x + A_{\zeta} y + A_{\nu} z + A_{\Lambda}
 \end{aligned}$$

مثال) سه صفحه رسانا با پتانسیلهای یکسان همدیگر را به صورت زیر قطع نموده اند پتانسیل در نقطه (x, y, z) چه مقدار است

$$\varphi(x, y, z) = A_1xyz + A_2$$



$$\Phi = A_1xyz + A_2xy + A_3xz + A_4yz + A_5x + A_6y + A_7z + A_8$$

boundary conditions at $x = 0$, $y = 0$, and $z = 0$ gives

$$V_0 = A_4yz + A_6y + A_7z + A_8$$

$$V_0 = A_3xz + A_5x + A_7z + A_8$$

$$V_0 = A_2xy + A_5x + A_6y + A_8$$

These relations give $A_8 = V_0$ and $A_2 = A_3 = A_4 = A_5 = A_6 = A_7 = 0$. Thus

$$\Phi(x, y, z) = A_1xyz + V_0$$

The knowledge of the total charge on one of the planes allows the evaluation of A_1 . Let us take the total charge on the x - y plane to be Q and its area to be S . Therefore

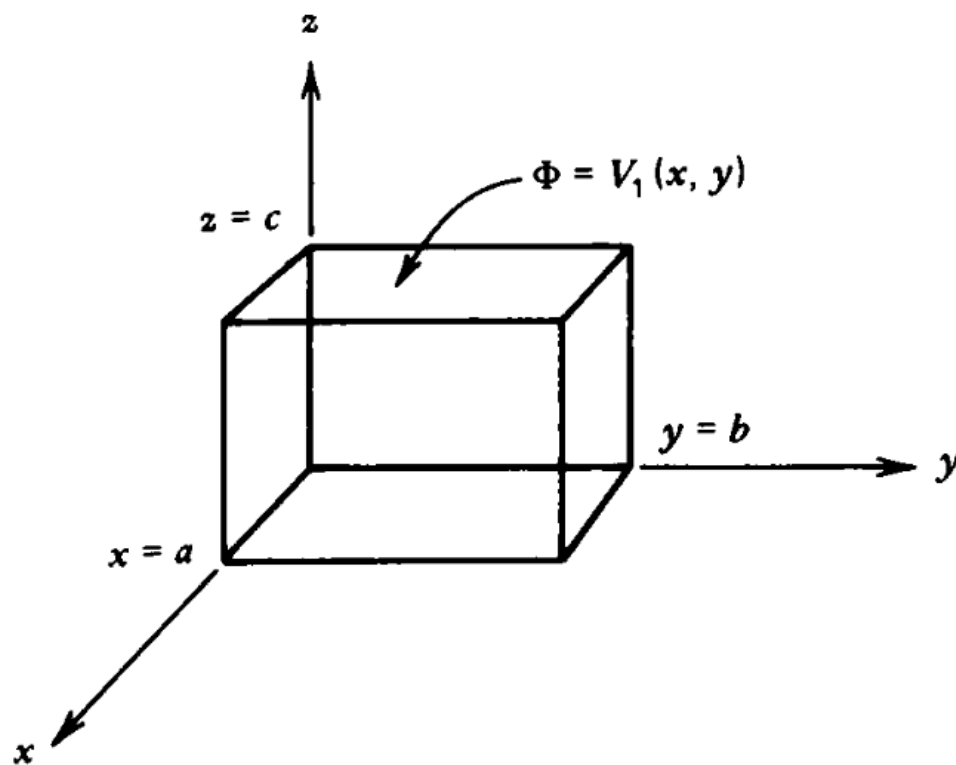
$$Q = \int_S \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, da = -A_1 \int xy \, dx \, dy = -\frac{1}{4} A_1 S^2 \quad (3.96)$$

or $A_1 = -Q/4S^2$, and hence

$$\Phi(x, y, z) = -\frac{1}{4} \frac{Q}{S} xyz + V_0 \quad (3.97)$$

Example 3.11 Conducting Box

Consider a box of dimensions a , b , and c , as shown in Fig. 3.8. The top face at $z = c$ is kept at a voltage $V_1(x, y)$, and the other faces are isolated from it and kept at zero potential. Because the potential on the faces passing through the origin is zero, then only one of the eight expansions will satisfy this condition—namely, $\sinh \gamma z \sin \alpha x \sin \beta y$.



The separation constants α and β can now be restricted by invoking the conditions at $x = a$ and $y = b$. For the potential to be zero at these planes it is required that $\sin \alpha a = \sin \beta b = 0$, which yields $\alpha = n\pi/a$ and $\beta = m\pi/b$, where m and n are positive integers. Therefore, for the potential inside the box, we write

$$\Phi(x, y, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} A_{mn} \sinh \gamma_{mn} z \sin \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{b} \quad (3.88)$$

where $\gamma_{mn} = \pi(n^2/a^2 + m^2/b^2)^{1/2}$ and A_{mn} are constants to be evaluated from the rest of the boundary conditions.

The last boundary condition is at the top face of the box:

$\Phi(x, y, c) = V_1(x, y)$ is a given function; thus,

$$V_1(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} A_{mn} \sinh \gamma_{mn} c \sin \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{b}$$

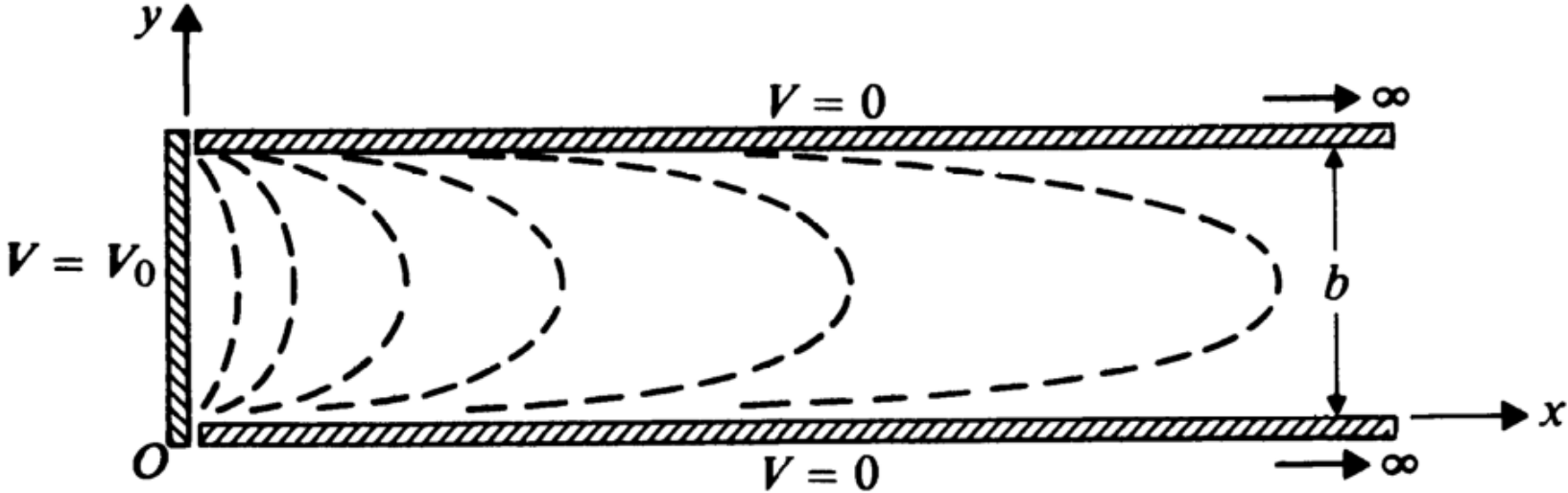
which is a *double Fourier series*. Since the sine functions are linearly independent [see Eq. (3.63)], then multiplying both of its sides by $\sin(n\pi x/a)\sin(m\pi y/b)$ and integrating over x and y from 0 to a and 0 to b , respectively, we get

$$A_{mn} = \frac{4}{ab \sinh \gamma_{mn} c} \int_0^a dx \int_0^b dy V_1(x, y) \sin \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{b} \quad (3.90)$$

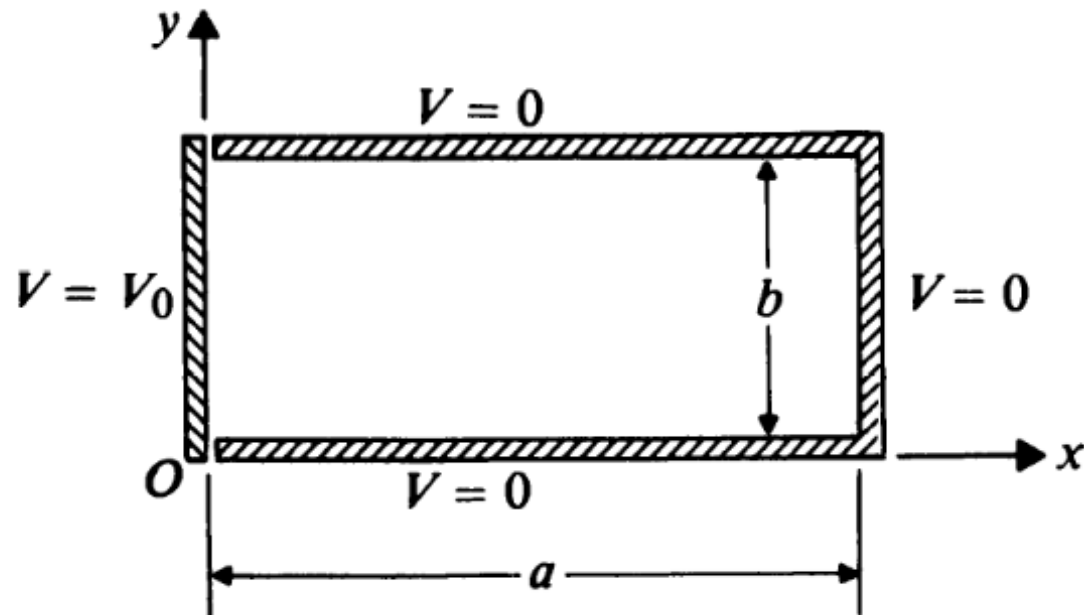
In the case $V_1(x, y) = V_0 = \text{a constant}$, then $A_{mn} = 16V_0/(mn\pi^2 \sinh \gamma_{mn}c)$, where m and n are odd integers, and therefore

$$\Phi(x, y, z) = \sum_{n=1,3,\dots} \sum_{m=1,3,\dots} \frac{16V_0 \sinh \gamma_{mn}z}{mn\pi^2 \sinh \gamma_{mn}c} \sin \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{b} \quad (3.91)$$

EXAMPLE 4-6 Two grounded, semi-infinite, parallel-plane electrodes are separated by a distance b . A third electrode perpendicular to and insulated from both is maintained at a constant potential V_0 (see Fig. 4-15). Determine the potential distribution in the region enclosed by the electrodes.



EXAMPLE 4-7 Consider the region enclosed on three sides by grounded conducting planes shown in Fig. 4-17. The end plate on the left is insulated from the grounded sides and has a constant potential V_0 . All planes are assumed to be infinite in extent in the z -direction. Determine the potential distribution within this region.



۹.۳ تصویرهای الکتروستاتیکی

حل مسئله بدون حل معادله دیفرانسیل

فرض

$$\varphi(\mathbf{r}) = \varphi_1(\mathbf{r}) + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_s \frac{\sigma(\mathbf{r}') da'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

φ_1 یا تابعی است مشخص و یا به راحتی قابل محاسبه

انتگرال معرف پتانسیلی است که بارهای سطحی تمام رساناهای موجود در مسئله به وجود می آورند

تابع σ مجهول

اساس روش بار تصویری

قرار دادن تابع φ_2 به جای انتگرال

$$\varphi(\mathbf{r}) = \varphi_1 + \varphi_2$$

پتانسیل φ_2 به یک توزیع بار مشخصی مربوط می باشد

★ این امر وقتی امکان پذیر است که سطح تمام رساناها بر سطوح هم پتانسیل حاصل از ترکیب $\varphi_1 + \varphi_2$ منطبق باشند.

★ بارهای مشخصی که φ_2 را ایجاد می کنند به بارهای تصویری معروف اند.

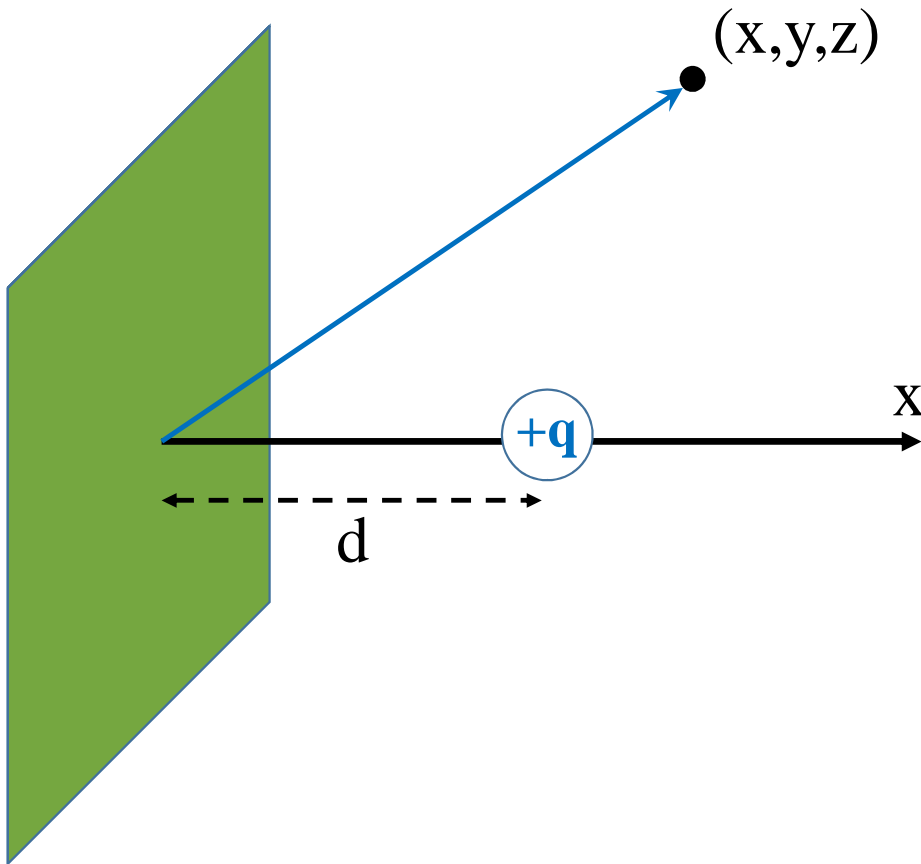
★ این بارها وجود خارجی ندارند.

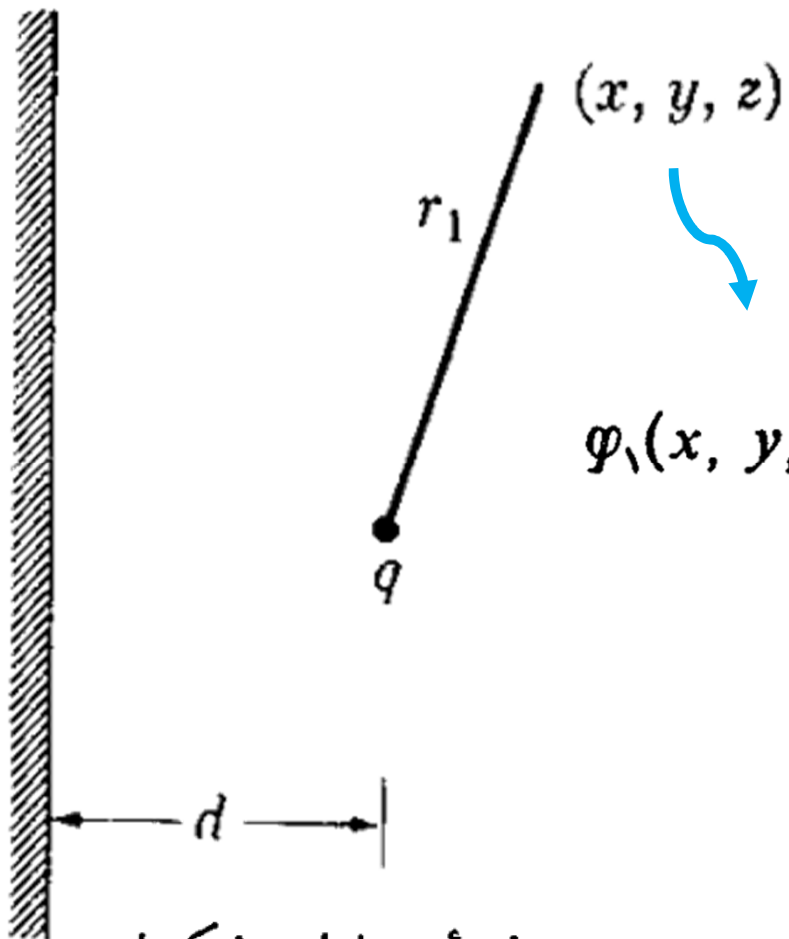
★ مکان ظاهری آنها در داخل رساناهای مختلف است

★ پتانسیل $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$ فقط برای ناحیه خارج از این رساناها جواب قابل قبول مسئله

مثال) بار نقطه ای در نزدیکی یک صفحه رسانای نامتناهی قرار دارد. صفحه با اتصال به زمین در پتانسیل صفر نگه داشته شده است. پتانسیل را در نقطه ای بیرون از صفحه بدست آورید

صفحه نامتناهی بر صفحه yz منطبق است
و بار q روی محور x و در فاصله d از مبدا



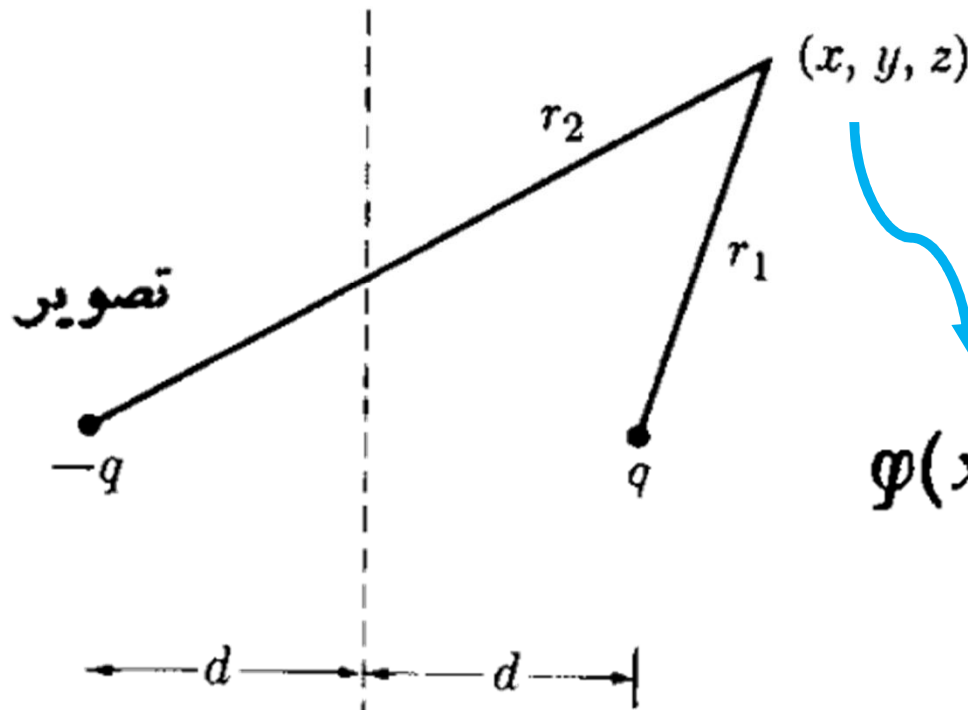


$$\varphi_1(x, y, z) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_1} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{(x-d)^2 + y^2 + z^2}}$$

معادله یک کره به مرکز $x = d$

و معادله (۳۳.۳) پتانسیل مربوط به فضای داخل و یا سمت چپ صفحه رسانای شکل
 ۳.۳ الف را به درستی به دست نمی‌دهد.

مسئله دو بار نقطه ای (q و $-q$)



$$\varphi(x, y, z) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_1} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_2}$$

نه تنها در همه نقاط خارج از بارها در معادله لاپلاس صدق می کند، بلکه مقدار آن روی صفحه عمود منصف خط واصل میان دو بار به مقدار ثابتی (یعنی صفر) تبدیل می شود. پس معادله (۳۳.۳) در شرایط مرزی مسئله اصلی صدق می کند. چون جوابهای معادله لاپلاس منحصر به فردند، معادله (۳۳.۳) پتانسیل صحیح برای سراسر نیم فضای خارج از صفحه رساناست.

$$\varphi_1(x, y, z) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_1} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{(x-d)^2 + y^2 + z^2}}$$

$$\varphi_2(x, y, z) = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_2} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{(x+d)^2 + y^2 + z^2}}$$

$$\varphi(\mathbf{r}) = \varphi_1 + \varphi_2$$

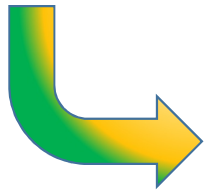


$$\varphi(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q}{\left[(x-d)^2 + y^2 + z^2 \right]^{\frac{1}{2}}} - \frac{q}{\left[(x+d)^2 + y^2 + z^2 \right]^{\frac{1}{2}}} \right]$$

طبق این رابطه پتانسیل روی صفحه رسانا صفر است

$$\varphi(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q}{\left[(x-d)^2 + y^2 + z^2 \right]^{\frac{1}{2}}} - \frac{q}{\left[(x+d)^2 + y^2 + z^2 \right]^{\frac{1}{2}}} \right]$$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi \quad \rightarrow \quad E_x = -\frac{\partial\varphi}{\partial x} \quad \rightarrow \quad E_x(x=0) = -\frac{\partial\varphi}{\partial x} \Big|_{x=0}$$



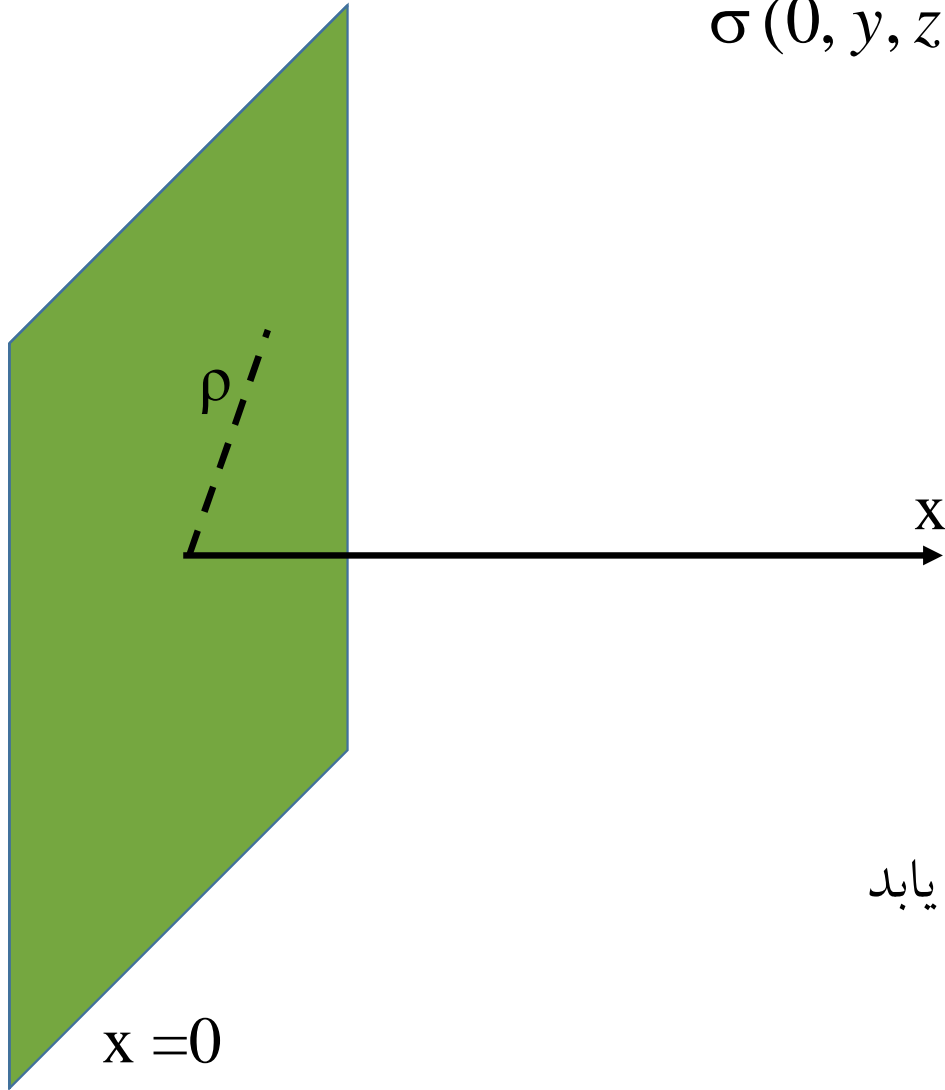
$$E_x = -\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{-1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{-\frac{1}{2} \times 2q(x-d)}{\left[(x-d)^2 + y^2 + z^2 \right]^{\frac{3}{2}}} - \frac{-\frac{1}{2} \times 2q(x+d)}{\left[(x+d)^2 + y^2 + z^2 \right]^{\frac{3}{2}}} \right]$$

$$E_x(x=0) = -\frac{\partial\varphi}{\partial x} \Big|_{x=0} = \frac{-1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2qd}{\left[(x-d)^2 + y^2 + z^2 \right]^{\frac{3}{2}}}$$

میدان الکتریکی و چگالی بار روی صفحه رسانا

$$\vec{E}(0, y, z) = \begin{cases} E_x = \frac{-qd}{2\varepsilon_0 [d^2 + y^2 + z^2]^{\frac{3}{2}}} \\ E_y = 0 \\ E_z = 0 \end{cases}$$

$$\sigma(0, y, z) = \varepsilon_0 E_x(0, y, z) = \frac{-qd}{2[d^2 + y^2 + z^2]^{\frac{3}{2}}}$$



$$\sigma(0, y, z) = \frac{-qd}{2 \underbrace{[d^2 + y^2 + z^2]^{3/2}}_{\rho^2}}$$

بار القاء شده روی صفحه منفی است

بیشینه بار روی صفحه به ازاء $\rho = 0$ (در مرکز)

$$\sigma(0,0,0) = \frac{-qd}{2d^3}$$

با دور شدن از مرکز بار به صورت $1/\rho^3$ کاهش می یابد

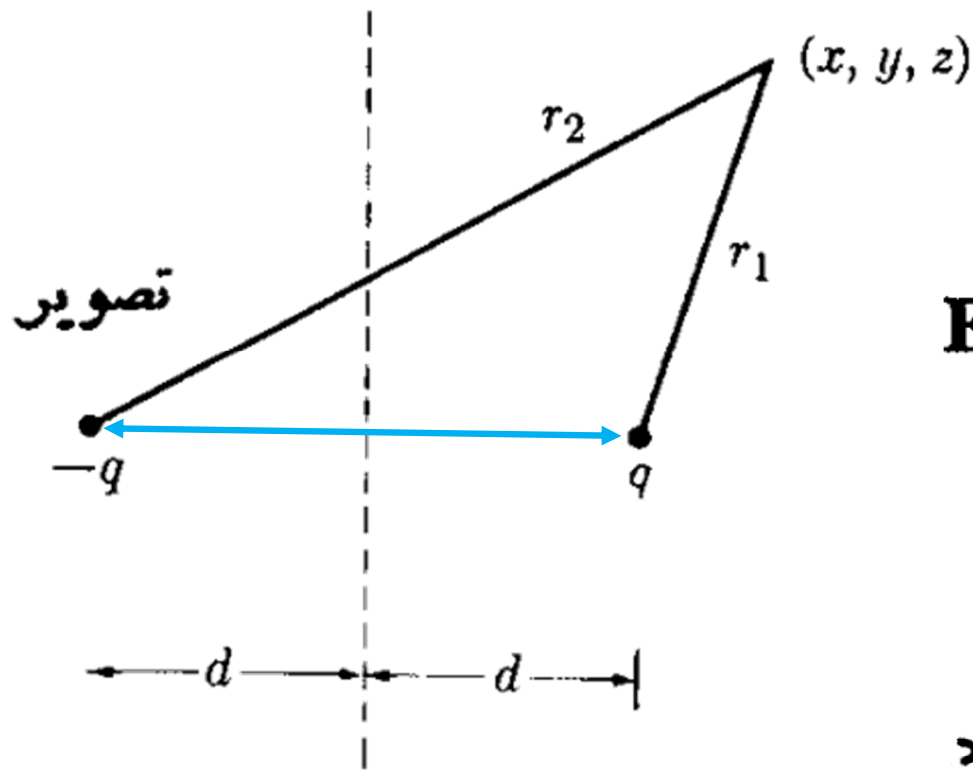
بار کل القاء شده روی صفحه رسانا

$$\sigma(0, \rho) = \frac{-qd}{2[d^2 + \rho^2]^{\frac{3}{2}}}$$

$$Q = \int_{\rho=0}^{\infty} 2\pi\rho d\rho \sigma = \int_{\rho=0}^{\infty} \frac{-2\pi\rho d\rho qd}{2[d^2 + \rho^2]^{\frac{3}{2}}} = -q$$

نیروی وارد بر بار نقطه ای $+q$

معادل با نیرویی که بین بار و تصویر بار رد و بدل می شود

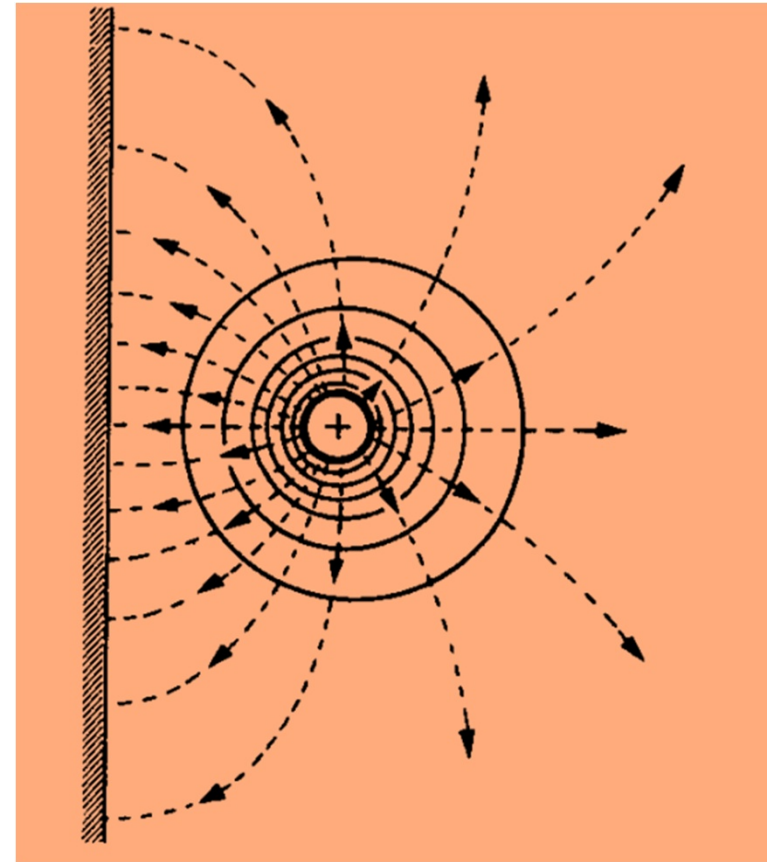
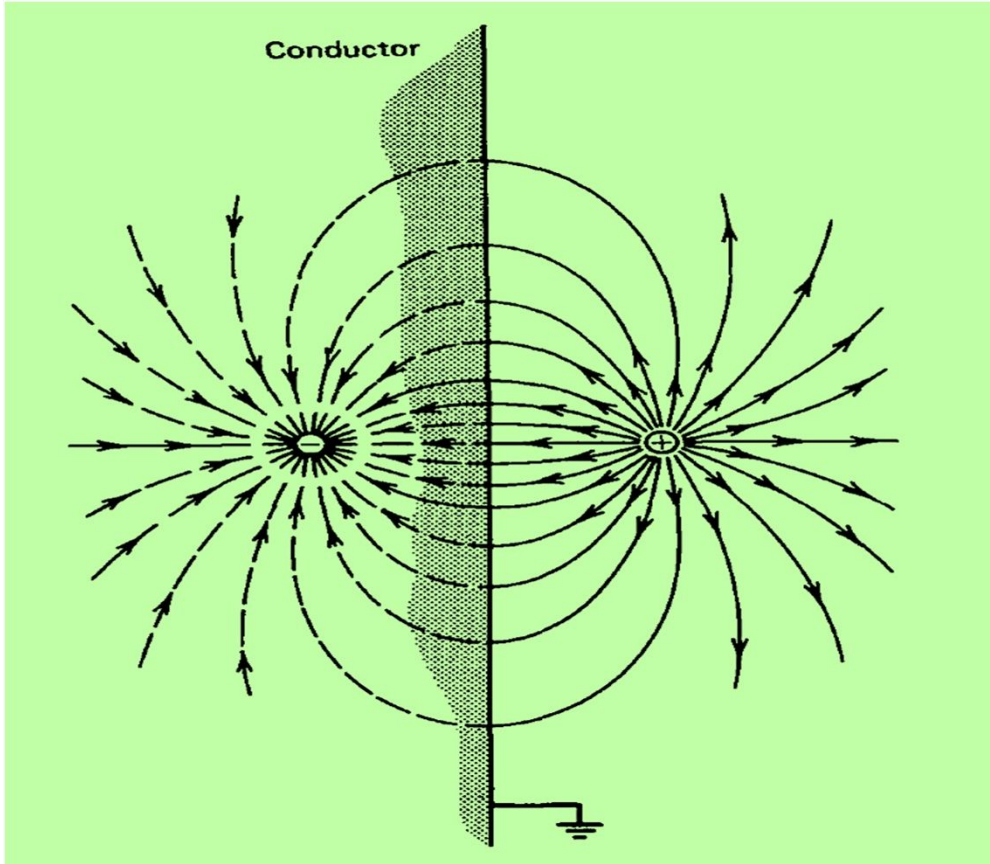


$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{-q^2}{(2d)^2}$$

$$\mathbf{F} = -q\nabla\varphi_2$$

این درست همان نیرویی است که از طرف بار تصویری به بار نقطه ای وارد می شود

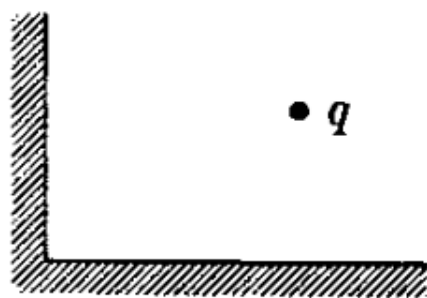
خطوط نیرو و سطوح هم پتانسیل



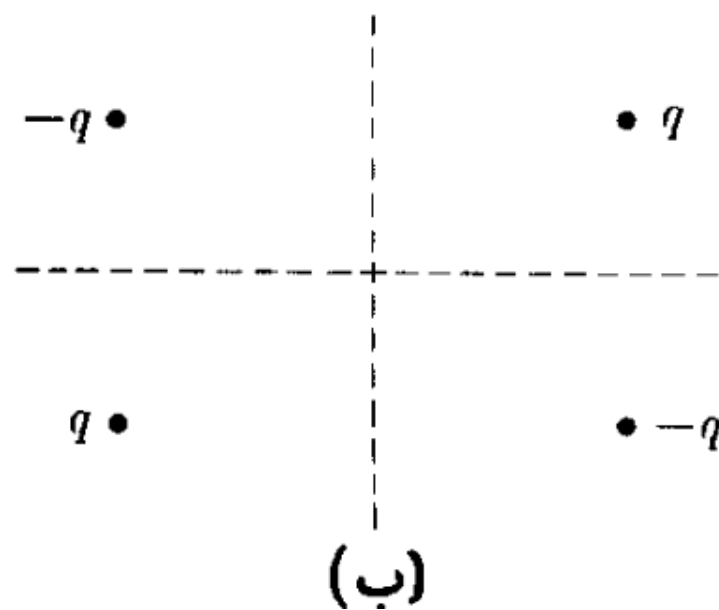
اینها درست همان خطوط نیرو و سطوح هم پتانسیل مربوط به مسئله دو بار نقطه‌ای (شکل ۳.۳ ب) اند، با این تفاوت که در مورد مسئله اخیر خطوط شار در فضای سمت چپ صفحه نیز ادامه دارند. از روی شکل پیدا است که تمام خطوط شار الکتریکی که در شرایط عادی می‌بایست روی بار تصویری متمرکز شوند به وسیله صفحه رسانای شکل ۳.۳ ج قطع می‌شوند. بنا بر این، کل بار واقع بر صفحه رسانا با $-q$ — یعنی با بارِ بار تصویری برابر است.

تعیین میدان الکتریکی بار نقطه‌ای q در نزدیکی تقاطع دو صفحه رسانای عمود برهم

به راحتی مشاهده می‌شود که دو صفحه نقطه چین در این شکل سطوح با پتانسیل صفرند که از ترکیب پتانسیلهای بار q و سه بار تصویری ناشی می‌شوند.



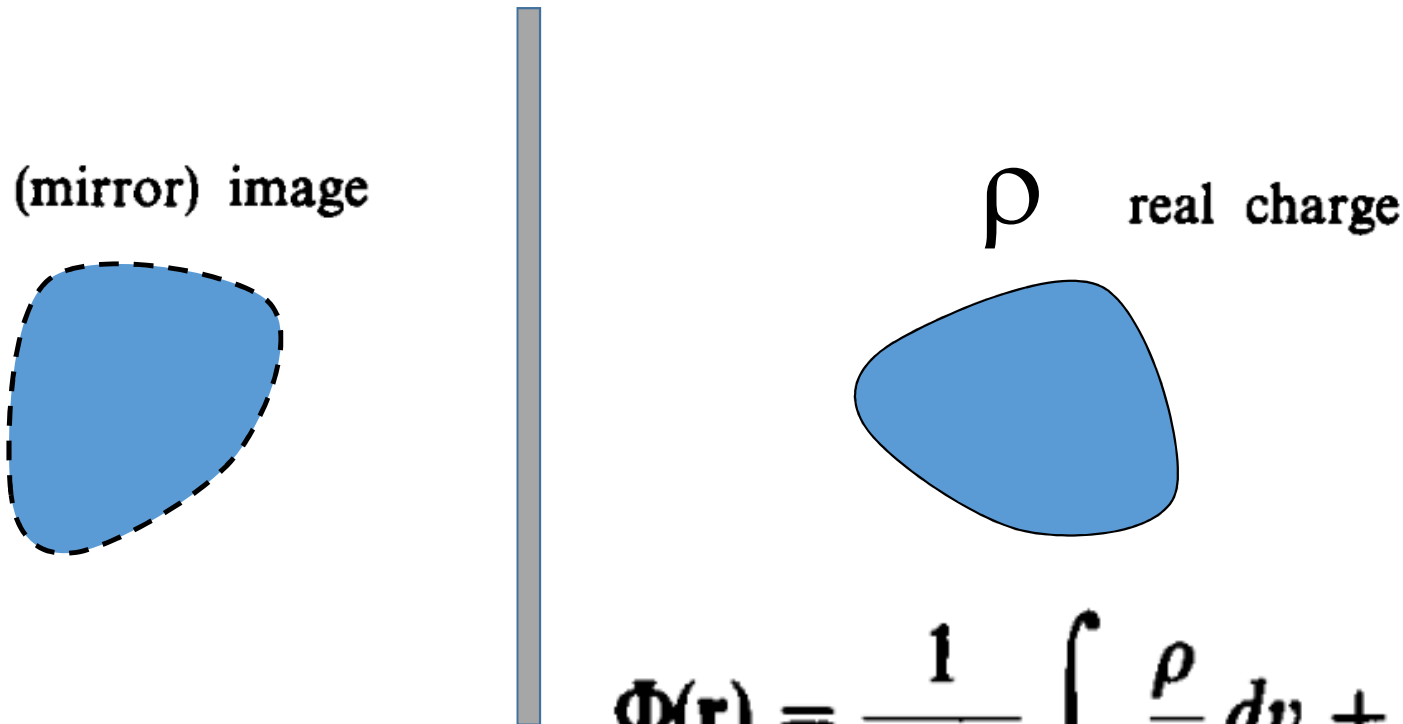
(الف)



(ب)

یک توزیع بار در مقابل صفحه رسانا

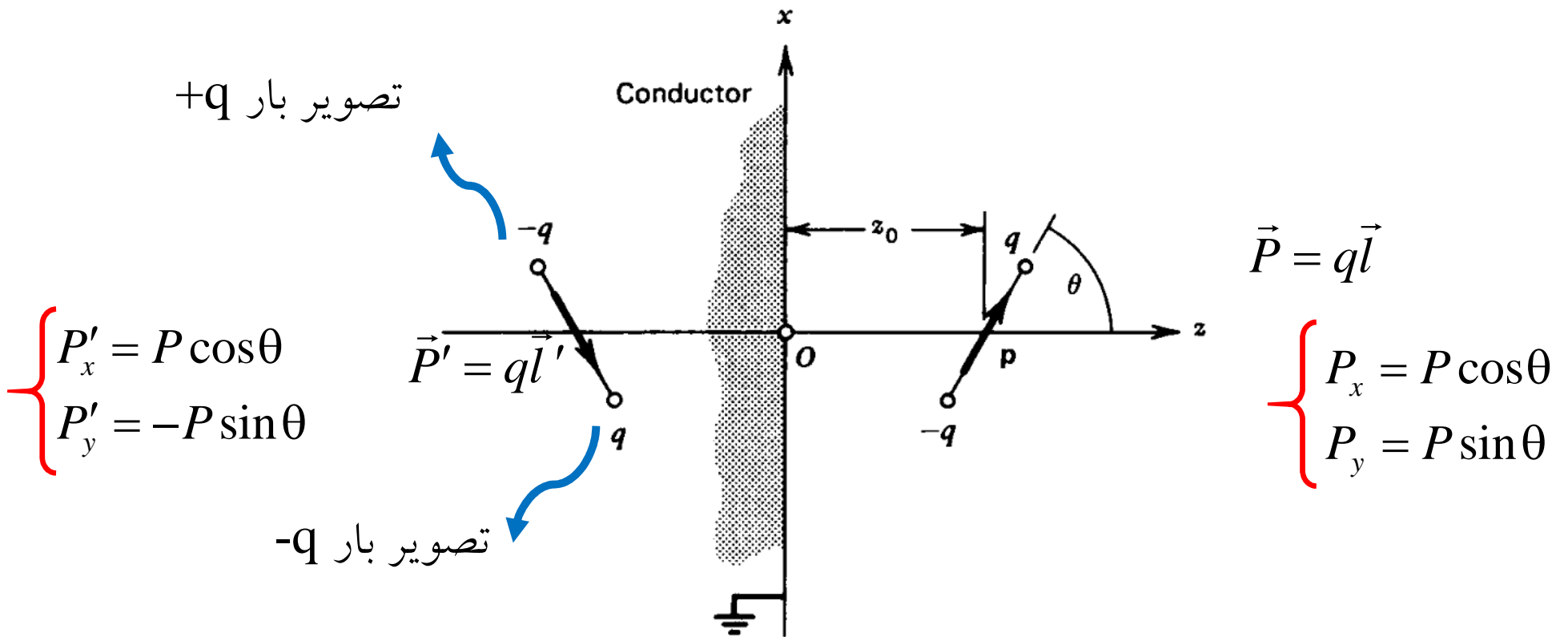
صفحه رسانا در پتانسیل ثابت



$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho}{\xi} dv + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V_I} \frac{\rho_I dv_I}{\xi_I}$$

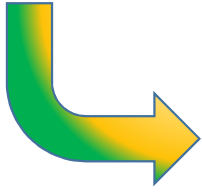
Example 3.13 A Dipole and a Conducting Plane

The dipole, of moment \mathbf{p} , is at a distance z_0 from the plane, and at an angle θ_0 , with respect to the normal to the plane.

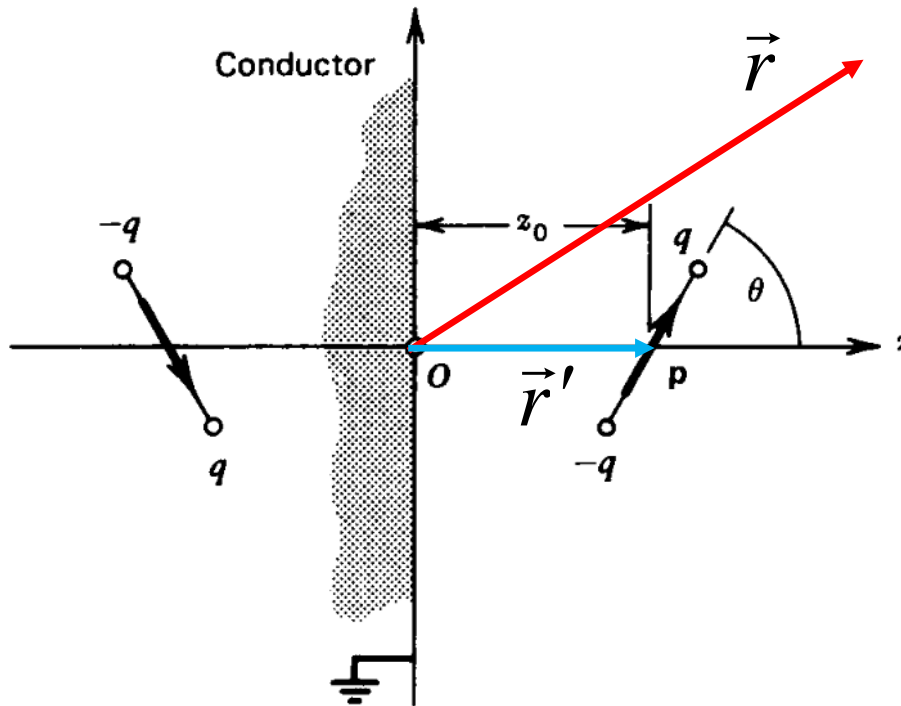


پتانسیل ناشی از یک دوقطبی الکتریکی واقع در مبدا

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}$$



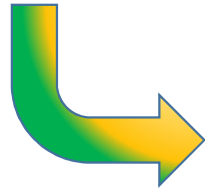
$$\Phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p} \cdot (\mathbf{r} - \hat{\mathbf{z}}z_0)}{|\mathbf{r} - \hat{\mathbf{z}}z_0|^3} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p}' \cdot (\mathbf{r} + \hat{\mathbf{z}}z_0)}{|\mathbf{r} + \hat{\mathbf{z}}z_0|^3}$$



$$\mathbf{r}' = \hat{\mathbf{z}}z_0$$

میدان الکتریکی و چگالی بار روی صفحه رسانا

$$\Phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p} \cdot (\mathbf{r} - \hat{\mathbf{z}}z_0)}{|\mathbf{r} - \hat{\mathbf{z}}z_0|^3} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p}' \cdot (\mathbf{r} + \hat{\mathbf{z}}z_0)}{|\mathbf{r} + \hat{\mathbf{z}}z_0|^3}$$



$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{3(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \cdot \mathbf{p}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^5} (\mathbf{r} - \mathbf{r}') - \frac{\mathbf{p}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right]$$

$$\mathbf{r}' = \hat{\mathbf{z}}z_0$$

At $\mathbf{r} = -z_0\hat{\mathbf{z}}$, the location of the image dipole,

$$E_x = 0 \quad , \quad E_y = 0 \quad , \quad E_z \neq 0$$

$$E_z = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{3(z - z_0)^2}{[x^2 + y^2 + (z - z_0)^2]^{5/2}} - \frac{1}{[x^2 + y^2 + (z - z_0)^2]^{3/2}} \right]$$

Differentiating E_z with respect to z and evaluating the result at $(0, 0, -z_0)$ gives

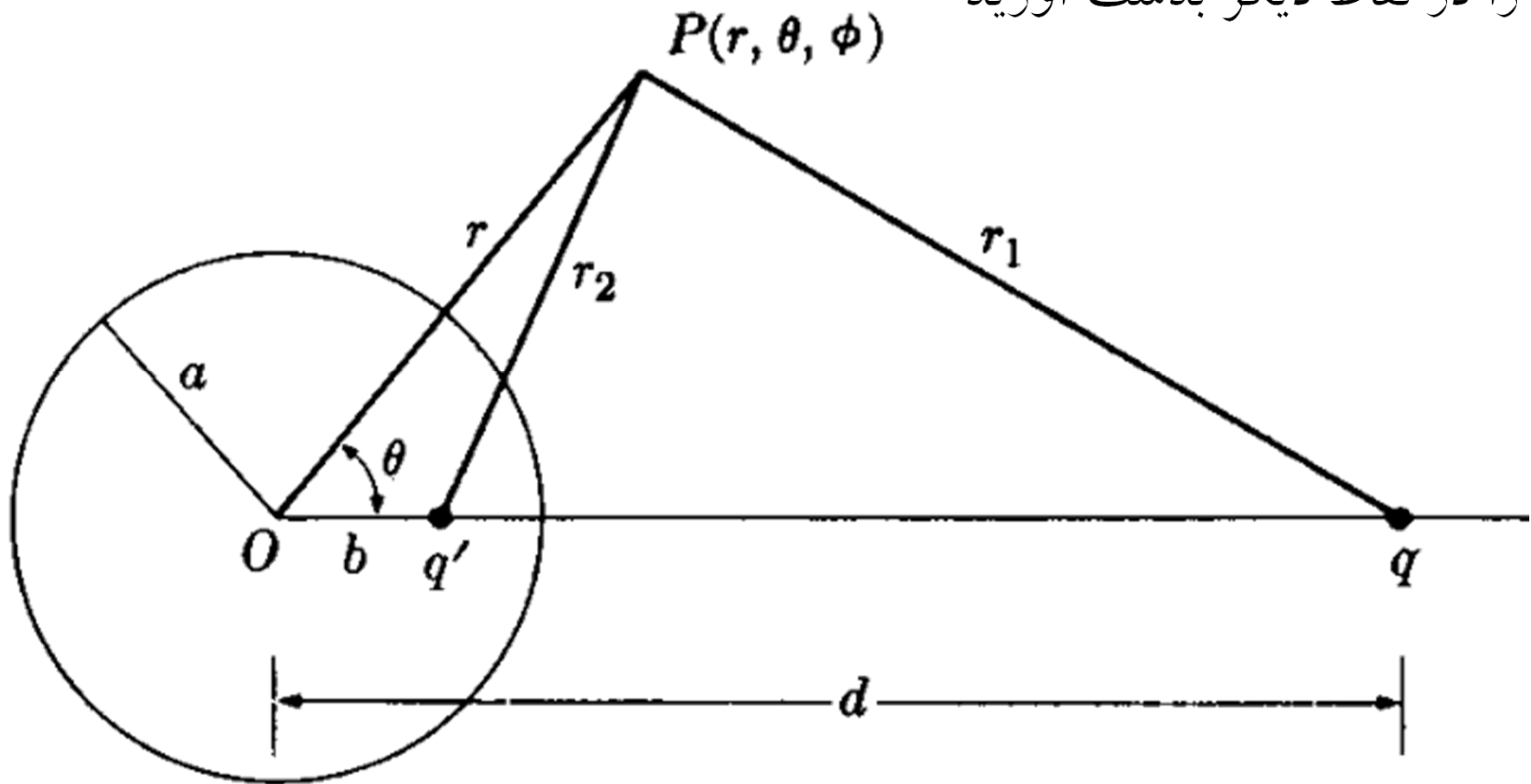
$$\frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{-3p}{32\pi\epsilon_0 z_0^4}$$

Therefore the force between the dipoles

$$\mathbf{F} = \mathbf{p}' \cdot \nabla \mathbf{E} = p' \frac{\partial E_z}{\partial z} \hat{\mathbf{z}} = -\frac{3p^2}{32\pi\epsilon_0 z_0^4} \hat{\mathbf{z}}$$

مثال) بار نقطه ای q در فاصله d از مرکز یک کره رسانای متصل به زمین به شعاع a قرار دارد.

پتانسیل را در نقاط دیگر بدست آورید



بار نقطه‌ای q در فاصله d از مرکز کره‌ای به شعاع a قرار گرفته است.

از تقارن مسئله پیدا است که بار تصویری q' باید بر روی خطی که بار نقطه‌ای q را به مرکز کره وصل می‌کند قرار بگیرد

استفاده از مختصات کروی

با قرار دادن مبدأ در مرکز کره

محور قطبی را خطی می‌گیریم که بار نقطه‌ای q را به مبدأ وصل می‌کند

هدف پیدا کردن:

فاصله بار تصویری q' تا مرکز کره، یعنی b

و مقدار بار q' بر حسب مقادیر معلوم q ، d ، و a

پتانسیل ناشی از بار واقعی و تصویری:

$$\begin{aligned}\varphi(r, \theta, \phi) &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_1} + \frac{q'}{4\pi\epsilon_0 r_2} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q}{\sqrt{r^2 + d^2 - 2rd \cos \theta}} + \frac{q'}{\sqrt{r^2 + b^2 - 2rb \cos \theta}} \right]\end{aligned}$$

شرایط مرزی:

در روی سطح کره، $r = a$ ، و برای تمام مقادیر θ و ϕ ، پتانسیل $\varphi(a, \theta, \phi) = 0$ است.

اما بنا بر معادله (۳۷.۳)، $\varphi(a, \theta, \phi)$ فقط وقتی می‌تواند به‌ازای تمام مقادیر صفر شود که دو جذر با یکدیگر متناسب باشند، و این در صورتی ممکن است که $b = a^2/d$ ، زیرا در این صورت ؟

$$\varphi(a, \theta, \phi) = 0$$

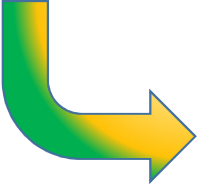
$$r = a \rightarrow \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q}{\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta}} + \frac{q'}{\sqrt{d^2 + a^2 - 2ad \cos \theta}} \right] = 0$$

$$\rightarrow \frac{q}{\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta}} = - \frac{q'}{\sqrt{d^2 + a^2 - 2ad \cos \theta}}$$

تمرین؟ \rightarrow $b = d$ غیر قابل قبول

$$b = \frac{a^2}{d}$$

$$\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta} = \frac{a}{d} \sqrt{d^2 + a^2 - 2ad \cos \theta}$$

تمرین؟  بار تصویری اول $b = \frac{a^2}{d}$ $q' = -\frac{a}{d} q$

بار تصویری دوم که انتخاب آن اختیاری است و با توجه به نوع مسئله برگزیده می شود

بار تصویری دیگری، q'' ، را در مرکز کره قرار داد


جواب کاملی برای مسئله بار نقطه‌ای و کره رسانا

پتانسیل در همه نقاط خارج کره $\varphi(r, \theta, \phi) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q}{r_1} + \frac{q'}{r_2} + \frac{q''}{r} \right]$

بار q'' جایی استفاده می شود که پتانسیل کره غیر صفر باشد

$$\varphi(r, \theta, \phi) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q}{r_1} + \frac{q'}{r_2} + \frac{q''}{r} \right]$$

صفر


$$\varphi(a, \theta, \phi) = \frac{q''}{4\pi\epsilon_0 a}$$

چگالی بار سطحی روی کره

$$\sigma(\theta, \phi) = -\epsilon_0 \left. \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right|_{r=a}$$

$$\sigma = ? \quad \text{تمرین؟}$$

بار کل Q روی سطح کره، با جمع بارهای تصویری

$$Q = q' + q''$$

$$Q = \int \sigma \, dA = ?$$

دومورد خاص و جالب این مسئله عبارت اند از کره رسانای متصل به زمین، یعنی موردی که $\varphi(a) = 0$ ، $q'' = 0$ است؛ و کره رسانای بدون بار، یعنی موردی که $q'' = -q'$ است.



متصل به زمین

$$\varphi(a) = 0, q'' = 0$$



بدون اتصال به زمین و
بدون اعمال پتانسیل

کره رسانای بدون بار:

$$q'' = -q'$$



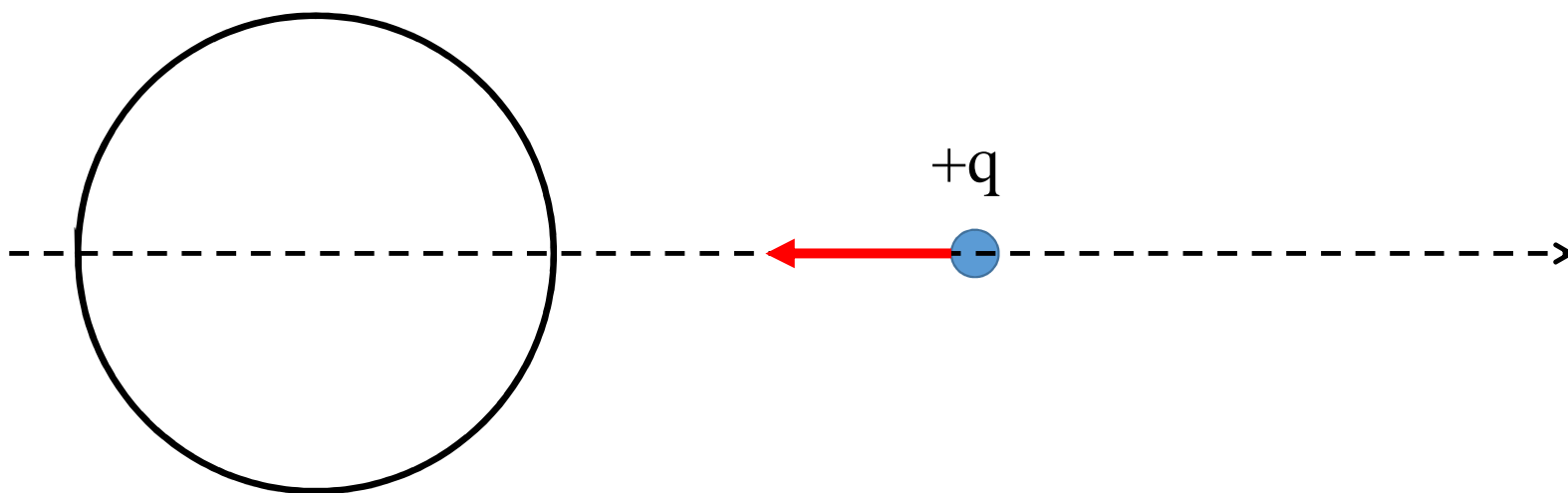
کره تحت دارای پتانسیل

$$\varphi(a, \theta, \phi) = \frac{q''}{4\pi\epsilon_0 a}$$

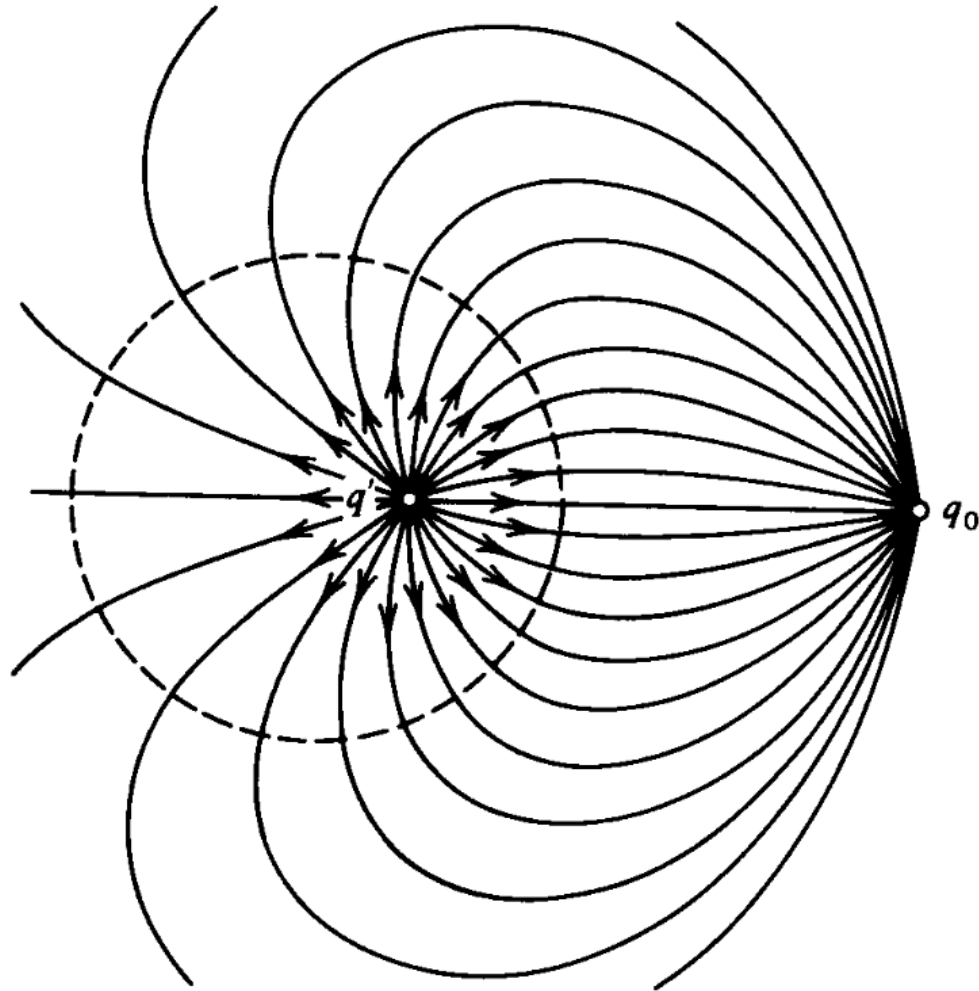
نیروی وارد بر بار نقطه ای توسط بار القا شده روی کره رسانا (متصل به زمین)

$$F = ?$$

تمرین؟



$$q' = -\frac{a}{d} q$$



The lines of force between a point charge and a grounded conducting sphere.

If we had placed a point charge at a distance z' from the center of the sphere—i.e., inside the sphere—we would have a problem almost identical to the one discussed above (the “external” problem). In fact all the formulas given there are valid if we understand that in this case the image is charge q_0 and is located at z_0 , whereas the interior charge q' is located at z' , both specified. R is then the distance from the origin to the *interior* surface of the sphere. The only possible distinction in the problems comes if we let the sphere be at a potential $V \neq 0$. This is simply achieved by having a charge $q' = 4\pi\epsilon_0 R V$ uniformly distributed over a spherical surface of radius greater than R . In the actual problem this charge would be located on the outer surface of the conducting spherical shell. The \mathbf{E} field inside the sphere would not be affected by such a charge distribution.

Example 3.14 A Dipole Near a Conducting Sphere

When an electric dipole is brought near a grounded sphere, then the potential and the field of the dipole are modified. The method of images can be used to determine the changes. We will represent the dipole by two point charges separated by a small distance as shown in Fig. 3.17 and use the rules developed above for treating a point charge near a sphere. Having done this, we will derive rules for treating a dipole due to an arbitrary charge distribution.

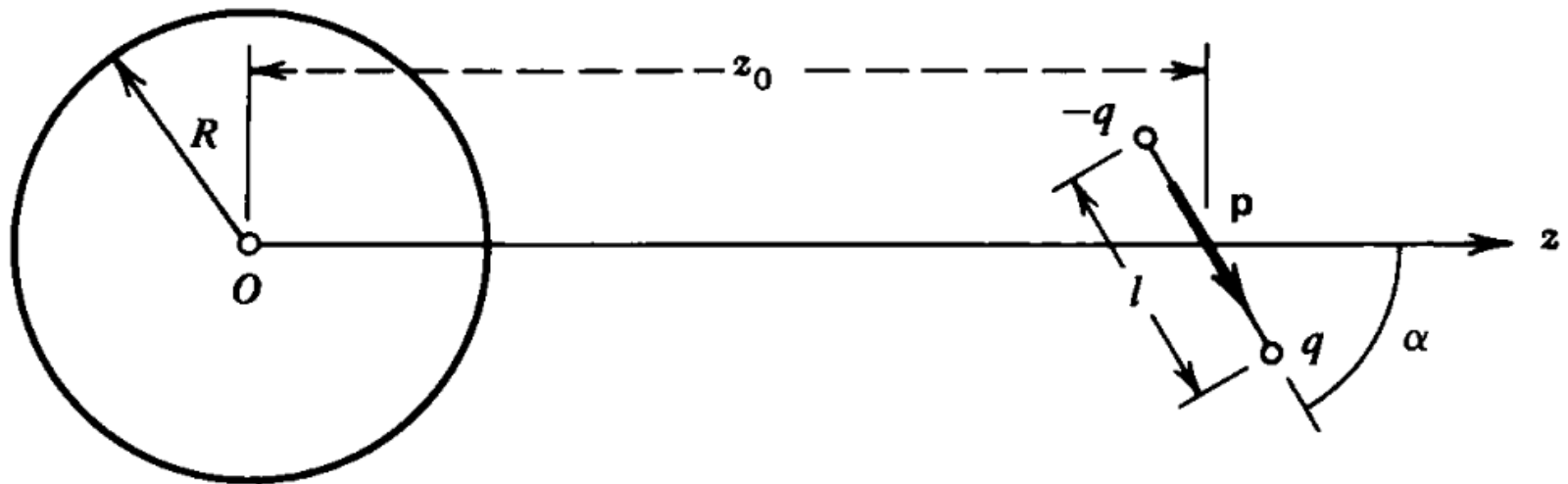


Figure 3.17 A dipole near a grounded conducting sphere.

The dipole moment \mathbf{p} is taken to be at any angle α with the z axis, at a distance z_0 from the center of a sphere of radius R , and is represented by q and $-q$ charges separated by a distance l , such that $\mathbf{p} = ql$.

Example 3.15 A Dipole at the Center of a Conducting Sphere

The method of images can be used to solve for the effect of introducing an electric dipole at the center of a grounded sphere (Fig. 3.20). We represent the dipole by two point charges separated by a small distance l . Because one charge is above and the other is below the center of the sphere, then their image charges are located at opposite sides of the sphere, and consequently such an image system does not constitute an image dipole.

