بسم الله الرحمن الرحيم

فصل چهارم

میدان الکترواستاتیک در محیط های دی الکتریک

بخش اول

۴.۴ قانون گاؤس در دی‌الکتریکها. جابه‌جایی الکتریکی

قانون گاؤس:

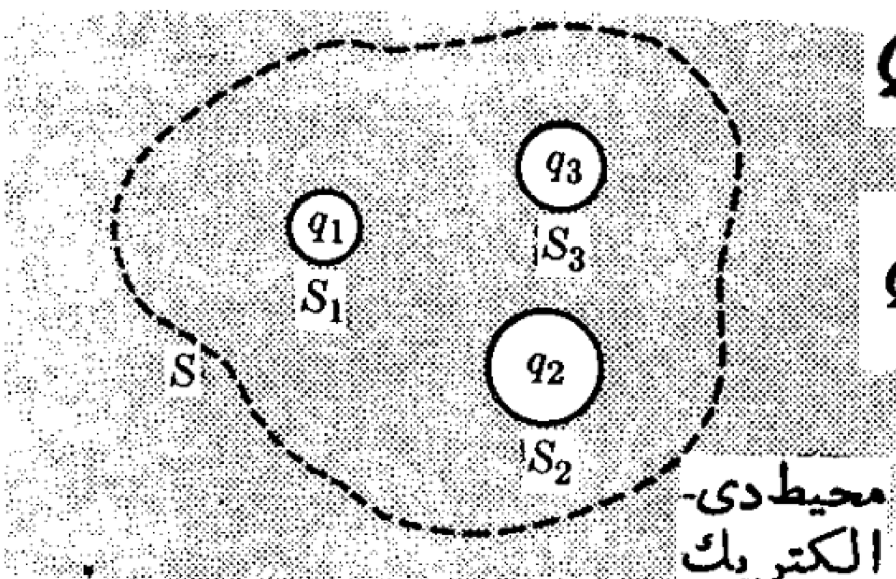
شار الکتریکی از هر سطح بستهٔ دلخواه متناسب است با بار کل واقع در داخل این سطح

در کاربرد برای دی الکتریک ها

در نظر گرفتن همه بارهای داخل سطح گاوس شامل هم بارهای درون ماده دی الکتریک و هم بارهای قطبشی

در شکـل ۴.۴ سطح خطچین S یک‌سطح فرضی بسته است که در داخـل محیط دی‌الکتریك قرار دارد. مقداری بار (Q) درحجم محدود شده به S قرار داده‌ایم و فرض می‌کنیم که این بارها برروی سطوح سه رسانا به مقادیر q_1، q_2، و q_3 توزیع شده‌اند.

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n}\, da = \frac{1}{\varepsilon_0}(Q+Q_P)$$



$$Q = q_1 + q_2 + q_3$$

$$Q_P = \int_{S_1+S_2+S_3} \mathbf{P} \cdot \mathbf{n}\, da + \int_V (-\nabla \cdot \mathbf{P})\, dv$$

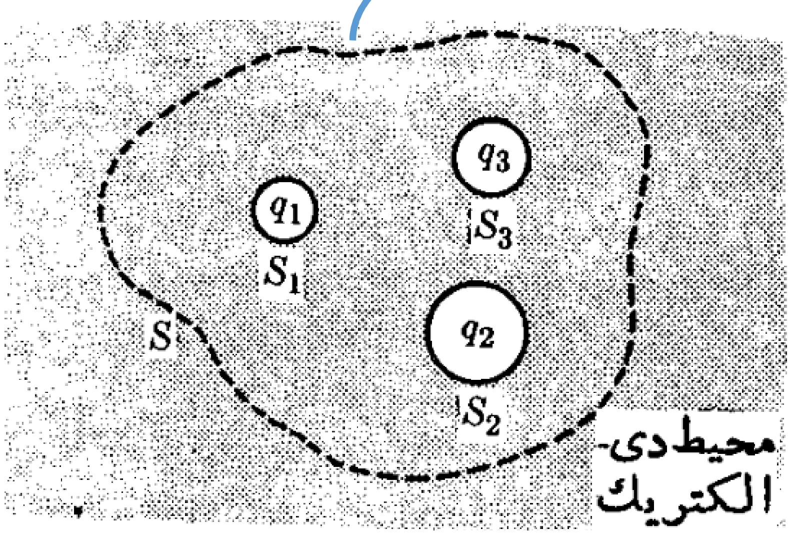
$$Q_P = \int_{S_1+S_2+S_3} \mathbf{P} \cdot \mathbf{n}\, da + \int_V (-\nabla \cdot \mathbf{P})\, dv$$

درا ینجا V حجـــم دی‌الکتریك محاط در S است.

در S هیـــچ مرز دی‌الکتریکی وجود ندارد

بار سطحی درون سطح گاوس وجو ندارد

سطح گاوس



به شکلی دیگر:

چنانچه انتگرال حجمی را با استفاده ازقضیهٔ واگرایی به‌یك انتگرال سطحی تبدیل کنیم سهم تمام سطوحی که حجــم V را در بر گرفته‌اند، یعنی سطوح S، S_1، S_2، و S_3 در نظر بگیریم

$$Q_P = \int_{S_1+S_2+S_3} \mathbf{P} \cdot \mathbf{n}\, da + \int_V (-\nabla \cdot \mathbf{P})\, dv$$

$$Q_P = \int_{S_1+S_2+S_3} \mathbf{P} \cdot \mathbf{n}\, da - \oint_{S_1+S_2+S_3+S} \mathbf{P} \cdot \mathbf{n}\, da$$

$$Q_P = -\oint_S \mathbf{P} \cdot \mathbf{n}\, da$$

$$\begin{cases} \oint_s \mathbf{E} \cdot \mathbf{n}\, da = \dfrac{1}{\varepsilon_0}(Q + Q_P) \\ Q_P = -\oint_s \mathbf{P} \cdot \mathbf{n}\, da \end{cases}$$

$$\boxed{\oint_s (\varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}) \cdot \mathbf{n}\, da = Q}$$

بیـــان می کند که

شار بردار $\varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$ ازیك سطح بسته برابراست با بـــار خالص نهفته درحجمی که توسط این سطح محصورشده است.

بردار جابه جایی الکتریکی

$$\boxed{\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}}$$

بازنویسی از قانون گاوس

$$\oint_s (\varepsilon_\circ \mathbf{E} + \mathbf{P}) \cdot \mathbf{n}\, da = Q \quad \Rightarrow \quad \oint \mathbf{D} \cdot \mathbf{n}\, da = Q$$

قضیه دیورانس

$$\oint \vec{D} \cdot \hat{n} da = Q$$

$$\int \vec{\nabla} \cdot \vec{D}\, dv = \int \rho dv \quad \Rightarrow \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho$$

صورت دیفرانسیلی قانون گاوس

مزیت بیان صورتهای انتگرالی ودیفرانسیلی قانون گاؤس، یعنی معادلات (۲۸۰۴) و (۲۹۰۴)، برحسب بردار $\mathbf{D}$ دراین است که فقط بار Q یا چگالی بار ρ که در محیط دی‌الکتریك قرارداده‌ایم، صریحاً درمعادلات ظاهرمی‌شوند. این بار همان چیزی است که ما معمولاً آن را ازاین پس به‌طورساده بار(یا چگالی بار) خواهیم نامید. هرگاه لازم شود که میان این‌بار و بار قطبشی محیط Q_p یا بار کل $Q+Q_p$ تمایز قائل شویم، بار Q را بارخارجی خواهیم نامید. مقصود ما از«خارجی» این نیست که این بارالزاماً خارج ازمرز فیزیکی جسم قراردارد، منظورما این است که این بار، اضافه بربارهایی است که ترکیب اتمی جسم خنثی را تشکیل می‌دهند.

میدان الکتروستاتیکی کلی درهر نقطه درداخل محیط دی‌الکتریک

$$\mathbf{D}=\varepsilon_{\circ}\mathbf{E}+\mathbf{P}$$

$$\mathbf{E}(x,\ y,\ z)=\frac{1}{\varepsilon_{\circ}}\mathbf{D}(x,\ y,\ z)-\frac{1}{\varepsilon_{\circ}}\mathbf{P}(x,\ y,\ z)$$

جملهٔ اول، $\mathbf{D}(1/\varepsilon_{\circ})$، از طریق واگرایی‌اش به‌چگالی بار خارجی مربوط می‌شود و

جملهٔ دوم، یعنی $\mathbf{P}(-1/\varepsilon_{\circ})$ متناسب است باقطبش محیط.

The Equations of Electrostatics Inside Dielectrics

$$\rho = \rho_f + \rho_P = \rho_f - \nabla \cdot \mathbf{P}$$

چگالی بارهای آزاد

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad \text{and} \quad \nabla \times \mathbf{E} = 0$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_f \quad \text{and} \quad \nabla \times \mathbf{E} = 0$$

$$\mathbf{E} = -\nabla\Phi \quad \text{and} \quad \mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$$

۵.۴ پذیرفتاری الکتریکی وثابت دی‌الکتریك

کیفیت پاسخ دی الکتریک به میدان الکتریکی خارجی

ازلحاظ ماکروسکوپی

معادلهٔ ساختمندی

$$\mathbf{P}=\mathbf{P}(\mathbf{E})$$

$\mathbf{E}$ میدان الکتریکی ماکروسکوپی است

این‌رابطه یك رابطهٔ نقطه‌ای است، واگر $\mathbf{E}$ در جسم ازنقطه‌ای به‌نقطهٔ دیگرتغییر کند

$\mathbf{P}$ هم به‌تبعیت ازآن تغییرمی کند

برای بیشترمواد وقتی **E** صفرشود **P** صفرخواهد شد. چون این‌رفتارمعمولی مواد است اگر ماده همسانگرد باشد، قطبش باید همان جهتی‌را داشته باشد که میدان الکتریکی‌مولد

$$\mathbf{P} = \chi(E)\mathbf{E}$$

کمیت نرده‌ای $\chi(E)$ پذیرفتاری الکتریکی نام دارد

بسیاری‌ازمواد از لحـاظ الکتریکی همسانگردند؛ این دسته شامل شاره‌هـا و اجسام جامد بی‌شکل، و برخی بلورهامی‌شوند.

بیان پذیرفتاری به صورت کمیت نرده ای

اجسام ناهمسانگرد

بیان پذیرفتاری به صورت تانسور

$$\begin{cases} \mathbf{D} = \varepsilon_\circ \mathbf{E} + \mathbf{P} \\ \mathbf{P} = \chi(E)\mathbf{E} \end{cases} \Rightarrow \quad \mathbf{D} = \varepsilon(E)\mathbf{E} \qquad \underbrace{\varepsilon(E)}_{\text{گذردهی جسم}} = \varepsilon_\circ + \chi(E)$$

به‌استثنای مواردی که میدان بسیار قوی است، غالباً χ و ε به‌میدان الکتریکی بستگی ندارند

χ و ε ثابتهای مشخصهٔ جسم‌اند.

این نوع اجسام دی‌الکتریکهای خطی نام دارند

$$\mathbf{P} = \chi \mathbf{E} \qquad \mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$$

رفتار الکتریکی هر ماده یا با گذردهی ε و یا با پذیرفتاری χ به‌طور کامل مشخص می‌شود.

جسم	K	E_{max} برحسب ولت برمتر
اکسید آلومینیوم	۴ر۵	۶×۱۰^{۶}
شیشه*	۵ — ۱۰	۹×۱۰^{۶}
نایلون	۳ر۵	۱۹×۱۰^{۶}
پلی اتیلن	۲ر۳	۱۸×۱۰^{۶}
کوارتز $(SiO_۲)$	۴ر۳	
سدیوم کلرید	۶ر۱	
گوگرد	۴ر۰	
چوب*	۲ر۵ — ۸ر۰	
الکل اتیلیك $(۰^\circ C)$	۲۸ر۴	
بنزن $(۰^\circ C)$	۲ر۳	
آب مقطر $(۰^\circ C)$	۸۷ر۸	
آب مقطر $(۲۰^\circ C)$	۸۰ر۱	
هوا (۱ جو)	۱ر۰۰۰۵۹	۳×۱۰^{۶}
هوا (۱۰۰ جو)	۱ر۰۵۴۸	
گاز کربنیك (۱ جو)	۱ر۰۰۰۹۸۵	

$$\varepsilon = K\varepsilon_{\circ}$$

ضریب دی الکتریك یا ثابت دی‌الکتریك

کمیت بی بعد

$$K = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_{\circ}} = ۱ + \frac{\chi}{\varepsilon_{\circ}}$$

استقامت دی‌الکتریك، E_{max}

در میدان های الکتریکی قوی، الکترونها به طور کامل از مولکولها بیرون کشیده شده و ماده تبدیل به رسانا می شود. میدان قابل تحمل که ماده دی الکتریک بماند را استقامت دی الکتریک گویند

- If χ (or K) does not depend upon location in a piece of material, the material is called *homogeneous*.
- If χ does not depend on E, then the material is called *linear*,
- If χ does not depend upon the direction of E in the material, the material is called *isotropic*.

Even if simple, the electric susceptibility will depend on such parameters as temperature and pressure.

There are instances where the existence of a polarization may be due to forces other than those due to imposed electric fields. Thus inertial or gravitational forces may affect a charge separation in atoms or molecules creating an effective polarization. Mechanical stresses may also produce a polarization. This occurs, for example, in quartz, and the associated phenomenon is called the ***piezoelectric effect.*** It has many practical applications, as in the fabrication of electromechanical transducers where a mechanical signal is to be converted into an electric signal or viceversa.

۶.۴ بار نقطه‌ای در یک شارهٔ دی‌الکتریک

فرض ها:

بار نقطــه‌ای q است در یک محیط دی‌الکتریک نامتناهی همسانگرد همگن

q درمبدأ مختصات

محیط دی‌الکتریک خطی

باثابت دی‌الکتریک K

چون **E**، **D**، و **P** درهرنقطه باهم موازی‌اند، ماهیت شعــاعی بودن میدان براثر وجود محیط تغییر نمی کند

براثر تقارن موجود درمسئله **E**، **D**، و **P** فقط می‌توانند به‌فاصله ازبارنقطه‌ای بستگی داشته باشند نه به‌مختصات زاویه‌ای

$$\vec{E} = E(r)\hat{r} \quad , \quad \vec{P} = P(r)\hat{r} \quad , \quad \vec{D} = D(r)\hat{r}$$

قــانون گاؤس،برای یك سطح کروی به‌شعاع r که q درمرکزآن قرار دارد

$$\oint \vec{D}\,.\,\hat{n}da = q \quad \rightarrow \quad \oint D\hat{r}\,.\,\hat{r}da = q \quad \rightarrow \quad D(4\pi r^2) = q$$

$$D = \frac{q}{4\pi r^2} \quad \rightarrow \quad \vec{D} = \frac{q}{4\pi r^2}\hat{r} \quad \rightarrow \quad \vec{D} = \frac{q}{4\pi r^3}\vec{r}$$

$$\begin{cases} \mathbf{D} = \dfrac{q}{۴\pi r^{۳}}\,\mathbf{r} \\ \mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} \\ \varepsilon = K\varepsilon_{۰} \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{aligned} \mathbf{E} &= \frac{q}{۴\pi K\varepsilon_{۰} r^{۳}}\,\mathbf{r} \\ \mathbf{P} &= \frac{(K-۱)q}{۴\pi K r^{۳}}\,\mathbf{r} \end{aligned}$$

بنا بر این، میدان الکتریکی درمقایسه با حالتی که محیط دی‌الکتریکی وجود ندارد به‌نسبت ضریب K کوچکترمی‌شود.

چرایی کاهش میدان الکتریکی در حضور دی الکتریک

منشاء میدان الکتریکی: وجود بارهای خارجی و بارهای قطبشی

بارهای قطبشی

بار قطبشی سطحی σ_P

$$\sigma_P = \mathbf{P} \cdot \mathbf{n}$$ ؟

در روی سطح دی‌الکتریک که با بار نقطه‌ای در تماس است

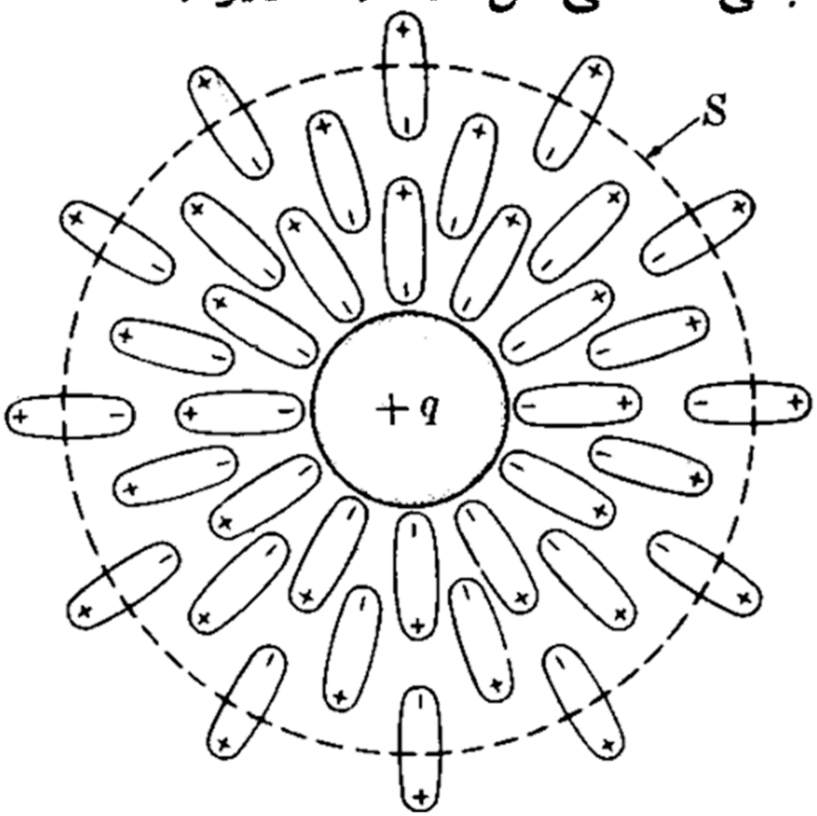
با قطبشی حجمی ρ_P

$$\rho_P = -\nabla \cdot \mathbf{P}$$

$\nabla \cdot \mathbf{P}$ صفر می‌شود

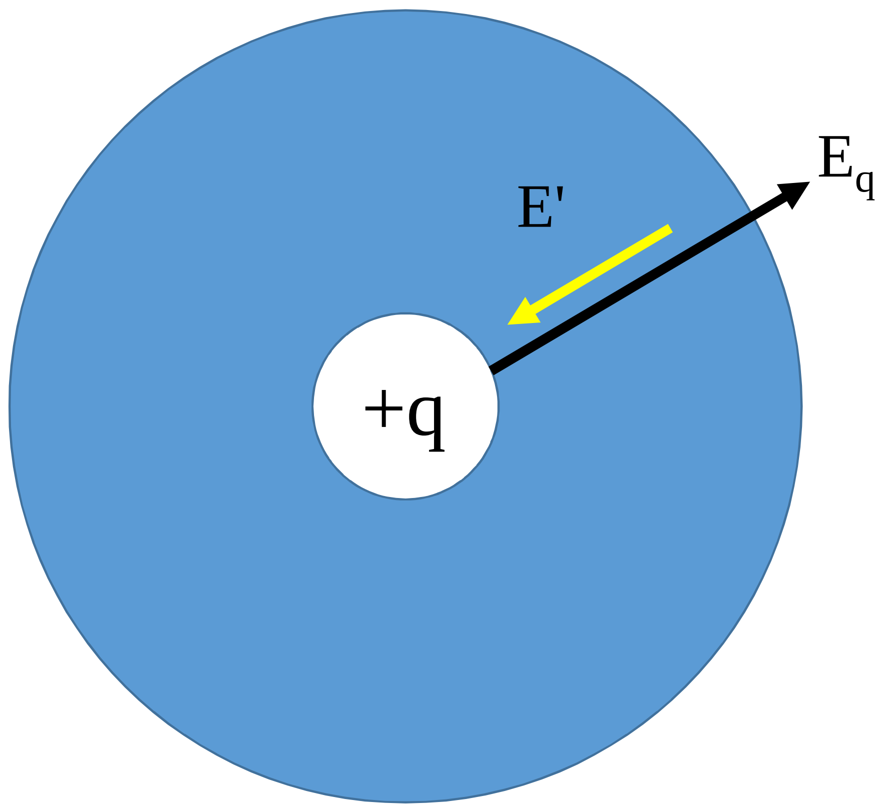
$$\sigma_P = \mathbf{P} \cdot \mathbf{n}$$

بارنقطه‌ای q ازنظرماکروسکوپی نقطه‌ای است. فرض کنیدکه در مقیاس مولکولی این نقطه بزرگ است ومی‌توانیم برای آن یک شعاع مانند b درنظر بگیریم که سرانجام آن را به‌سمت صفرمیل خواهیم داد. دراین‌صورت بارقطبشی سطحی کل ازرابطهٔ زیر به‌دست می‌آید



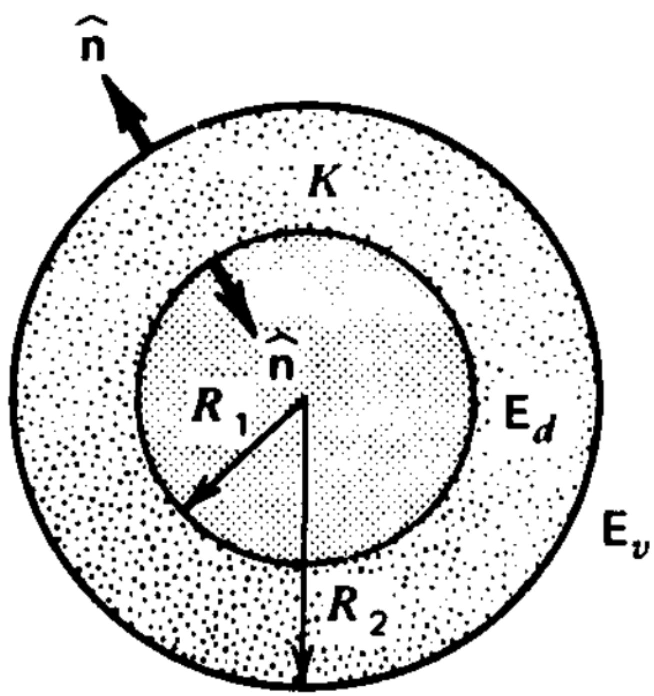
$$Q_P = \lim_{b \to ۰} ۴\pi b^۲ (\mathbf{P} \cdot \mathbf{n})_{r=b} = -\frac{(K-۱)q}{K}$$

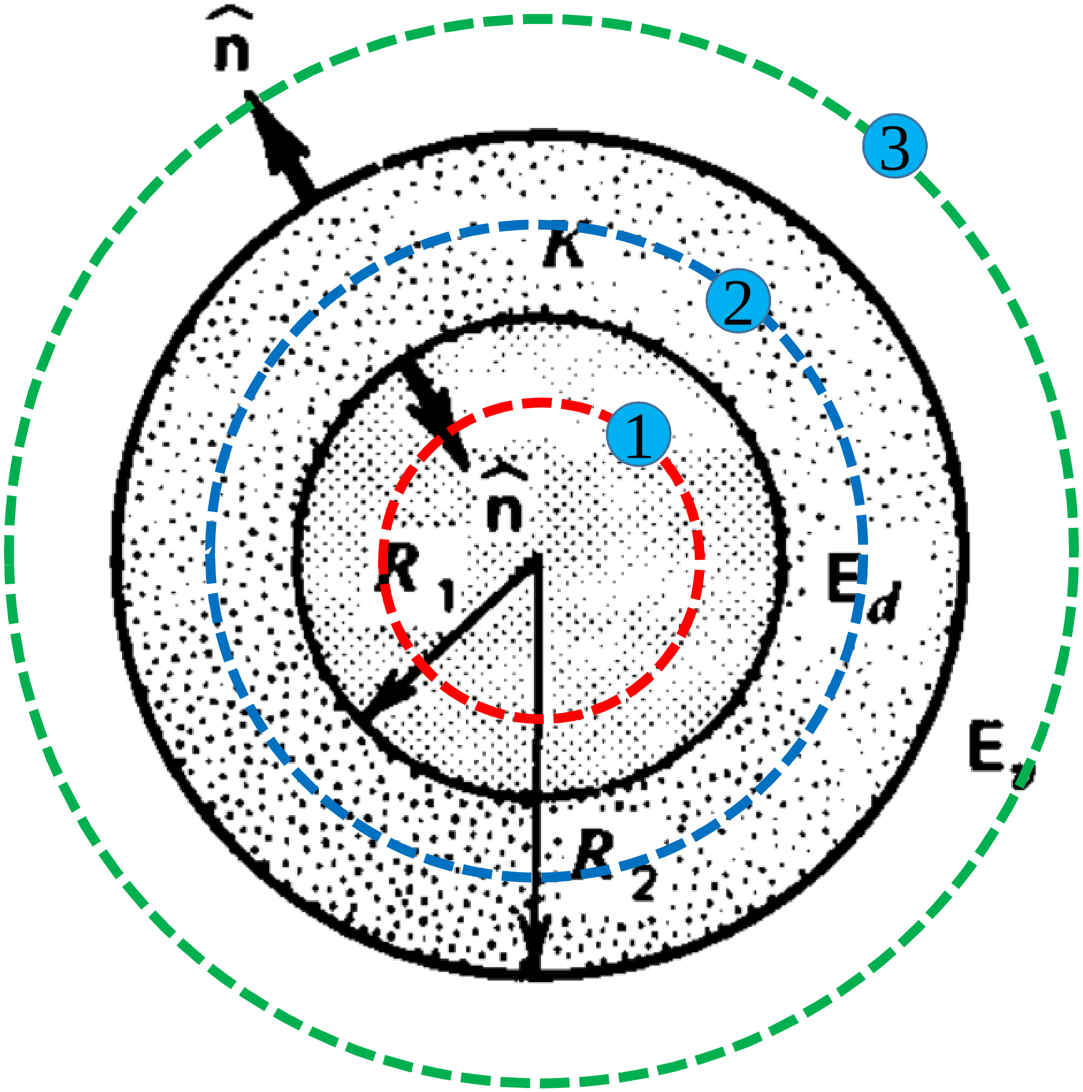
$$Q_P + q = \frac{۱}{K} q$$


E'
Eq
+q

Example: Conducting Sphere Enclosed **by a Dielectric Shell-Gauss' Law**

In this example, *we shall assume we have a conducting sphere of radius R_1, on which* is placed a charge Q (=Q_f). In contact and concentric with this sphere is dielectric material having a dielectric constant K that extends out to a radius R_2. *We wish to find the fields and* charge densities generated everywhere.





Because of the spherical symmetry, it is expected that the electric field at a distance ***r from*** the center of the sphere will be radial and independent of ***θ and φ. As a result, Gauss' law can*** be used to determine the fields easily.

1. $r < R_1$
2. $R_1 < r \leq R_2$
3. $r > R_2$

Fields

$$\oint \vec{D} \, . \, \hat{n} da = Q_f$$

1 $r < R_1$

The fields inside the sphere, of course, vanish; therefore

$$\mathbf{D} = 0 \qquad \text{and} \qquad \mathbf{E} = 0$$

2 $R_1 < r \leq R_2$

$$\oint \vec{D} \, . \, \hat{n} da = Q_f \quad \rightarrow \quad \oint D \, \hat{r} . \hat{r} da = Q \quad \rightarrow \quad D(4\pi r^2) = Q$$

$$\mathbf{D} = \frac{Q_f}{4\pi r^2} \hat{\mathbf{r}} \qquad \text{and} \qquad \mathbf{E}_d = \frac{Q_f}{4\pi \varepsilon r^2} \hat{\mathbf{r}}$$

3 $r > R_2$

in the vacuum regions

$$\mathbf{D} = \frac{Q_f}{4\pi r^2}\hat{\mathbf{r}} \quad \text{and} \quad \mathbf{E}_v = \frac{Q_f\hat{\mathbf{r}}}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

Polarization & charge density

polarization surface charge densities, at $\mathbf{r} = \mathbf{R}_1$

$$\mathbf{P} = \chi \mathbf{E}$$

$$\mathbf{E}_d = \frac{Q_f}{4\pi\varepsilon r^2}\,\hat{\mathbf{r}}$$

$$\mathbf{P} = \chi \mathbf{E}_d = (K-1)\frac{Q_f}{4\pi K \varepsilon_\circ R_1^2}\,\hat{\mathbf{r}}$$

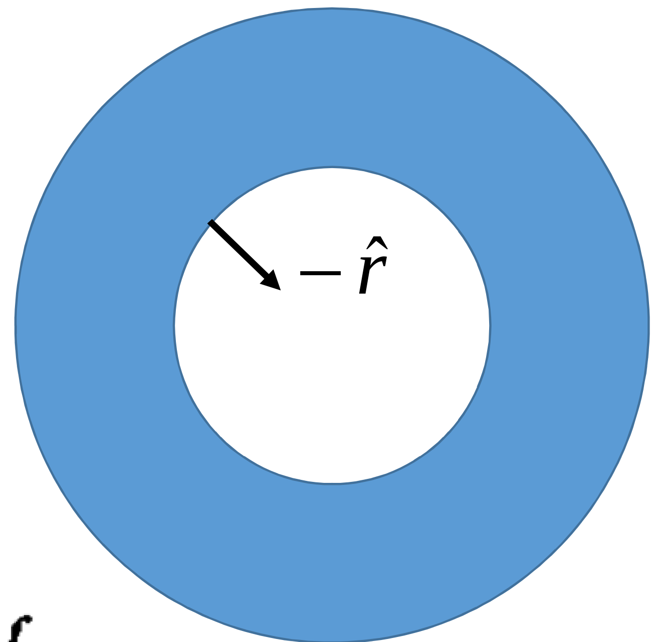
$$\varepsilon = K\varepsilon_\circ$$

$$\varepsilon(E) = \varepsilon_\circ + \chi(E)$$

$$K\varepsilon_0 = \varepsilon_0 + \chi \quad \rightarrow \quad \chi = \varepsilon_0 (K-1)$$

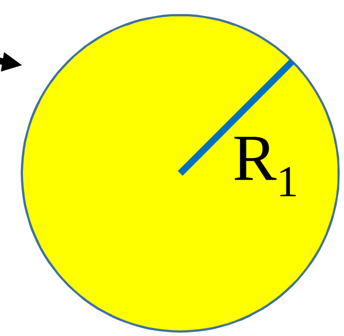
charge density at $\mathbf{R_1}$

$$\sigma_p = \mathbf{P}\cdot\hat{\mathbf{n}} = \mathbf{P}\cdot(-\hat{\mathbf{r}})$$



$$\mathbf{P} = \chi \mathbf{E}_d = (K-1)\frac{Q_f}{4\pi K\varepsilon_o R_1^2}\hat{\mathbf{r}}$$

$$\sigma_p = -(K-1)\frac{Q_f}{4\pi K\varepsilon_o R_1^2} = -\frac{(K-1)\sigma_f}{K\varepsilon_o}$$



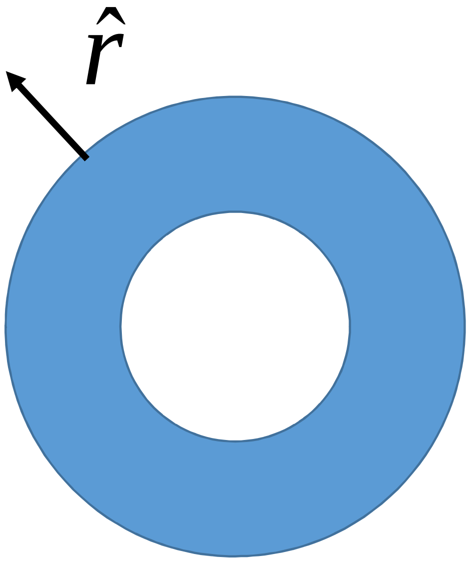
$$\sigma_f = \frac{Q_f}{4\pi R_1^2}$$

polarization surface charge densities, at **r = R$_2$**

$$\mathbf{P} = \chi \mathbf{E}_d = (K - 1)\frac{Q_f}{4\pi K\varepsilon_\circ R_2^2}\hat{\mathbf{r}}$$

charge density at **R$_2$**

$$\sigma_p = \mathbf{P}\cdot\hat{\mathbf{n}} = \mathbf{P}\cdot(\hat{\mathbf{r}}) = (K - 1)\frac{Q_f}{4\pi K\varepsilon_\circ R_2^2}$$



$$\sigma_P(r = R_1) = -\sigma_P(r = R_2)$$

This must be true because the dielectric is assumed to have no net charge,

There is no volume polarization charge

$$\rho_P = -\nabla \cdot \mathbf{P}$$

$$\mathbf{P} = \chi \mathbf{E}$$

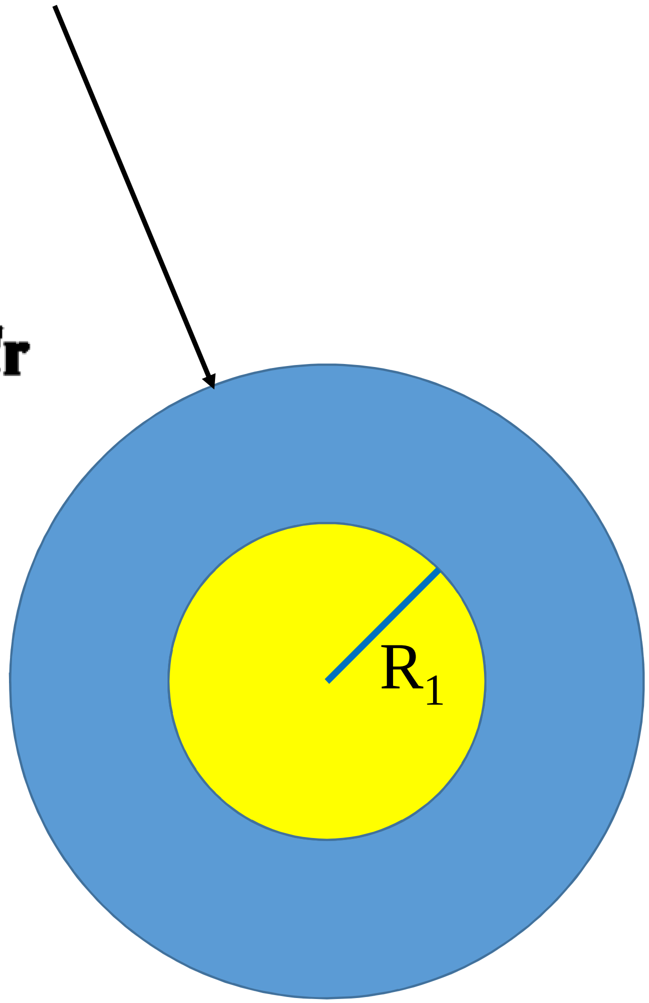
$$\mathbf{E}_d = \frac{Q_f}{4\pi\varepsilon r^2}\hat{\mathbf{r}}$$

$$\Rightarrow \quad \rho_P = -(K - 1)\varepsilon_0(\nabla \cdot \mathbf{E}_d) = 0.$$

Potential of the conductor

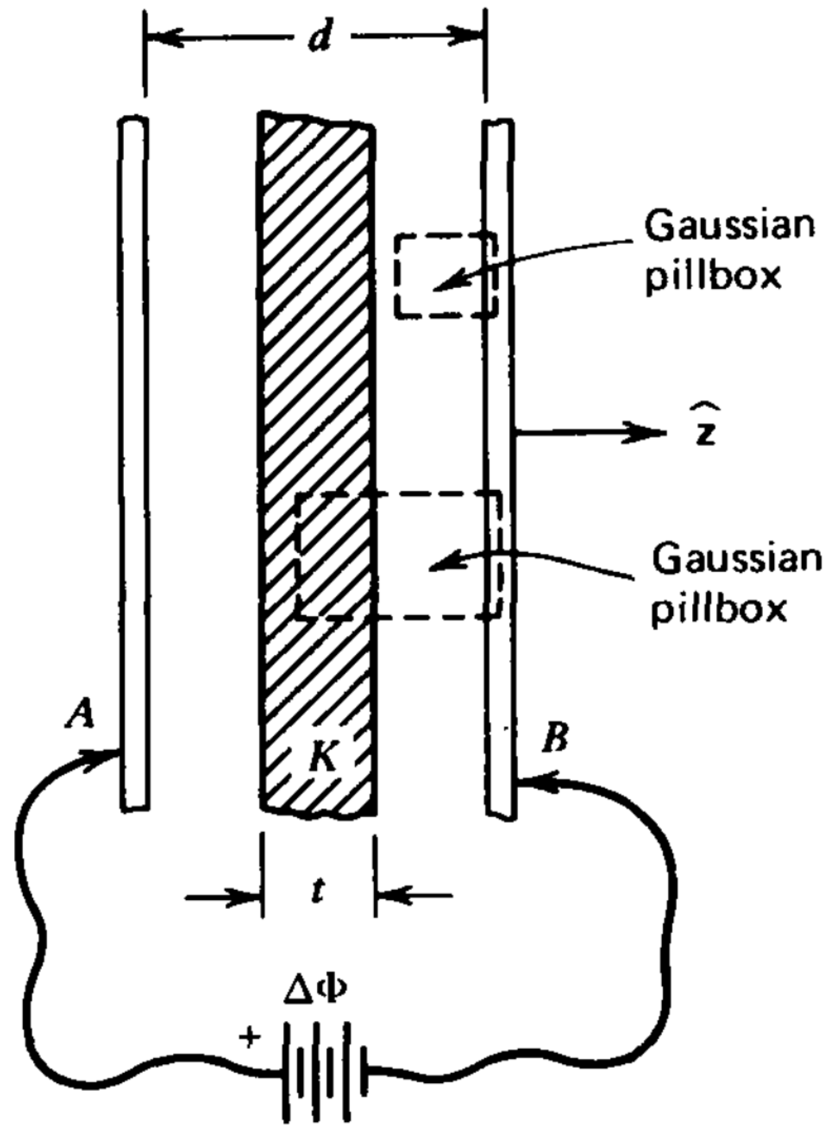
$$\Phi_c \equiv -\int_{\infty}^{R_1} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = -\int_{\infty}^{R_2} \mathbf{E}_v \cdot d\mathbf{r} - \int_{R_2}^{R_1} \mathbf{E}_d \cdot d\mathbf{r}$$

$$\Phi_c = \frac{Q_f}{4\pi\varepsilon_0 R_2} + \left[\frac{Q_f}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)\right]$$



Example
The Parallel-Plate Capacitor--Gauss' Law

Consider two parallel conducting plates whose dimensions are very large compared to their separation, d. The surface area of the plates is A. A dielectric slab of thickness t was inserted between the plates. The dielectric has a permittivity $\varepsilon = K\varepsilon_0$, and the potential difference between the plates is $\Delta\Phi$.



Because the plate dimensions are much larger than the distance between them, we expect the electric field to be perpendicular to the plates and to be constant in the dielectric and in vacuum with values $E_d\hat{\mathbf{z}}$ and $E_v\hat{\mathbf{z}}$, respectively.

$$\Delta\Phi = \int_A^B \mathbf{E}\cdot d\mathbf{r} = E_d t + E_v(d - t)$$

$$\oint \vec{D}\,.\,\hat{n}da = Q_f \quad \rightarrow \quad D\int da = Q_f \quad \rightarrow \quad D = \frac{Q_f}{A} = \sigma_f$$

$$D_d = D_v = \sigma_f$$

$$E_v = KE_d$$

$$\Rightarrow \quad \Delta\Phi = E_d[t + K(d - t)]$$

$$\sigma_f = \varepsilon_0 E_v = \frac{K\varepsilon_0\,\Delta\Phi}{t + K(d - t)} \qquad \text{and} \qquad \sigma_p = \mathbf{P}\cdot\hat{\mathbf{n}} = -\left(\frac{K-1}{K}\right)\sigma_f.$$

$$E_v = \frac{\sigma_f}{\varepsilon_0} \qquad \text{and} \qquad E_d = \frac{\sigma_f - \sigma_p}{\varepsilon_0}$$