بسم الله الرحمن الرحيم

فصل چهارم

میدان الکترواستاتیک در محیط های دی الکتریک

بخش سوم

۷.۴ شرایط مرزی حاکم بر بردارهای میدان

باید بدانیم که بردارهای میدان $\mathbf{E}$ و $\mathbf{D}$ درعبورازفصل مشترك دومحیط چگونه تغییر می کنند

دومحیط ۱ و ۲ را درنظربگیرید که باهم درتماس‌اند.

فرض‌می کنیم‌یك چگالی‌سطحی بارخارجی، σ، وجود دارد

می‌تواند ازنقطه‌ای به‌نقطهٔ دیگر برروی فصل مشترك دو محیط تغییر کند.

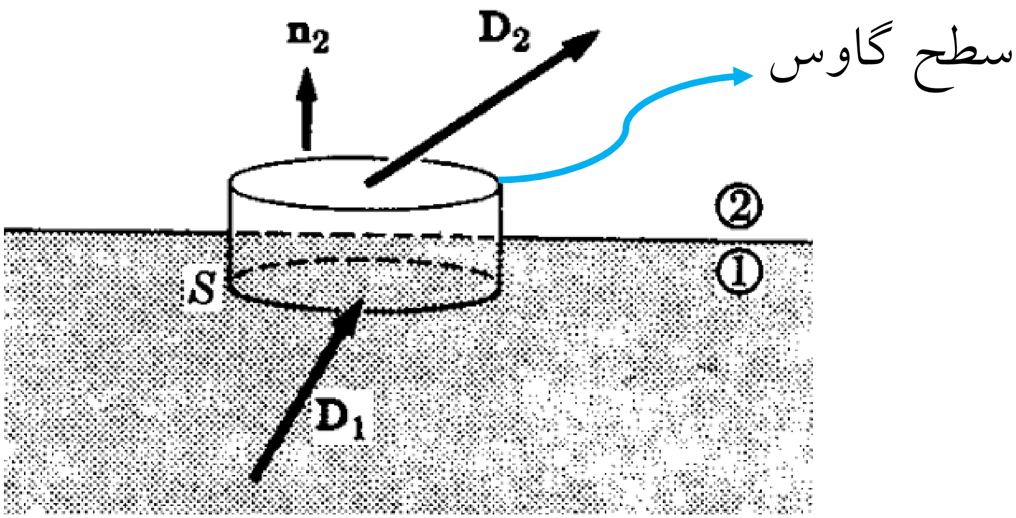
تغییر بردار جابه جایی الکتریکی در مرز بین دو محیط

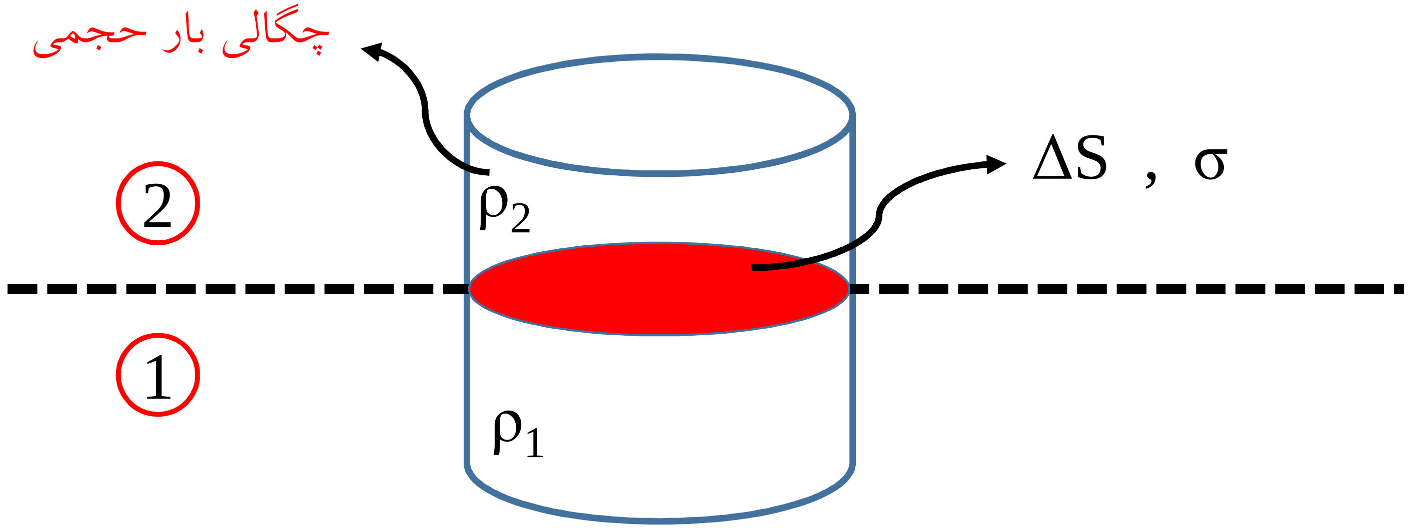
سطح قرص مـــانندکوچکی مانند S را درنظرمی گیریم سطح گاوس

که فصل مشترک‌را قطع کند ومساحتی برابر ΔS از آن را دربرگیرد.

ارتفاع این قرص درمقایسهٔ باشعاع قاعده‌های آن، آن‌قدرکوچک فرض می‌شود

که می‌توان از آن صرفنظر کرد.





سهم بار حجمی + سهم بار سطحی = بار محصور درسطح گاوس

$\sigma \Delta S + \frac{1}{2}(\rho_1 + \rho_2) \times$ حجم   مقدار بار محصور در این سطح

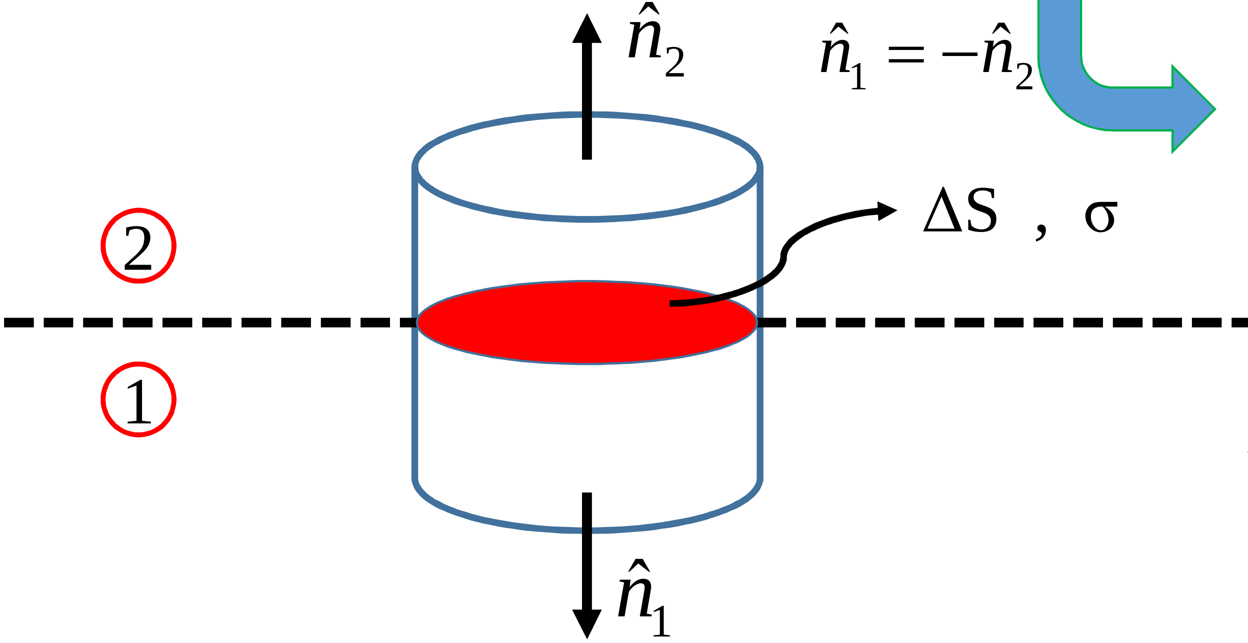
اما حجم قرص بسیار کوچك است ومی‌توان از جملهٔ آخر صرفنظر کرد.

$$\oint \vec{D}\,.\,\hat{n}da = q$$

$$\mathbf{D}_{۲}\,.\,\mathbf{n}_{۲}\,\Delta S + \mathbf{D}_{۱}\,.\,\mathbf{n}_{۱}\,\Delta S = \sigma\,\Delta S$$

$$\hat{n}_1 = -\hat{n}_2$$

$$(\mathbf{D}_{۲} - \mathbf{D}_{۱})\,.\,\mathbf{n}_{۲} = \sigma$$



$\mathbf{n}_2$ بردار یکه عمود بر مرز از ناحیه ۱ به ناحیه ۲

$$(\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) \cdot \mathbf{n}_2 = \sigma$$

$\mathbf{n}_2$ می‌تواند معرف بردار عمود برفصل مشترك باشد

$$\boxed{D_{2n} - D_{1n} = \sigma}$$

بنابراین، ناپیوستگی مؤلفهٔ عمود $\mathbf{D}$ با چگالی سطحی بار خـارجی در روی فصل مشترك مشخص می‌شود. به‌عبارت دیگر، اگرباری برروی فصل مشترك وجود نداشته باشد، مؤلفهٔ عمود $\mathbf{D}$ پیوسته است.

If $\sigma = 0 \;\; \rightarrow \;\; D_{2n} = D_{1n}$ $\qquad \mathbf{D}_2 \cdot \hat{\mathbf{n}} = \mathbf{D}_1 \cdot \hat{\mathbf{n}}$

2. If the two media are characterizable by dielectric constants K_1 and K_2 or their permitivities ε_1 and ε_2, we have $\varepsilon_2 \mathbf{E}_2 \cdot \hat{\mathbf{n}} - \varepsilon_1 \mathbf{E}_1 \cdot \hat{\mathbf{n}} = \sigma_f$ or, expressed in terms of the corresponding potentials Φ_2 and Φ_1,

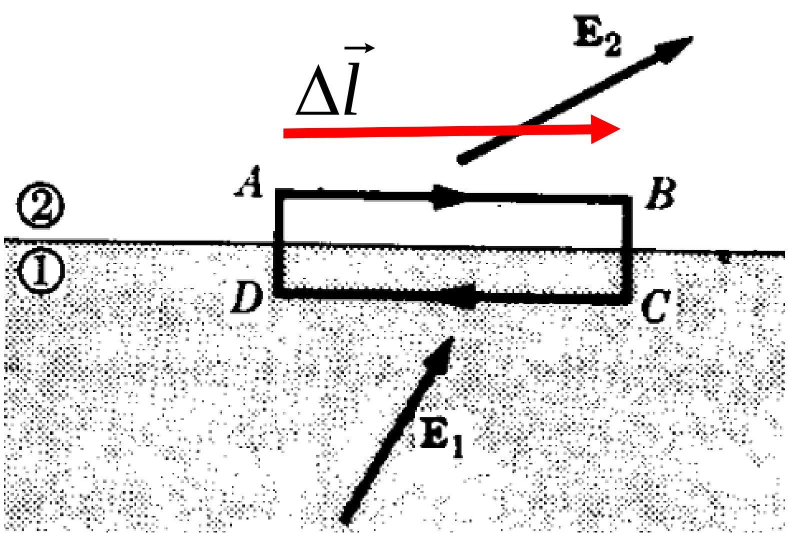
$$-\varepsilon_2 \nabla \Phi_2 \cdot \hat{\mathbf{n}} + \varepsilon_1 \nabla \Phi_1 \cdot \hat{\mathbf{n}} = \sigma_f$$

3. If medium 1 is a conducting medium, then $\mathbf{E}_1$, $\mathbf{D}_1$, and $\mathbf{P}_1$ are equal to zero and the relevant boundary condition is

$$\mathbf{D} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \sigma_f$$

تغییر بردار میدان الکتریکی در مرز بین دو محیط

چون میدان الکتروستاتیکی $\mathbf{E}$ را می‌توان از منفی شیب پتانسیل به‌دست آورد، انتگرال خطی $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$ برروی هر مسیر بسته‌ای صفراست. این نتیجه را در مسیر مستطیلی $ABCDA$ درشکل ۶.۴ به‌کار می بریم. در این مسیر، طولهای AB و CD مساوی Δl و قطعه‌های AD و BC بسیار کوچك وقابل صرفنظر فرض می‌شوند؛ بنا براین



$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi \quad \rightarrow \quad \oint \vec{E}.d\vec{l} = 0$$

$$\mathbf{E}_۲ \cdot \Delta \mathbf{l} + \mathbf{E}_۱ \cdot (-\Delta \mathbf{l}) = ۰$$

$$(\mathbf{E}_۲ - \mathbf{E}_۱) \cdot \Delta \mathbf{l} = ۰$$

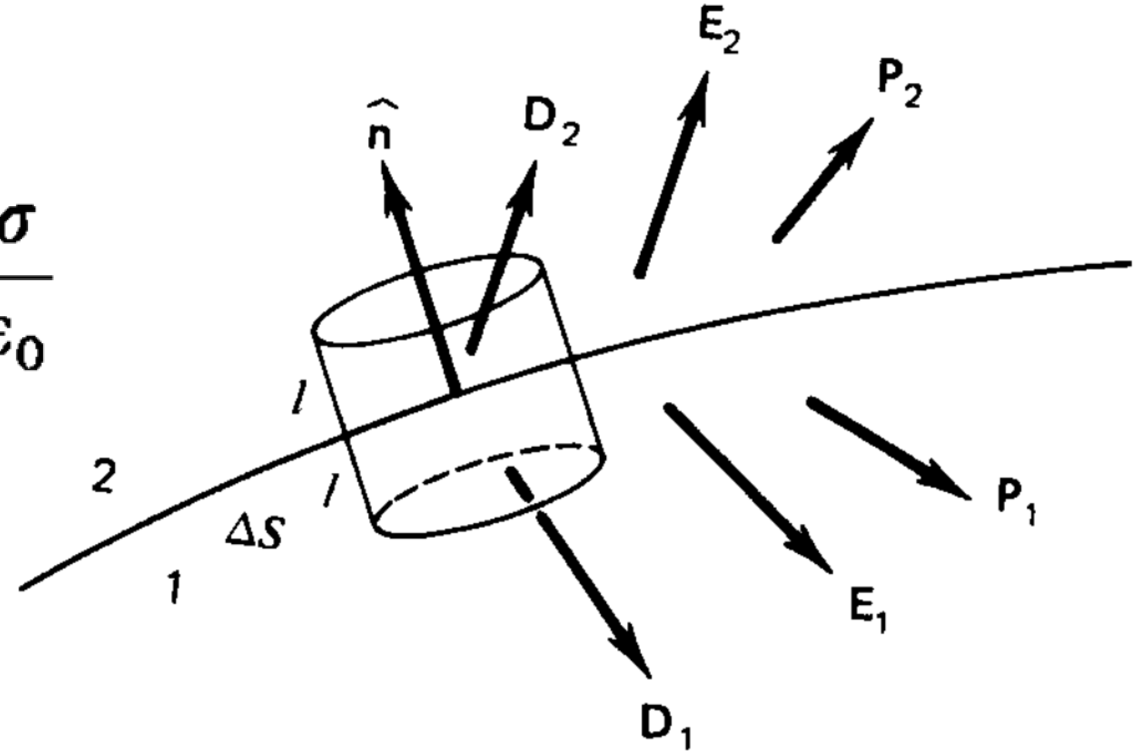
$$E_{۲t} = E_{۱t}$$

مؤلفهٔ مماسی میدان الکتریکی درعبورازفصل مشترك پیوسته است

رفتار بردار جابه جایی الکتریکی و میدان الکتریکی در عبور از یک مرز بین دو محیط متفاوت دلخواه

$$\begin{cases} D_{2n} - D_{1n} = \sigma \\ E_{2t} = E_{1t} \end{cases}$$

$$\mathbf{E}_2 \cdot \hat{\mathbf{n}} - \mathbf{E}_1 \cdot \hat{\mathbf{n}} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$



یک حالت خاص:

یکی ازدو محیط رسانا باشد

$$\varepsilon(E)=\varepsilon_0+\chi(E) \qquad \chi=\infty \quad \rightarrow \quad \varepsilon=\infty$$

اگرمحیط ۱ را رسانا فرض کنیم

$$\begin{cases} D_{2n}-D_{1n}=\sigma \\ E_{2t}=E_{1t} \end{cases} \qquad \mathbf{E}_1=0 \qquad E_{2t}=0$$

$$D_1=0 \qquad D_{2n}=\sigma$$

که در آن σ چگالی بارسطحی کل برسطح رساناست ولی شامل بارسطحی قطبشی برسطح دی‌الکتریك نمی‌شود.

میدان در داخل دی‌الکتریك همواره برسطح رسانا عمود است.

شرط مرزی روی پتانسیل در مرز ماده درالکتریک:

پتانسیل φ درعبورازفصل مشترك دومحیط باید پیوسته باشد.

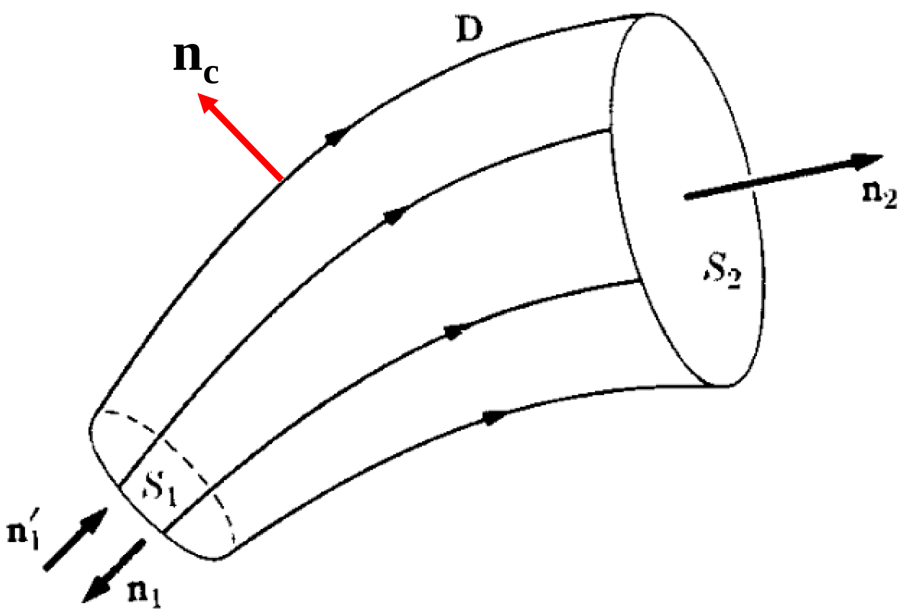
جواب معادله پواسون یا لاپلاس برای مرزهای دی الکتریک دارای جواب منحصر به فردی می باشد

شار $\mathbf{D}$ درناحیه‌هایی ازفضاکه در آن بار خـارجی وجود ندارد پیوسته است.

لوله جابه جایی الکتریکی شامل خطوط فرضی که در هر نقطه مماس بر بردار جابه جایی الکتریکی است

این خطوط سطح جانبی لوله را قطع نمی کنند

لوله از دو انتها به سطوح S_1 و S_2 ختم می شود



$$\oint \vec{D}\cdot\hat{n}\,da = Q \quad \rightarrow \int_{S_1} \vec{D}\cdot\hat{n}_1 da + \int_{S_2} \vec{D}\cdot\hat{n}_2 da + \underbrace{\int_{S_C} \vec{D}\cdot\hat{n}_C da}_{0} = Q$$

$$\hat{n}_1 = -\hat{n}'$$

$$\int_{s_2} \mathbf{D}\cdot\mathbf{n}\,da - \int_{s_1} \mathbf{D}\cdot\mathbf{n}'\,da = Q$$

$$if\ Q=0 \quad \rightarrow \quad \int_{s_2} \mathbf{D}\cdot\mathbf{n}\,da = \int_{s_1} \mathbf{D}\cdot\mathbf{n}'\,da$$

هرگاه درناحیهٔ محصور شده بار خارجی وجود نداشته باشد، آنگاه $Q = 0$ است، و همان شاری که از S_1 وارد لوله می‌شود از S_2 خارج می‌شود.

وقتی بار خــارجی وجود داشته باشد، این بار ناپیوستگی در شار جابه‌جــایی‌را تعیین می کند

از این رو خطــوط جابه‌جایی به‌بارهای خارجی‌منتهی‌می‌شوند.

خطوط نیرو یا به‌بارهای‌خارجی ختم می‌شوند و یا به‌بارهای قطبشی.

۸.۴ مسائل مربوط به‌مقادیرمرزی در دی‌الکتریکها

ρ چگالی بارخارجی

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$$

معادلهٔ اساسی

ε ثابت مشخصهٔ جسم

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon}\rho$$

$$\nabla \cdot (\varepsilon_0 K \mathbf{E}) = \rho_f$$

$$\mathbf{E} = -\nabla \varphi$$

$$\nabla^2 \varphi = -\frac{1}{\varepsilon}\rho$$

ازاین‌رو پتانسیل در دی‌الکتریك در معادلهٔ پواسون صدق می‌کند؛ تنها تفاوت میان معادلهٔ (۴۸.۴) و رابطهٔ نظیرآن برای پتانسیل درخلأ آن است که ε جانشین ε_0 شده است (و ρ چگالی بارخارجی است نه‌چگالی بار کل).

معمولا بار درون حجم در الکتریک صفر است

یا بار به صورت بارهای نقطه ای درون حجم آن قرار دارد

یا فقط بار روی سطح آن توریع شده است

$$\nabla^2 \varphi = 0$$

تحت این شرایط، درسراسر جسم دی‌الکتریك، پتانسیل درمعادلهٔ لاپلاس صدق می کند

بنابراین مسئلهٔ الکتروستاتیکی برای محیطهای دی‌الکتریك خطی، همسانگرد، و همگن تبدیل می‌شود به‌مسئلهٔ پیداکردن جوابهای معادلهٔ لاپلاس در هر یك ازاین محیطها والحاق جوابهای مربوط به‌محیطهای مختلف به وسیلهٔ شرایط مرزی بخش گذشته. مسائل

۹.۴ کرهٔ دی‌الکتریك در یك میدان الکتریکی یکنواخت

می‌خواهیم نحوهٔ تغییرشکل خطوط نیرورا هنگامی که یك کرهٔ دی‌الکتریك به‌شعاع a در ناحیه‌ای ازفضا قرارمی‌دهیم که درآن میدان الکتریکی درابتدا یکنواخت $\mathbf{E}_\circ$ وجود دارد،

دی‌الکتریك خطی،

همسانگرد،

وهمگن

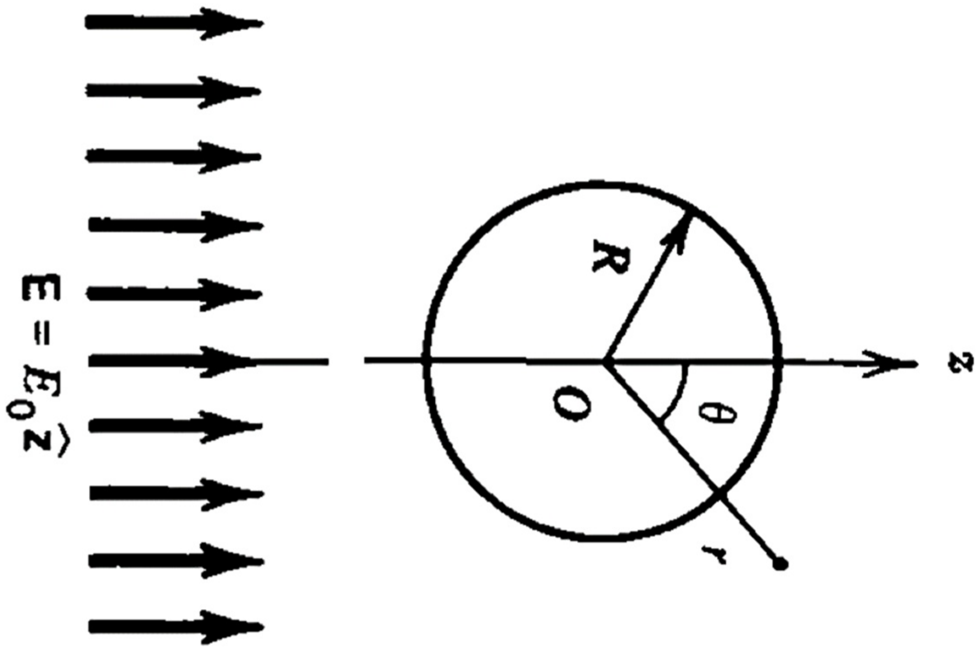
باثابت دی‌الکتریك K

بارهم ندارد

مبدأ مختصات مرکزکره

جهت $\mathbf{E}_\circ$ را به‌عنوان جهت قطبی (محور z)

پتانسیل را می‌توان به‌صورت مجموعی از هماهنگهای منطقه‌ای نوشت.



$$\varphi(r,\ \theta) = \sum_{n=0}^{\infty}\left[A_n r^n + B_n r^{-(n+1)}\right]P_n(\theta)$$

برای ناحیهٔ خلأ (ناحیهٔ ۱) درخارج کره

$$\varphi_1(r,\ \theta) = A_1 r \cos\theta + C_1 r^{-2} \cos\theta \qquad r > a$$

برای ناحیهٔ دی‌الکتریك (ناحیهٔ ۲)

$$\varphi_2(r,\ \theta) = A_2 r \cos\theta + C_2 r^{-2} \cos\theta \qquad r < a$$

ضرایب A_1، A_2، C_1، و C_2 مجهول‌اند و باید به‌کمك شرایط‌مرزی محاسبه‌شوند.

هماهنگ r^{-1} ضروری نیست زیرا وجودآن مستلزم وجود بارخالص برروی کره است.

شروط مرزی:

1 درفواصل دور ازکره، میدان الکتریکی حـالت یکنواختی خود را حفظ می کند

$$\varphi_1 \to -E_0 r \cos\theta$$

$$\varphi_1(r,\ \theta) = A_1 r \cos\theta + C_1 r^{-2} \cos\theta \qquad r > a$$

$$A_1 = -E_0$$

2

$$\varphi_2(r,\theta) = \underbrace{A_2 r \cos\theta}_{0} + \underbrace{C_2 r^{-2} \cos\theta}_{\infty} \qquad r < a$$

$$r \to 0$$

بنابراین در این جمله C_2 هنگامی می تواند غیر صفر باشد که پتانسیل ناشی از یک دو قطبی الکتریکی نقطه ای باشد

پتانسیل ناشی از یک دو قطبی الکتریکی نقطه ای

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\mathbf{p} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}$$

$$C_2 = 0$$

دراین مسئله دوقطبی نقطه‌ای موجود نیست

3 پیوستگی پتانسیل در فصل مشترك میان دی الکتریك وخلاء

$r = a \rightarrow \qquad \varphi_1\,(r = a) = \varphi_2\,(r = a)$

$$\begin{cases} \varphi_1(r,\ \theta) = A_1 r \cos\theta + C_1 r^{-2} \cos\theta & r > a \\ \varphi_2(r,\ \theta) = A_2 r \cos\theta + C_2 r^{-2} \cos\theta & r < a \end{cases}$$

$$-E_0 a + C_1 a^{-2} = A_2 a$$

4

هیچ گونه باری درسطح دی‌الکتریک وجود ندارد،

$$D_{2n} - D_{1n} = \sigma \quad \longrightarrow \quad D_{1r} = D_{2r} ,\; r = a$$

$$\begin{cases} \varphi_1(r,\ \theta) = A_1 r \cos\theta + C_1 r^{-2} \cos\theta & r > a \\ \varphi_2(r,\ \theta) = A_2 r \cos\theta + C_2 r^{-2} \cos\theta & r < a \end{cases}$$

$$E_0 + 2C_1 a^{-3} = -K A_2$$

$$\begin{cases} -E_0 a + C_1 a^{-2} = A_2 a \\ E_0 + 2C_1 a^{-3} = -K A_2 \end{cases}$$

$$A_2 = -\frac{3E_0}{K+2}$$

$$C_1 = \frac{(K-1)\,a^3 E_0}{K+2}$$

$$\varphi_1(r,\ \theta) = A_1 r \cos\theta + C_1 r^{-2} \cos\theta \qquad r > a$$

$$\varphi_1(r,\ \theta) = -E_0 r \cos\theta + \frac{(K-1)\,a^3 E_0}{K+2}\, r^{-2} \cos\theta$$

$$\varphi_2(r,\ \theta) = A_2 r \cos\theta + C_2 r^{-2} \cos\theta \qquad r < a$$

$$\varphi_2(r,\ \theta) = -\frac{3E_0}{K+2}\, r \cos\theta$$

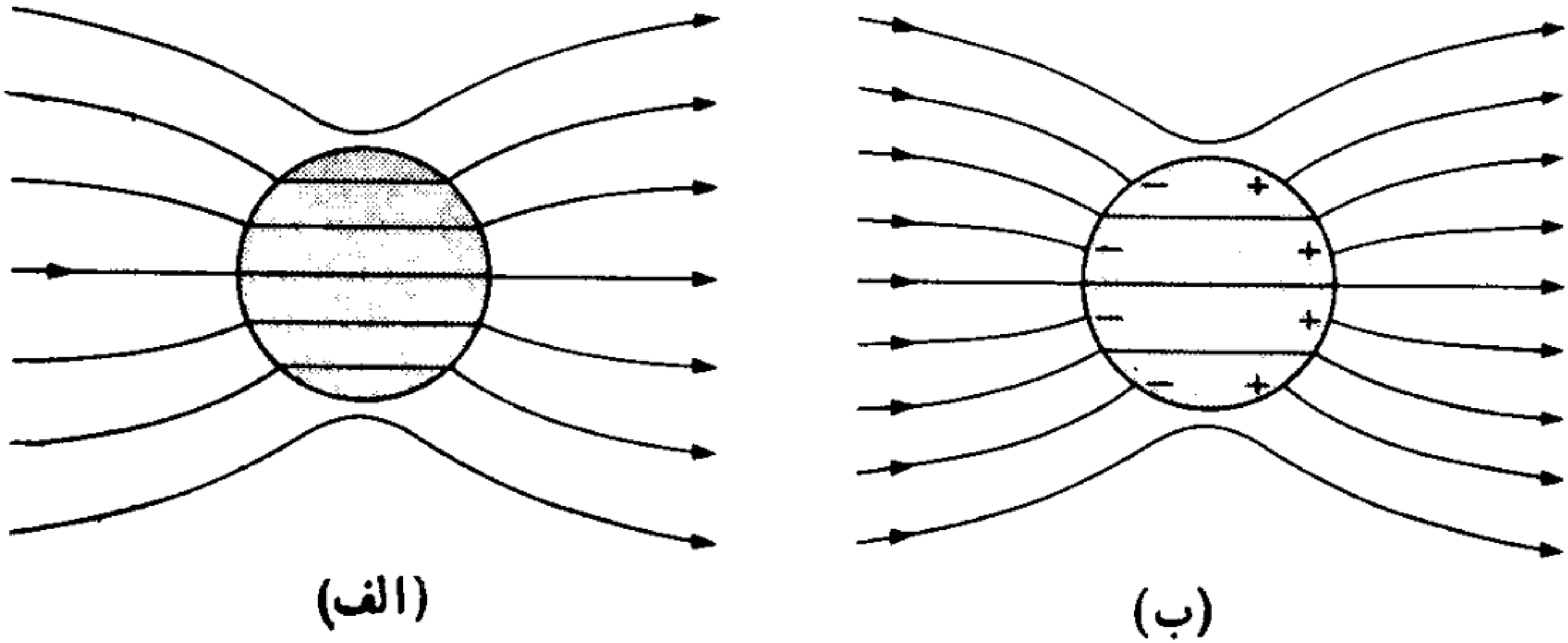
$$\begin{cases} \mathbf{E} = -\nabla \varphi \\ \mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} \end{cases}$$

مؤلفه‌هـــای $\mathbf{E}$ و $\mathbf{D}$ را در هر نقطهٔ $(r,\ \theta,\ \phi)$ با مشتق گیری می‌توان به‌دست آورد.

$$\varphi_۲(r,\ \theta) = -\frac{۳E_۰}{K+۲}\underbrace{r\cos\theta}_{z}$$

میدان الکتریکی درداخل کره با $\mathbf{E}_۰$ هم جهت است

$$\mathbf{E}_۲ = \frac{۳}{K+۲}\mathbf{E}_۰$$



شکل ۸.۴ میدان الکتریکی یکنواخت در اثرحضور یك کرهٔ دی‌الکتریك تغییر شکل یافته است: (الف) خطوط جا به‌جایی الکتریکی. (ب) خطوط میدان‌الکتریکی.

*۱۰.۴ نیروی وارد بر یك بار نقطه‌ای واقع در یك دی‌الکتریك

نیروی وارد بریك رسانای باردار کوچك‌کروی که درداخل یك دی‌الکتریك خطی وهمسانگرد نهاده شده است

در حد، وقتی که جسم رسانا ازلحاظ ماکروسکوپی بی‌اندازه‌کوچك است نتیجهٔ این محاسبات، نیروی وارد بریك بارنقطه‌ای را به‌دست می‌دهد.

بدست آوردن رابطه نیروی وارد بر جسم رسانا در میدان

ابتدا میدان الکتریکی وچگالی بارسطحی دریك نقطهٔ معین ازسطح‌رسانارا باروش شرایط مرزی که دربخش پیش گفته شد، به‌دست می آوریم، وسپس‌نیروی $\mathbf{F}$ را باانتگرال‌گیری ازمیدان برروی سطح رسانا محاسبه می کنیم

$$\mathbf{F}=\oint_s \mathbf{E}' \sigma \, da$$

$\mathbf{E}'$ میدان‌الکتریکی درروی سطح da

میدان ناشی ازخود عنصر سطحی بار ازآن کم شده است. $\mathbf{E}'=\mathbf{E}-\mathbf{E}_s$

که درآن $\mathbf{E}_s$ میدان الکتریکی ناشی ازخود عنصرسطحی بار، یعنی $\sigma\, da$ است. این نکته که میدان $\mathbf{E}'$ شامل $\mathbf{E}_s$ نباشد مهم است، زیرا کمیت $\mathbf{E}_s \sigma\, da$ نمایندهٔ برهم کنش عنصر سطحی بار $\sigma\, da$، با میدان خودش است.

$$\mathbf{E}_s \, \sigma \, da$$

برهم کنش عنصر سطحی بار $\sigma\, da$، با میدان خودش

هیچ نیروی خاصی برعنصروارد نمی‌کند، اما تنش سطحی تولید می کند

$$\mathscr{T}_s = \sigma \, E_s$$

این تنش ناشی ازدفع متقابل الکترونها (یایونهای مثبت اضافی) درلایهٔ سطحی است.این تنش بانیروهای قوی چسبندگی درمادهٔ سازندهٔ عنصرخنثی می‌شود.

میدان الکتریکی ناشی ازخود عنصرسطحی بار

برای نقطه‌ای که مستقیماً درروی عنصــر سطح است این عنصــر مثل یك صفحهٔ نامتناهی است، یعنی عنصر سطح یك زاویهٔ 2π را دربرمی‌گیرد:

$$\mathbf{E}_S = \frac{\sigma}{2\varepsilon}\mathbf{n}$$

تنش $\mathcal{F}_S$ با σ^2 متناسب است

همیشه، بدون توجه به‌علامت σ ، به‌صورت یك‌کشش عمل می‌کند.

محاسبهٔ نیروی وارد بریک رسانا

$$\mathbf{E}=\frac{\sigma}{\varepsilon}\mathbf{n}$$ میدان الکتریکی کل درست درخارج ازجسم رسانا

$$\left\{\begin{aligned}&\mathbf{E}'=\mathbf{E}-\mathbf{E}_s\\&\mathbf{E}_s=\frac{\sigma}{۲\varepsilon}\mathbf{n}\\&\mathbf{E}=\frac{\sigma}{\varepsilon}\mathbf{n}\end{aligned}\right. \Rightarrow \mathbf{E}'=\frac{۱}{۲}\mathbf{E}$$

$$\left\{\begin{aligned}&\mathbf{F}=\oint_s\mathbf{E}'\sigma\,da\\&\mathbf{E}'=\frac{۱}{۲}\mathbf{E}\end{aligned}\right. \Rightarrow \mathbf{F}=\frac{۱}{۲}\oint_s\mathbf{E}\sigma\,da$$ نیروی وارد بررسانا

محاسبه نیروی وارد بر یک کره رسانای کوچک در دی الکتریک

بار کل برروی این رسانا Q، وشعاع آن a

کرهٔ رسانا دریك دی‌الکتریك با گذردهی ε نهاده (یاغوطه‌ور) شده است

$$\varphi(r,\theta)=\varphi_0-E_0 r\cos\theta+\frac{E_0 a^3}{r^2}\cos\theta+\frac{Q}{4\pi\varepsilon r}$$

سهم ناشی از بار خالص

$$E_r=E_0(1+2a^3/r^3)\cos\theta+Q/4\pi\varepsilon r^2$$

$$E_\theta=-E_0(1-a^3/r^3)\sin\theta$$

چگالی سطحی بار بر روی سطح کره

$$\sigma(\theta)=\varepsilon E_r\big|_{r=a}=۳\varepsilon E_۰\cos\theta+Q/۴\pi a^۲$$

به‌علت تقارن، تنها مؤلفهٔ غیر صفر نیرو درجهت $\theta=۰$ است، یعنی درجهت محور z

$$\mathbf{F}=\frac{۱}{۲}\oint_S \mathbf{E}\sigma da$$

$$F_z=\frac{۱}{۲}\int_۰^\pi (E_r)_{r=a}\cos\theta\sigma(\theta)\,۲\pi a^۲\sin\theta\, d\theta=E_۰ Q$$

$$\mathbf{F}=Q\mathbf{E}_۰$$