بسم الله الرحمن الرحیم

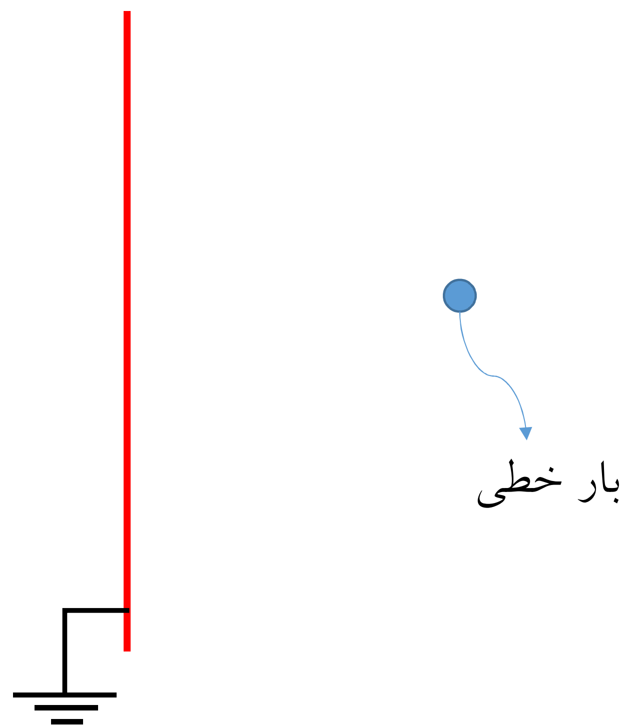
فصل سوم

حل مسائل الکتروستاتیک

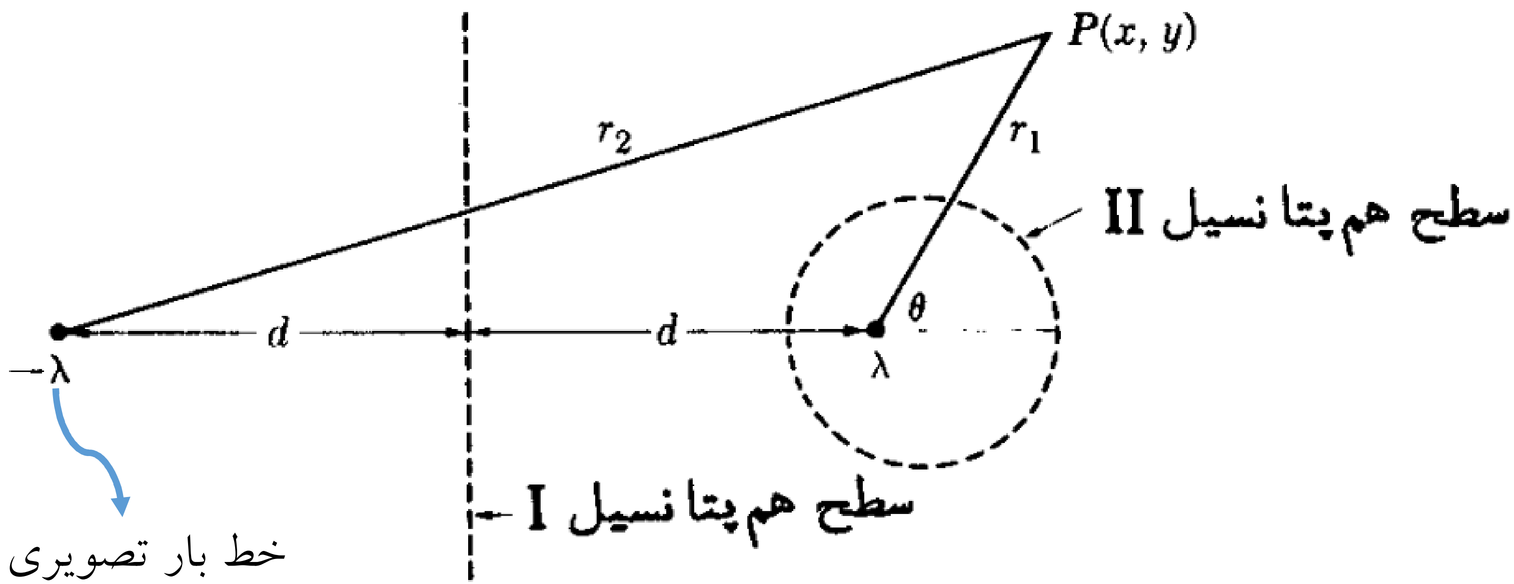
(بخش چهارم)

۱۱.۳ بارهای خطی و تصویرهای خطی

مثال) یک بار خطی با چگالی λ+ در مجاورت یک صفحه رسانای متصل به زمین قرار دارد. پتانسیل را در نقاط مختلف فضا بدست آورید



$$g = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\left[\ln r_1 - \ln r_2\right] = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r_1}{r_2}$$



سطوح هم پتانسیل

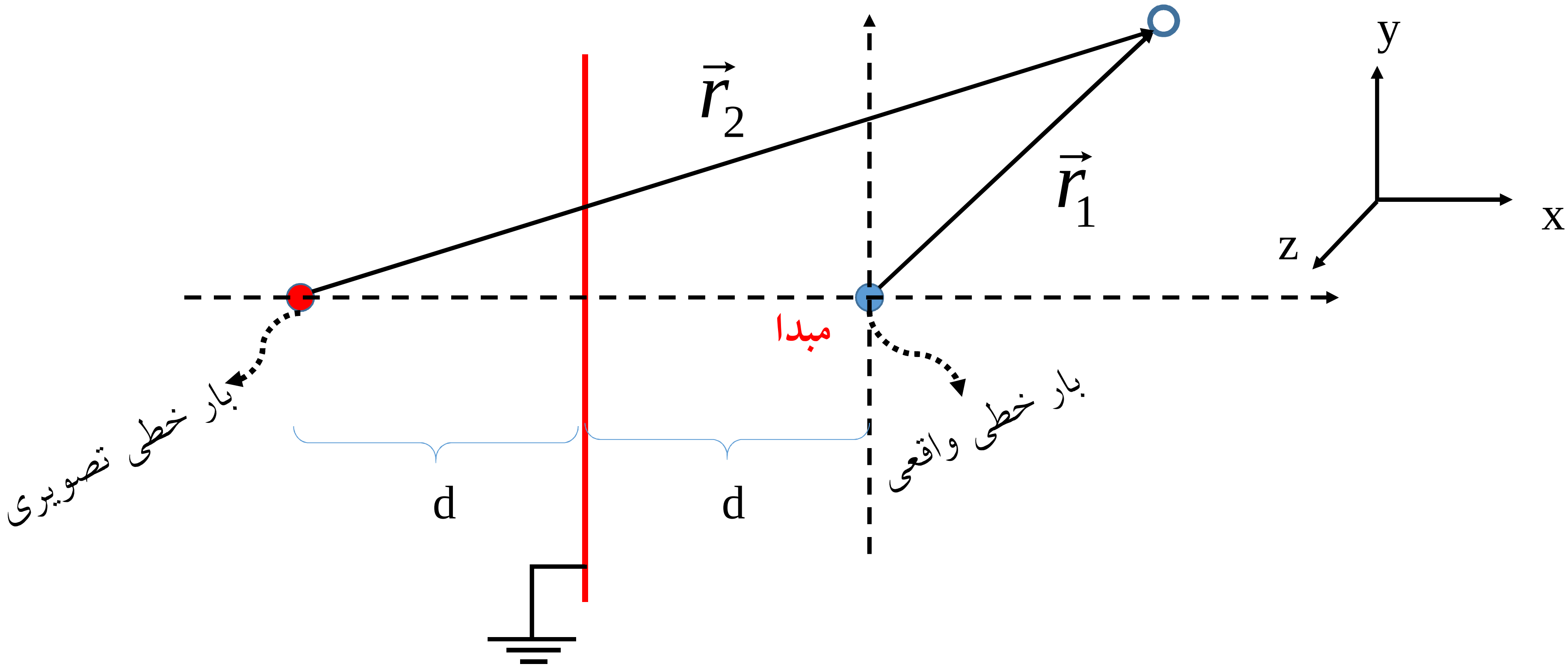
$$\varphi = \frac{-\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r_2}{r_1} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r_1}{r_2} = constant \qquad \rightarrow \qquad \frac{r_1}{r_2} = constant$$

شرط وجود هم پتانسیل $\qquad \frac{r_1}{r_2} = M$

$M = 1 \quad \rightarrow \quad r_1 = r_2 \qquad$ شرط مرزی

سطح هم‌پتانسیل متناظر با $M = ۱$ صفحه‌ای است که درست در وسط فاصلهٔ میان دو بار خطی قرار گرفته است و در شکل ۶.۳ به‌صورت سطح هم‌پتانسیل I نشان داده‌شده‌است. پتانسیل این صفحه صفر است.

$$r_1^2 = x^2 + y^2 \qquad r_2^2 = (x + 2d)^2 + y^2$$



$$\left.\begin{aligned} &\frac{r_1}{r_2}=M \\ &r_1^2=x^2+y^2 \\ &r_2^2=(x+2d)^2+y^2 \end{aligned}\right\} \quad x^2+y^2-\frac{4M^2xd}{1-M^2}=\frac{4M^2d^2}{1-M^2}$$

این معادله، معادلهٔ یك استوانهٔ مستدیر است که به موازات محور z قرار گرفته است اگر M کمتر از یك باشد، آنگاه استوانه خط بار مثبت را در میان می گیرد،

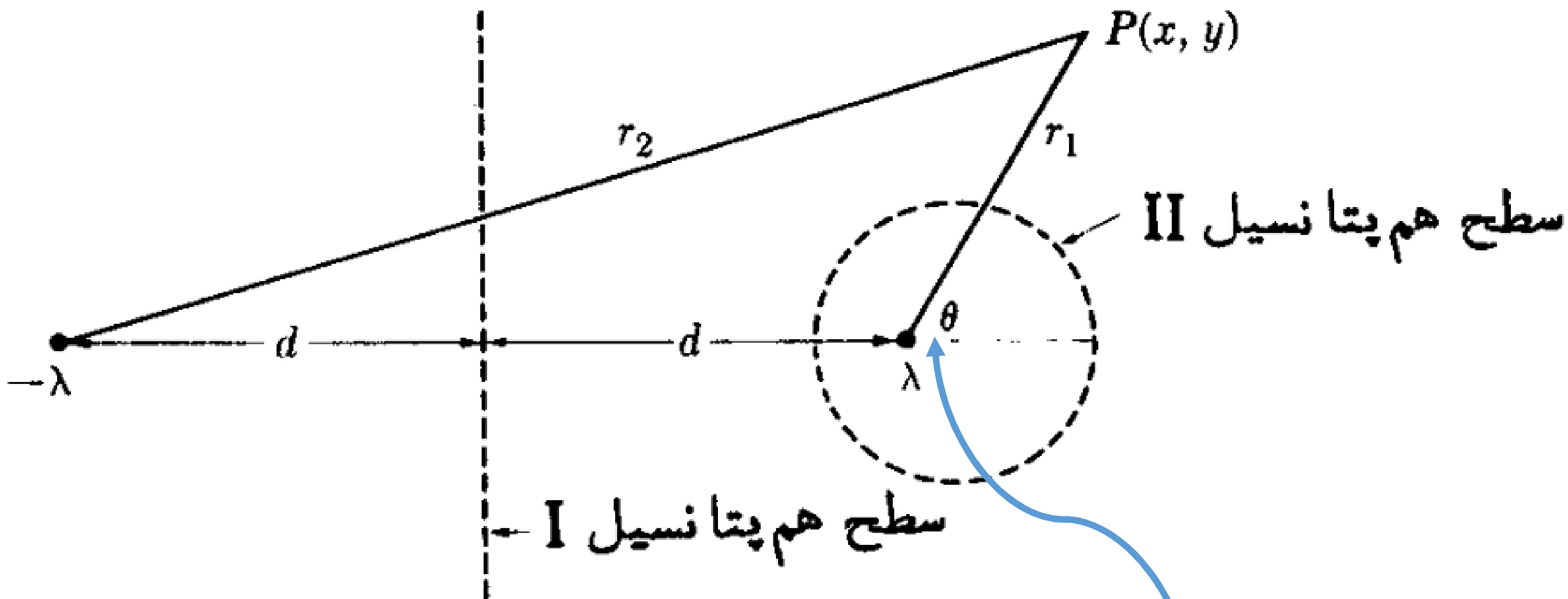
$$x^{۲}+y^{۲}-\frac{۴M^{۲}xd}{۱-M^{۲}}=\frac{۴M^{۲}d^{۲}}{۱-M^{۲}}$$

$$x^2-2x\left(\frac{2M^2d}{1-M^2}\right)+y^2=\frac{4M^2d^2}{1-M^2}$$

$$\left(x-\frac{2M^2d}{1-M^2}\right)^2-\left(\frac{2M^2d}{1-M^2}\right)^2+y^2=\frac{4M^2d^2}{1-M^2}$$

$$\left(x-\frac{2M^2d}{1-M^2}\right)^2+y^2=\frac{4M^2d^2}{1-M^2}+\left(\frac{2M^2d}{1-M^2}\right)^2$$

$$\left(x-\frac{2M^2d}{1-M^2}\right)^2+y^2=\frac{4M^2d^2}{(1-M^2)^2}$$



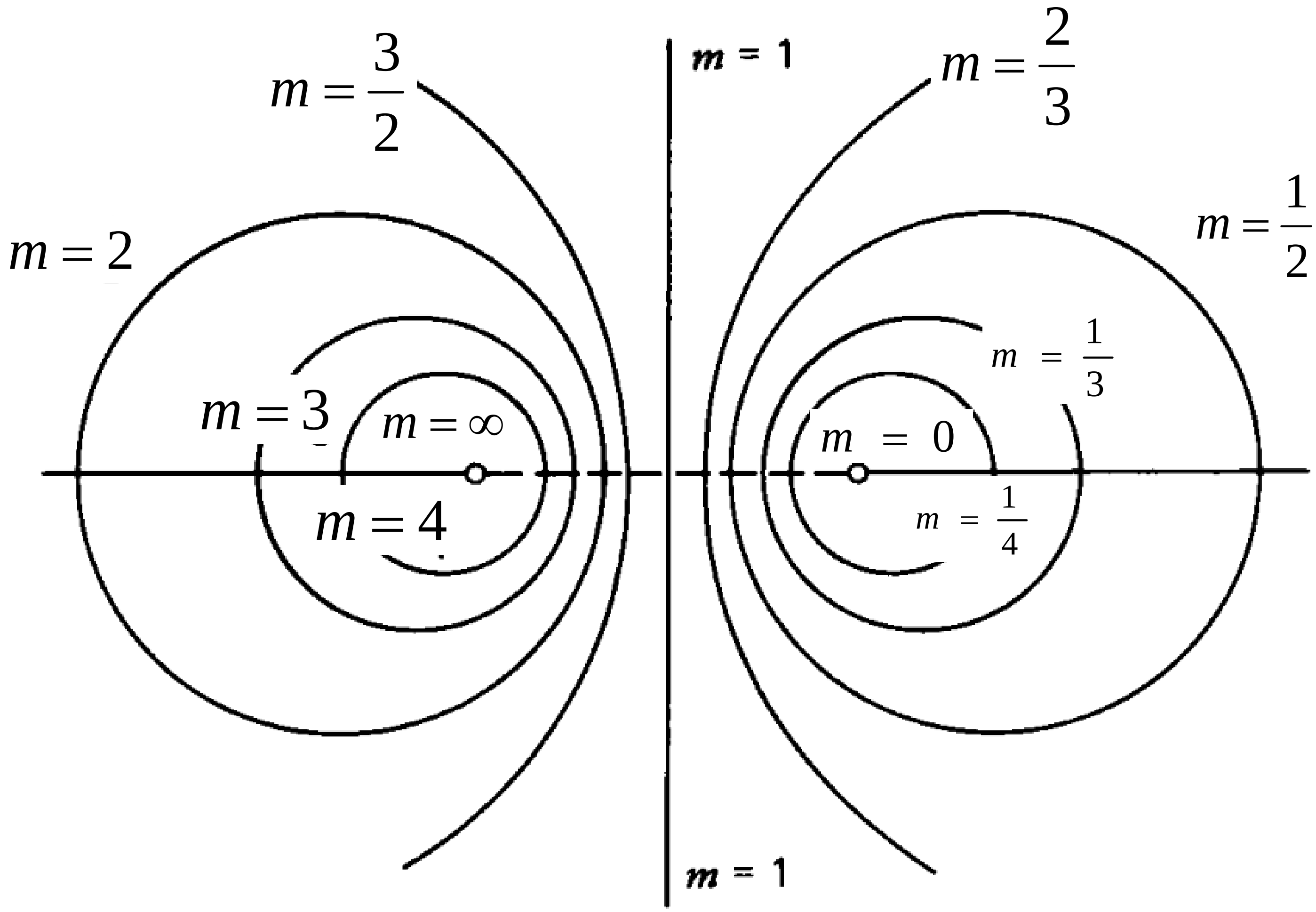
مختصات محور استوانه هم پتانسیل

$$x = \frac{2M^2 d}{1 - M^2}, \qquad y = 0$$

شعاع استوانه هم پتانسیل

$$R_c = \frac{2Md}{1 - M^2}$$

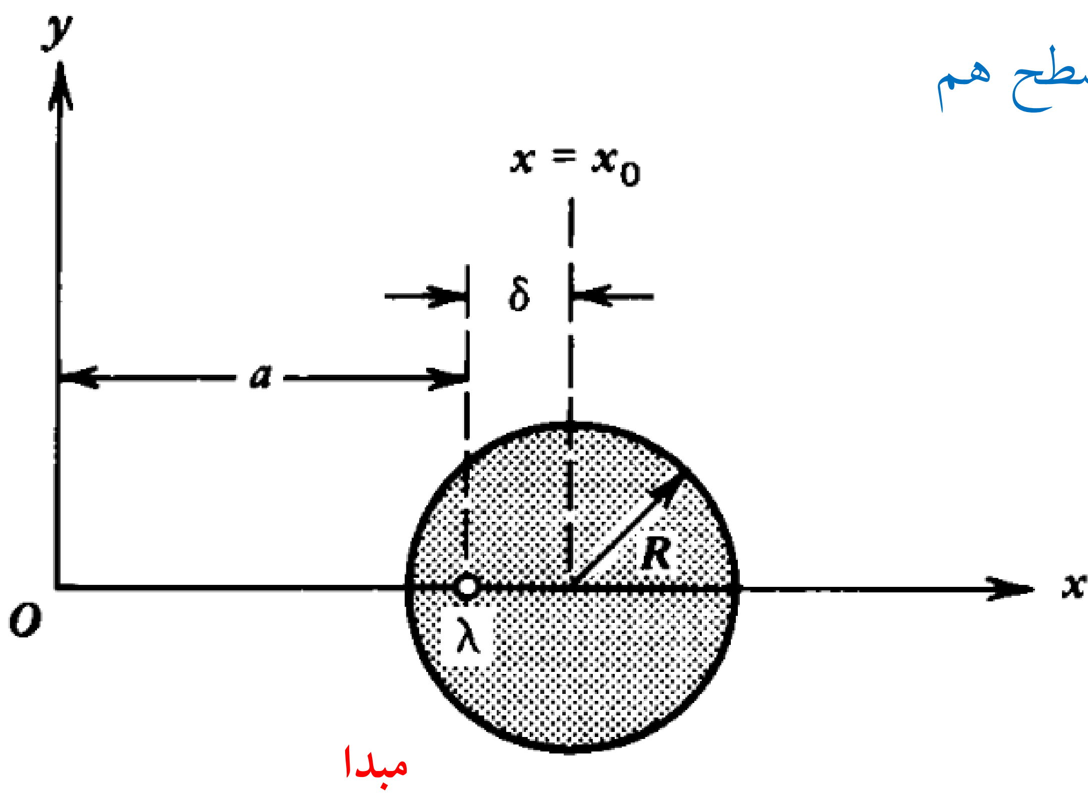
$$\frac{r_1}{r_2} = m$$



$m = \frac{3}{2}$
$m = 1$
$m = \frac{2}{3}$
$m = 2$
$m = \frac{1}{2}$
$m = \frac{1}{3}$
$m = 3$
$m = \infty$
$m = 0$
$m = 4$
$m = \frac{1}{4}$
$m = 1$

مثال) خط باری با چگالی بار λ درون یک پوسته استوانه ای در فاصله δ از محور استوانه قرار دارد. شعاع استوانه R می باشد. استوانه یک سطح هم پتانسیل است.

برعکس مثال قبل کره رسانا به جای یک سطح هم پتانسیل قرار می گیرد



در مثال قبل مبدا مختصات در محل خط بار در نظر گرفته شد

فاصله مرکز کره هم پتانسیل تا خط بار $\dfrac{2M^2 a}{1-M^2} = x_0$

شعاع کره هم پتانسیل $\dfrac{2Ma}{1-M^2} = R$

با مرکزیت نقطه O $\Rightarrow$

$$\frac{2M^2 a}{1-M^2} = x_0 - a = \delta \quad (1)$$

$$\frac{2Ma}{1-M^2} = R \quad (2)$$

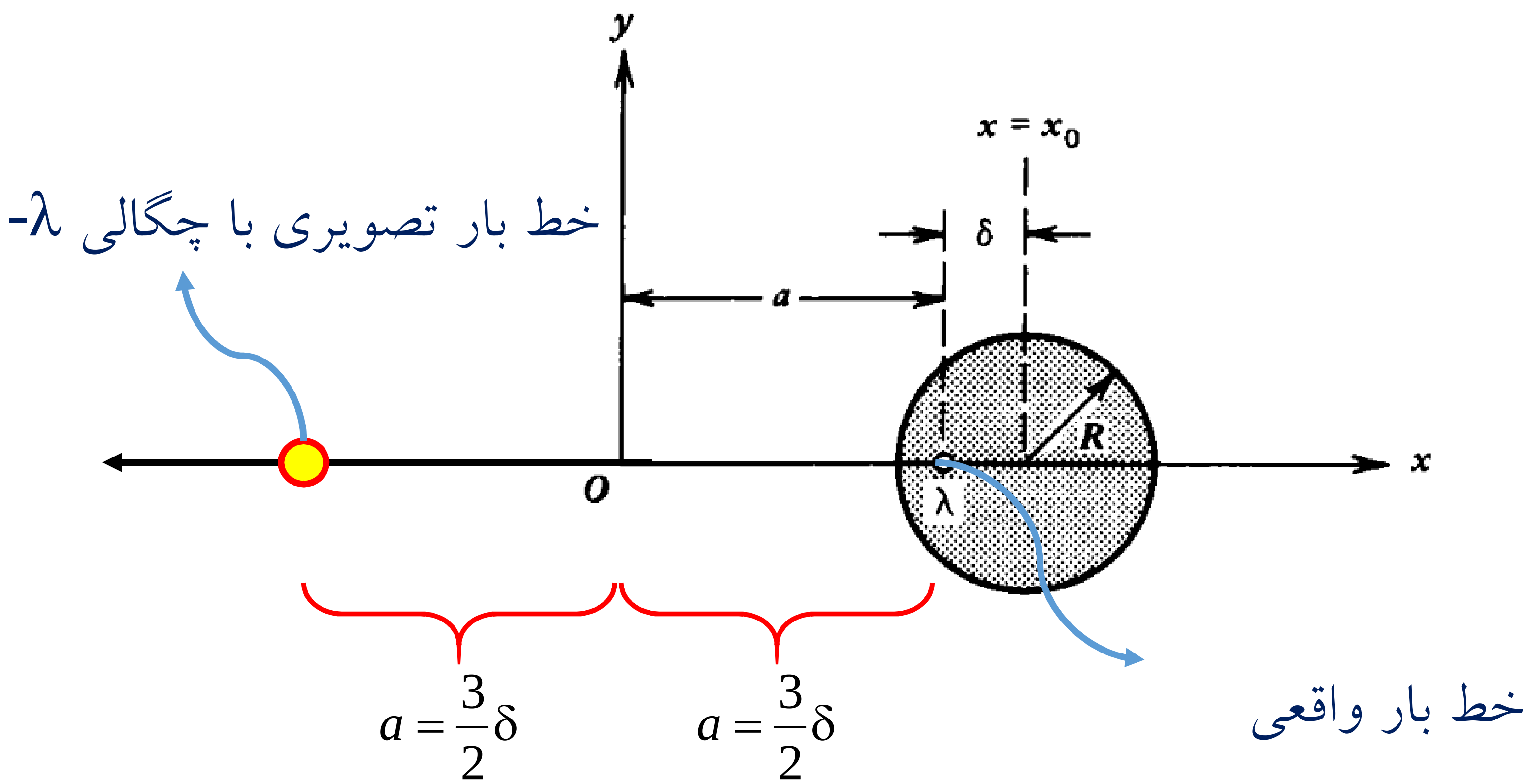
$$\frac{(1)}{(2)} \Rightarrow \frac{\delta}{R} = M$$

$$if\ \delta = \frac{1}{2}R: \qquad M = \frac{\delta}{R} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{2Ma}{1-M^2} = R \qquad \rightarrow \quad a = \frac{3}{4}R = \frac{3}{2}\delta$$

$$x_0 - a = \delta \qquad \rightarrow \quad x_0 = \frac{5}{2}\delta$$

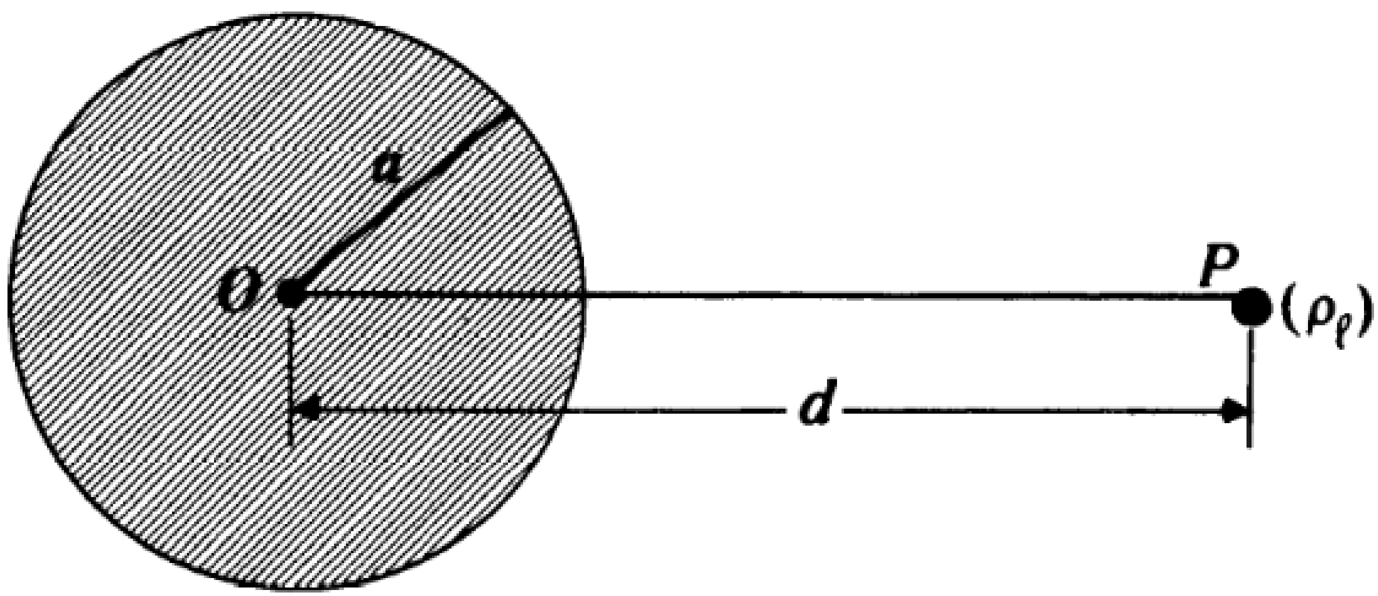
$$\varphi = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r_1}{r_2} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln M \quad \rightarrow \quad \varphi = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{1}{2} = \frac{-\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln 2$$



y
x = x0
δ
a
R
x
O
λ
خط بار تصویری با چگالی λ-
خط بار واقعی
$a = \frac{3}{2}\delta$
$a = \frac{3}{2}\delta$

Example

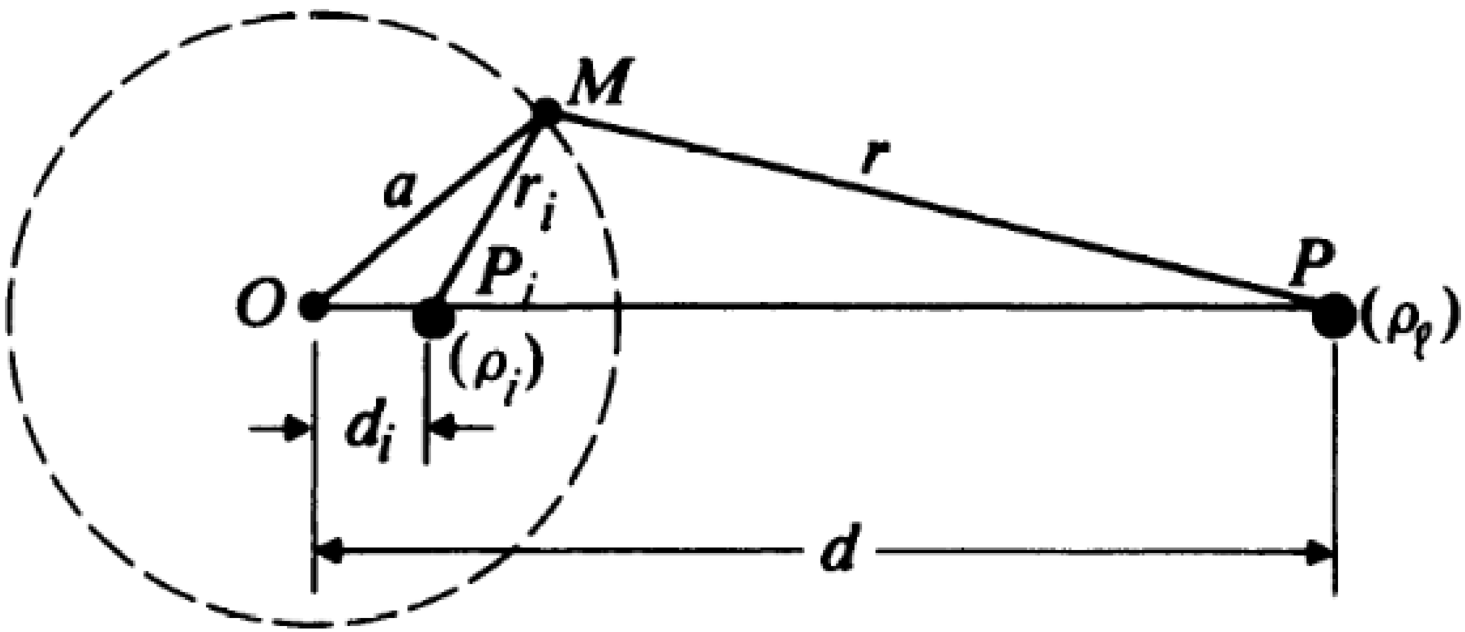
We now consider the problem of a line charge ρ_ℓ (C/m) located at a distance d from the axis of a parallel, conducting, circular cylinder of radius a. Both the line charge and the conducting cylinder are assumed to be infinitely long. Figure 4–5(a) shows a cross section of this arrangement.



$$\rho_i = -\rho_\ell.$$

Image charge

Real charge

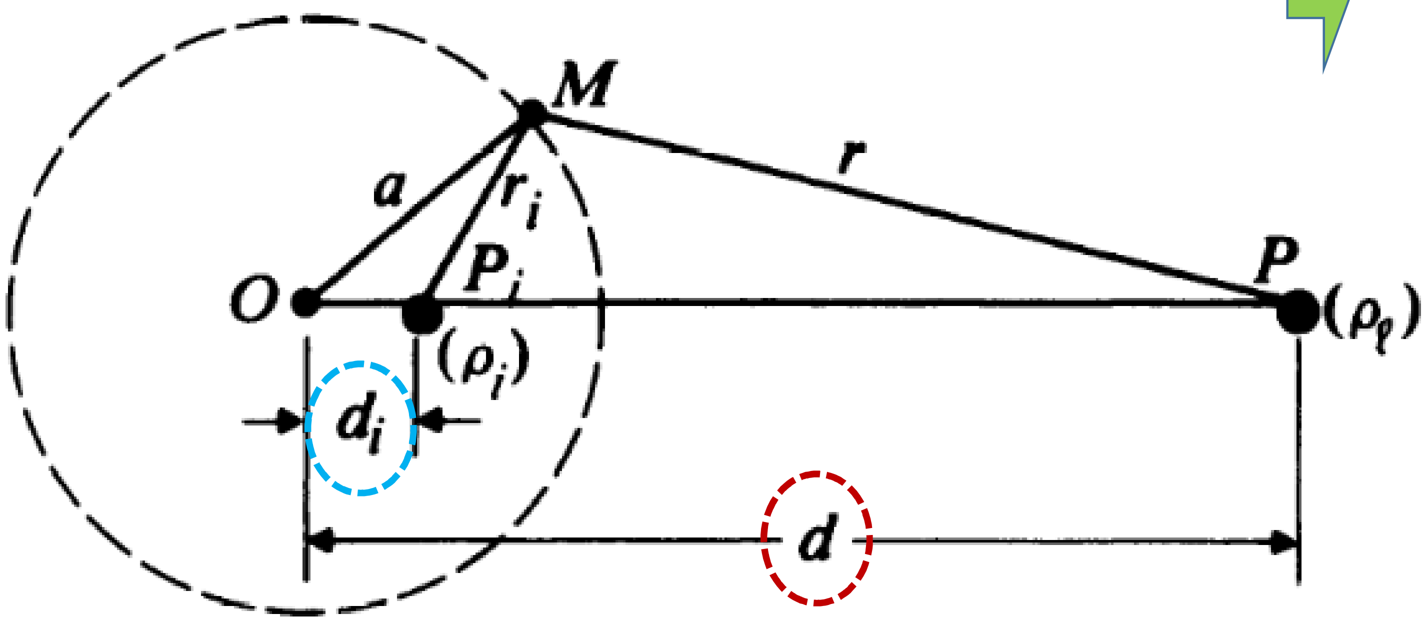


$$\varphi = \frac{-\rho}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r_i}{r} = constant \qquad \rightarrow \qquad \frac{\overset{\text{Image charge}}{r_i}}{\underset{\text{Real charge}}{r}} = constant$$

If an equipotential surface is to coincide with the cylindrical surface ($\overline{OM} = a$), the point P_i must be located in such a way as to make triangles OMP_i and OPM similar. Note that these two triangles already have one common angle, $\angle MOP_i$. Point P_i should be chosen to make $\angle OMP_i = \angle OPM$. We have

$$\frac{\overline{P_iM}}{\overline{PM}} = \frac{\overline{OP_i}}{\overline{OM}} = \frac{\overline{OM}}{\overline{OP}} \quad \Rightarrow \quad \frac{r_i}{r} = \frac{d_i}{a} = \frac{a}{d} = \text{Constant.}$$

$$\Rightarrow \quad d_i = \frac{a^2}{d}$$



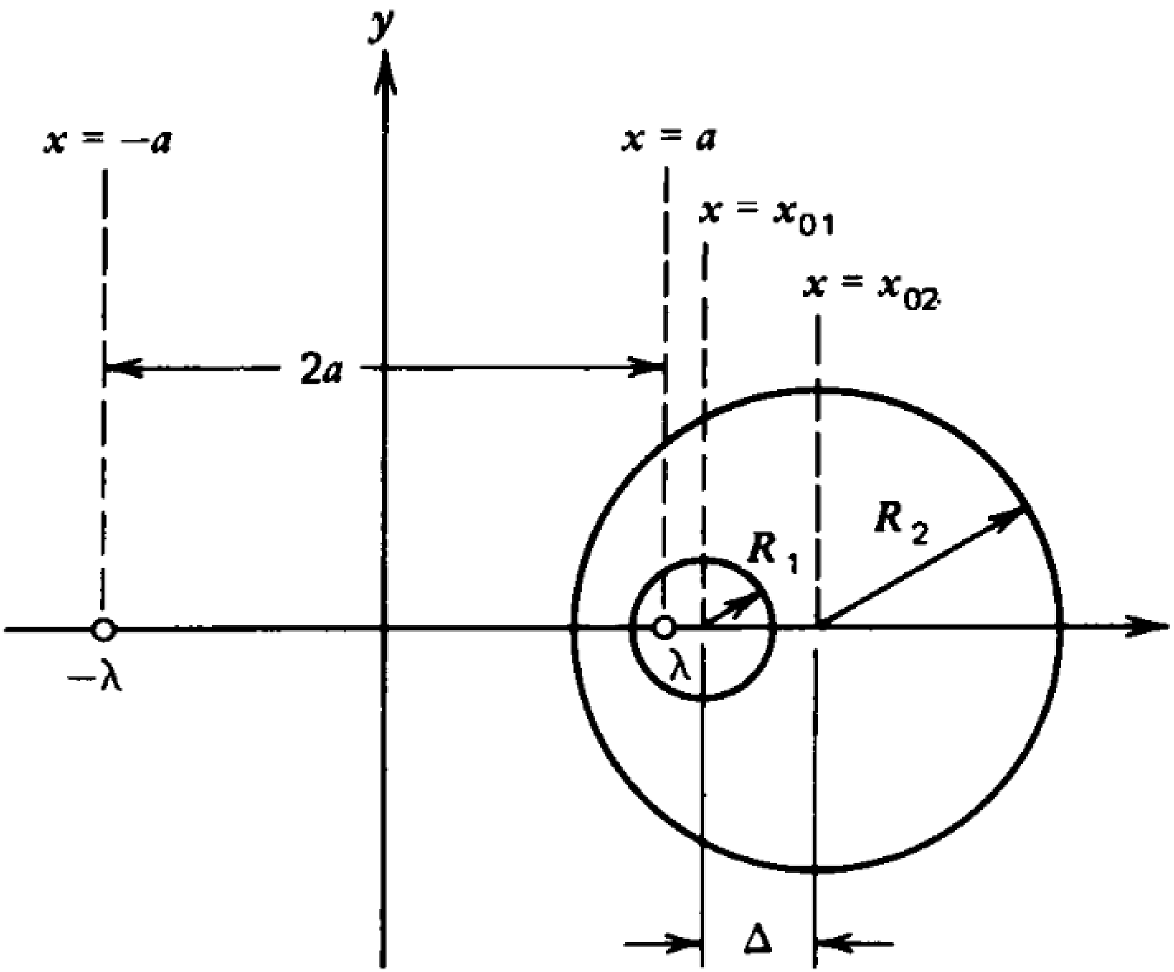
the problem where $|R/\delta| < 1$ (a line charge outside the cylinder

defining $x_< = x_0 - a$, and $x_> = x_0 + a$, we see that $x_< x_> = x_0^2 - a^2 = R^2$

The exterior problem specifies that $m = R/x_>$.

The interior problem specifies that $m = R/x_<$

مثال) دو استوانه به شعاع های R_1 و R_2 که محور آنها به اندازه Δ از هم جدا شده اند. هر کدام یک سطح هم پتانسیل می باشند.



$$R_1^2 = x_{01}^2 - a^2 \qquad \text{and} \qquad R_2^2 = x_{02}^2 - a^2$$

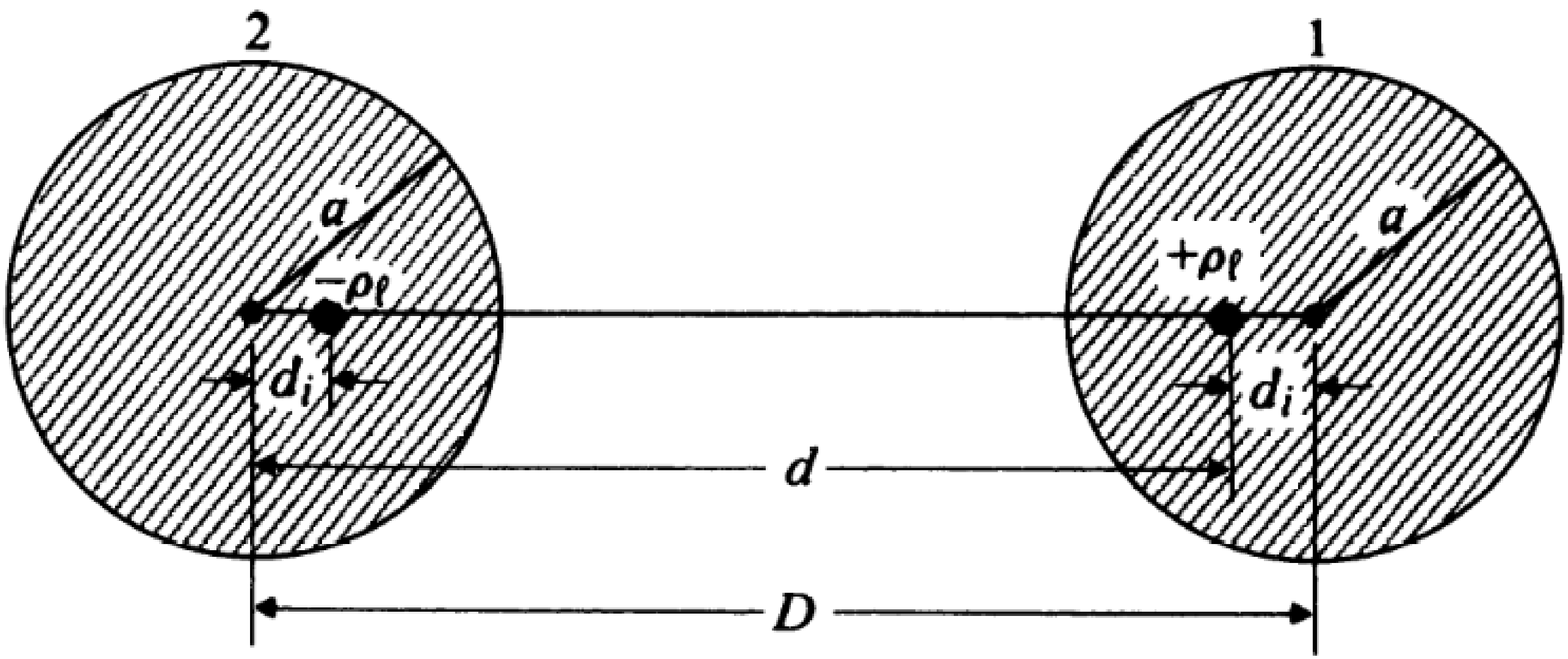
$$\Delta = x_{02} - x_{01} = (R_2^2 + a^2)^{1/2} - (R_1^2 + a^2)^{1/2}$$

$$a = \left[\left(\frac{R_2^2 + R_1^2 - \Delta^2}{2\Delta}\right)^2 - R_2^2\right]^{1/2}.$$

Hence, m_1, m_2, x_{01}, and x_{02} can be determined. If the potential difference between the cylinders is specified as $\Phi_1 - \Phi_2 = V$, then the strength of the (image) line charge is adjusted accordingly:

$$\Phi_1 = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \ln m_1 \qquad \Phi_2 = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \ln m_2 \qquad \Rightarrow \qquad \Phi_1 - \Phi_2 = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \ln \frac{m_1}{m_2}.$$

EXAMPLE 4–4 Determine the capacitance per unit length between two long, parallel, circular conducting wires of radius a. The axes of the wires are separated by a distance D.



Solution Refer to the cross section of the two-wire transmission line shown in Fig. 4–6. The equipotential surfaces of the two wires can be considered to have been generated by a pair of line charges $+\rho_\ell$ and $-\rho_\ell$ separated by a distance $(D - 2d_i) = d - d_i$. The potential difference between the two wires is that between any two points on the respective wires.

$$V_2 = \frac{\rho_\ell}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{a}{d} \qquad V_1 = -\frac{\rho_\ell}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{a}{d}.$$

We note that V_1 is a positive quantity, whereas V_2 is negative because $a < d$. The capacitance per unit length is

$$C = \frac{\rho_\ell}{V_1 - V_2} = \frac{\pi\epsilon_0}{\ln (d/a)},$$

$$C = \frac{\rho_\ell}{V_1 - V_2} = \frac{\pi\epsilon_0}{\ln (d/a)},$$

$$d = D - d_i = D - \frac{a^2}{d}, \qquad d = \tfrac{1}{2}\left(D + \sqrt{D^2 - 4a^2}\right).$$

$$C = \frac{\pi\epsilon_0}{\ln \left[(D/2a) + \sqrt{(D/2a)^2 - 1}\right]} \qquad \text{(F/m)}.$$

$$C = \frac{\pi\epsilon_0}{\cosh^{-1} (D/2a)} \qquad \text{(F/m)}.$$

$$\ln \left[x + \sqrt{x^2 - 1}\right] = \cosh^{-1} x$$