بسم الله الرحمن الرحيم

فصل پنجم

خازنها

خازن به عنوان یک قطعه الکترونیکی به عنوان یک وسیله:

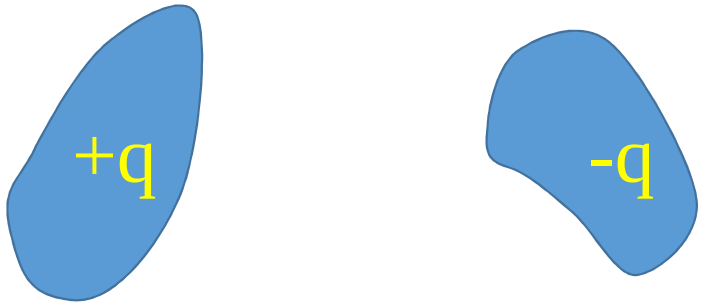
- جهت ذخیره سازی بارهای الکتریکی و تخلیه آنی مقدار زیادی بار در مدار
- و کنترل جریان الکتریکی ر مدارها استفاده می شود

ویژگیهای کلی خازن ها:

۱- خازن شامل دو رسانا با شکل های مختلف و مجزا از همدیگر است

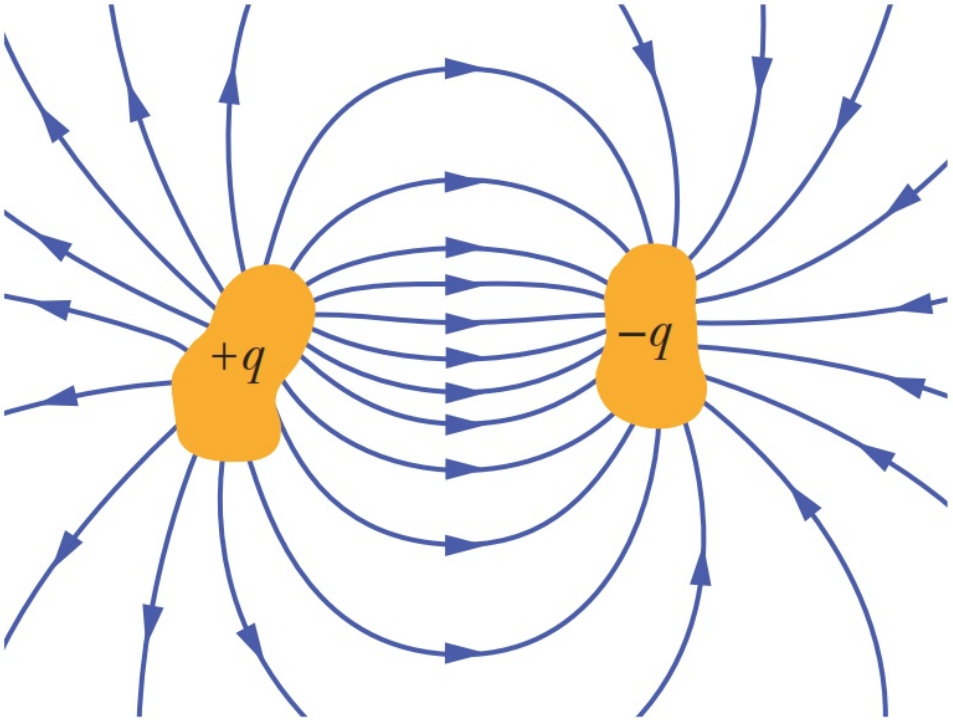
۲- رساناهای خازن از محیط اطراف مجزا شده اند

۳- در حالت باردار با q+ روی یک رسانا و بار q– روی رسانای دیگر جمع می شود



ویژگیهای کلی خازن ها:

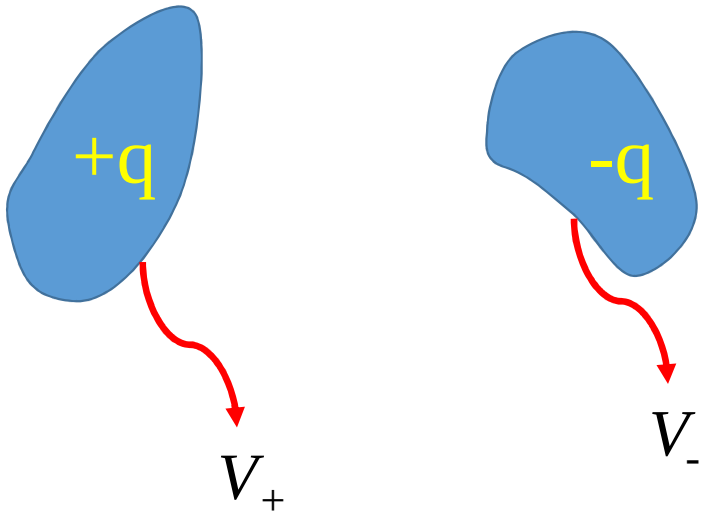
٤- باردار کردن خازن: با اتصال پایانه های خازن به قطب های + و – یک باطری یا منبع تغذیه DC، بار q+ روی یک رسانا و بار یکسان q– روی رسانای دیگر تجمع می بابد.



٥- در فضای بین دو رسانای خازن، میدان الکتریکی بوجود می آید

ویژگیهای کلی خازن ها:

۶- هر سطح رسانای خازن یک سطح هم پتانسیل است.



$$V \propto q$$

۷- با باردار شدن خازن یک اختلاف پتانسیل بین صفحات خازن بوجود می آید

$$\Delta V = V_+ - V_- > 0$$

$$\Delta V \to V$$

$$V = V_+ - V_-$$

ویژگیهای کلی خازن ها:

۸- میزان بار ذخیره شده در یک خازن متناسب است با:

- ❖ اختلاف پتانسیل اعمالی به دو پایانه خازن $q \propto V$
- ❖ قابلیت خازن در ذخیره سازی بار (ظرفیت خازن) $q \propto C$

۹- ظرفیت خازن (C) متناسب است با:

- ➢ شکل هندسی خازن: تخت – استوانه ای – کروی
- ➢ موقعیت نسبی دو رسانا نسبت به همدیگر
- ➢ ماده واسط میان دو رسانا

ویژگیهای کلی خازن ها:

۱۰- رابطه حاکم بر خازن:

$$q = CV$$

کولن فاراد ولت

۱۱- یک فاراد یک کمیت خیلی بزرگ

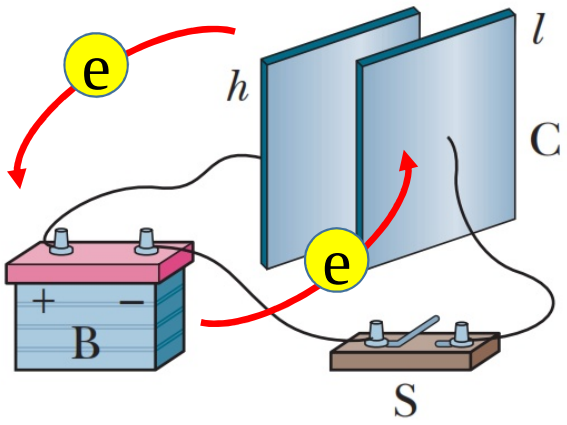
ممولا ظرفیت خازنها $1\ pF - 1\ mF$

کیفیت باردار کردن خازن ها:

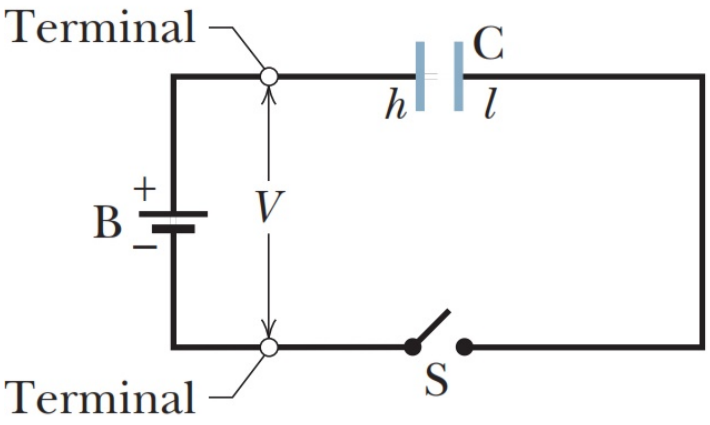
در حالت کلید باز خازن بدون بار

$$q = 0 \quad \rightarrow \quad V = 0$$

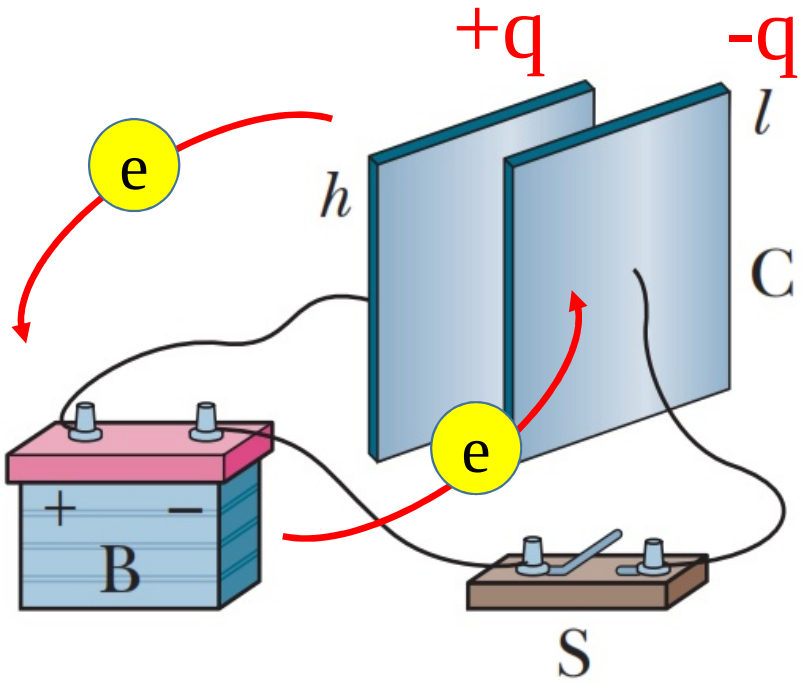
با توجه به آنکه الکترونها از پتانسیل کمتر به پتانسل بیشتر می روند لذا الکترون از صفحه سمت چپ (h) به قطب مثبت منتقل می شود و از قطب منفی به صفحه سمت راست (l) منتقل می شود.



(a)



(b)



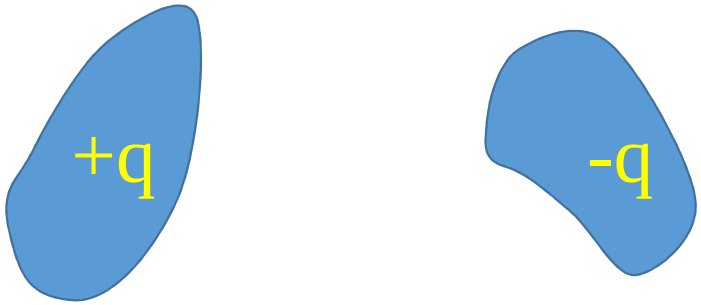
$$V \propto q$$

تا زمانی که پتانسیل صفحات برابر با پتانسیل قطبهای باطری شود انتقال بار انجام می گردد.c

$$V_h = V_+ \quad , \quad V_l = V_- \quad \rightarrow V_h - V_l = V_+ - V_-$$

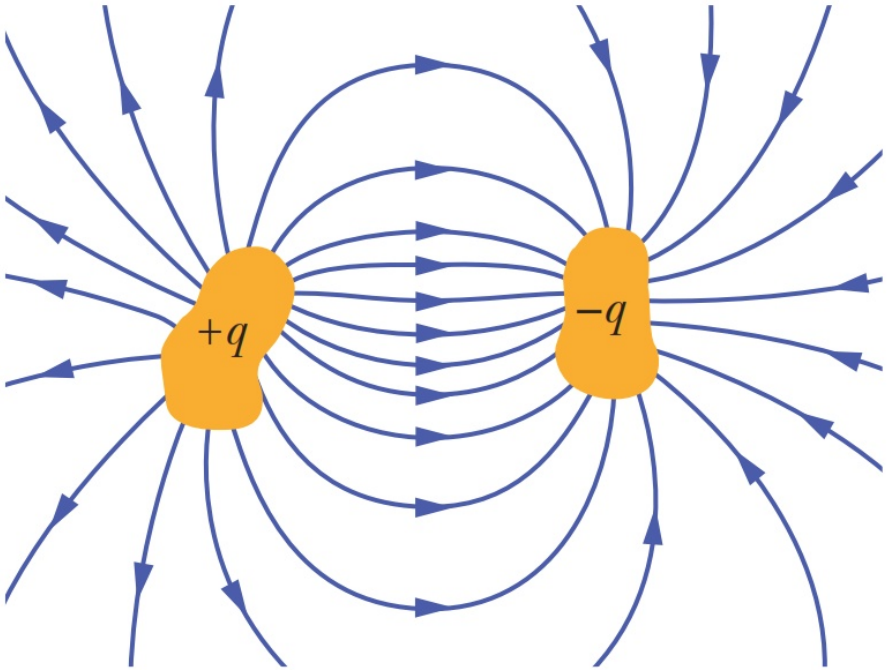
دستور العمل محاسبه ظرفیت خازن ها:

۱- فرض می شود که خازن دارای بار ذخیره شده q می باشد. بنابراین یک صفحه رسانا دارای بار q+ و صفحه دیگر بار q– است.



دستور العمل محاسبه ظرفیت خازن ها:

۲- میدان ایجاد شده بین دو رسانای باردار محاسبه می شود (به کمک قانون گاوس)

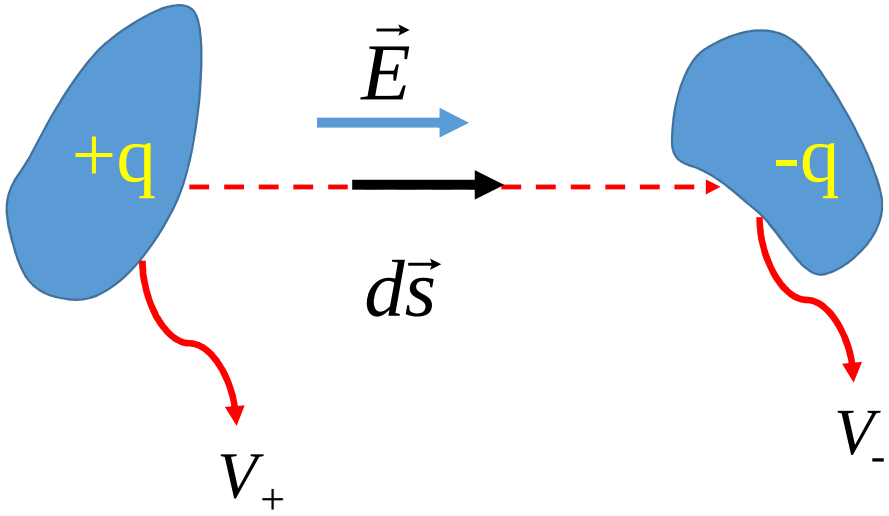


$$\oint \vec{E} \,.\, d\vec{A} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

دستور العمل محاسبه ظرفیت خازن ها:

۳- محاسبه اختلاف پتانسیل بین دو رسانا:

به ازاء بار q+ و q– ، دو صفحه رسانا دارای اختلاف پتانسیل مشخصی می باشند. بنابراین اختلاف پتانسیل بین دو رسانا را حساب نمود.

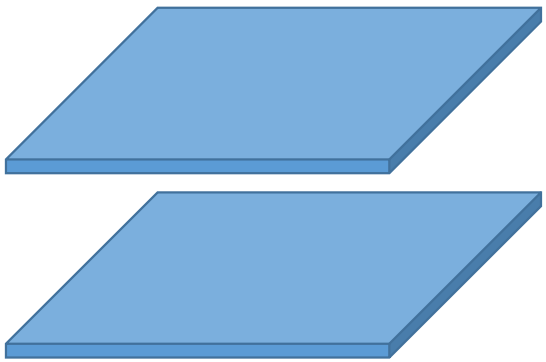


$$V = V_+ - V_- = -\int_{-}^{+} \vec{E} \cdot d\vec{s} = \int_{+}^{-} \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

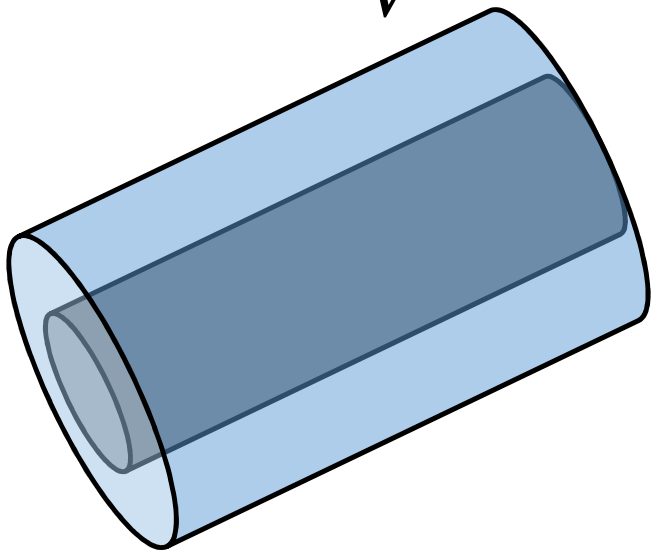
دستور العمل محاسبه ظرفیت خازن ها:

٤- محاسبه ظرفیت خازن:

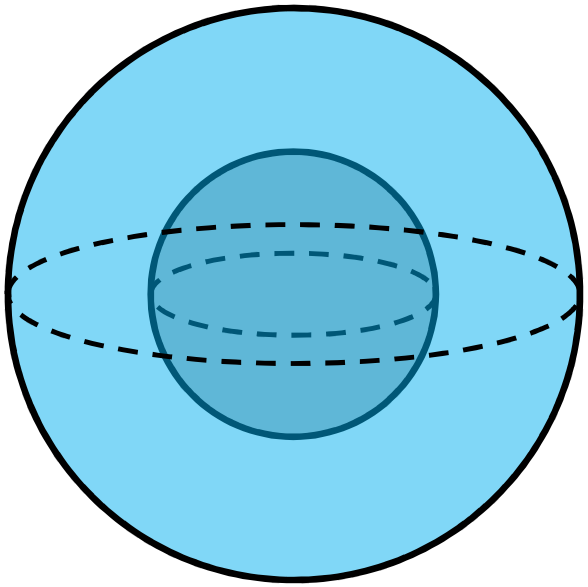
$$C = \frac{q}{V}$$



خازن تخت



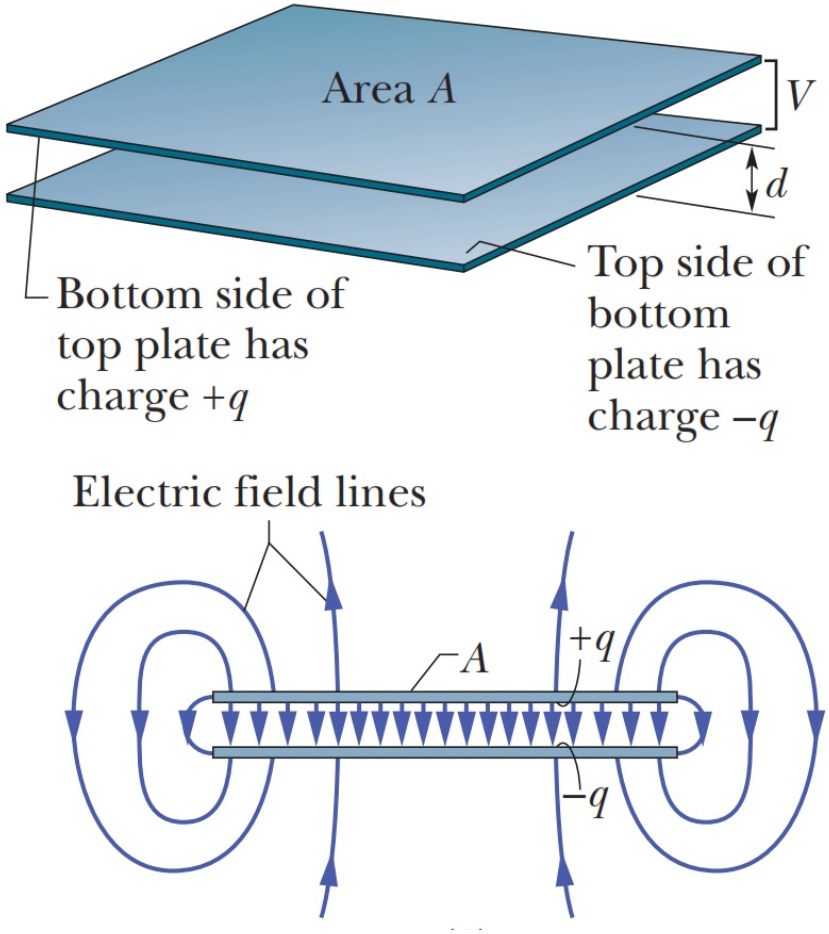
خازن استوانه ای

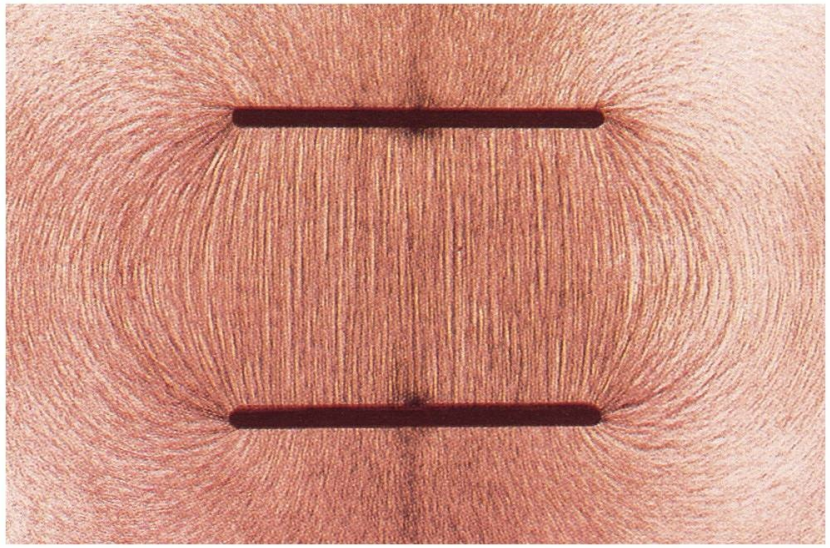


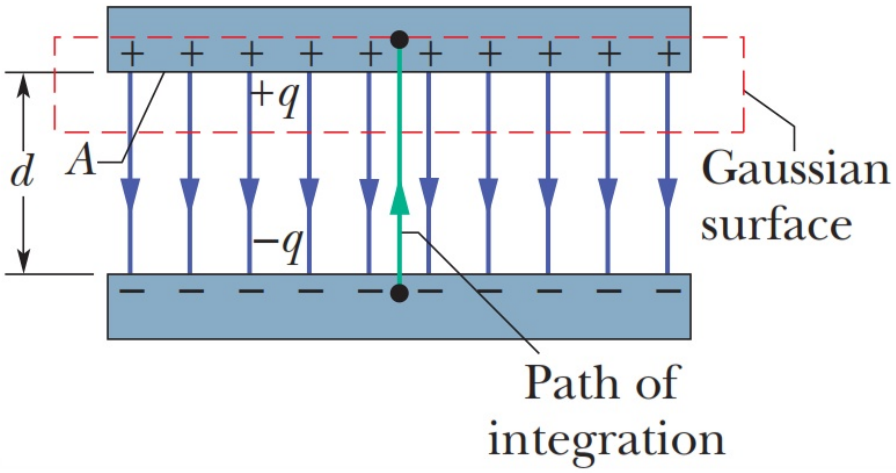
خازن کروی

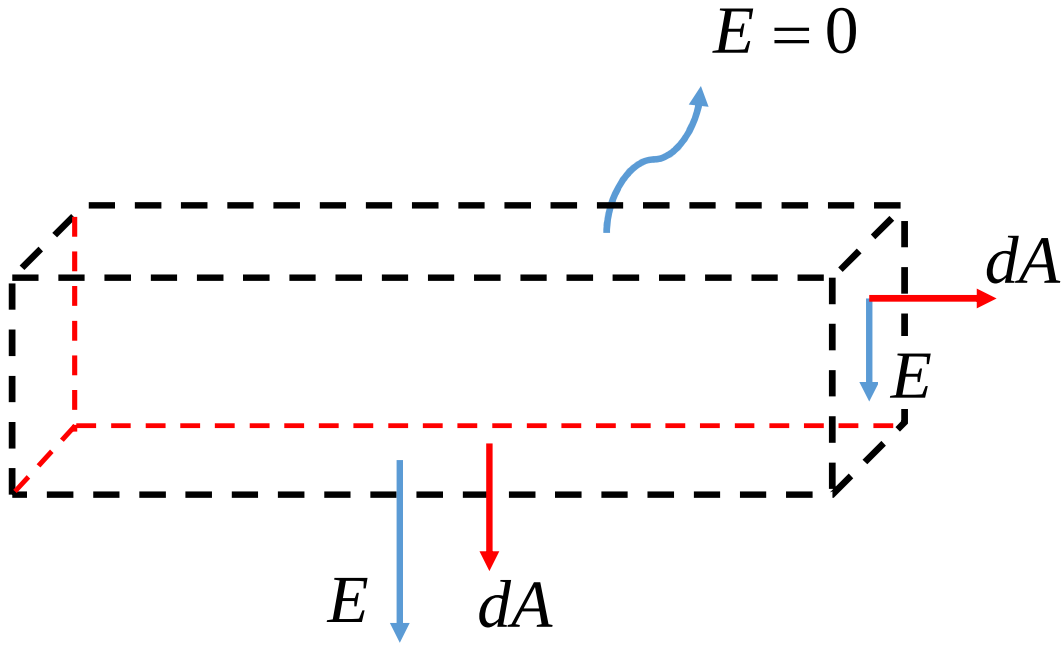
محاسبه ظرفیت خازن تخت

خازن تخت شامل دو صفحه رسانا به مساحت های A و فاصله d از همدیگر که در بین آنها دی الکتریک هوا وجود دارد.









$$\oint \vec{E} \,.\, d\vec{A} = \frac{q}{\varepsilon_0} \quad \rightarrow \quad \int \vec{E} \,.\, d\vec{A} + \int \vec{E} \,.\, d\vec{A} + \int \vec{E} \,.\, d\vec{A} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

قاعده بالا	قاعده پایین	سطح جانبی
$E = 0$	$E \neq 0$	$E \neq 0$
	$\vec{E} \parallel d\vec{A}$	$\vec{E} \perp d\vec{A}$

$$\oint \vec{E} \,.\, d\vec{A} = \frac{q}{\varepsilon_0} \quad \rightarrow \quad EA = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

$$\rightarrow \quad E = \frac{q}{\varepsilon_0 A}$$

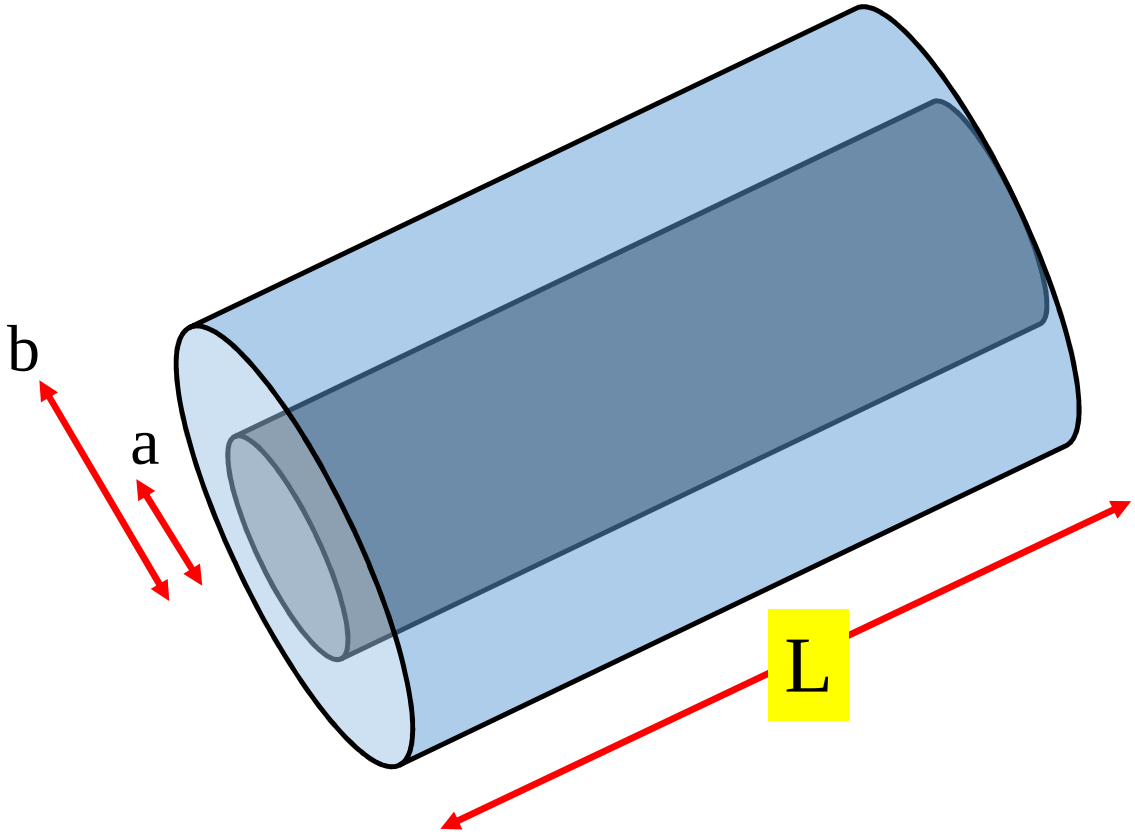
$$V = V_+ - V_- = \int_+^- \vec{E} \,.\, d\vec{s} = \int_+^- E ds = E \int_+^- ds$$

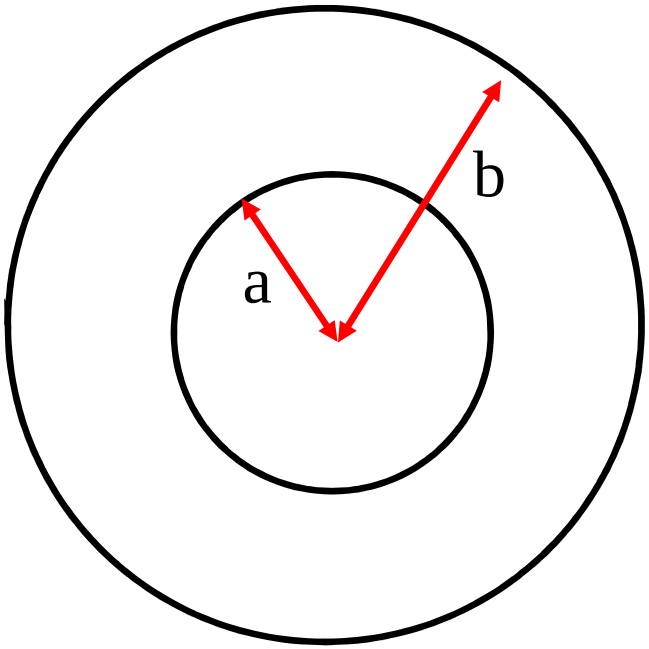
$$\rightarrow \qquad V = Ed = \frac{q}{\varepsilon_0 A} d$$

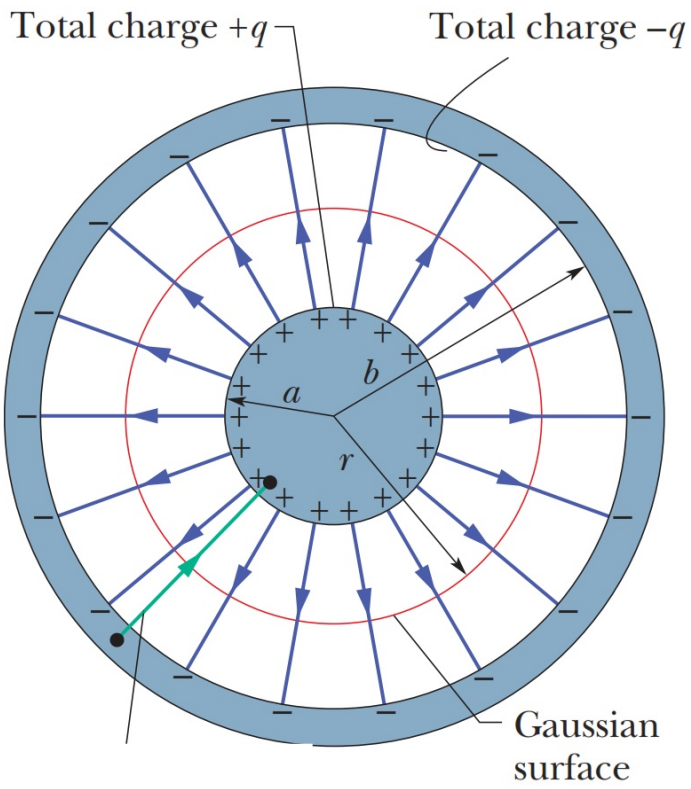
$$C = \frac{q}{V} = \frac{q}{\frac{q}{\varepsilon_0 A} d} \qquad \rightarrow \qquad \boxed{C = \frac{\varepsilon_0 A}{d}}$$

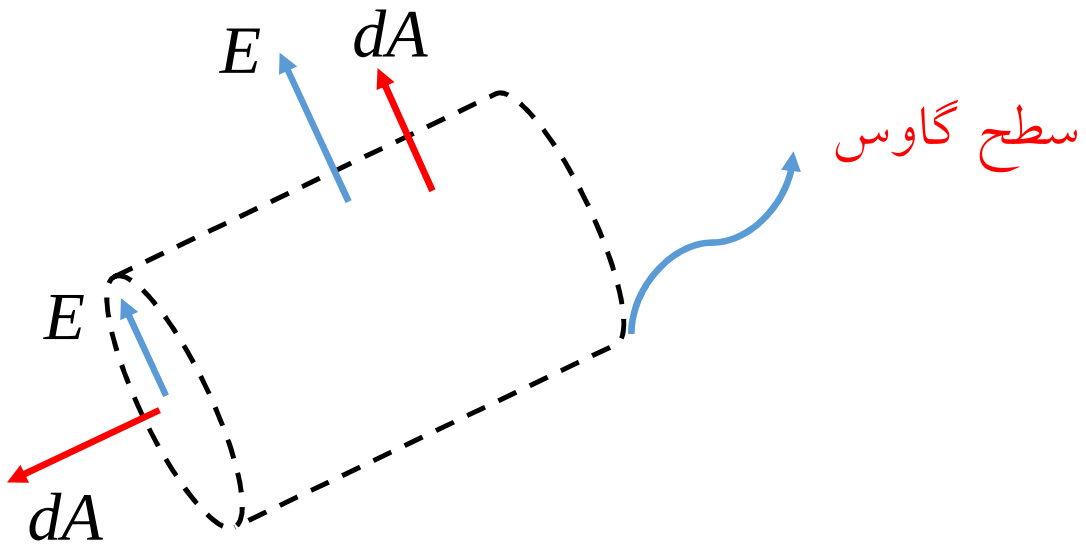
محاسبه ظرفیت خازن استوانه ای

خازن استوانه ای شامل دو صفحه استوانه ای شکل رسانای هم محور با شعاع داخلی a و خارجی b و به طول L که فضای بین استوانه های رسانا، دی الکتریک هوا وجود دارد.






Total charge +q
Total charge −q
a
b
r
Gaussian surface


E
dA
E
dA
سطح گاوس

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q}{\varepsilon_0} \quad \rightarrow \quad \int \vec{E} \cdot d\vec{A} + \int \vec{E} \cdot d\vec{A} + \int \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

قاعده جلو	قاعده عقب	سطح جانبی
$E \neq 0$	$E \neq 0$	$E \neq 0$
$\vec{E} \perp d\vec{A}$	$\vec{E} \perp d\vec{A}$	$\vec{E} \parallel d\vec{A}$

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q}{\varepsilon_0} \quad \rightarrow \quad \int \vec{E} \cdot d\vec{A} = E \int dA = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

$$\rightarrow \quad E(2\pi r L) = \frac{q}{\varepsilon_0} \quad \rightarrow \quad E = \frac{q}{2\pi \varepsilon_0 L\, r}$$

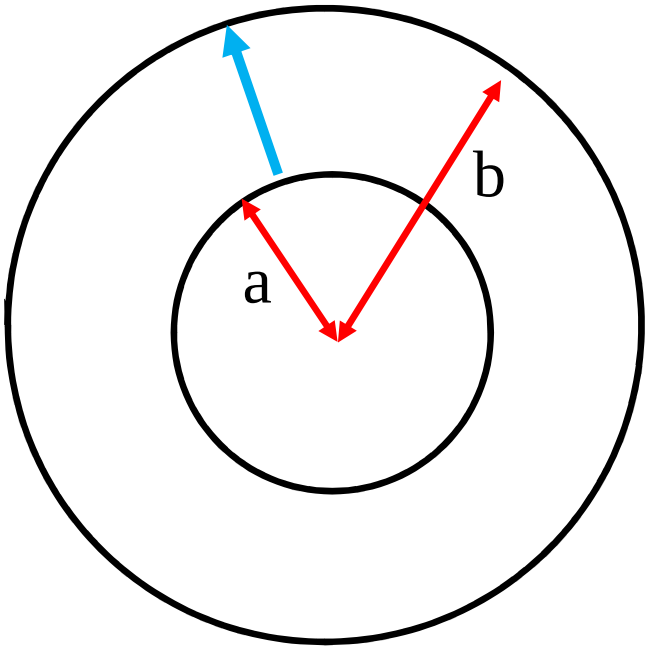
$$V = V_+ - V_- = \int_+^- \vec{E} \,.\, d\vec{s} = \int_+^- E dr = \int_a^b \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 L\, r} dr$$

$$V = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 L} \int_a^b \frac{dr}{r} = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 L} \ln\frac{b}{a}$$

$$C = \frac{q}{V} = \frac{q}{\frac{q}{2\pi\varepsilon_0 L} \ln\frac{b}{a}}$$

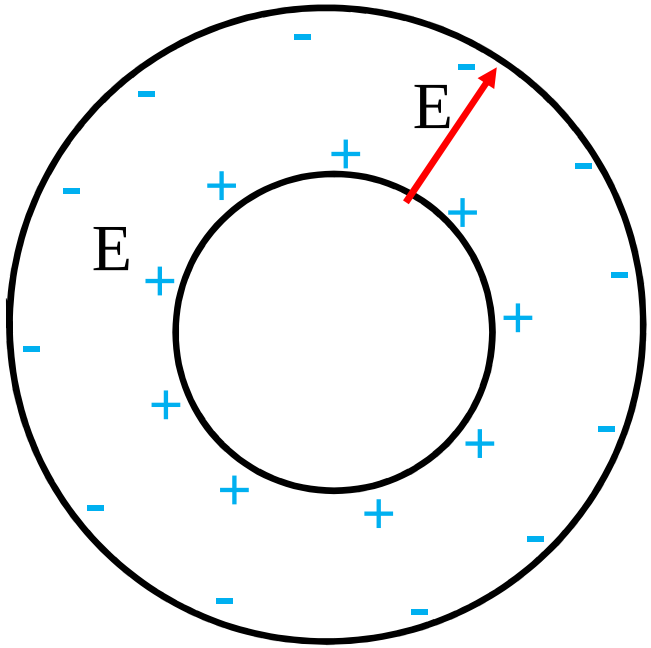
$$C = \frac{2\pi\varepsilon_0 L}{\ln\frac{b}{a}}$$

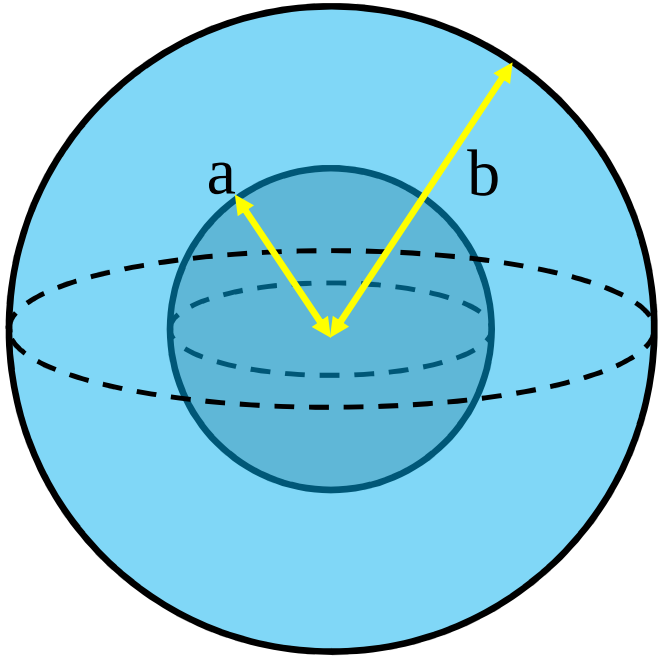
مسیر انتگرل گیری



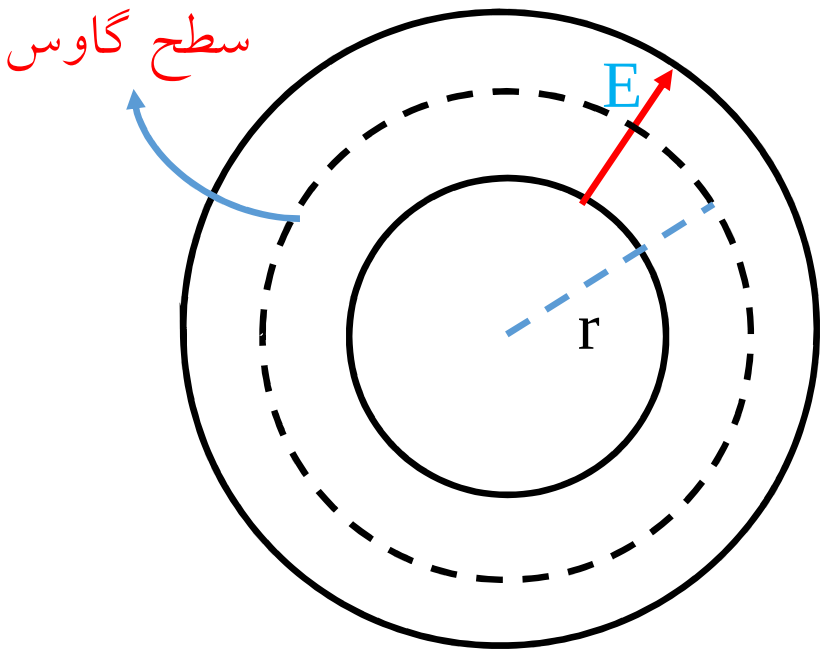
محاسبه ظرفیت خازن کروی

خازن کروی شامل دو صفحه کروی شکل رسانای هم مرکز با شعاع داخلی a و خارجی b که فضای بین کره های رسانا، دی الکتریک هوا وجود دارد.



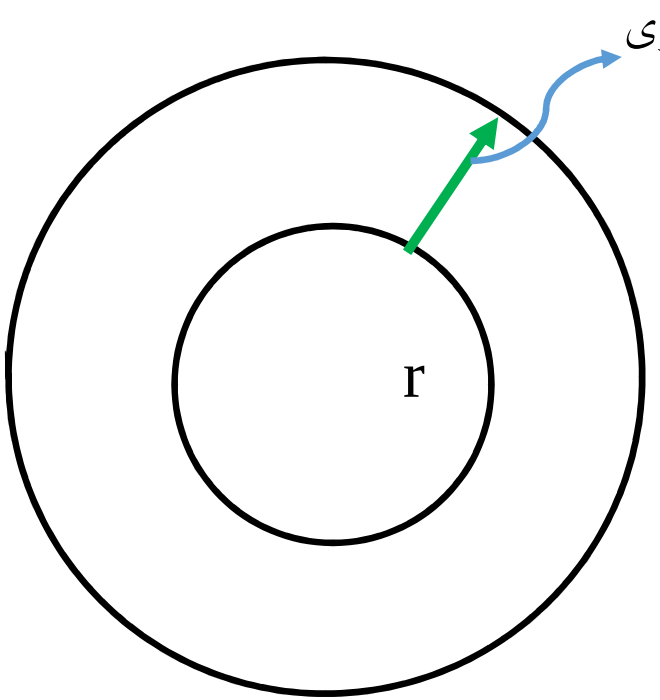


$$\oint \vec{E} \,.\, d\vec{A} = \frac{q}{\varepsilon_0} \quad \rightarrow \quad E(4\pi r^2) = \frac{q}{\varepsilon_0} \quad \rightarrow \quad E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$



$$V = V_+ - V_- = \int_+^- \vec{E} \cdot d\vec{s} = \int_+^- E dr = \int_a^b \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} dr$$

$$V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \int_a^b \frac{dr}{r^2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \left(-\frac{1}{r}\right)_a^b = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{b-a}{ab}\right)$$

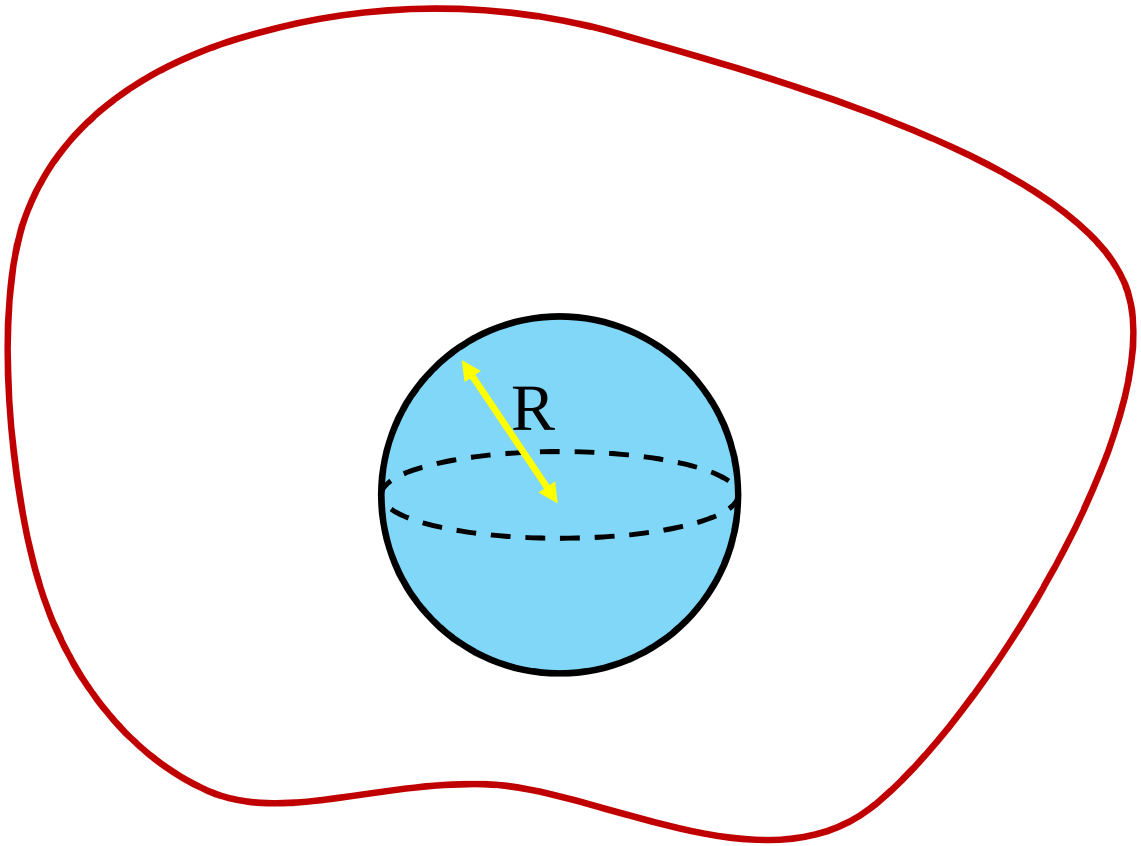


$$C = \frac{q}{V} = \frac{q}{\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{b-a}{ab}\right)}$$

$$C = 4\pi\varepsilon_0 \left(\frac{ab}{b-a}\right)$$

ظرفیت کره منزوی

یک کره باردار و فضای اطراف آن را می توان به عنوان یک خازن در نظر گرفت.



$$C = 4\pi\varepsilon_0 \left(\frac{ab}{b-a}\right)$$

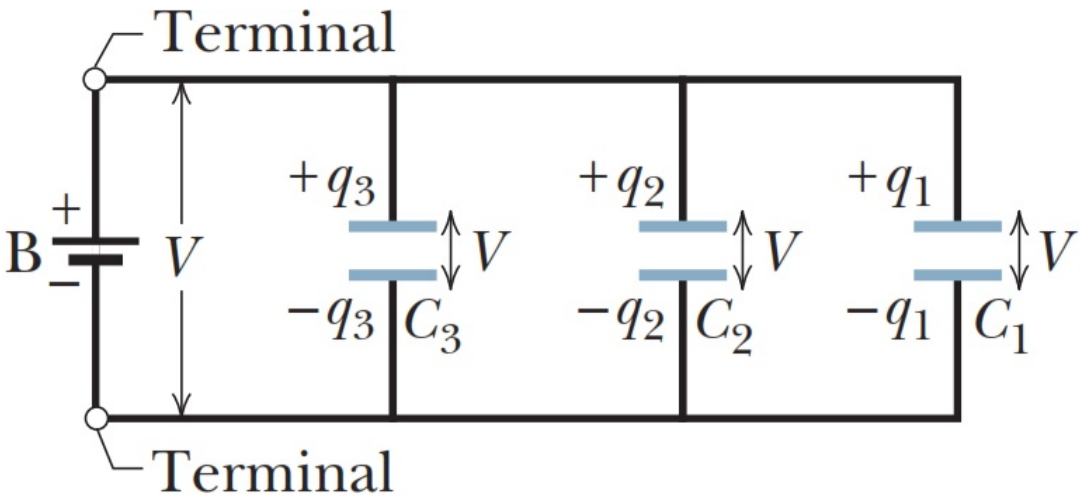
$$a \to R$$

$$b \to \infty$$

$$C = 4\pi\varepsilon_0 R$$

ترکیب خازنها

اتصال موازی خازن ها



۱- شرط موازی بودن خازن ها:

- ❖ در رفتن از یک پایانه به پایانه دیگر در هر مسیرفقط از یک خازن بگذریم
- ❖ همه خازن ها در دو سر مشترک می باشند

همه صفحات با بار مثبت به همدیگر و همه صفحات با بار منفی به همدیگر متصل شده باشند

اختلاف پتانسیل دو سر همه خازنها یکسان

$$V_1 = V_2 = V_3 = V$$

❖ کل بار تحویل داده شده به خازن ها وابسته به ظرفیت شان بین شان تقسیم می گردد.

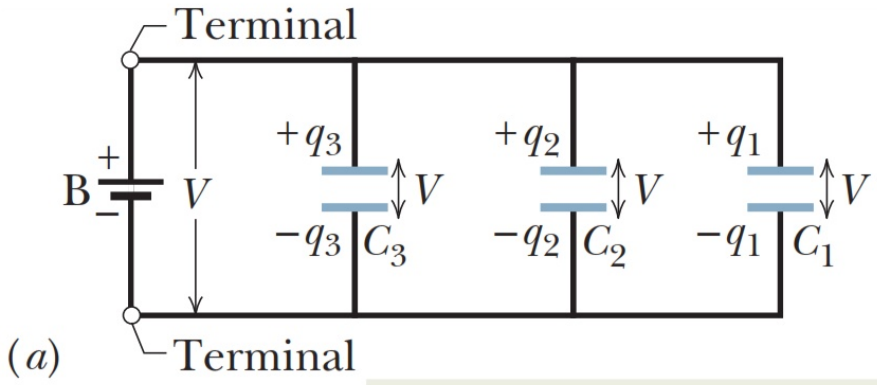
$$q_t = q_1 + q_2 + q_3$$

۲- بار ذخیره شده روی خازن ها

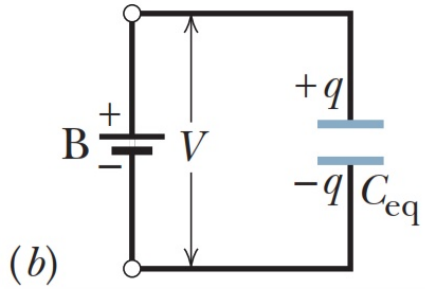
$$q_1 = C_1 V$$
$$q_2 = C_2 V$$
$$q_3 = C_3 V$$

$$q_t = q_1 + q_2 + q_3$$
$$q_t = C_1 V + C_2 V + C_3 V$$
$$q_t = (C_1 + C_2 + C_3) V$$

۳- خازن معادل:



Parallel capacitors and their equivalent have the same V ("par-V").



خازن معادل با یک مجموعه از خازنهای موازی، خازنی است که اگر به همان پتانسیل که به مجموعه خازنها وصل شده وصل شود باری برابر با بار کل ذخیره شده روی صفحات مجموعه خازن ها در آن ذخیره می گردد

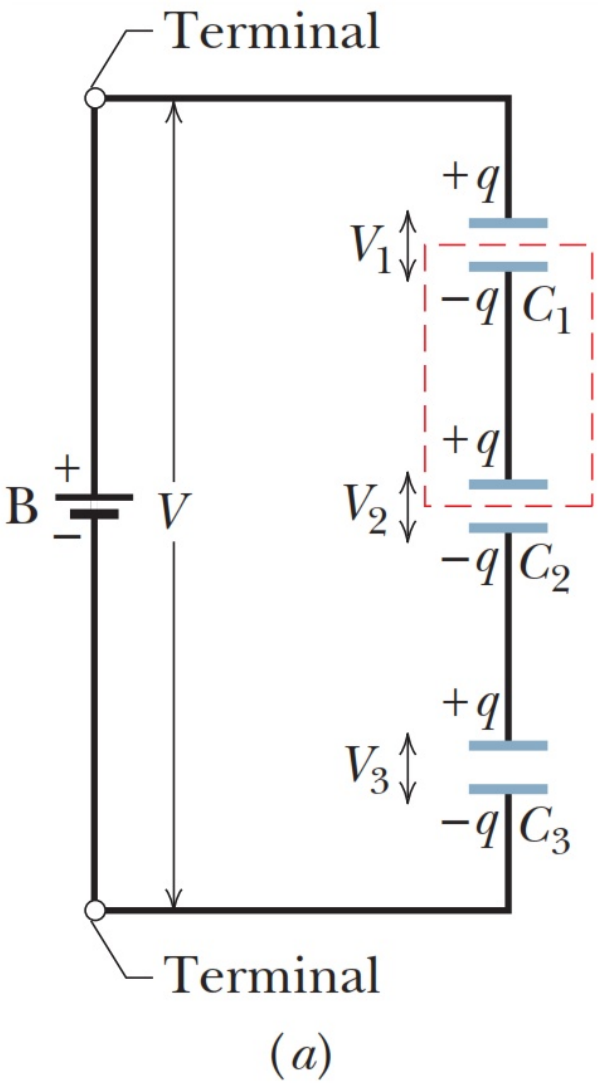
$$q_t = \sum_i C_i V$$

$$q_t = C_{eq} V$$

$$C_{eq} = \sum_i C_i$$

ترکیب خازنها

اتصال سری یا متوالی خازن ها



۱- شرط سری بودن خازن ها:

- در رفتن از یک پایانه به پایانه دیگر در هر مسیر از همه خازن ها بگذریم
- صفحه مثبت یک خازن به صفحه منفی خازن مجاور وصل می باشد

$$V_t = V_1 + V_2 + V_3$$

❖ بار ذخیره شده روی همه خازن ها یکسان است

$$q_t = q_1 = q_2 = q_3$$

۲- پتانسیل خازن ها

$$V_1 = \frac{q}{C_1}$$

$$V_2 = \frac{q}{C_2}$$

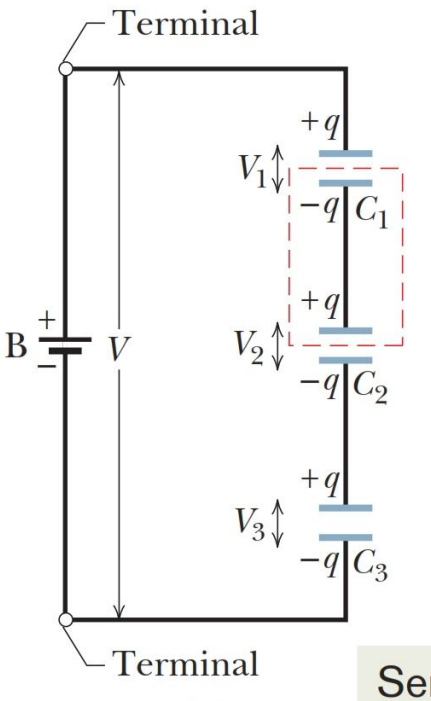
$$V_3 = \frac{q}{C_3}$$

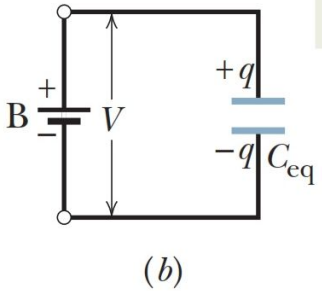
$$V_t = V_1 + V_2 + V_3$$

$$V_t = \frac{q}{C_1} + \frac{q}{C_2} + \frac{q}{C_3}$$

$$V_t = q\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}\right)$$

۳- خازن معادل:





Series capacitors and their equivalent have the same q ("seri-q").

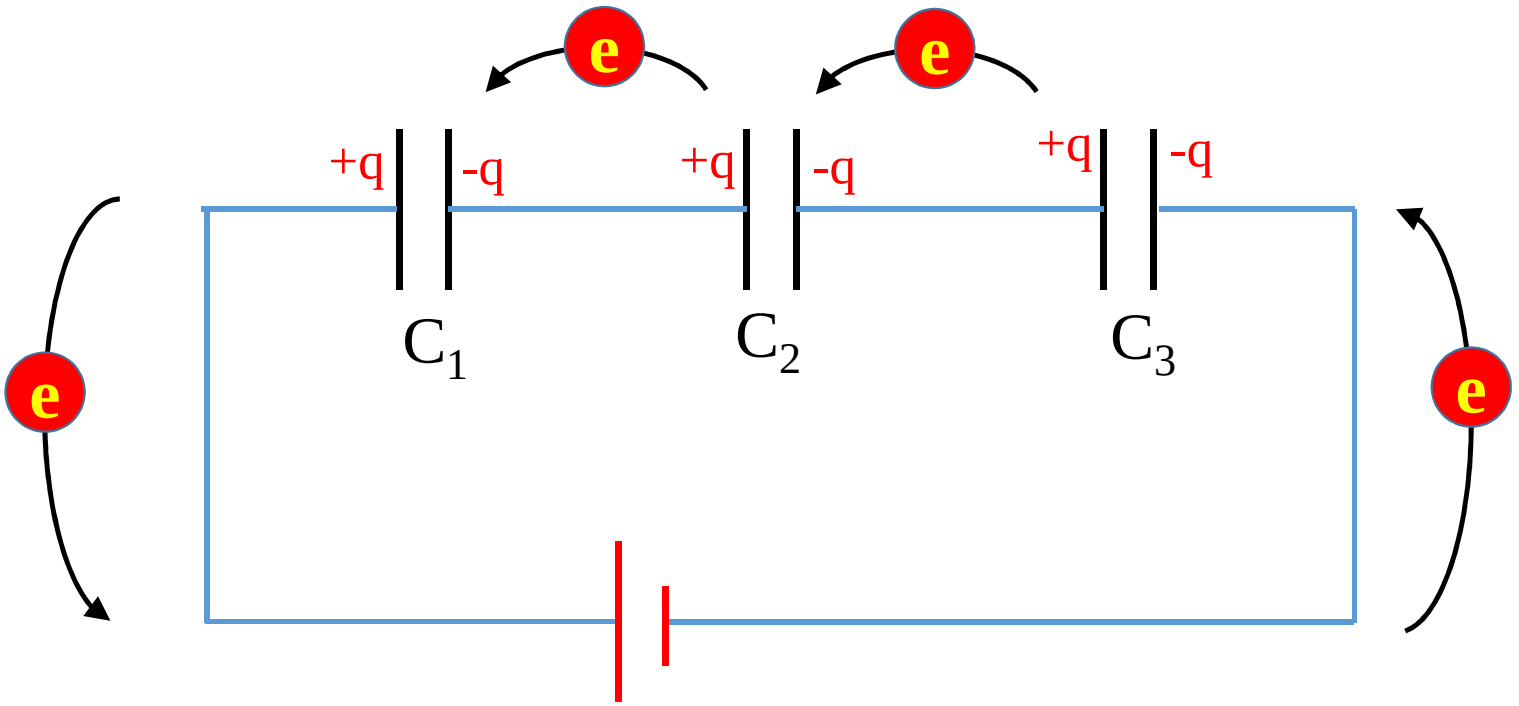
خازن معادل با یک مجموعه از خازنهای سری، خازنی است که اگر به پتانسیل کلی که به مجموعه خازنها وصل شده وصل شود باری برابر با بار کل روی صفحات آن ذخیره می گردد

$$V_t = q\sum_i \frac{1}{C_i}$$

$$V_t = \frac{q_t}{C_{eq}}$$

$$\frac{1}{C_{eq}} = \sum_i \frac{1}{C_i}$$

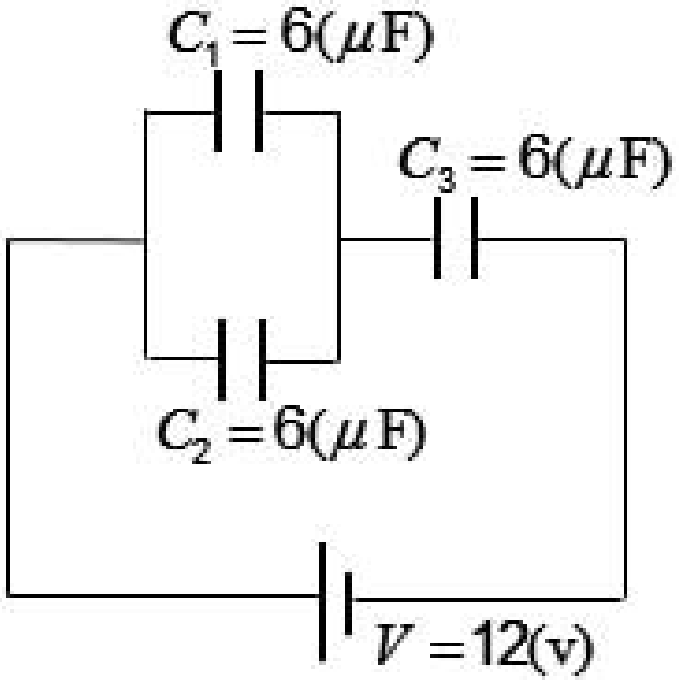
چرایی یکسان بودن بار خازن های سری



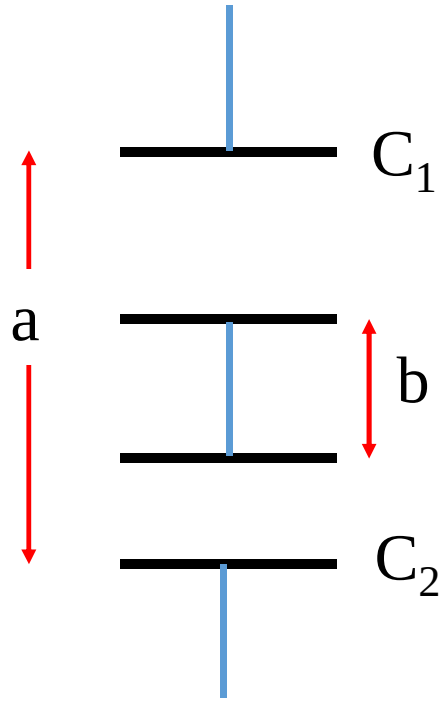
ترکیب خازنها

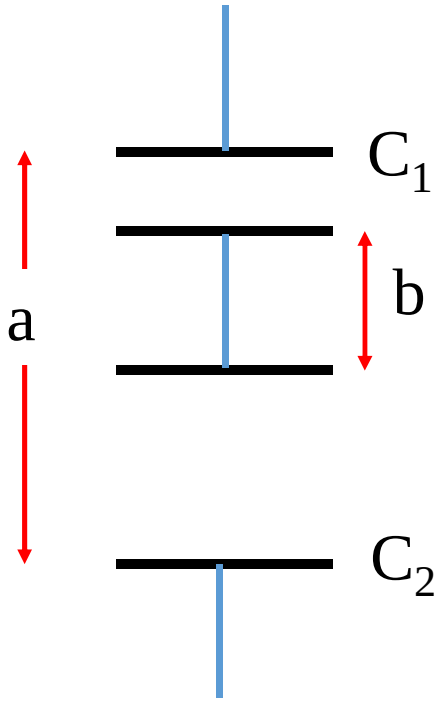
اتصال مرکب خازن ها

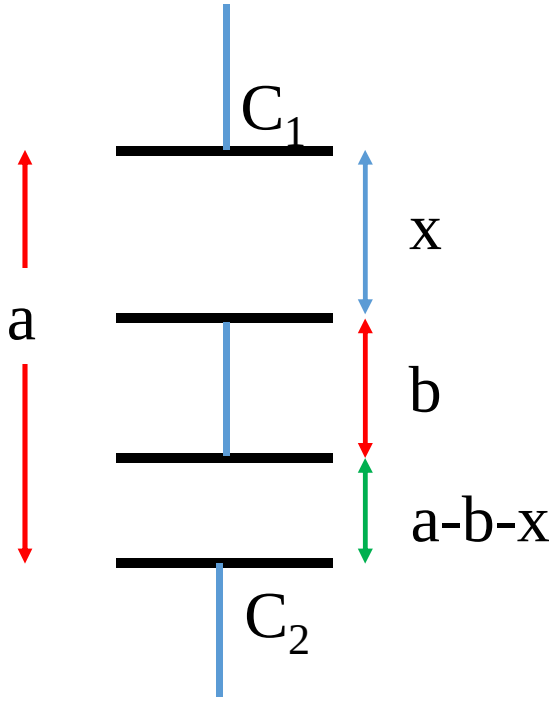
ترکیبی از حالت های سری و موازی



مثال) دو خازن تخت C_1 و C_2 با صفحات A با همدیگر سری شده اند و بخش میانی این دو خازن به طول b در جایی بین صفحه بالایی و پایینی قرار دارد. ظرفیت معادل را بدست آورید







$$C_1 = \varepsilon_0 \frac{A}{x}$$

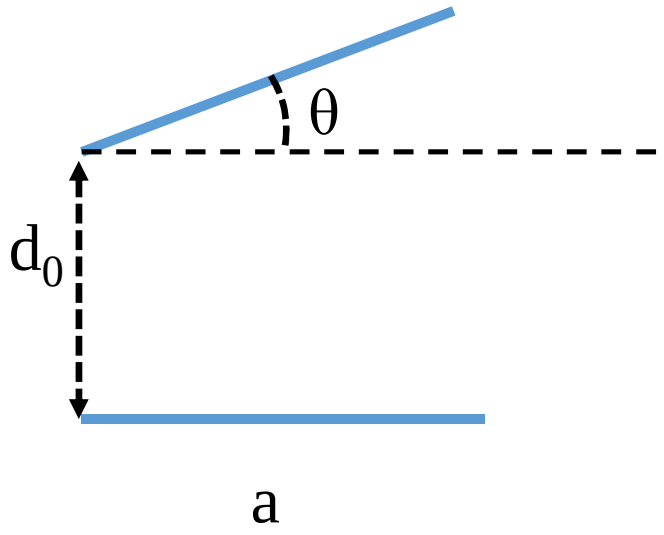
$$C_2 = \varepsilon_0 \frac{A}{a-b-x}$$

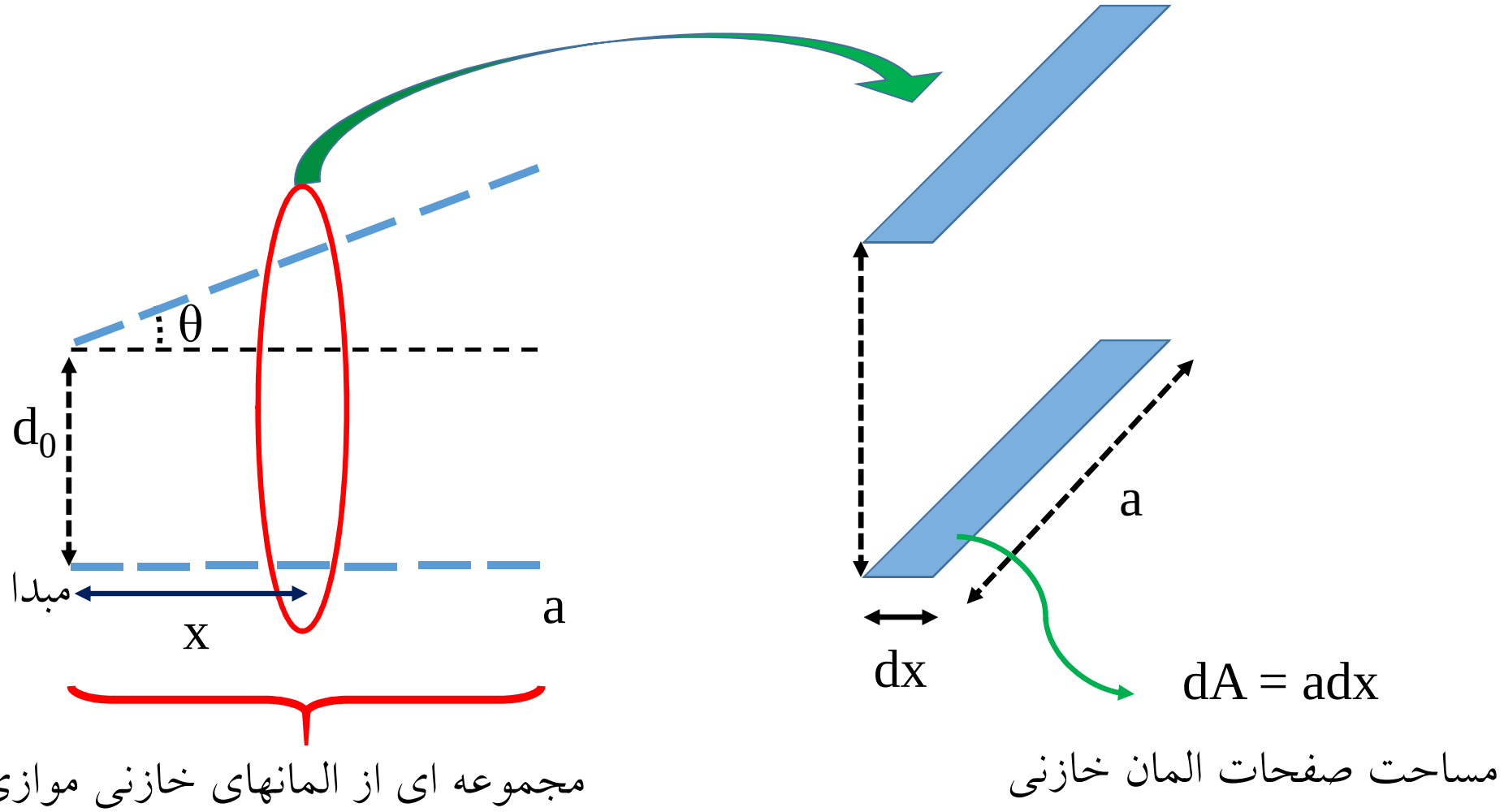
$$\frac{1}{C_t} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{1}{\varepsilon_0 \frac{A}{x}} + \frac{1}{\varepsilon_0 \frac{A}{a-b-x}}$$

$$\frac{1}{C_t} = \frac{1}{\varepsilon_0 A}(x + a - b - x) = \frac{1}{\varepsilon_0 A}(a-b)$$

$$C_t = \frac{\varepsilon_0 A}{a-b}$$

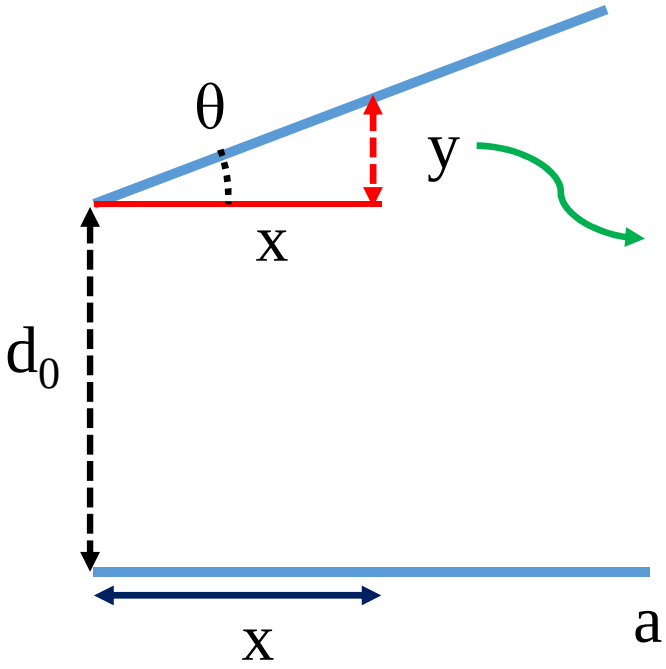
مثال) خازن تختی با صفحاتی به شکل مربع و به ضلع a داریم. صفحات خازن با همدیگر زاویه بسیار کوچک θ می سازند. ظرفیت خازن را بدست آورید.





مجموعه ای از المانهای خازنی موازی

مساحت صفحات المان خازنی



$$y = x\tan\theta$$

فاصله بین صفحات المان خازنی

$$d_0 + x\tan\theta$$

$$dC = \varepsilon_0 \frac{a dx}{d_0 + x\tan\theta}$$

ظرفیت المان خازنی

$$dC = \varepsilon_0 \frac{a dx}{d_0 + x\tan\theta}$$

$$C = \int dC = \varepsilon_0 a \int_{x=0}^{x=a} \frac{dx}{d_0 + x\tan\theta} = \frac{\varepsilon_0 a}{\tan\theta} \ln(d_0 + x\tan\theta)\Big|_{x=0}^{x=a}$$

$$C = \frac{\varepsilon_0 a}{\tan\theta} \ln(\frac{d_0 + a\tan\theta}{d_0}) = \frac{\varepsilon_0 a}{\tan\theta} \ln(1 + \frac{a}{d_0}\tan\theta)$$

به ازاء زوایای کوچک

$$\tan\theta = \theta$$

$$z = \frac{a}{d_0}\theta$$

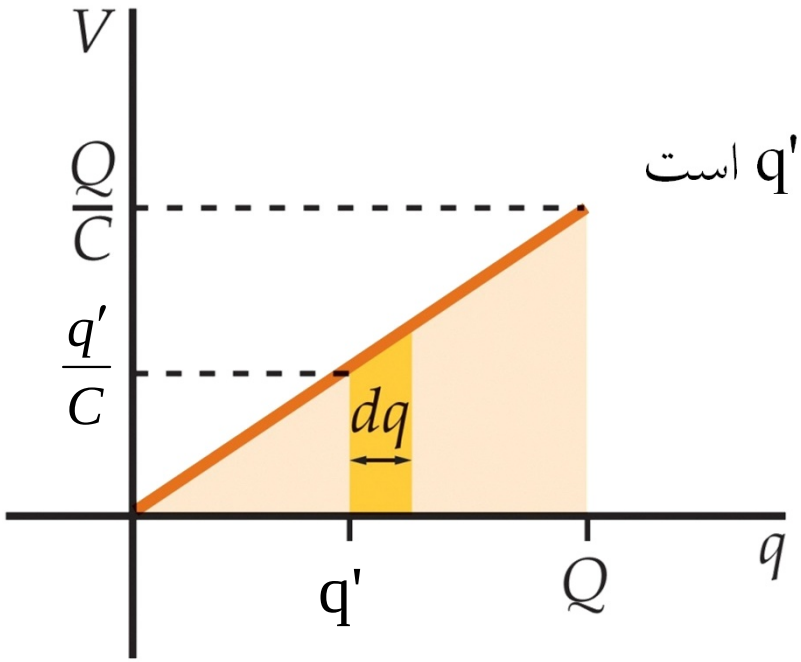
$$\ln(1+z) = z - \frac{1}{2}z^2$$

$$C = \frac{\varepsilon_0 a}{\theta}(z - \frac{1}{2}z^2) = \frac{\varepsilon_0 a}{\theta}(\frac{a}{d_0}\theta - \frac{1}{2}\frac{a^2}{d_0^2}\theta^2)$$

$$C = \frac{\varepsilon_0 a^2}{d_0}(1 - \frac{1}{2}\frac{a}{d_0}\theta)$$

ذخیره انرژی در میدان الکتریکی

انرژی پتانسیل الکتریکی ذخیره شده در یک خازن باردار برابر با کار انجام شده توسط عامل خارجی مثلا منبع تغذیه برای جمع آوری بارها دانست



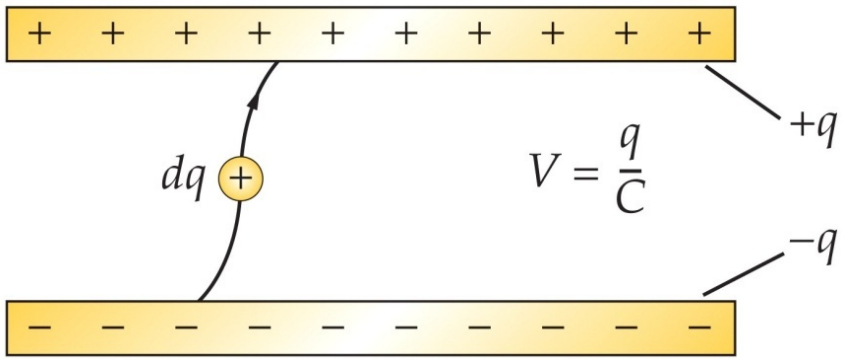
محاسبه:

فرض می شود که خازن در حال شارژ و در لحظه t دارای بار q' است

پتانسیل خازن در لحظه t

$$V = \frac{q'}{C}$$

با انتقال بار dq'+ از صفحه بار بار منفی به صفحه با بار مثبت، بار خازن به q'+dq' افزایش می یابد



افزایش انرژی پتانسیل سیستم در انتقال بار dq' در پتانسیل $V = q'/C$

$$dU = Vdq' = \frac{q'}{C}dq'$$

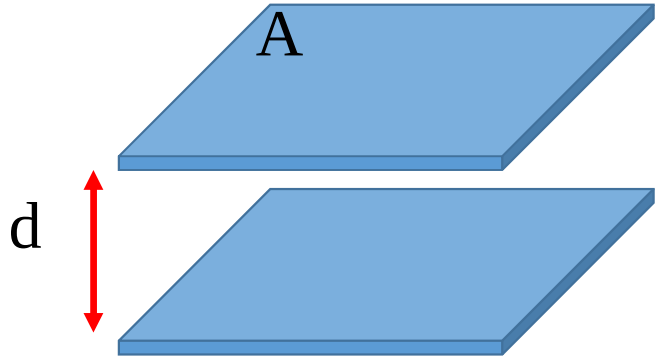
محاسبه افزایش انرژی الکتریکی کل به ازاء افزایش بار از صفر تا q :

$$U = \int dU = \int_{q'=0}^{q} V dq' = \int_{q'=0}^{q} \frac{q'}{C} dq' = \frac{q^2}{2C}$$

$$q = CV \qquad \rightarrow \quad U = \frac{q^2}{2C} = \frac{1}{2} CV^2$$

$$\boxed{U = \frac{q^2}{2C} = \frac{1}{2} CV^2 = \frac{1}{2} qV}$$

محاسبه انرژی پتانسیل الکتریکی ذخیره شده در یک خازن تخت باردار:



$$U = \frac{1}{2} C V^2$$

$$C = \frac{\varepsilon_0 A}{d}$$

$$U = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_0 A}{d} V^2$$

چگالی انرژی ذخیره شده = انرژی ذخیره شده در واحد حجم

در خازن تخت میدان همه جا یکنواخت است لذا چگالی انرژی در کل حجم خازن یکسان می باشد

حجم خازن تخت = مساحت صفحات خازن × فاصله بین صفحات $V = A\,d$

$$u_0 = \frac{\text{انرژی ذخیره شده}}{\text{حجم خازن}}$$

چگالی انرژی در خازن تخت

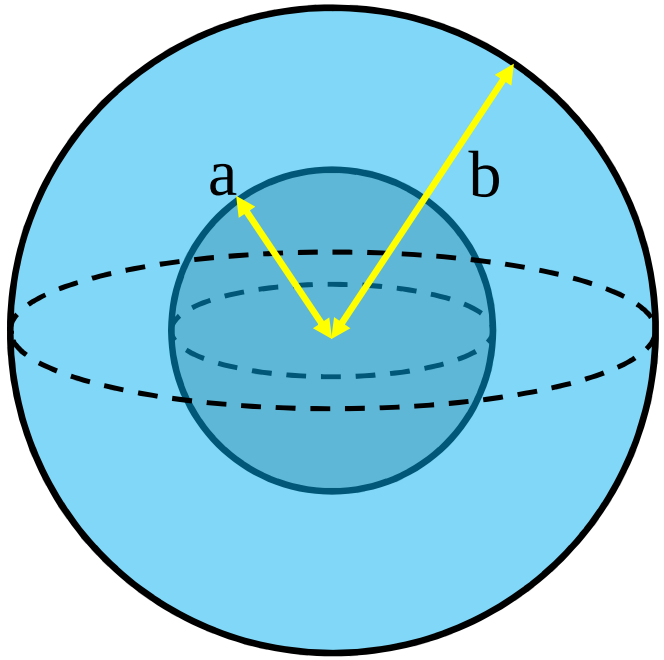
$$u_0 = \frac{U}{Ad} = \frac{\frac{1}{2}\frac{\varepsilon_0 A}{d}V^2}{Ad} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 (\frac{V}{d})^2$$

$$E = \frac{V}{d}$$

$$u_0 = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$$

به طورکلی در هر نقطه در فضا که دارای میدان الکتریکی E است چگالی انرژی ذخیره شده از رابطه بالا قابل محاسبه است

مثال) بررسی انرژی در خازن کروی با بار q ذخیره شده در اختلاف پتانسیل V



$$C = 4\pi\varepsilon_0\left(\frac{ab}{b-a}\right)$$

محاسبه به دو روش:

۱- استفاده از رابطه

$$U = \frac{q^2}{2C}$$

۲- به کمک چگالی انرژی

$$u_0 = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$$

$$a < r < b: \quad E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

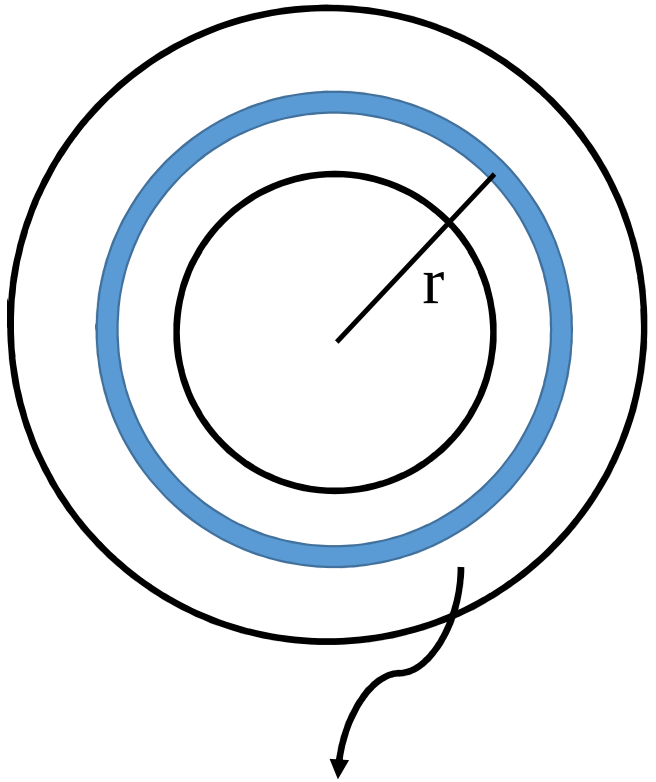
$$u_0 = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \left(\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\right)^2 \qquad , \qquad dV = 4\pi r^2 dr$$

حجم المان

$$dU = u_0 dV = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \left(\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\right)^2 4\pi r^2 dr = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0}\frac{dr}{r^2}$$

$$U = \int dU = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0}\int_{r=a}^{b}\frac{dr}{r^2} = \frac{1}{2}\times\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)$$

$$U = \frac{1}{2}\times\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0\left(\frac{ab}{b-a}\right)} = \frac{q^2}{2C}$$



المان پوسته کروی به شعاع r و ضخامت dr

مثال) در یک کره باردار منزوی به شعاع a و بار q مطلوست:

الف) انرژی ذخیره شده در میدان الکتریکی کره

ب) چگالی انرژی در سطح کره

ج) شعاع کروی R_0 که نصف انرژی پتانسیل داخل آن قرار دارد

$$C = 4\pi\varepsilon_0 R \quad \rightarrow \quad U = \frac{q^2}{2C} = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0 a} \qquad \text{(الف)}$$

$$u_0 = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$$

$$E(r=a) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a^2}$$

$$\Rightarrow \quad u_0 = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \left(\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a^2}\right)^2 \qquad \text{(ب)}$$

انرژی کل ذخیره شده در میدان کره باردار= انرژی ذخیره شده از شعاع a تا بینهایت (در بیرون از کره)

$$U = \int_{r=a}^{\infty} u_0 dV$$

انرژی ذخیره شده در کره به شعاع R_0 = نصف انرژی ذخیره شده از شعاع a تا بینهایت

$$\int_{r=a}^{R_0} dU = \frac{1}{2} \int_{r=a}^{\infty} dU$$

$$dU = u_0 dV = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \left(\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\right)^2 4\pi r^2 dr = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0}\frac{dr}{r^2}$$

انرژی ذخیره شده در پوسته کروی به شعاع r و ضخامت dr

$$\int_{r=a}^{R_0} dU = \frac{1}{2}\int_{r=a}^{\infty} dU$$

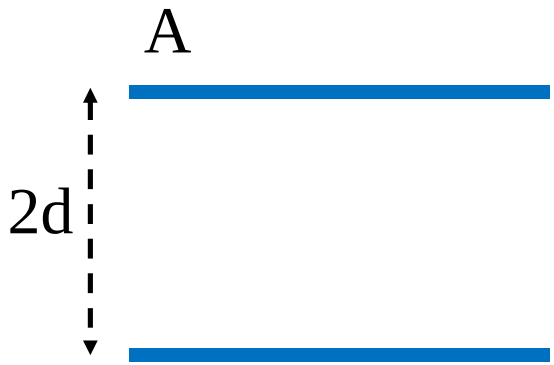
$$\int_{r=a}^{R_0} \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0}\frac{dr}{r^2} = \frac{1}{2}\int_{r=a}^{\infty} \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0}\frac{dr}{r^2}$$

$$(\frac{1}{a}-\frac{1}{R_0}) = \frac{1}{2}(\frac{1}{a}-\frac{1}{\infty}) \quad \rightarrow \quad \frac{1}{2a} = \frac{1}{R_0} \quad \rightarrow \quad R_0 = 2a$$

مثال) یک خازن تخت با صفحاتی با مساحت A و فاصله d با اختلاف پتانسیل V باردار شده است و سپس باطری از صفحات جا و صفحات از هم تا فاصله 2d دور می شوند. مطلوبست:

الف) اختلاف پتانسیل جدید ب) کار لازم برای دور کردن صفحات از همدیگر

حالت ۱



حالت ۲

$$C_1 = \frac{\varepsilon_0 A}{d} \qquad \rightarrow \qquad V_1 = \frac{q}{C_1}$$

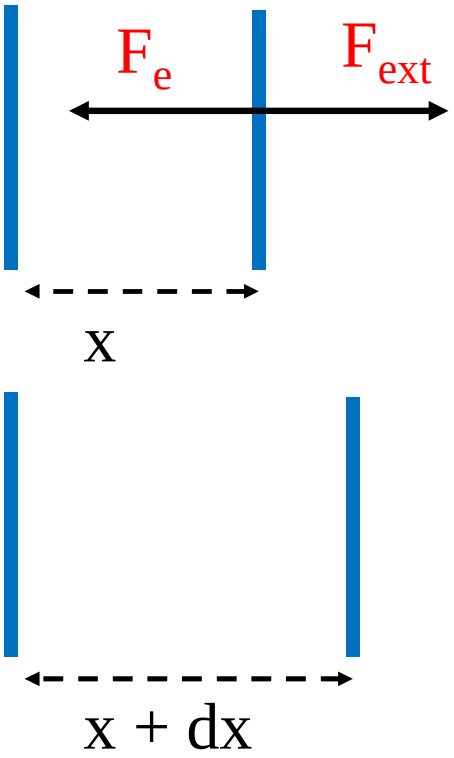
(الف)

$$C_2 = \frac{\varepsilon_0 A}{2d} = \frac{C_1}{2} \qquad \rightarrow \qquad V_2 = \frac{q}{C_2} = \frac{q}{\frac{C_1}{2}} = 2\frac{q}{C_1} = 2V_1$$

(ب) تغییر انرژی پتانسیل سیستم = کار نیروی خارجی در دور کردن صفحات با بارهای +و -

$$W = U_f - U_i = \frac{q^2}{2C_2} - \frac{q^2}{2C_1} = \frac{q^2}{2}\left(\frac{1}{\frac{C_1}{2}} - \frac{1}{C_1}\right) = \frac{q^2}{2C_1}(2-1) = \frac{q^2}{2C_1} = U_i$$

مثال) نیرویی که صفحات یک خازن تخت برهم وارد می کنند را بدست آورید. (راهنمایی: از کار لازم برای دور کردن صفحات از x به x+dx استفاده شود تا q ثابت بماند)



$$F_{ext} = F_e \quad (1)$$

نیروی خارجی لازم برای دور کردن صفحات

نیروی الکتریکی جاذبه بین صفحات

کار نیروی خارجی در جابه جایی صفحه به اندازه dx

$$dW = F_{ext}\, dx > 0 \quad (2)$$

کار نیروی خارجی به صورت تغییر انرژی پتانسیل ظاهر می شود

$$dW = dU \qquad (3)$$

(2) (3) $$F_{ext}\, dx = dU = U_f - U_i$$

$$U_i = \frac{q^2}{2C_i} \quad , \quad C_i = \frac{\varepsilon_0 A}{x} \quad \rightarrow \quad U_i = \frac{q^2 x}{2\varepsilon_0 A}$$

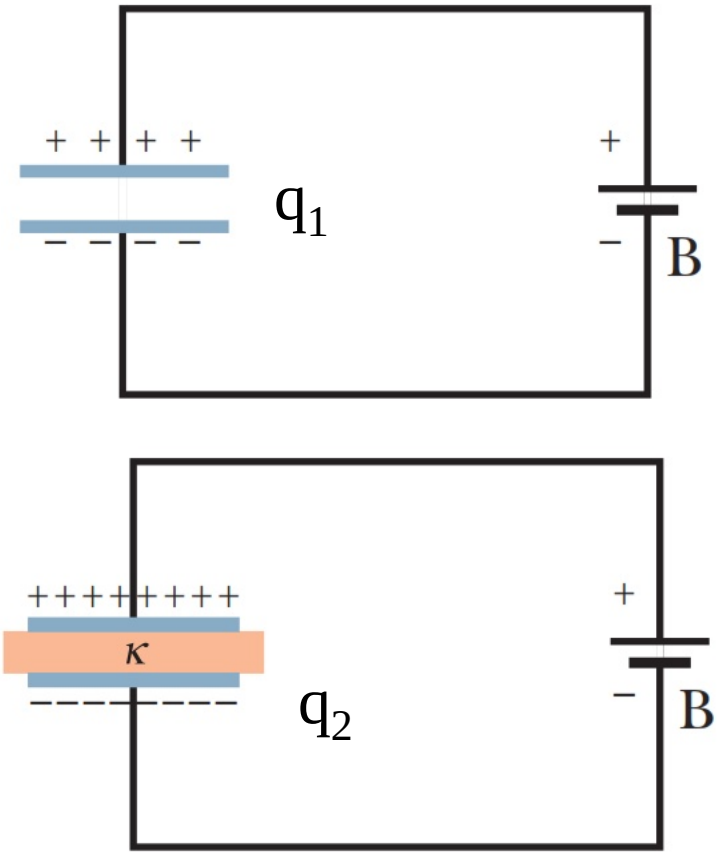
$$U_f = \frac{q^2}{2C_f} \quad , \quad C_f = \frac{\varepsilon_0 A}{x+dx} \quad \rightarrow \quad U_f = \frac{q^2 (x+dx)}{2\varepsilon_0 A}$$

$$F_{ext}\, dx = U_f - U_i = \frac{q^2}{2\varepsilon_0 A}(x+dx-x) \quad \rightarrow \quad F_{ext}\, dx = \frac{q^2}{2\varepsilon_0 A} dx$$

$$F_{ext} = \frac{q^2}{2\varepsilon_0 A}$$

خازن با مواد دی الکتریک

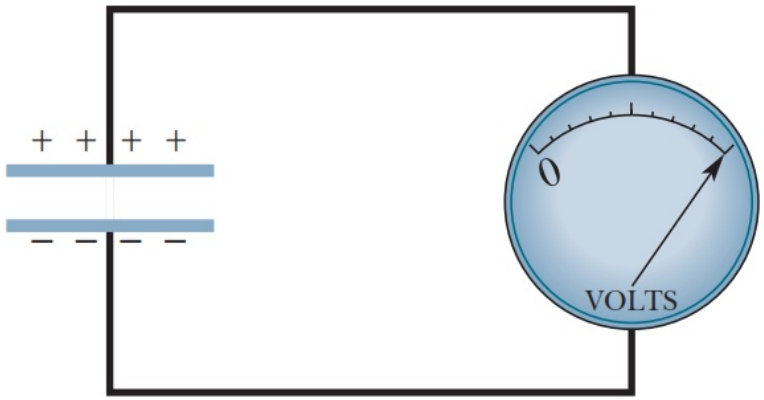
مواد عایق یا دی الکتریک، مواد بدون حاملهای بار آزاد می باشند که در آنها هیچ انتقال باری رخ نمی دهد.



مثال اول) دراختلاف پتانسیل ثابت با ورود دی الکتریک در بین صفحات خازن، بار ذخیره شده روی صفحات افزایش می یابد ($q_1 < q_2$). این افزایش بار ناشی از افزایش ظرفیت با ورود دی الکتریک می باشد.

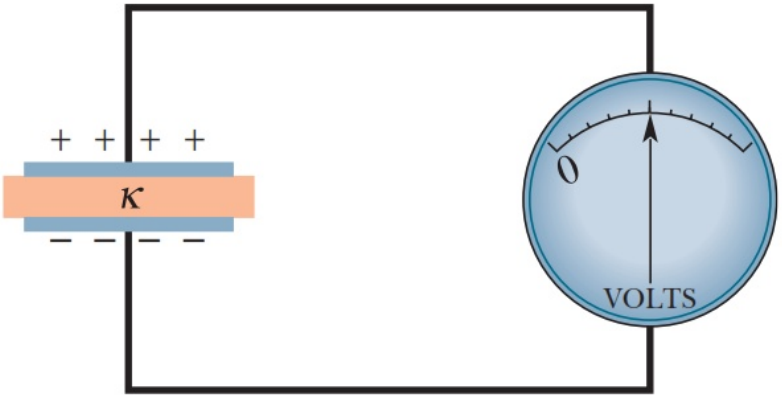
$$\frac{C_2}{C_1} = k \quad \Rightarrow \quad C_2 = kC_1$$

$$q_2 = kq_1$$



مثال دوم) ابتدا دو خازن یکسان و بدون در الکتریک شارژ شده و از باطری جدا می شوند. با وارد نمودن دی الکتریک میان یکی از آنها:

- بار ذخیره شده در خازنها ثابت باقی می ماند
- اختلاف پتانسیل با ورود دی الکتریک بین صفحات خازن کاهش خواهد یافت
- میدان الکتریکی میان صفحات با ورود دی الکتریک بین آنها کاهش می یابد.



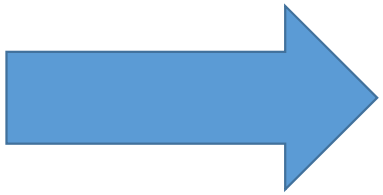
نکته ۱ : با افزودن دی الکتریک به فضای بین صفحات خازن ظرفیت آنها افزایش می یابد.
میزان افزایش ظرفیت وابسته به ویژگیهای ماده دی الکتریک می باشد.

$$C = \frac{\varepsilon_0 A}{d}$$

$$C = \frac{k\varepsilon_0 A}{d}$$

در حضور دی الکتریک

$$C = \frac{2\pi\varepsilon_0 L}{\ln\frac{b}{a}}$$



$$C = \frac{2\pi k\varepsilon_0 L}{\ln\frac{b}{a}}$$

$$C = 4\pi\varepsilon_0(\frac{ab}{b-a})$$

$$C = 4\pi k\varepsilon_0(\frac{ab}{b-a})$$

نکته ۲ : با افزودن دی الکتریک به فضای شامل میدان الکتریکی، میدان ناشی از بارها دستخوش تغییر می گردد

میدان ناشی از بار نقطه ای q در فضای شامل دی الکتریک k

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 k}\frac{q}{r^2}$$

میدان الکتریکی ناشی صفحه باردار با چگالی بار σ در فضای شامل دی الکتریک k

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0 k}$$

Table 25-1 Some Properties of Dielectrics[a]

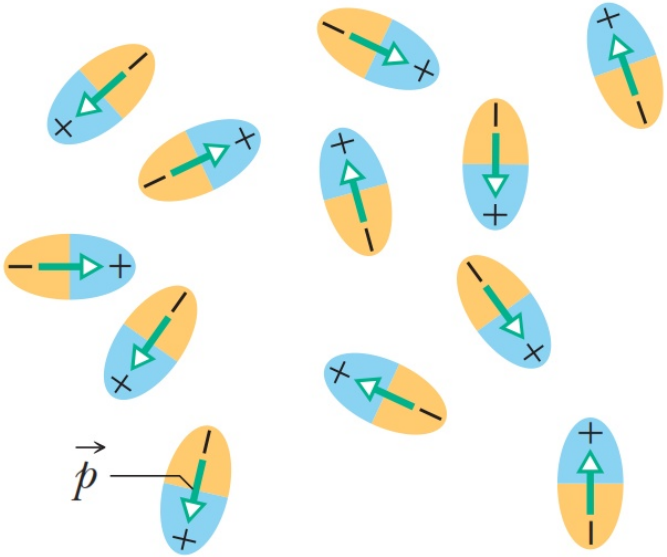
Material	Dielectric Constant κ	Dielectric Strength (kV/mm)
Air (1 atm)	1.00054	3
Polystyrene	2.6	24
Paper	3.5	16
Transformer oil	4.5	
Pyrex	4.7	14
Ruby mica	5.4	
Porcelain	6.5	
Silicon	12	
Germanium	16	
Ethanol	25	
Water (20°C)	80.4	
Water (25°C)	78.5	
Titania ceramic	130	
Strontium titanate	310	8

For a vacuum, κ = unity.

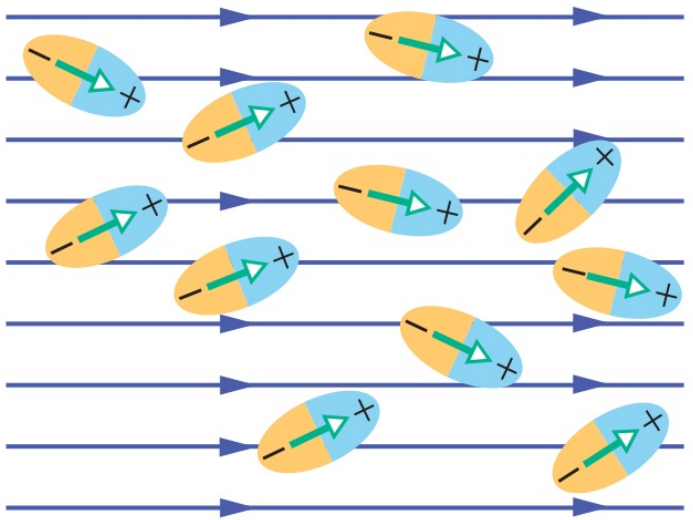
[a]Measured at room temperature, except for the water.

بررسی پاسخ ماده دی الکتریک به میدان الکتریکی خارجی:

الف) ماده دی الکتریک شامل دوقطبی های ذاتی:

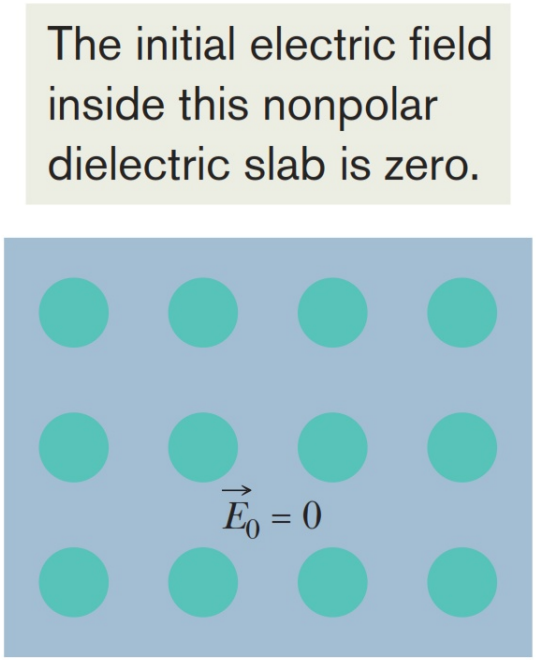


(a)

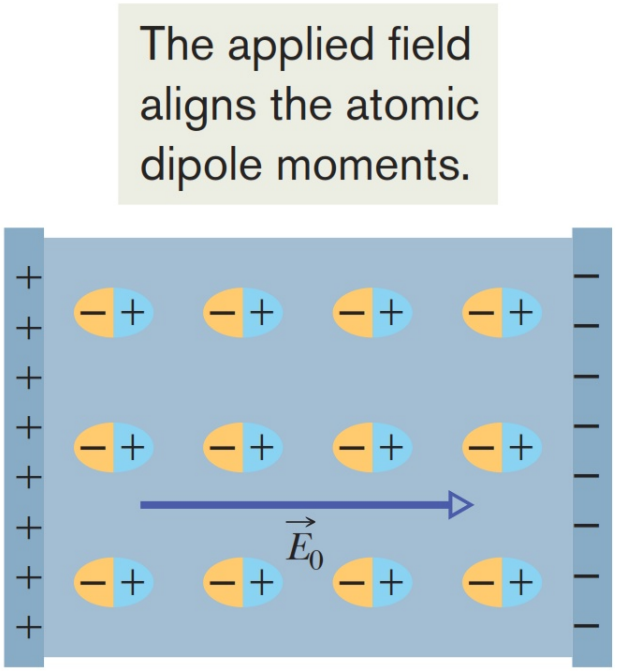


(b)

ب) ماده دی الکتریک شامل تک قطبی های ذاتی:



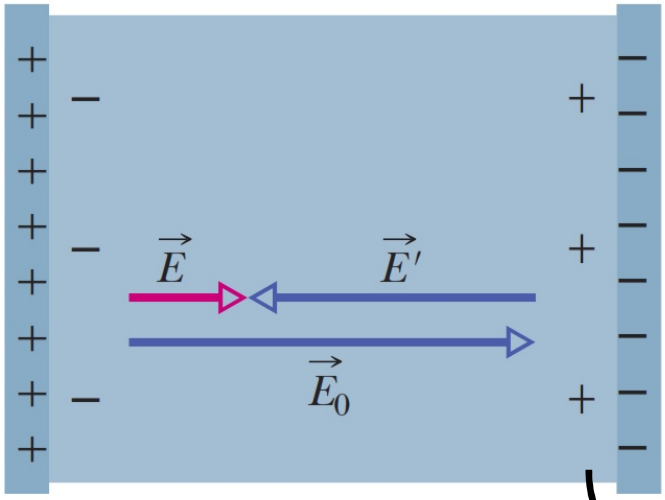
- اتمها شامل یونهای ثابت
- فاقد الکترون آزاد
- مولکولها بدون گشتاور دو قطبی الکتریکی



- جذب بارهای غیر هم نام
- جدایش موضعی بارهای در یک اتم
- تشکیل دوقطبی الکتریکی القایی هم راستا و متناسب با میدان

تغییر میدان یک خازن با صفحات باردار به اندازه q در حضور دی الکتریک

The field of the aligned atoms is opposite the applied field.



$$\vec{E} = \vec{E}_0 - \vec{E}'$$

میدان داخل دی الکتریک

میدان خارجی

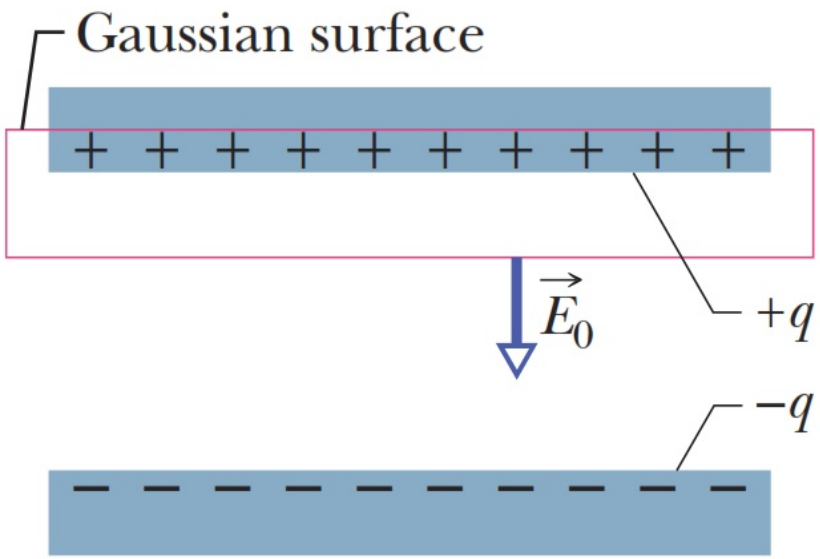
میدان ناشی از بار سطحی القایی

بار سطحی القایی + در مجاورت صفحه باردار منفی

بار سطحی القایی – در مجاورت صفحه باردار مثبت

قانون گاوس در حضور دی الکتریک

الف) میدان الکتریکی در یک خازن تخت بدون دی الکتریک:

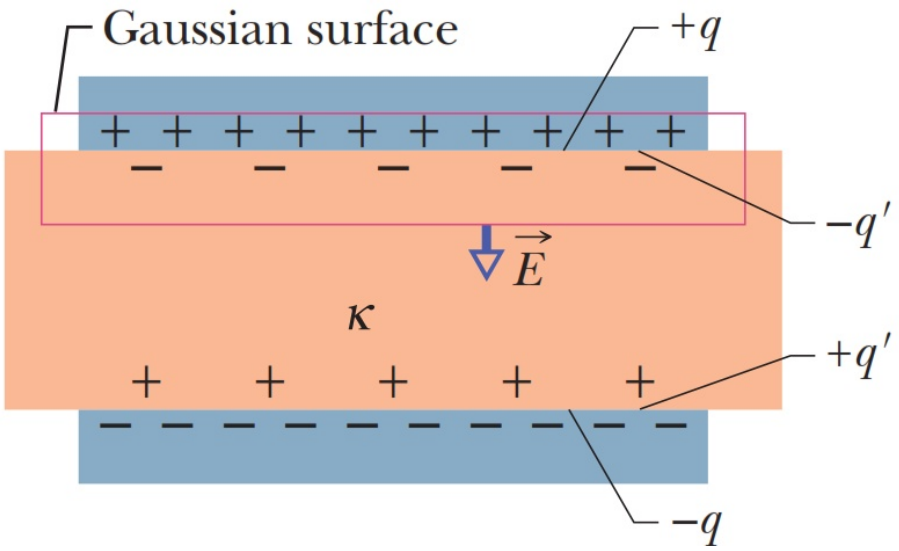


$$\varepsilon_0 \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \varepsilon_0 EA = q$$

$$E_0 = \frac{q}{\varepsilon_0 A}$$

ب) میدان الکتریکی در یک خازن تخت در حضور دی الکتریک:

$$\varepsilon_0 \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \varepsilon_0 EA = q - q' \Rightarrow E = \frac{q - q'}{\varepsilon_0 A}$$



$$E = \frac{q - q'}{\varepsilon_0 A} \Rightarrow q - q' = \frac{q}{\kappa}$$

$$E = \frac{E_0}{\kappa} = \frac{q}{\kappa \varepsilon_0 A}$$

$$E = \frac{q - q'}{\varepsilon_0 A} \Rightarrow E = \frac{q}{k\varepsilon_0 A}$$

بازنویسی قانون گاوس با دی الکتریک

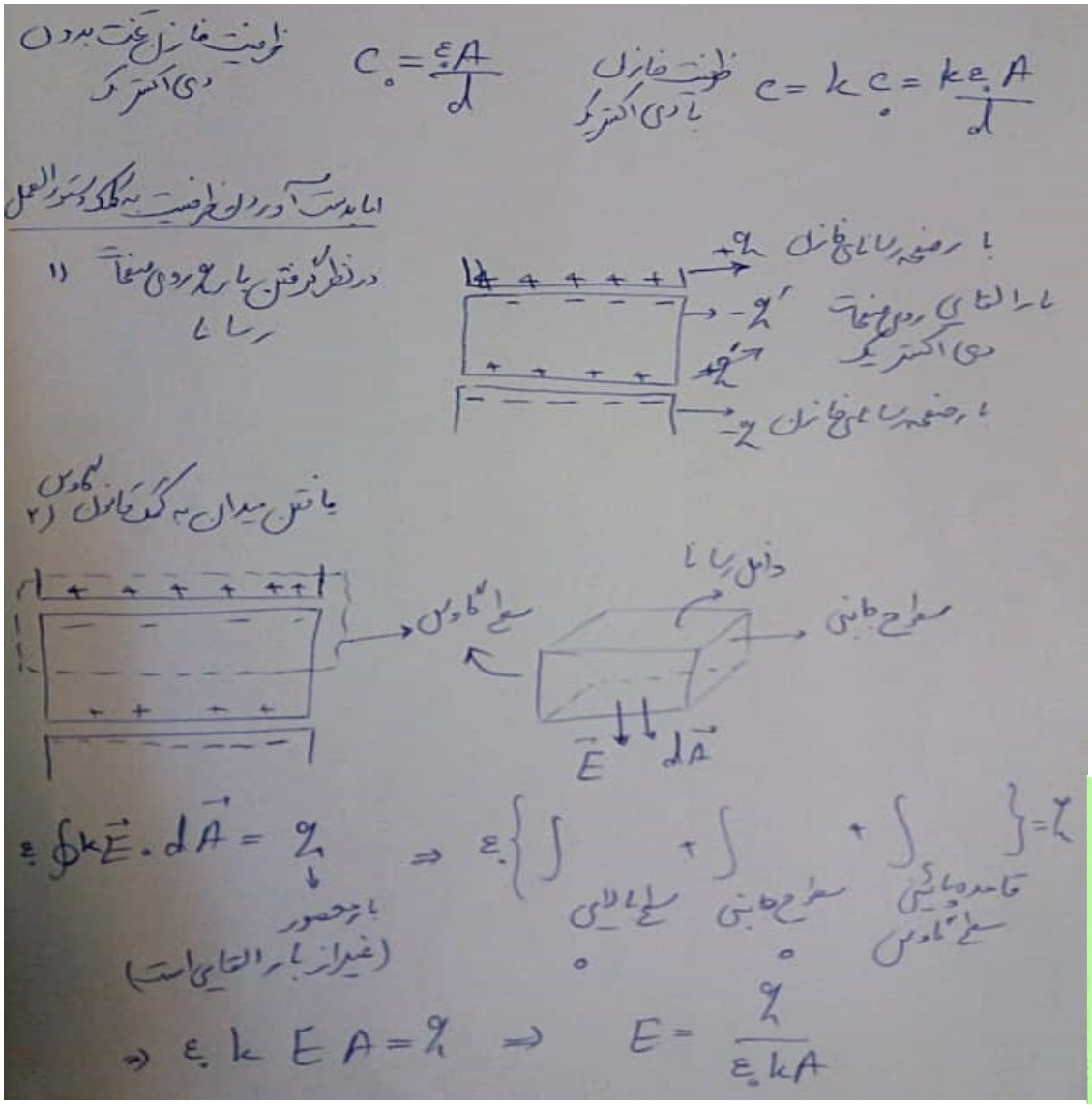
$$\varepsilon_0 \oint \kappa \vec{E} \cdot d\vec{A} = q \quad \text{(Gauss' law with dielectric).}$$

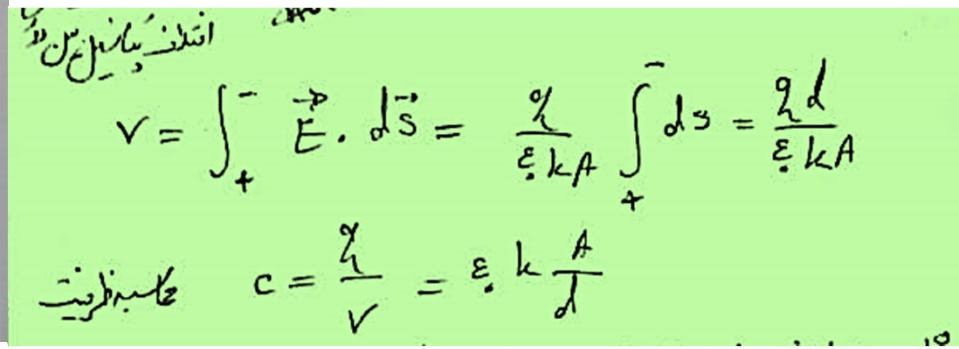
۱- در انتگرال به جای E از kE استفاده شده است که نشان می دهد داخل دی الکتریک به اندازه k (ویژگی ماده عایق) کاهش می آید

۲- در این رابطه بار وارد شده در طرف دو فقط شامل بارهای آزاد می باشد نه بار القایی

۳- تاثیر بار سطحی القایی به صورت ضریب k در نظر گرفته شده است

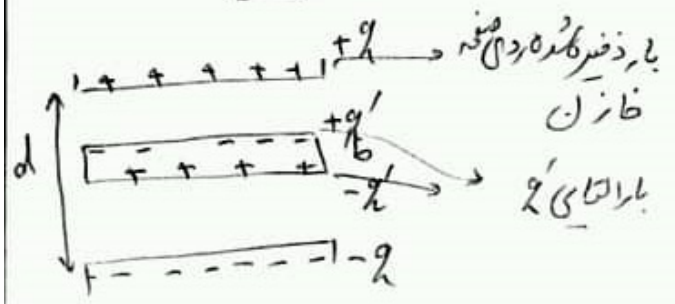
مثال) ظرفیت خازن تخت با فاصله بین صفحات d و مساحت A که بین صفحات آن به صورت کامل با دی الکتریک با ثابت k پر شده است را حساب کنید

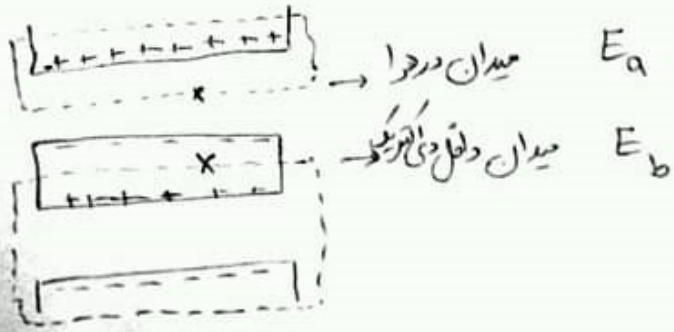




مثال) خازن تخت با فاصله بین صفحات d و مساحت A داریم. فاصله بین صفحات آن توسط دی الکتریکی با ثابت k و به مساحت A و ضخامت b جزیی پر شده است. ظرفیت خازن را حساب کنید

مثال ۲) خازنی تخت که توسط یک دی الکتریک با ضخامت قاعده‌های به مساحت A (معادل با مساحت صفحات خازن) و ضخامت b ($b<d$) جزئی پر شده است





a: $\oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = \frac{q_1}{\varepsilon_0} \Rightarrow E_a = \frac{q_1}{\varepsilon_0 A}$

b: $\oint k\vec{E}\cdot d\vec{A} = \frac{q_1}{\varepsilon_0} \Rightarrow E_b = \frac{q_1}{\varepsilon_0 kA}$

$$V = \int_{+}^{-} \vec{E} \cdot d\vec{s} = E_a \times (d-b) + E_b \times b$$

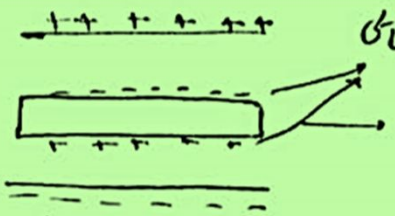
$$= \frac{q_1}{\varepsilon_0 A}(d-b) + \frac{q_1}{\varepsilon_0 k A} b$$

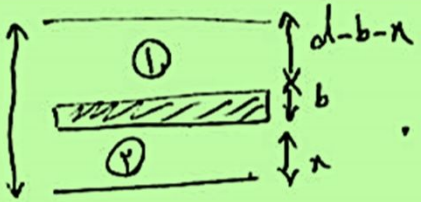
$$C = \frac{q_1}{V} = \frac{q_1}{\frac{q_1}{\varepsilon_0 A}\left[(d-b) + \frac{b}{k}\right]} = \frac{\varepsilon_0 k A}{k(d-b)+b}$$

مثال) خازن تخت با فاصله بین صفحات d و مساحت A داریم. یک تیغه مسی به مساحت A و ضخامت b در فاصله بین صفحات وارد می شود. مطلوبست:

الف) ظرفیت خازن

ب) اگر بار روی صفحات خازن برابر با q و جدا از منبع باشد تیغه به فضای بین صفحات وارد می گردد. کار لازم برای ورود تیغه مسی را حساب کنید





الف)

مجموعه شامل دو خازن سری شده است

$$\frac{1}{C_{کل}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{1}{\frac{\varepsilon_0 A}{d-b-x}} + \frac{1}{\frac{\varepsilon_0 A}{x}}$$

$$\frac{1}{C_{کل}} = \frac{1}{\varepsilon_0 A}(d-b-x+x) = \frac{d-b}{\varepsilon_0 A} \rightarrow C_{کل} = \frac{\varepsilon_0 A}{d-b}$$

ب) کار عامل خارجی = تغییر انرژی پتانسیل الکتریکی

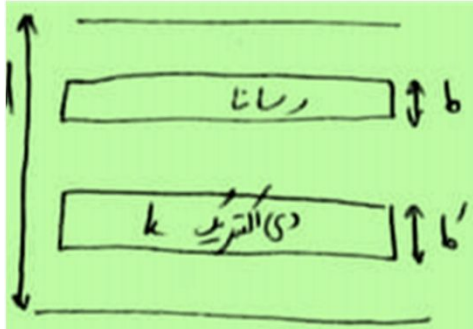
$$W_{\text{خارجی}} = U_f - U_i = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C_f} - \frac{q^2}{2C_i}$$

U_f: بعد از ورود — U_i: قبل از ورود تیغه‌ی

C_i معمولی $= \frac{\varepsilon_0 A}{d}$ ، $C_f = \frac{\varepsilon_0 A}{d-b}$

$$W = \frac{q^2}{2}\left[\frac{1}{\frac{\varepsilon_0 A}{d-b}} - \frac{1}{\frac{\varepsilon_0 A}{d}}\right] = \frac{q^2}{2\varepsilon_0 A}(d-b-d) = \frac{-q^2 b}{2\varepsilon_0 A}$$

مثال) خازن تخت با فاصله بین صفحات d و مساحت A داریم. یک تیغه مسی به مساحت A و ضخامت b و یک تیغه دی الکتریک با ثابت k و به مساحت A و ضخامت b' در فاصله بین صفحات وارد می شود. ظرفیت خازن را حساب کنید



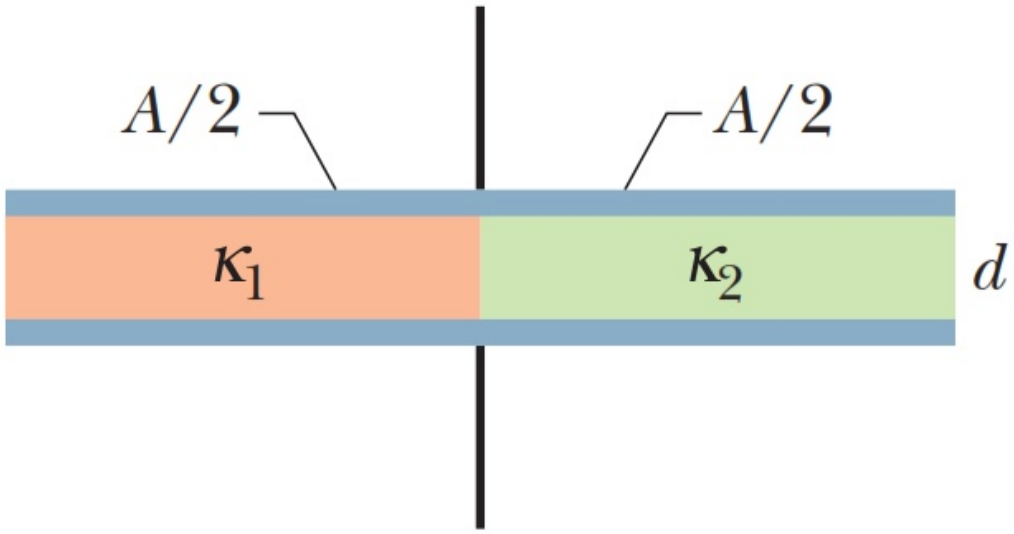
رسانا با ضخامت از خازن حذف می

$$\text{مجموعه کل (متوالی)} = \underset{d-b-b'}{\text{خازن هوا با ضخامت}} + \underset{\text{با ضخامت } b'}{\text{خازن با دی الکتریک}}$$

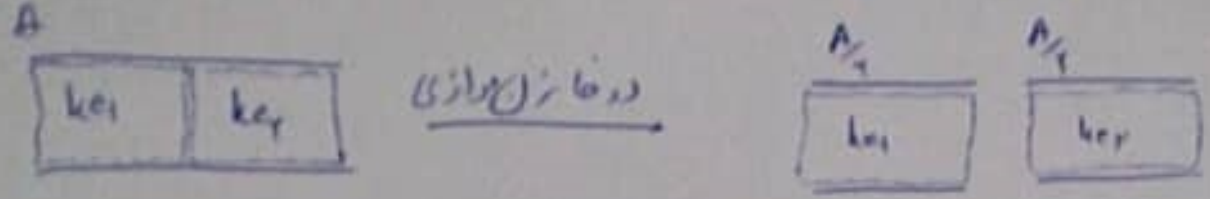
$$\frac{1}{C'_{کل}} = \frac{1}{\frac{\varepsilon_0 A}{d-b-b'}} + \frac{1}{\frac{k\varepsilon_0 A}{b'}} \Rightarrow \frac{1}{A\varepsilon_0}\left(d-b-b'+\frac{b'}{k}\right)$$

$$C'_{کل} = \frac{A\varepsilon_0}{d-b-b'+\frac{b'}{k}}$$

مثال) خازن تخت با فاصله بین صفحات d و مساحت A داریم. در فاصله بین صفحات دو تیغه دی الکتریک با ثابت k_1 و k_2 و با مساحت A/2 و ضخامت d وارد می شوند به طوری که کل فضا را پر نموده است. ظرفیت خازن را حساب کنید

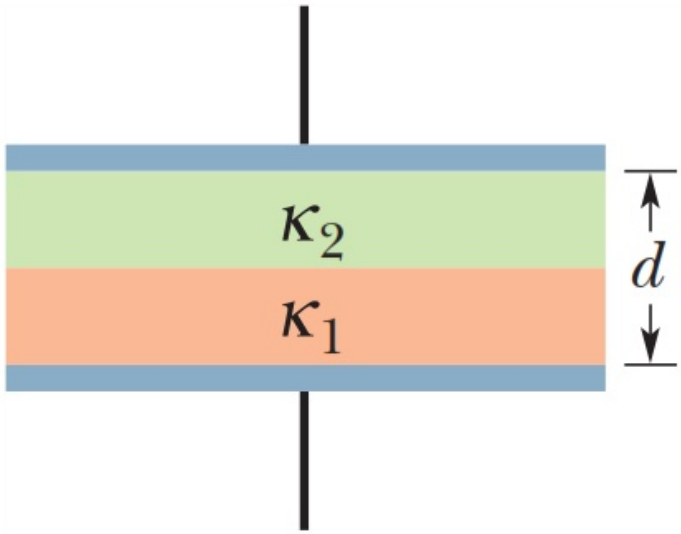


مثال) ظرفیت خازن شامل دو دی الکتریک k_{e1} و k_{e2} را بدست آورید

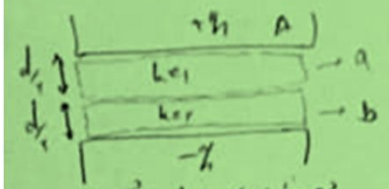


$$C_1 = \varepsilon_0 k_{e1} \frac{A/2}{d} \quad , \quad C_2 = \varepsilon_0 k_{e2} \frac{A/2}{d} \Rightarrow C_{eq} = \varepsilon_0 \frac{A}{d} \left(\frac{k_{e1} + k_{e2}}{2} \right)$$

مثال) خازن تخت با فاصله بین صفحات d و مساحت A داریم. در فاصله بین صفحات دو تیغه دی الکتریک با ثابت k_1 و k_2 و با مساحت A و ضخامت d/2 وارد می شوند به طوری که کل فضا را پر نموده است. ظرفیت خازن را حساب کنید



مثال) ظرفیت خازن زیر را محاسبه کنید



دو خازن سری (روش اول)

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{1}{\frac{\varepsilon_0 k_{e1} A}{d/2}} + \frac{1}{\frac{\varepsilon_0 k_{e2} A}{d/2}}$$

$$C_{eq} = 2\frac{\varepsilon_0 A}{d}\left(\frac{k_{e1} k_{e2}}{k_{e1}+k_{e2}}\right)$$

روش دوم) ۱) در نظر گرفتن بار q

۲) محاسبه میدان در فضاها

$$a: \oint_{k_{e1}} \varepsilon_0 \vec{E}\cdot d\vec{A} = q \rightarrow \varepsilon_0 k_{e1} E_1 A = q$$

$$E_1 = \frac{q}{\varepsilon_0 k_{e1} A}$$

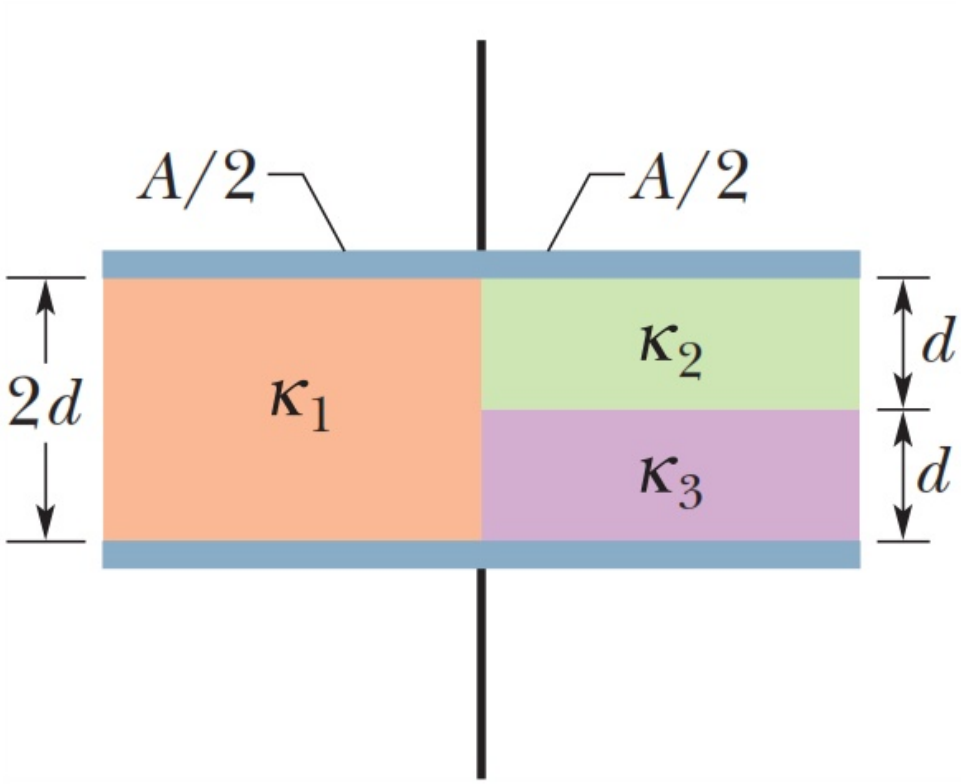
$$b: \int \varepsilon_0 k_{e2} \vec{E}\cdot d\vec{A} = -q \rightarrow$$

$$\varepsilon_0 k_{e2} \times -E_2 A = -q \Rightarrow E_2 = \frac{q}{\varepsilon_0 k_{e2} A}$$

۳) $$V = -\int_{+}^{0} \vec{E}\cdot d\vec{s} = \frac{q}{\varepsilon_0 k_{e1} A}\left(\frac{d}{2}\right) + \frac{q}{\varepsilon_0 k_{e2} A}\left(\frac{d}{2}\right)$$

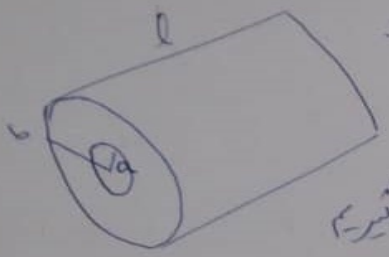
۴) $$C = \frac{q}{V} \Rightarrow C = \frac{2\varepsilon_0 A}{d}\left(\frac{k_{e1} k_{e2}}{k_{e1}+k_{e2}}\right)$$

مثال) ظرفیت خازن زیر شامل سه دی الکتریک را حساب کنید



مثال) کیفازل استوانه ای به شعاع داخلی a و خارجی b و طول l داریم

درجه شعاعی، چقدر از انرژی ذخیره شده است



ابتدا سطح گاوس استوانه ای به شعاع r و طول l در نظر میگیریم

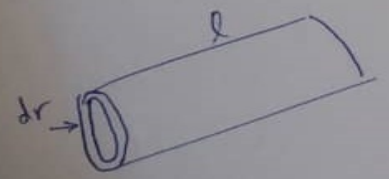
میدان به صورت $E = \frac{q_{in}}{2\pi\varepsilon_0 r l}$ بدست می آید (صفحه ۹۵-۲)

بنابراین میدان با شعاع متغیر است.

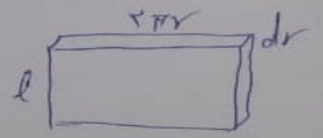
از طرفی چگالی انرژی ذخیره شده $u_0 = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2}$ است

چون E با شعاع تغییر می کند پس چگالی انرژی نیز تغییر خواهد کرد

بنابراین در یک المان پوسته استوانه ای به شعاع r و ضخامت dr و طول l انرژی را حساب می کنیم



حجم المان $= 2\pi r\, dr\, l$



انرژی ذخیره شده در حجم استوانه‌ای $= \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 \times 2\pi r\, dr\, l$

$$dU = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \frac{q^2}{(2\pi\varepsilon_0)^2 l^2 r^2} 2\pi r l\, dr = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 l}\frac{dr}{r}$$

حال نیمی از انرژی U در ناحیه $a < r < r_0$ یا شد و نیم دیگر $r_0 < r < b$

می خواهیم r_0 را بدست آوریم

$$U_{a\to r_0} = \frac{1}{2} U_{a\to b}$$

$$\int_a^{r_0} \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 l}\frac{dr}{r} = \frac{1}{2}\int_a^b \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 l}\frac{dr}{r}$$

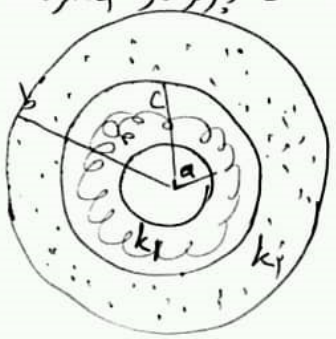
$$\int_a^{r_0} \frac{dr}{r} = \frac{1}{2}\int_a^b \frac{dr}{r} \Rightarrow \ln\frac{r_0}{a} = \frac{1}{2}\ln\frac{b}{a}$$

$$\ln\frac{r_0}{a} = \ln\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow \frac{r_0}{a} = \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$r_0 = \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{2}} a \Rightarrow \boxed{r_0 = \sqrt{ab}}$$

۱۱۶-۲

مثال: ظرفیت خازن کروی با صفحات رسانای کروی به شعاع داخلی a و خارجی b مفروض است. اگر فضای بین دو کره رسانا با دو دی الکتریک k_1 و k_2 کامل پر شده باشد به گونه ای که دی الکتریک با ثابت k_1 از شعاع a تا c را پر کرده و k_2 از c تا b را پر نموده باشد ظرفیت کل را حساب کنید



جواب:

دو خازن کره ای داریم یکی از $a < r < c$

و دیگری از $c < r < b$

ظرفیت یک خازن کروی با شعاع r_1 و r_2 $\quad C = 4\pi\varepsilon_0 \left(\frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1} \right)$

در اینجا $\quad C_1 = 4\pi\varepsilon_0 k_1 \left(\frac{ac}{c-a} \right)$

$$C_2 = 4\pi\varepsilon_0 k_2 \left(\frac{bc}{b-c} \right)$$

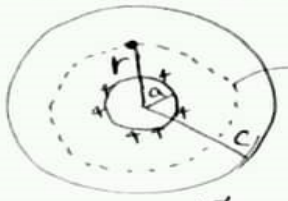
$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{1}{(4\pi\varepsilon_0)} \left[\frac{1}{\frac{k_1 ac}{c-a}} + \frac{1}{\frac{k_2 (bc)}{b-c}} \right]$$

۱۱۶-۲

مثال) در مثال قبل اگر بار روی صفحات خازن Q باشد اختلاف پتانسیل بین صفحات را محاسبه کنید

حل: باید میدان را در دو دی الکتریک بدست آوریم لذا ابتدا با گوس میدان در دو ناحیه بدست می آید

$a<r<c$ → دول دی الکتریک k_1



سطح گاوس

$$\varepsilon_0 \oint k \vec{E}_1 \cdot d\vec{A} = +Q \Rightarrow \varepsilon_0 k_1 (4\pi r^2) = Q$$

$$E_1 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 k_1 r^2}$$

و همین طور برای ناحیه ② $\quad E_2 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 k_2 r^2}$

$$V_+ - V_- = \int_-^+ \vec{E} \cdot d\vec{s} = \int_a^c \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 k_1 r^2} dr + \int_c^b \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 k_2 r^2} dr$$

$$\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \left\{ \frac{1}{k_1} \left[\frac{r^{-1}}{-1} \right]_a^c + \frac{1}{k_2} \left[\frac{r^{-1}}{-1} \right]_c^b \right\} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \left\{ \frac{1}{k_1} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{c} \right) + \frac{1}{k_2} \left(\frac{1}{c} - \frac{1}{b} \right) \right.$$