بسم الله الرحمن الرحيم

فصل چهارم

میدان الکتروستاتیک در محیط های دی الکتریک

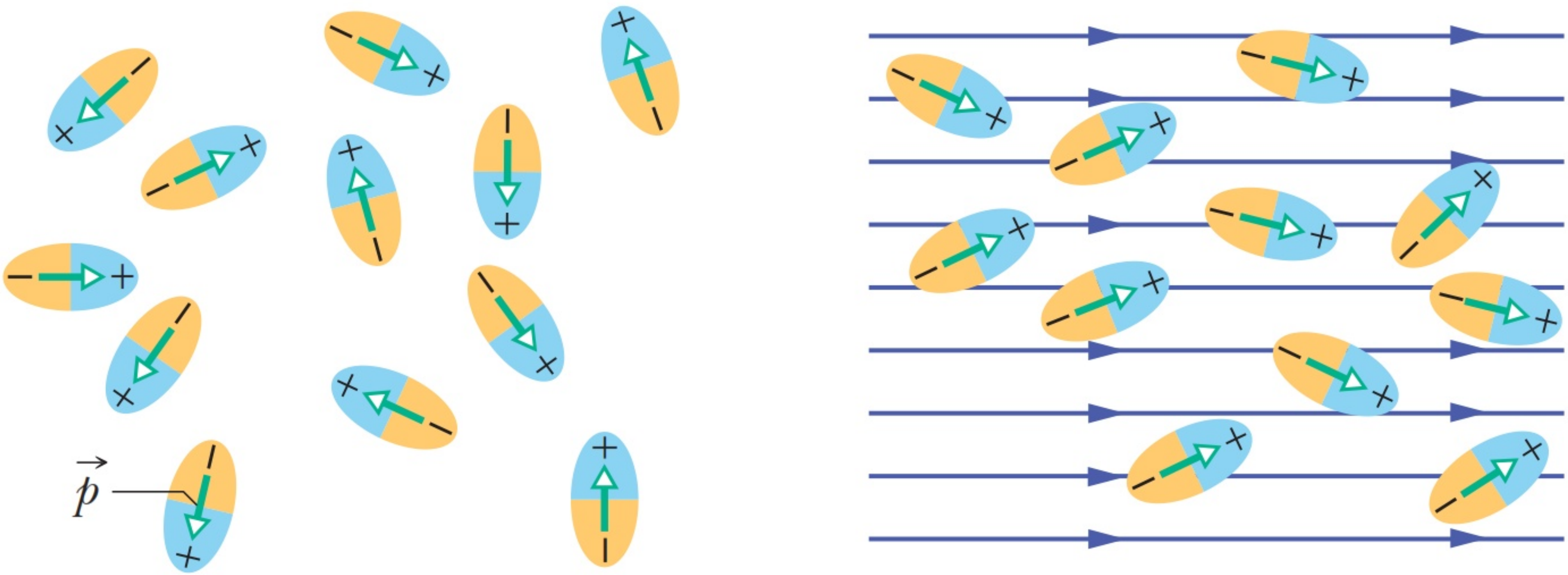
بخش اول

ویژگی الکتریکی مواد دی الکتریک

مادهٔ دی‌الکتریک ایده‌آل آن است که بار آزاد نداشته باشد . با وجود این محیطهای دی‌الکتریکی ازمولکولها ومولکولها نیز به‌نوبهٔ خودازموجودات بارداری (هسته‌های اتمی والکترونها) تشکیل شده‌اند، ومولکولهای دی‌الکتریک یقیناً تحت تأثیرمیدانهای الکتریکی قرارمی گیرند. میدان الکتریکی موجب می‌شودکه نیرویی به‌هرذرهٔ بارداروارد شود،ذرات با بارمثبت درجهت میدان رانده می‌شوندوذرات با بارمنفی درجهت مخالف آن، به‌گونه‌ای که قسمتهای مثبت ومنفی هرمولکول ازمواضع‌حالت تعادل خودخارج ودردوجهت‌مخالف جا به‌جا می‌شوند. اما مقداراین جا به‌جایی‌ها(که دربیشترموارد ازکسر کوچکی ازقطریک مولکول تجاوزنمی کنند) به‌علت‌ایجاد نیروهای‌قوی‌باز گرداننده‌ای که دراثر تغییرپیکربندی مولکولها به‌وجود می آیند، محدود است.

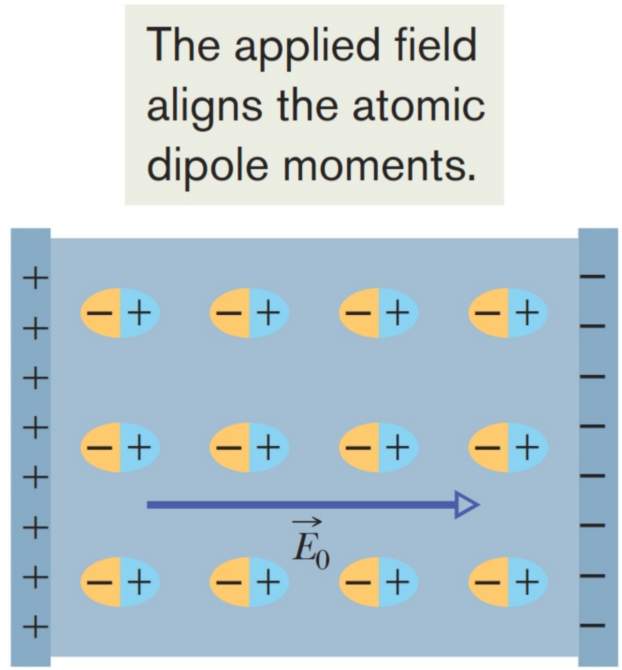
دی الکتریک در میدان الکتریکی ← دی‌الکتریک قطبیده

الف) ماده دی الکتریک شامل دوقطبی های ذاتی:

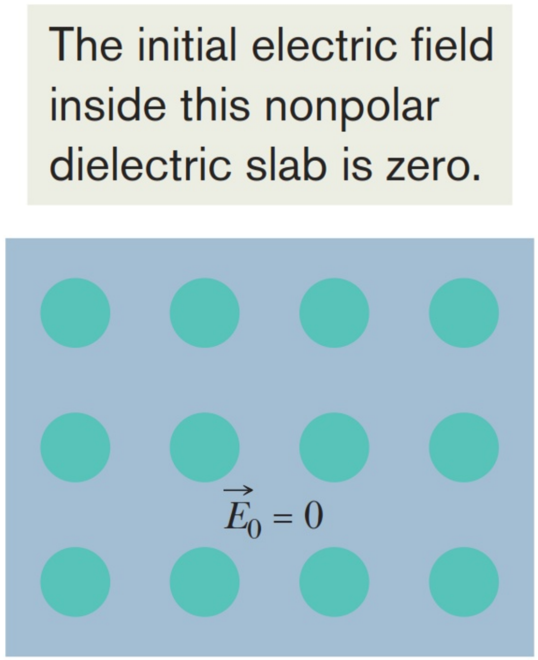


(a) (b)

ب) ماده دی الکتریک شامل تک قطبی های ذاتی:



- جذب بارهای غیر هم نام
- جدایش موضعی بارهای در یک اتم
- تشکیل دوقطبی الکتریکی القایی هم راستا و متناسب با میدان



- اتمها شامل یونهای ثابت
- فاقد الکترون آزاد
- مولکولها بدون گشتاور دو قطبی الکتریکی

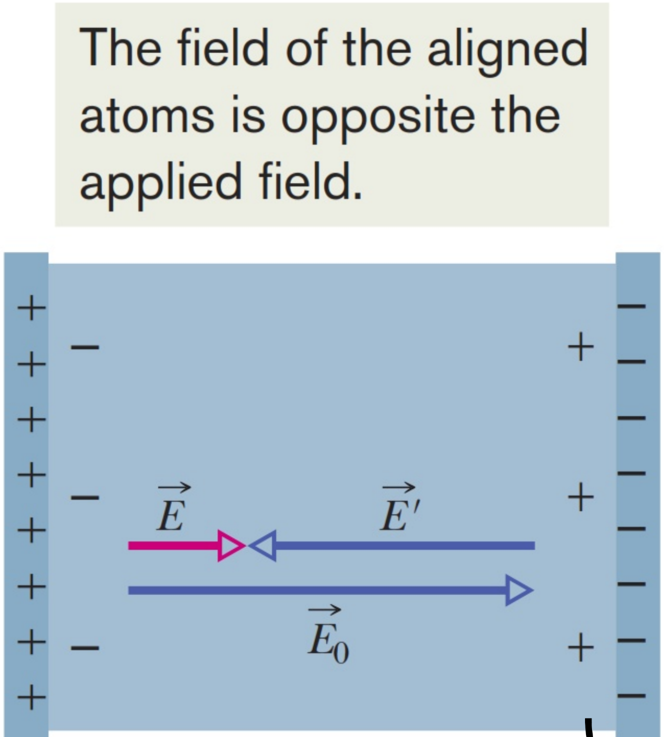
دی‌الکتریك قطبیده، باوجودی که به‌طور متوسط ازلحاظ الکتریکی خنثاست، اماهم درنقاط خارج وهم‌درداخل دی‌الکتریك میدان الکتریکی ایجاد می کند

قطبیدگی دی‌الکتریك به‌میدان الکتریکی کل موجود درمحیط بستگی دارد،

قسمتی ازاین میدان الکتریکی به‌وسیلهٔ خود دی‌الکتریك ایجاد می‌شود.

،میدان الکتریکی دی‌الکتریك، درنقاط دورازآن ممکن است توزیع بار آزاد درروی اجسام رسانارا تغییردهد، و این به‌نوبهٔ خود میدان الکتریکی‌را در درون دی‌الکتریك عوض خواهد کرد.

تغییر میدان یک خازن با صفحات باردار به اندازه q در حضور دی الکتریک



$$\vec{E} = \vec{E}_0 - \vec{E}'$$

میدان داخل دی الکتریک

میدان خارجی

میدان ناشی از بار سطحی القایی

بار سطحی القایی – در مجاورت صفحه باردار مثبت

بار سطحی القایی + در مجاورت صفحه باردار منفی

۱.۴ قطبش

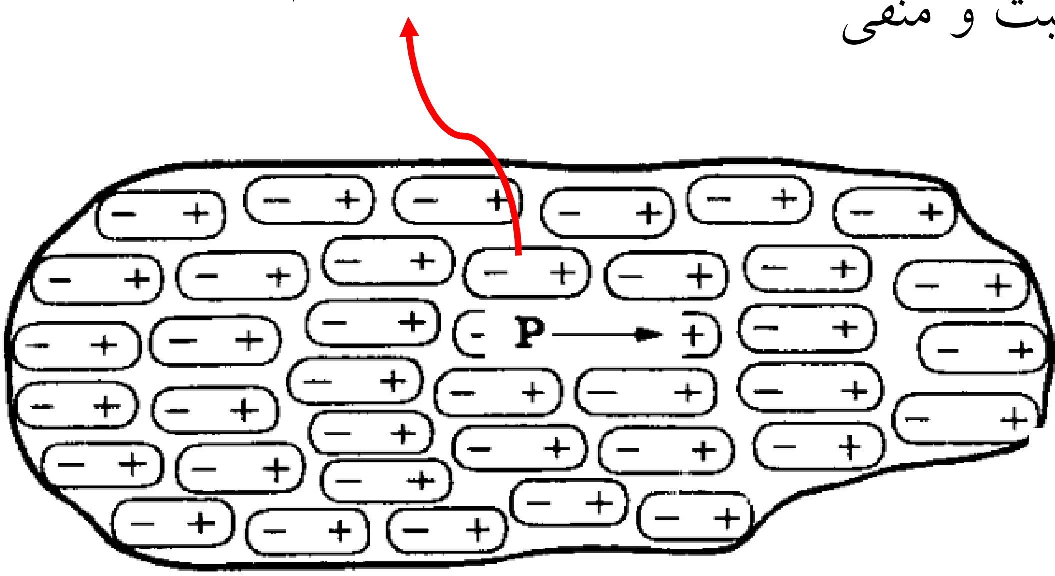
در نظر گرفتن المان حجم :

❖ شامل ذرات قطبیده ناشی از جدایی بارهای مثبت و منفی

❖ بار کل صفر (خنثی از لحاظ الکتریکی)

❖ شامل حدود 10^{10} اتم یا مولکول

❖ عنصر حجم با دو قطبی الکتریکی



$$\Delta \mathbf{p} = \int_{\Delta v} \mathbf{r}\, dq$$

قطبش الکتریکی

$$\mathbf{P} = \frac{\Delta \mathbf{p}}{\Delta v}$$ گشتاور دو قطبی الکتریکی درواحد حجم

$$\vec{P}(\vec{r}) = \lim_{\Delta v \to 0} \frac{\Delta \vec{P}}{\Delta v}$$

بردار قطبش نقطه ای

یکای آن دردستگاه mks کولن برمترمربع

واضح است که $\mathbf{P}(x,\ y,\ z)$ کمیتی برداری‌است که در هرعنصر حجم، با $\Delta\mathbf{p}$ هم‌جهت است. $\Delta\mathbf{p}$ به‌نوبهٔ خود باجهت جابه‌جایی بارمثبت نسبت به بار منفی هم‌جهت است

بردار قطبش از دیدگاه میکروسکوپیک

المان حجم درنظر گرفته شامل حدود تعداد زیادی مولکول می باشد کهه یک می توانند به عنوان یک دو قطبی الکتریکی عمل نمایند

$$\mathbf{p}_m = \int_{\text{مولکول}} \mathbf{r}\, dq$$

گشتاور الکتریکی تک مولکول

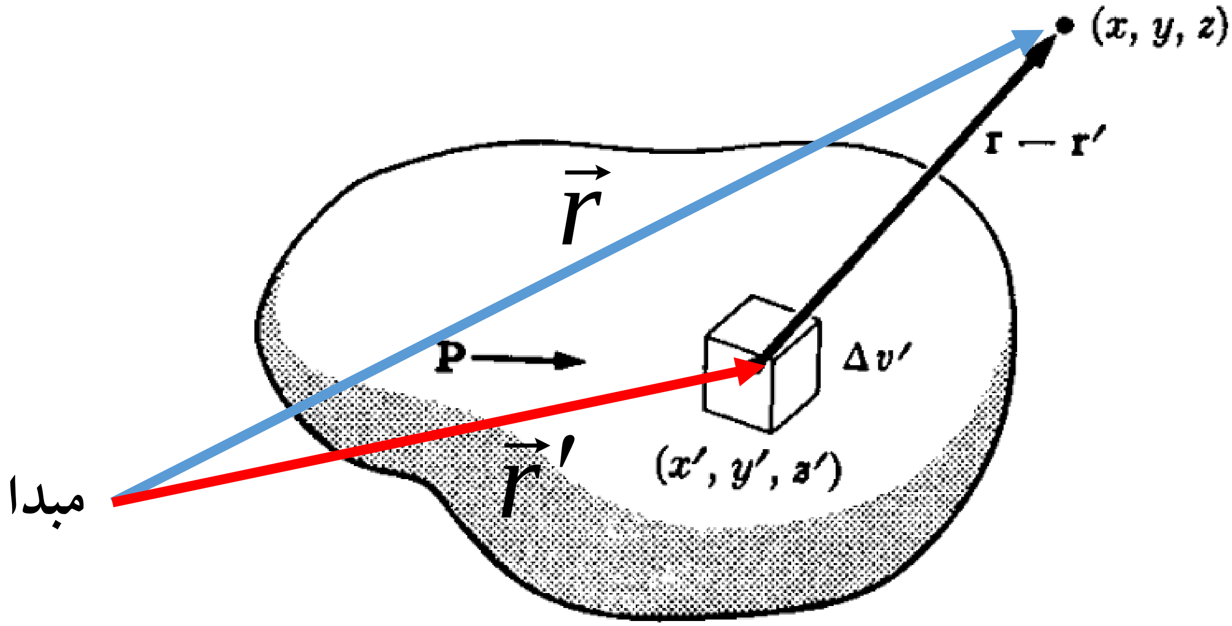
گشتاور الکتریکی در یک المان حجم از جمع گشتاور تک تک مولکولهای قطبیده حاصل می شود

$$\mathbf{P} = \frac{1}{\Delta v} \sum_m \mathbf{p}_m$$

۲.۴ میدان خارجی یک‌محیط دی‌الکتریک

قطبش باعث ایجاد میدان الکتریکی می‌شود

هدف این است که این میدان را درنقطهٔ **r**، خارج از جسم دی‌الکتریک پیدا کنیم



ابتدا پتانسیل $\varphi(\mathbf{r})$ را پیدا کنیم

میدان الکتریکی‌را بامحاسبهٔ منفی شیب φ به‌دست آوریم.

هرعنصرحجم $\Delta v'$ ازمحیط دی‌الکتریک بـا گشتاور دوقطبی $\Delta \mathbf{p} = \mathbf{P}\Delta v'$

پتانسیل ناشی از دوقطبی الکتریکی المان حجم $\Delta v'$

$$\Delta\varphi(\mathbf{r}) = \frac{\Delta\mathbf{p} \cdot (\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{4\pi\varepsilon_0 |\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} = \frac{\mathbf{P}(\mathbf{r}') \cdot (\mathbf{r}-\mathbf{r}')\,\Delta v'}{4\pi\varepsilon_0 |\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}$$

$$|\mathbf{r}-\mathbf{r}'| = \sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}$$

$$\varphi(\mathbf{r})=\frac{۱}{۴\pi\varepsilon_۰}\int_{V_۰}\frac{\mathbf{P}(\mathbf{r}')\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\,dv'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^۳}$$

پتانسیل کل درنقطهٔ **r**

φ را می‌توان مستقیماً از رابطهٔ (۷.۴) به‌دست آورد مشروط برآنکه شکل تابعی **P** معلوم باشد.

$$\nabla'\left(\frac{۱}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right)=+\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^۳}$$

درعملگر ∇' مشتقهای نسبت به‌مختصات پریم‌دار دخیل‌اند.

$$\frac{\mathbf{P}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^۳}=\mathbf{P}\cdot\nabla'\left(\frac{۱}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right)$$

اتحاد برداری $\nabla' \cdot (f\mathbf{F}) = f\nabla' \cdot \mathbf{F} + \mathbf{F} \cdot \nabla' f$

f یك تابع نقطه‌ای نرده‌ای و $\mathbf{F}$ یك تابع نقطه‌ای برداری

$$\begin{cases} f = (\text{١}/|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|) \\ \mathbf{F} = \mathbf{P} \end{cases}$$

$$\frac{\mathbf{P} \cdot (\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^{\text{٣}}} = \nabla' \cdot \left(\frac{\mathbf{P}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right) - \frac{\text{١}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\nabla' \cdot \mathbf{P}$$

با استفاده از قضیهٔ واگرایی، انتگـرال حجمی جملهٔ $\nabla' \cdot (\mathbf{P}/|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|)$ به‌یك انتگرال سطحی تبدیل شده‌است.

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\oint_{S_0}\frac{\mathbf{P}\cdot\mathbf{n}\,da'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{V_0}\frac{(-\nabla'\cdot\mathbf{P})\,dv'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}$$

$\mathbf{n}$ بردار یگهٔ عمود بر عنصر سطح da' است که جهت آن به‌سمت خارج (خارجِ دی‌الکتریك) است.

$$\sigma_P \equiv \mathbf{P}\cdot\mathbf{n} = P_n$$ بار الکتریکی در واحد سطح

$$\rho_P \equiv -\nabla\cdot\mathbf{P}$$ بار الکتریکی در واحد حجم

σ_P و ρ_P را چگالیهای بار قطبشی نامید. چگالی سطحی بارقطبشی ازآن مؤلفهٔ قطبش که برسطح مربوط عمود است به‌دست می‌آید، وچگالی حجمی بار قطبشی معیاری است از نایکنواختی قطبش درداخل ماده.

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\oint_{S_0} \frac{\sigma_P \, da'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} + \int_{V_0} \frac{\rho_P \, dv'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right]$$

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{dq'_P}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}$$

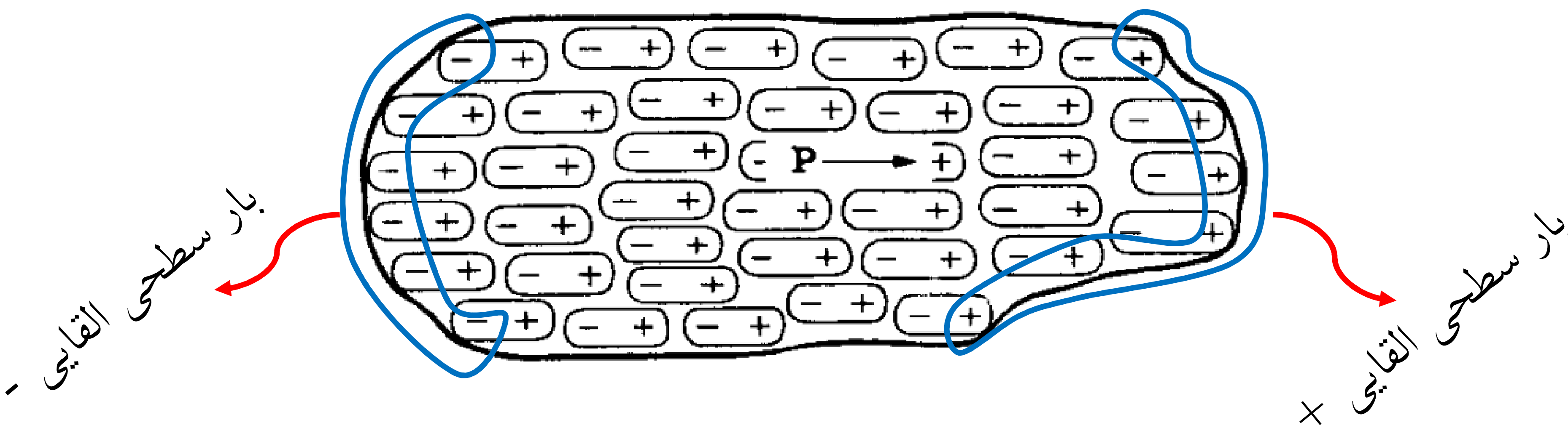
پتانسیل ناشی از ماده دی الکتریک که مشابه پتانسیل یک توزیع بار (بارهای قطبشی) نوشته شده است.

مفهوم فیزیکی چگالی بارهای قطبشی

σ_P

بارهای سطحی ازانتهاهای دوقطبیهایی که سمتگیری مشابهی دارند تشکیل شده است.

برروی هرسطحی که با بردارقطبش موازی‌نیست یك‌چگالی بارالکتریکی به‌وجود می‌آید.



ρ_P

قطبش P ناشی از ظهور المانهای دو قطبی ماکروسکوپیک است

پتانسیل و میدان الکتریکی ناشی از قطبش متوسط زمانی و مکانی از المانهای حجمی ماکروسکوپیک است.

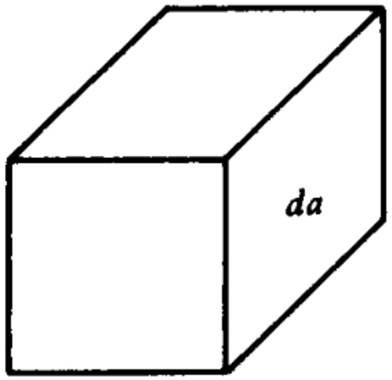
المانهای دوقطبی ماکروسکوپیک ناشی از جدایش بارهای + و — از هم است.

ρ^+: چگالی بار مثبت در واحد حجم

نشان‌دهندهٔ تمام هسته‌های اتمی درواحد حجم دی‌الکتریک

ρ^-: چگالی بار منفی در واحد حجم

نشان‌دهندهٔ تمام الکترونها در واحد حجم دی‌الکتریک

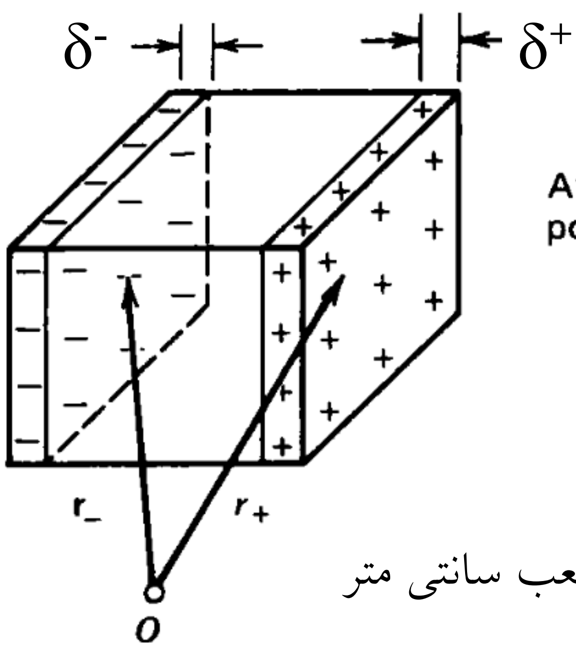


Before polarization

در المان حجم ناقطبیده ← عنصر الکتریکی خنثی

$$\rho_0^+(x', y', z') + \rho_0^-(x', y', z') = 0$$

شاخصهای پایین (صفر) نشان‌دهندهٔ چگالیها درحالت ناقطبیده‌اند.

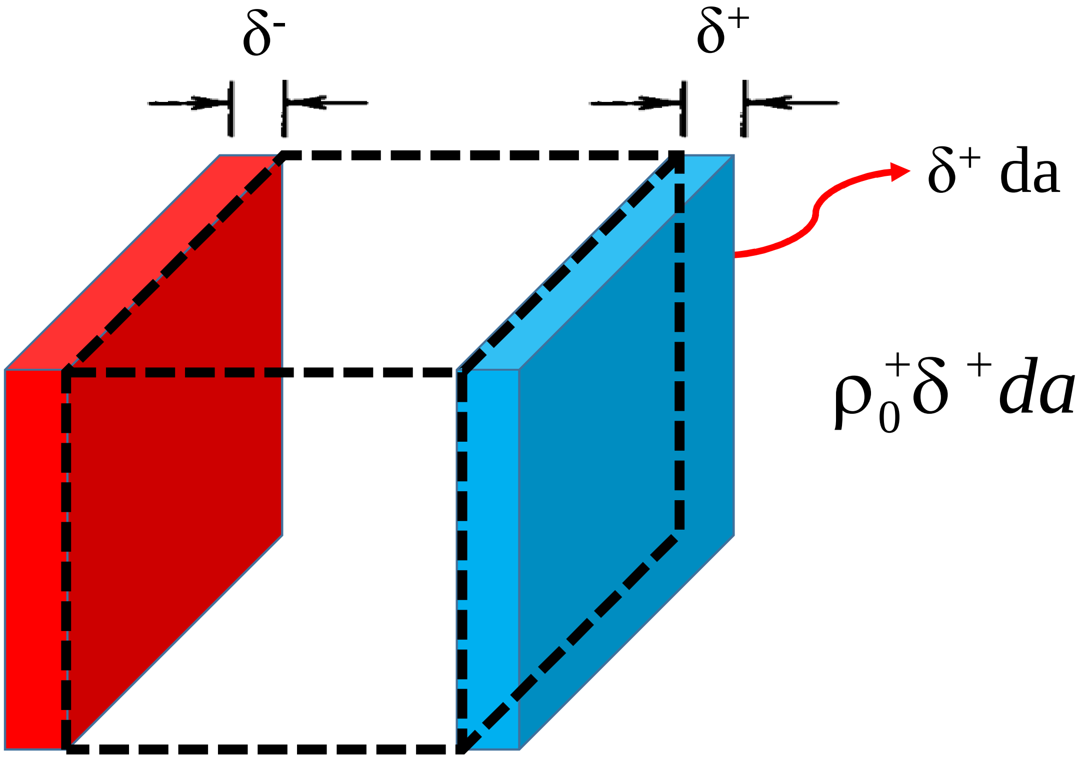


After polarization

در المان حجم قطبیده

بارهای مثبت به اندازهٔ $\delta^+(x, y, z)$ و بارهای منفی به اندازهٔ $\delta^-(x, y, z)$ جا به جا شوند.

مقدار δ از مرتبه 10^{-13} متر و بسیار کوچکتر از ابعاد المان حجم $(10^{-3})^3$ مکعب سانتی متر



حجم بارهای مثبت خارج شده از المان بار

مقدار بارهای مثبت خارج شده از المان بار

$$\rho_0^+\delta^+ da$$

مقدار بارهای مثبت خارج شده از المان بار از سطوح مختلف

$$\rho_0^+\vec{\delta}^+ . \hat{n}\, da$$

مقدار بارمثبتی که ازعنصر سطح da' عبورمی کند برابراست با $\rho_\circ^+\delta^+ \cdot \mathbf{n}\, da'$
افزایش بار مثبت حاصل ازفرایند قطبیدگی درحجم $\Delta v'$ برابراست با

$$-\oint_{\Delta s} \rho_\circ^+ \vec{\delta}^+ \cdot \mathbf{n}\, da'$$

جابه‌جا شدن بارهای منفی باعث ازدیاد بار (یا نقصان بارمنفی) درحجم $\Delta v'$ می‌شود

$$\oint_{\Delta s} (-\rho_\circ^-) \vec{\delta}^- \cdot \mathbf{n}\, da$$

افزایش کلی بارحجم $\Delta v'$ دراثرجابه‌جا شدن بارهای مثبت ومنفی

$$-\oint_{\Delta s} \rho_\circ^+ (\vec{\delta}^+ - \vec{\delta}^-) \cdot \mathbf{n} da' = -\nabla \cdot [\rho_\circ^+ (\vec{\delta}^+ - \vec{\delta}^-)]\, \Delta v'$$

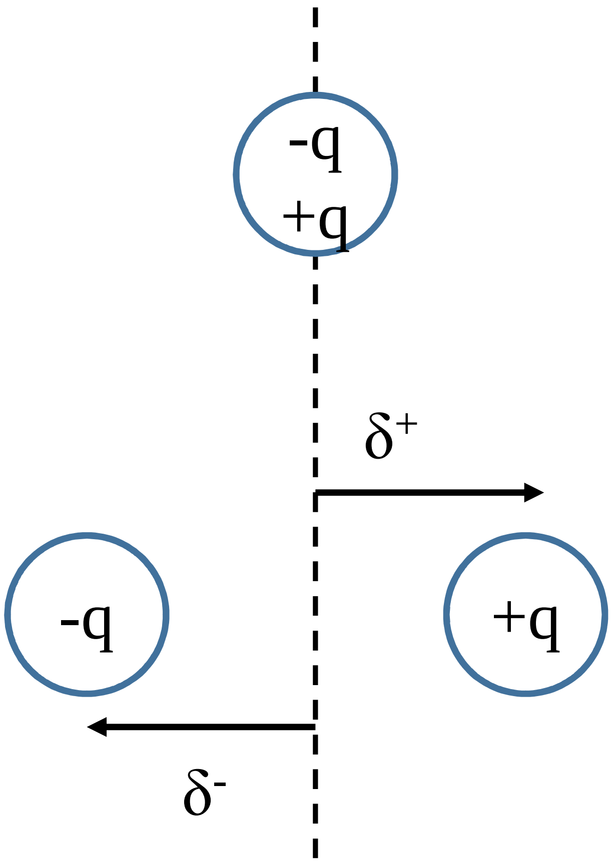
$$-\oint_{\Delta S} \rho_\circ^+ (\vec{\delta}^+ - \vec{\delta}^-) \cdot \mathbf{n}\, da' = -\nabla \cdot [\rho_\circ^+ (\vec{\delta}^+ - \vec{\delta}^-)]\, \Delta v'$$

$\vec{\delta}^+ - \vec{\delta}^-$ تغییرمکان نسبی چگالی بارهای مثبت ومنفی است

$\rho_\circ^+ (\vec{\delta}^+ - \vec{\delta}^-) = \mathbf{P}$ قطبش

$$-\oint_{\Delta S} \rho_\circ^+ (\vec{\delta}^+ - \vec{\delta}^-) \cdot \mathbf{n}\, da' = \underbrace{-\nabla \cdot \mathbf{P}}_{\rho_P}\, \Delta v'$$

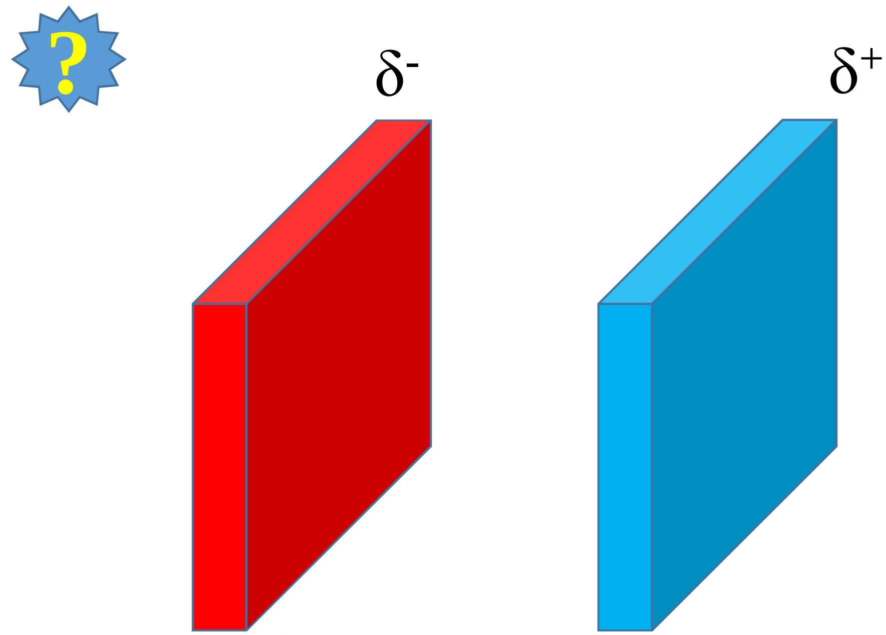
$\rho_P \Delta v'$ برابراست با بارخالص درعنصرحجم دی الکتریک قطبیده.



$$P = q(\delta^+ - \delta^-)$$

(a)

(b)



$\rho_0^- \delta^- da\ \vec{\delta}^-$ $\rho_0^+ \delta^+ da\ \vec{\delta}^+$

$\rho_0^- dv\ \vec{\delta}^-$ $\rho_0^+ dv\ \vec{\delta}^+$

$$P = \frac{\rho_0^+ dv\ \vec{\delta}^+ - \rho_0^- dv\ \vec{\delta}^-}{dv} = \rho_0^+ (\vec{\delta}^+ - \vec{\delta}^-)$$

درنظر اول ممکن است عجیب به‌نظر بیاید که با اینکه در آغاز با عنصرهـای حجمیی شروع کردیم که از لحاظ الکتریکی خنثی بودند، اما درپایان به‌عنصرهای حجمیی رسیدیم که بارخالص دارند. طبق گفتهٔ قبلی ما، دی‌الکتریك تشکیل شده‌است ازعنصرهای دوقطبی $\Delta \mathbf{p}$ و لازم بودکه هر $\Delta \mathbf{p}$ ازلحاظ الکتریکی خنثی باشد تامعادلهٔ (۱۵.۴) به‌طور صحیح پتانسیل را به‌دست بدهد. حال می‌بینیم تا وقتی‌که $\nabla \cdot \mathbf{P}$ صفرنشود، هریك از عنصرهای حجم به‌طورانفرادی باردار به‌نظرمی‌آیند. منشأ این تناقض ظاهری درتبدیل ریاضی‌معادلهٔ (۱۱.۴) نهفته‌است؛ دراین معادله سهم‌هرعنصرحجم تبدیل‌می‌شودبه‌یك جملهٔ حجمی‌متفاوت ویك جملهٔ سطحی. جمع کل باردرحجم وبرروی سطح عنصرحجم هنوزهم صفر است؛ اما وقتی عنصرهای حجمی مختلف را روی‌هم می گذاریم تایك قطعهٔ مـاکروسکوپی از مادهٔ دی‌الکتریك تشکیل بدهند، متوجه می‌شویم که پتانسیل حاصل از «سطوح داخلی» مختلف یکدیگررا حذف می کنند. سرانجام چیزی که برای ما باقی می‌ماند سهم آن عنصرهـای حجمیی است‌که به‌طور مؤثر باردارند وسهم آن سطوحی‌که مربوط به‌مرزهای واقعی‌جسم دی‌الکتریك‌اند.

مقدار کل بارقطبشی یك جسم دی‌الکتریك

$$Q_P = \int_{V_0} (-\nabla' \cdot \mathbf{P})\, dv' + \oint_{S_0} \mathbf{P} \cdot \mathbf{n}\, da'$$

طبق قضیه واگرایی

$$Q_P = \int_{V_0} (-\nabla' \cdot \mathbf{P})\, dv' + \int_{V_0} \nabla' \cdot \mathbf{P}\, dv' = 0$$

باید مساوی صفرشود، زیرا فرض اولیه ما این بود که دی‌الکتریك، روی‌هم رفته، از لحاظ الکتریکی خنثی است. این نتیجه مستقیماً ازصورت معادلهٔ (۲۰.۴)، که به‌وضوح درنتیجهٔ قضیهٔ واگرایی صفرمی‌شود، پیداست.

$$\varphi(\mathbf{r})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\oint_{S_0}\frac{\sigma_P\,da'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}+\int_{V_0}\frac{\rho_P\,dv'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right]$$

$$\vec{E}=-\vec{\nabla}\varphi$$

$$\nabla(1/|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|)=-\nabla'(1/|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|$$

$$\nabla'\left(\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right)=+\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}$$

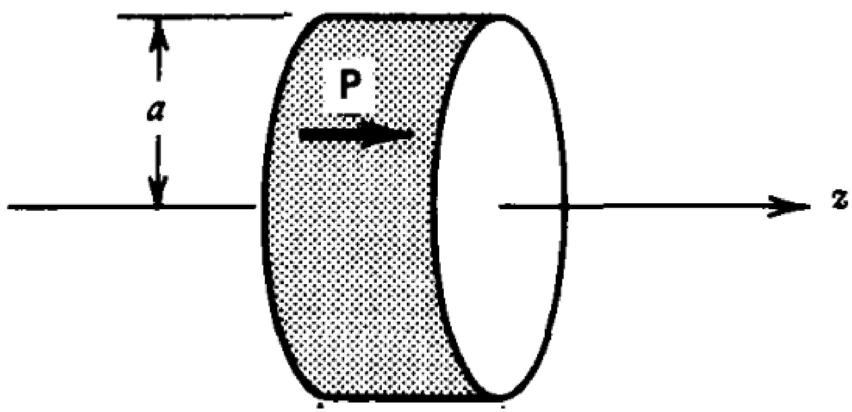
$$\mathbf{E}(\mathbf{r})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\int_{S_0}\frac{\sigma_P(\mathbf{r}-\mathbf{r}')da'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}+\int_{V_0}\frac{\rho_P(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\,dv'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}\right]$$

میدان الکتریکی ناشی از یک ماده دی الکتریک قطبیده

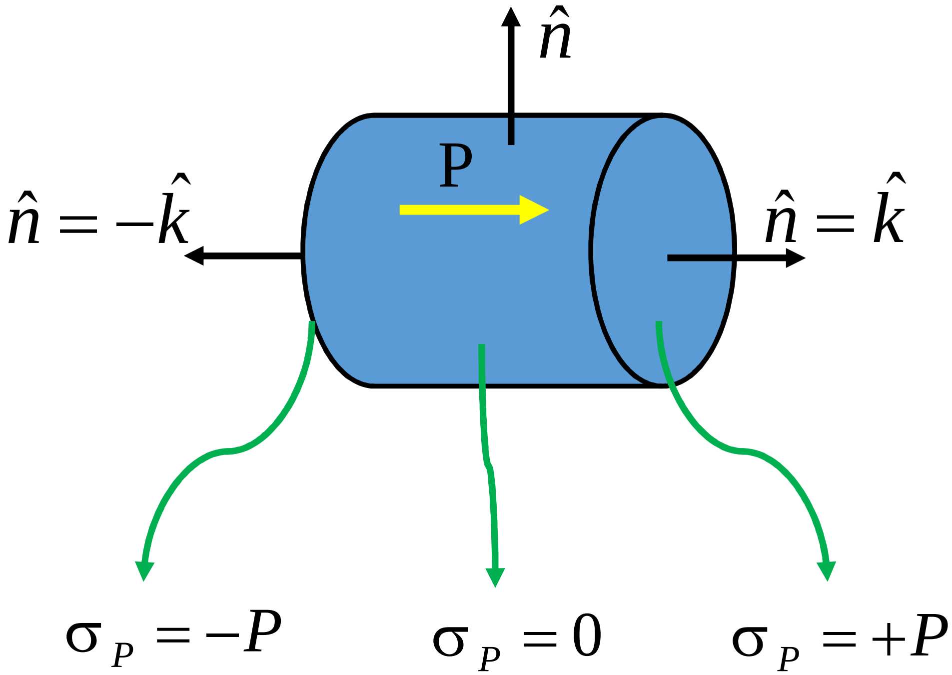
مثال) استوانه ای از جنس فروالکتریک و به شعاع a که محور آن در امتداد محور z ها قرار دارد داریم.

طول استوانه $2l$ است. این استوانه دارای قطبش یکنواخت P در امتداد محور z ها است.

There do indeed exist materials that can maintain such a polarization in the absence of an applied electric field. Such materials are called ***electrets, and*** the associated phenomenon of a "residual" polarization is usually called ***ferroelectricity.*** In these materials the internal macroscopic electric fields maintain the polarization; i.e., they keep the dipoles aligned. Clearly, such substances are highly nonlinear, not "simple."



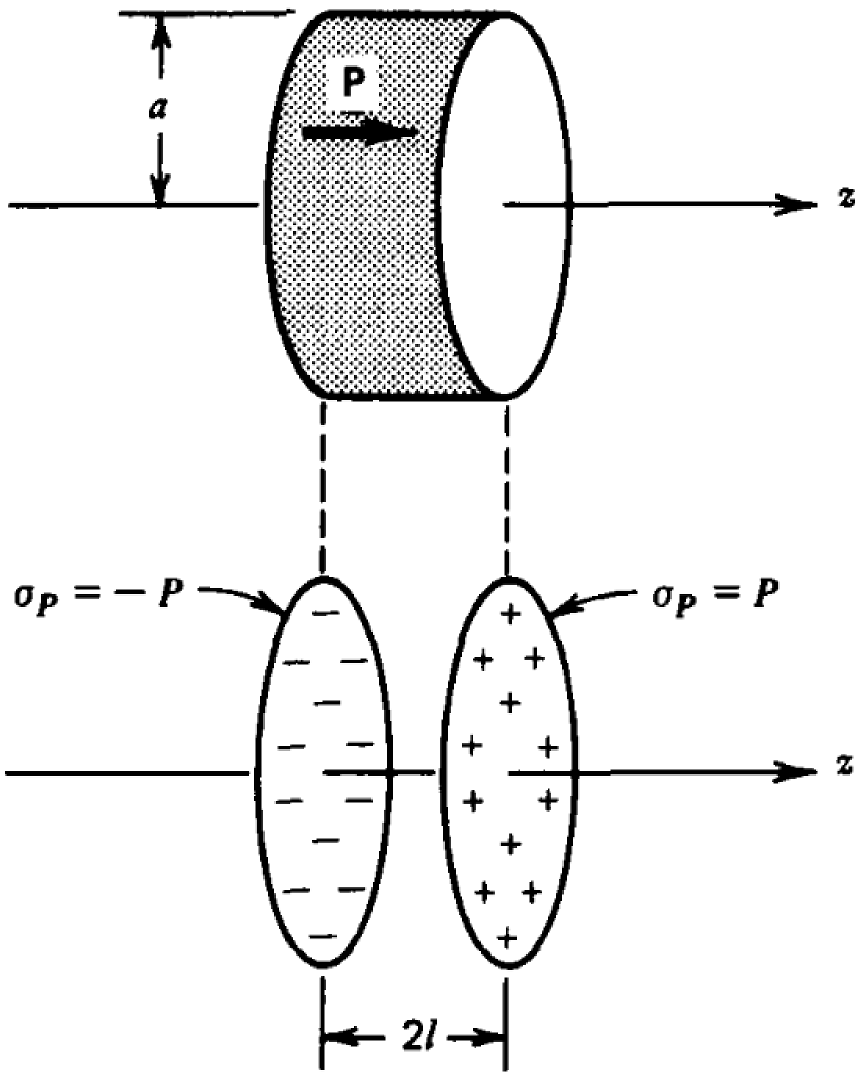
چگالی های بار



$$\sigma_P = \vec{P} \cdot \hat{n}$$

$$\rho_P = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P} \quad \rightarrow \quad \rho_P = 0$$

قطبش استوانه یکنواخت است

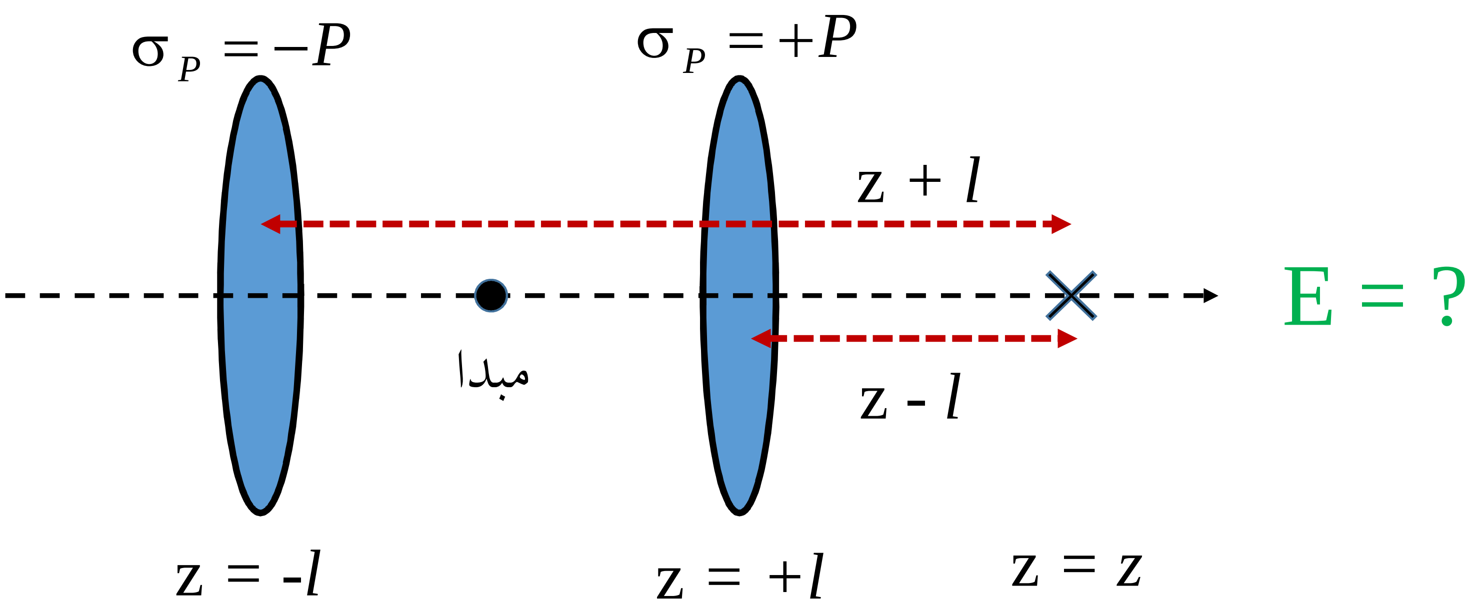


استوانه را می توان با دو سطح دایره ای با چگالی های بار $+P$ و $-P$ که از هم به اندازه $2l$ فاصله دارند جایگزین نمود

میدان الکتریکی دیسک بار دار به شعاع a و با چگالی سطحی که مرکز آن در مبدا مختصات قرار دارد.

$$E = |E_z| = \frac{\sigma_P}{2\varepsilon_0}\left(1 - \frac{|z|}{\sqrt{z^2 + a^2}}\right)$$

میدان الکتریکی بیرون از دیسک ها =؟



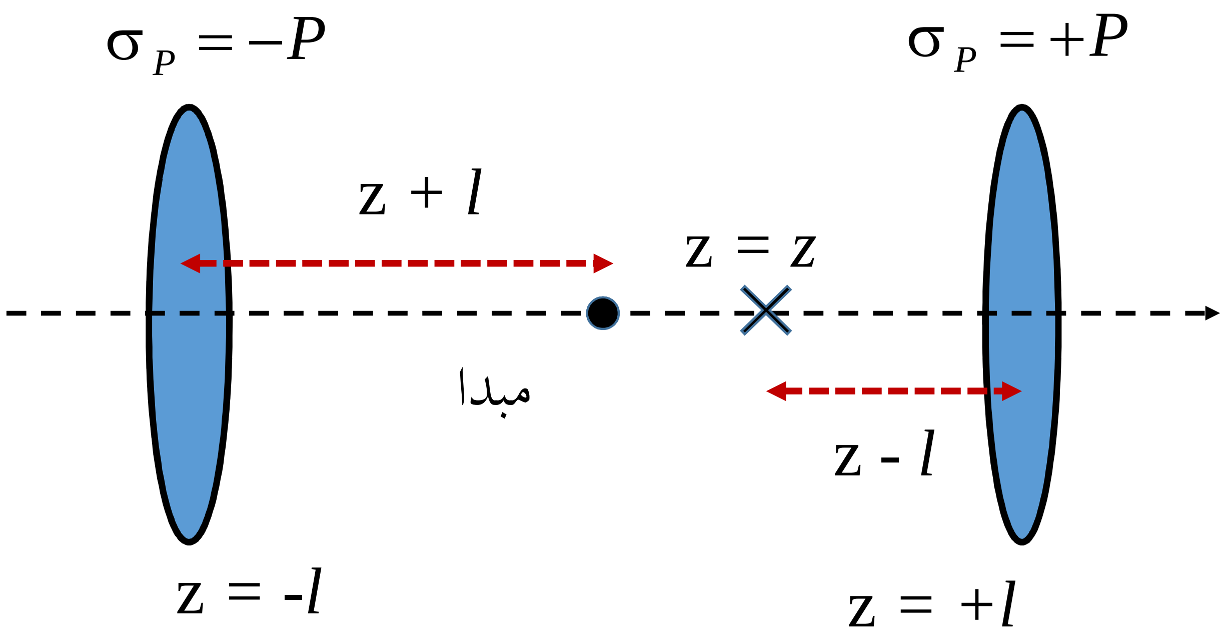
$$\mathbf{E}_{>} = \frac{\hat{\mathbf{z}}P}{2\varepsilon_0}\left[1 - \frac{z-l}{\sqrt{(z-l)^2 + a^2}}\right] - \frac{\hat{\mathbf{z}}P}{2\varepsilon_0}\left[1 - \frac{z+l}{\sqrt{(z+l)^2 + a^2}}\right]$$

$$\mathbf{E}_{>} = \frac{\mathbf{P}}{2\varepsilon_0}\left[\frac{z+l}{\sqrt{(z+l)^2 + a^2}} - \frac{z-l}{\sqrt{(z-l)^2 + a^2}}\right]$$

میدان الکتریکی بیرون از دیسک هاc

میدان الکتریکی بین دیسک ها =؟

$$\mathbf{E}_< = -\frac{\hat{z}P}{2\varepsilon_0}\left[1-\frac{l-z}{\sqrt{(l-z)^2+a^2}}\right]-\frac{\hat{z}P}{2\varepsilon_0}\left[1-\frac{l+z}{\sqrt{(l+z)^2+a^2}}\right]$$



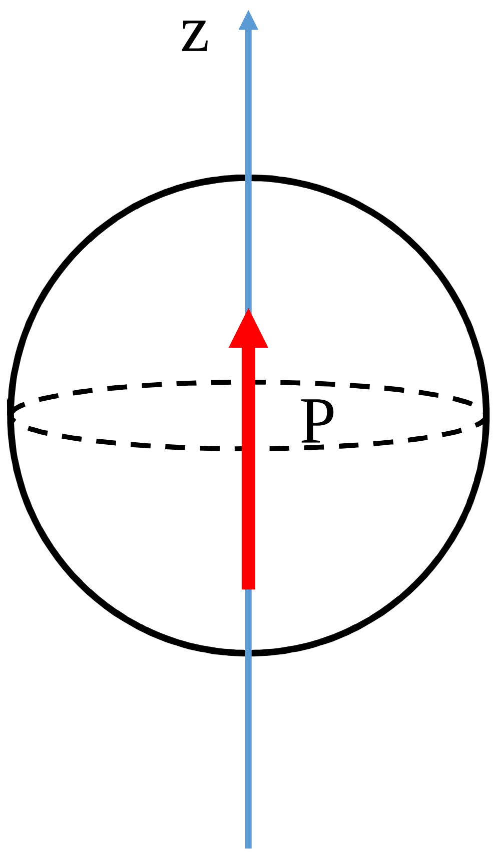
The Polarized Sphere-Two Superimposed, Oppositely Charged Spheres

Consider a polarized dielectric sphere of radius R. We assume the polarization throughout its volume to be constant: **P = P$_z$. We wish to find the electric fields generated by this polariz**ation.

These fields will be entirely equivalent to the field produced by the charge distribution associated with the polarization:

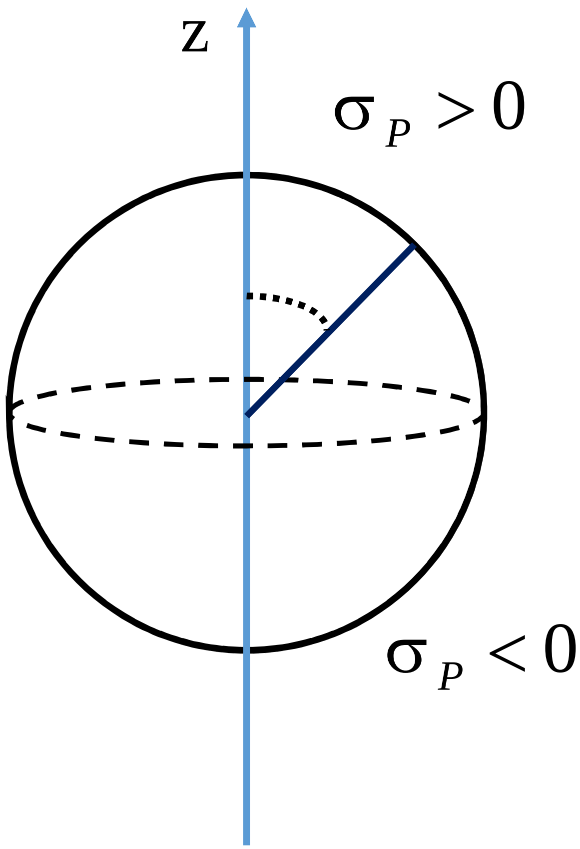
$$\begin{cases} \rho_P = -\nabla \cdot \mathbf{P} = 0 \\ \sigma_P = \mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{r}} = P(\hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\mathbf{r}}) = P \cos\theta \end{cases}$$

حالت a : مسئله کره با قطبش یکنواخت به موازات محور z



(a)

حالت b : مسئله کره باردار با بار حجمی صفر و بار سطحی غیر صفر



(b)

$$\sigma = P\cos\theta$$

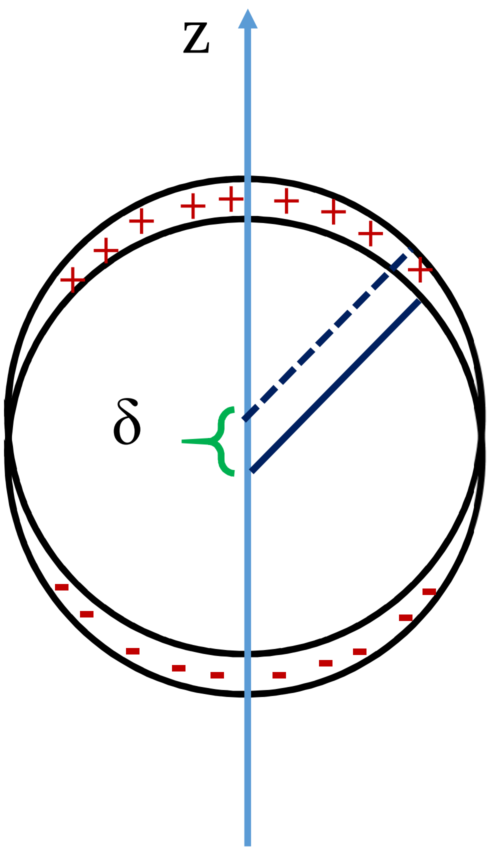
حالت c : مسئله دو کره به

شعاع R وبا چگالی بارهای

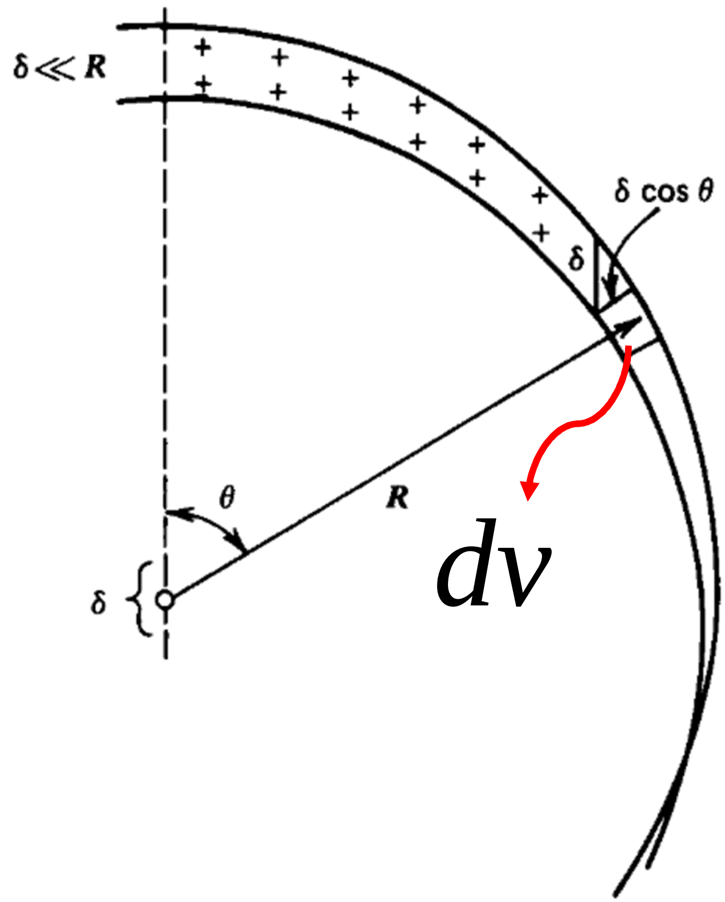
حجمی $+\rho$ و $-\rho$ که مرکز

آنها به اندازه δ $(\delta<<R)$ از

هم جدا شده است.



(c)



بار در حجم محصور بین سطح دو کره

$$dq = \rho\ dv = \rho\ da\, dr = \rho\ da\, \delta \cos\theta$$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{dq}{da} = \sigma \\ \quad \rightarrow \quad \sigma = \rho\delta \cos\theta \\ \sigma = P\cos\theta \end{array}\right\} \quad P = \rho\delta$$

we have identical charge distributions (a,c), and therefore identical electric fields, for these two problems.

$$Q_{\pm} = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho_{\pm} = \pm \frac{4}{3}\pi R^3 \rho$$ بار کل در حجم دو کره

These point charges are separated by the displacement δ, where δ << R **.**
The field is a dipole field from a dipole of moment +Qδ

Outside the spheres
(at r > ***R)***

$$\Phi(r > R) = \frac{Q\boldsymbol{\delta} \cdot \hat{\mathbf{r}}}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{\frac{4}{3}\pi R^3 \rho \boldsymbol{\delta} \cdot \hat{\mathbf{r}}}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{V\mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{r}}}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

$$\mathbf{p} \equiv \mathbf{P}V$$

$$\boxed{\Phi(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{p} \cdot \hat{\mathbf{r}}}{4\pi\varepsilon_0 r^2}}$$

each uniformly charged sphere appears as a point charge

These point charges are separated by the displacement δ

Inside the spheres
(at r < ***R)***

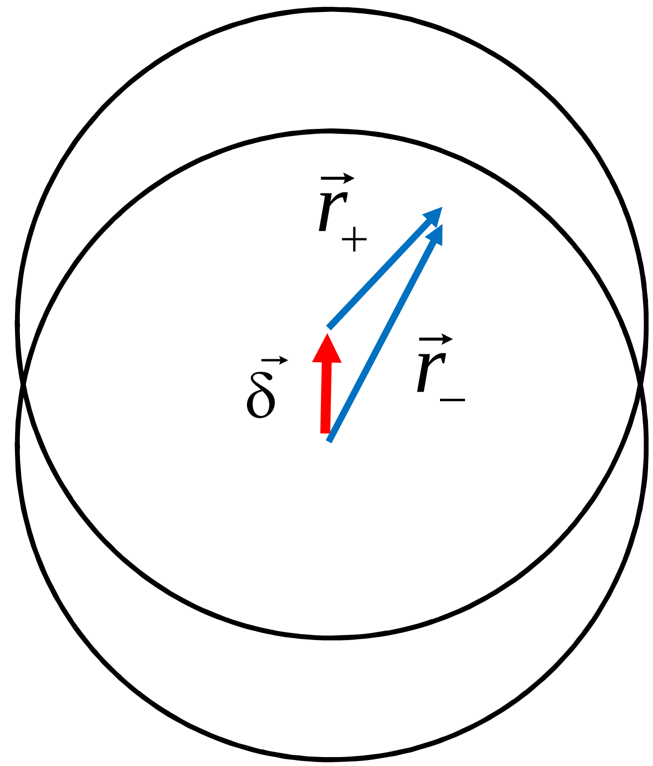
$$E = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} r$$

میدان داخل کره باردار با بار حجمی ρ

$$\mathbf{E}_+ = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\mathbf{r}_+ \qquad \mathbf{E}_- = -\frac{\rho}{3\varepsilon_0}\mathbf{r}_- .$$

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_+ + \mathbf{E}_- = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}(\mathbf{r}_+ - \mathbf{r}_-) = -\frac{\rho\boldsymbol{\delta}}{3\varepsilon_0}$$

$$\mathbf{E} = -\frac{\mathbf{P}}{3\varepsilon_0}$$



۳.۴ میدان الکتریکی در داخل یك دی‌الکتریك

میدان الکتریکی میانگین در ناحیهٔ کوچکی از دی‌الکتریك که باوجود کوچکی شامل تعداد زیادی مولکول است

میدان الکتریکی ماکروسکوپی

تعریف میدان الکتریکی

میدان الکتریکی (ماکروسکوپی) عبارت است ازحد نیروی وارد بر واحد بار یك بار آزمون واقع درداخل دی‌الکتریك، وقتی‌که بارآزمون‌آن‌قدر کوچك است که خودش برتوزیع بار تأثیری ندارد.

$\mathbf{E}$ میدانی است که بقا دارد

در نتیجه می‌توان آن‌را از یک پتانسیل نرده‌ای به‌دست آورد.

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0$$

قضیه استوکس

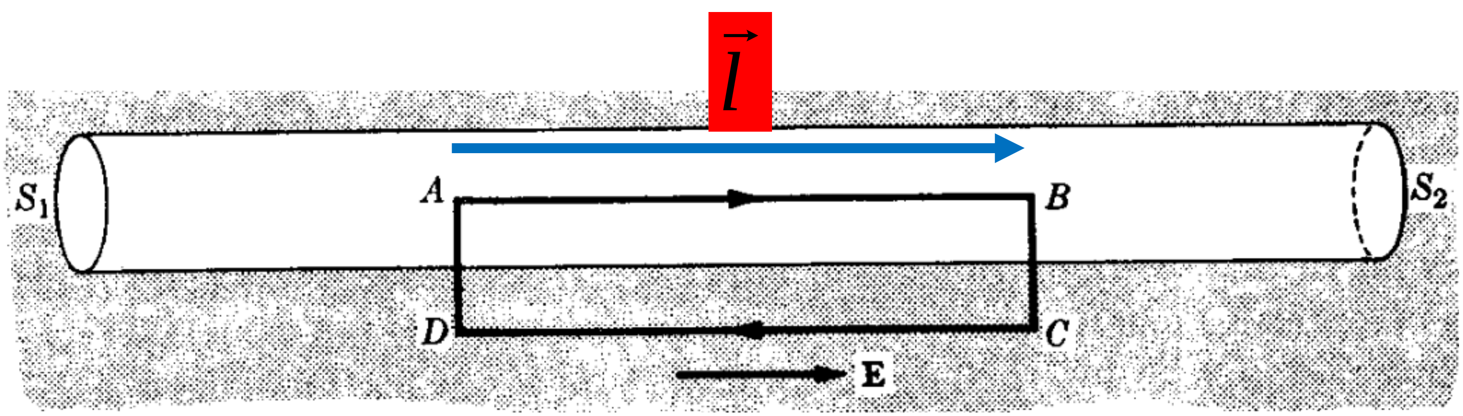
$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$$

حال رابطهٔ اخیر را برای مسیر $ABCD$ که درشکل ۳.۴ نشان‌داده شده است به‌کارمی‌بریم. در این شکل AB درحفرهٔ سوزنی شکلی که درداخل‌دی‌الکتریك تعبیه شده‌است، و CD در داخل خود محیط دی‌الکتریك قراردارد. چون‌قطعات AD و BC را می‌توان به‌طوردلخواه کوچك فرض کرد، انتگرال خطی تبدیل می‌شود به

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0 \Rightarrow \mathbf{E}_v \cdot \mathbf{l} - \mathbf{E}_d \cdot \mathbf{l} = 0 \Rightarrow E_{vt} = E_{dt}$$

مولفه مماسی
میدان در خلاء

مولفه مماسی میدان
در دی الکتریک



اگر حفره سوزنی شکل در امتداد میدان الکتریکی باشد آنگاه

$$E_{dt} = E_d$$

$$E_{vt} = E_v$$

میدان الکتریکی درداخل یك دی‌الکتریك برابر است بامیدان الکتریکی درداخل یك حفرهٔ سوزنی شکـــل در داخل دی‌الکتریك، مشروط به آنکه محور حفره موازی امتداد میدان الکتریکی باشد.[1]

محاسبهٔ میدان الکتریکی در داخل یک دی‌الکتریک به‌مسئلهٔ تعیین میدان درداخل یک حفرهٔ سوزنی شکل واقع در داخل دی‌الکتریک تبدیل می‌شود.

لیکن میدان الکتریکی داخل حفره، میدان خارجی دی‌الکتریک است

اگر نقطهٔ $\mathbf{r}$ که پتانسیل و میدان را درآن محاسبه می‌کنیم درمرکزحفره باشد

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{V_0 - V_1} \frac{\rho_P(x',\ y',\ z')\, dv'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{S_0+S'} \frac{\sigma_P(x',\ y',\ z')\, da'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}$$

دراین معادله $V_0 - V_1$ حجم دی‌الکتریک است که حجم «سوزن» ازآن کم شده است، S_0 سطح خارجی دی‌الکتریک است و $S' = S_1 + S_2 + S_c$ سطح کل سوزن است

۳.۴ پیداست که برروی سطح جانبی S_c سوزن، $\sigma_p = 0$ است؛ به‌علاوه سوزن را می‌توان به‌دلخواه نازك ساخت به‌گونه‌ای که ازسطوح S_1 و S_2 آن نیز بتوان صرفنظر کرد. بنابراین فقط سطوح خارجی دی‌الکتریك مؤثرخواهند بود وانتگرال سطحی معادلهٔ (۲۳.۴) از نظرشکل باانتگرال سطحی معادلهٔ (۱۵.۴) یکی خواهد شد. در انتگرال حجمیِ معادلهٔ (۲۳.۴) ازحجم حفره چشمپوشی می‌شود، باوجود این، همچنانکه به‌راحتی دیده می‌شود، سهم حجم حفره درمقداراین انتگرال قابل چشمپوشی است. چگالی بار ρ_p محدوداست؛ کمیت $dv'/|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|$ در نقطهٔ میدان (یعنی در $\mathbf{r}'=\mathbf{r}$) واگرا نمی‌شود زیرا حجم یك نقطه، صفری است ازمرتبه‌ای بالاتر از $\lim|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|$، و سرانجام حجم سوزن V_1 را می‌توان بانازك کردن حفره به‌دلخواه کوچك کرد. بنابراین نیازی‌هم به کنار گذاشتن حجم V_1 نیست و معادلهٔ (۲۳.۴) به‌صورت معادلهٔ (۱۵.۴) درمی‌آید. به‌عبارت دیگر، معادلهٔ (۱۵.۴)، اعم ازاینکه نقطهٔ $\mathbf{r}$ درداخل دی‌الکتریك واقع باشد یا در خارج آن، پتانسیل $\varphi(\mathbf{r})$ را به‌دست می‌دهد.

$$\varphi(\mathbf{r})=\frac{۱}{۴\pi\varepsilon_{۰}}\left[\oint_{S_{۰}}\frac{\sigma_P\, da'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}+\int_{V_{۰}}\frac{\rho_P\, dv'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right]$$

میدان الکتریکی $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ را با محاسبهٔ منفی شیب معادلهٔ (۲۳.۴) می‌توان به‌دست آورد. اما این میدان با آنچه از معادلهٔ (۲۱.۴) حاصل می‌شود تفاوت ناچیزی دارد. بنابراین معادلهٔ (۲۱.۴) میدان الکتریکی ناشی ازمحیط را درنقطهٔ $\mathbf{r}$ تعیین می‌کند، خواه $\mathbf{r}$ در داخل دی‌الکتریك باشد یا درخارج آن.

$$\mathbf{E}(\mathbf{r})=\frac{۱}{۴\pi\varepsilon_{۰}}\left[\int_{S_{۰}}\frac{\sigma_P(\mathbf{r}-\mathbf{r}')da'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^{۳}}+\int_{V_{۰}}\frac{\rho_P(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\, dv'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^{۳}}\right]$$