بسم الله الرحمن الرحيم

فصل ششم

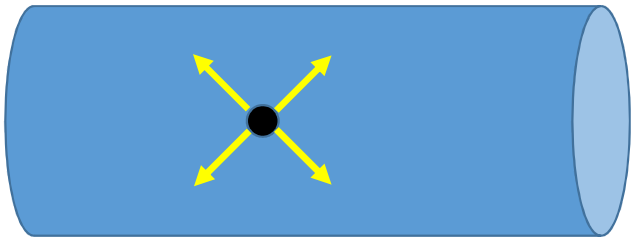
جریان الکتریکی

جریان

ناشی از حرکت جهتدار حامل های بار (الکترون ها یا حفره ها) می باشد

مواد رسانا شامل الکترونهای آزاد با قابلیت تحرک می باشند

الف) رسانا بدون اعمال اختلاف پتانسیل

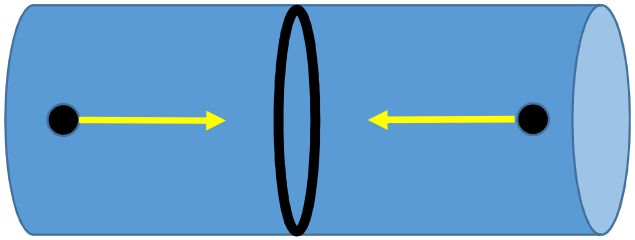


فاقد میدان الکتریکی

الکترونها دارای حرکت کاتوره ای

در مدت زمانهای مشخص Δt :

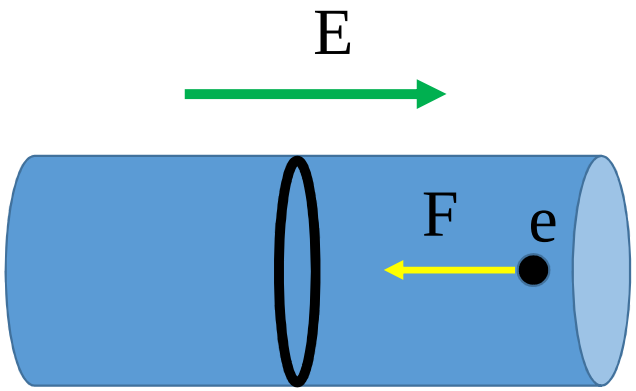
تعداد الکترونهای عبوری از مقطع راست به چپ = تعداد الکترونهای عبوری از مقطع چپ به راست



بار خالص عبوری از مقطع صفر است

جریان عبوری از مقطع صفر است

ب) رسانا با اعمال اختلاف پتانسیل



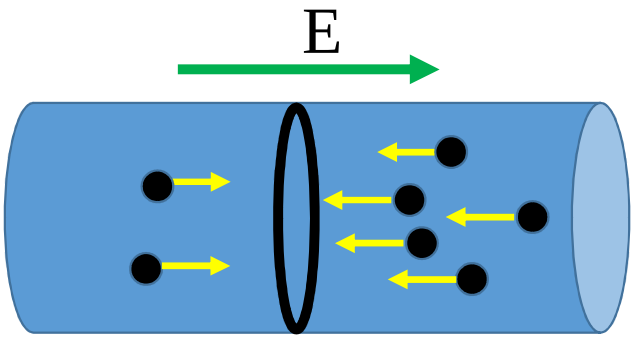
ایجاد یک میدان الکتریکی

اعمال نیروی الکتریکی خالص به الکترونها $\vec{F} = -e\vec{E}$

الکترونها دارای یک حرکت جهتدار خواهد بود

در مدت زمانهای مشخص Δt :

تعداد الکترونهای عبوری از مقطع راست به چپ ≠ تعداد الکترونهای عبوری از مقطع چپ به راست



بار خالص عبوری از مقطع صفر نمی شود

ایجاد جریان عبوری در سیم

تعریف جریان الکتریکی (I)

اگر بار خالص عبوری از مقطع سیمی در مدت زمان کوتاه dt برابر با dq باشد جریان عبوری از مقطع سیم از رابطه زیر تعریف می گردد.

$$i = \frac{dq}{dt}$$

C/s or A ← i, dq → C, dt → s

اگر جریان عبوری از مقطع سیمی معلوم باشد

$$i = \frac{dq}{dt} \rightarrow dq = idt \rightarrow \int_0^q dq = \int_0^t idt \rightarrow q = \int_0^t idt$$

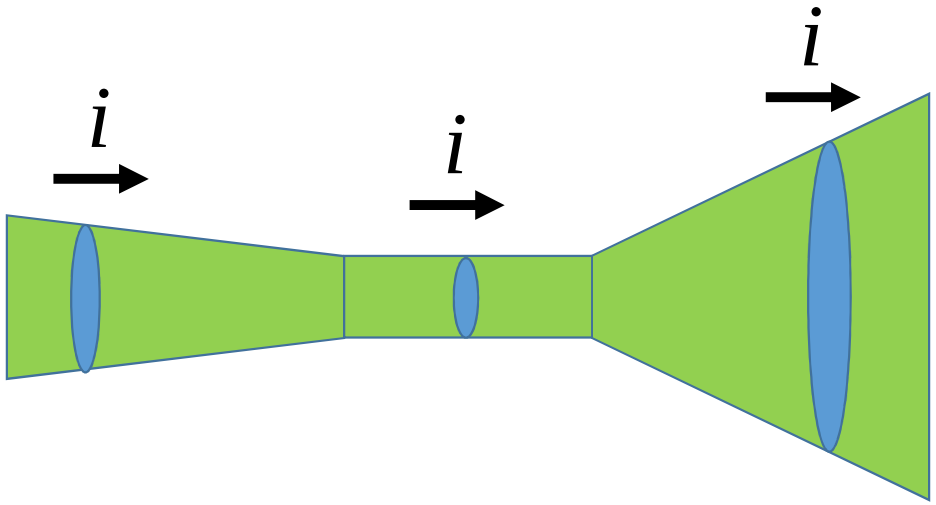
اگر جریان عبوری از مقطع سیمی معلوم و ثابت باشد

$$q = \int_0^t idt = i\,t$$

نکاتی پیرامون جریان الکتریکی:

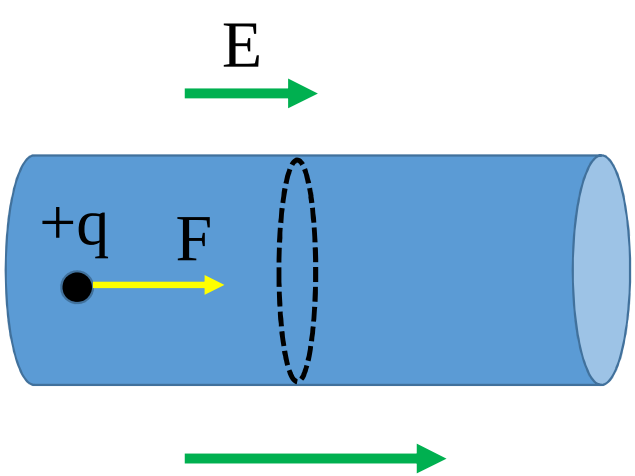
۱- جریان الکتریکی برای تمام مقاطع رسانای حامل جریان یکسان است

بار ورودی به هر مقطع با بار خروجی از آن برابر است

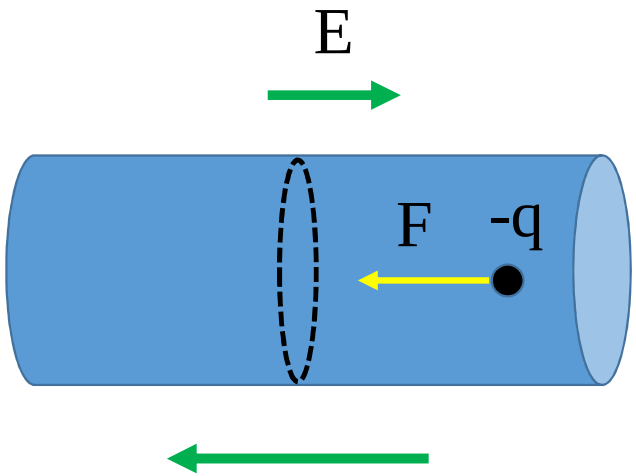


۲- در فلزات معمولا حاملهای بار الکترونها هستند ولی در نیم رساناها هم الکترونها با بار منفی و هم حفره ها با بار مثبت حامل بار هستند

۳- جهت جریان قراردادی جهتی است که بارهای مثبت (با فرض وجود) در آن جهت حرکت می کنند

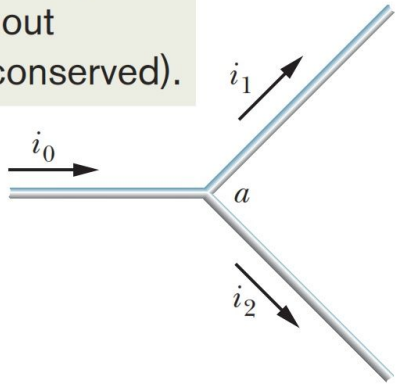


جهت حرکت بارهای مثبت = جهت جریان

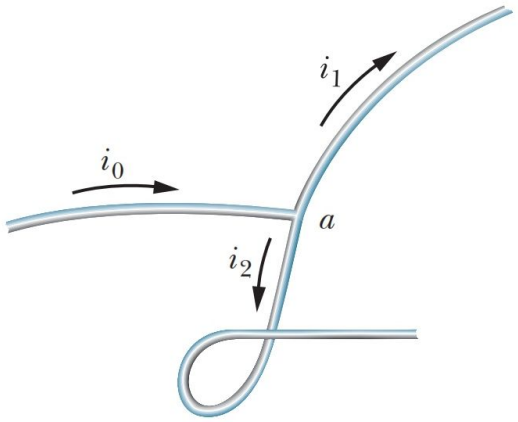


جهت حرکت بارهای منفی= خلاف جهت جریان

The current into the junction must equal the current out (charge is conserved).



(a)



(b)

٤- جریان یک کمیت نرده ای است.

اگر چه برای جریان، مقدار و جهت تعریف می شود ولی راستا برای آن مهم نیست لذاجریان یک کمیت اسکالر است

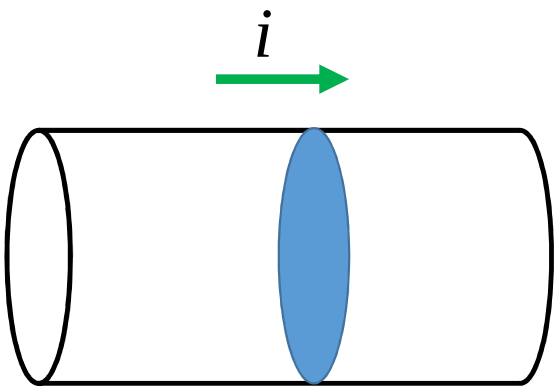
a $\rightarrow$ $i_0 = i_1 + i_2$

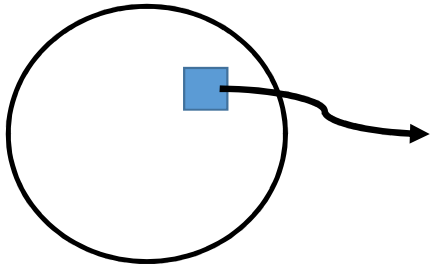
b $\rightarrow$ $i_0 = i_1 + i_2$

چگالی جریان الکتریکی

جریان الکتریکی یک کمیت ماکروسکوپیک است که وضعیت کلی حرکت الکترونها را نشان می دهد.

چگالی جریان الکتریکی یک کمیت میکروسکوپیک می باشد که وضعیت حرکت بارها در هر نقطه از مقطع رسانا را بیان می کند

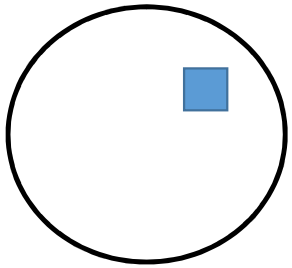




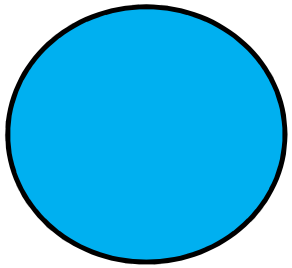
مقطع dA که جریان di از آن می گذرد

$$di = jdA$$

j چگالی جریان



$$di = jdA$$



$$i = \int \vec{j} \cdot d\vec{A}$$

بردار چگالی جریان الکتریکی $\vec{j}$

$$j = \frac{di}{dA}$$

اندازه: در هر نقطه از مقطع رسانا

راستا: عمود بر مقطع سیم در هر نقطه

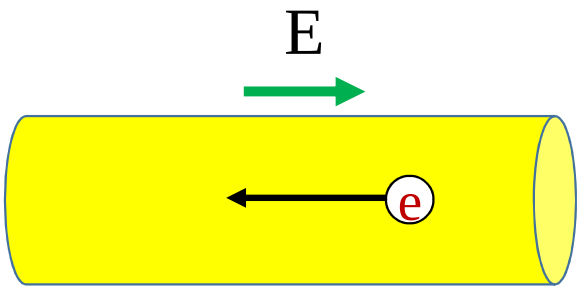
جهت: در جهت جریان (جهت حرکت بارهای +)

جهت حرکت بارهای منفی در جهت $-\vec{j}$

محاسبه چگالی جریان الکتریکی

الف) بررسی حرکت الکترونها تحت تاثیر میدان الکتریکی

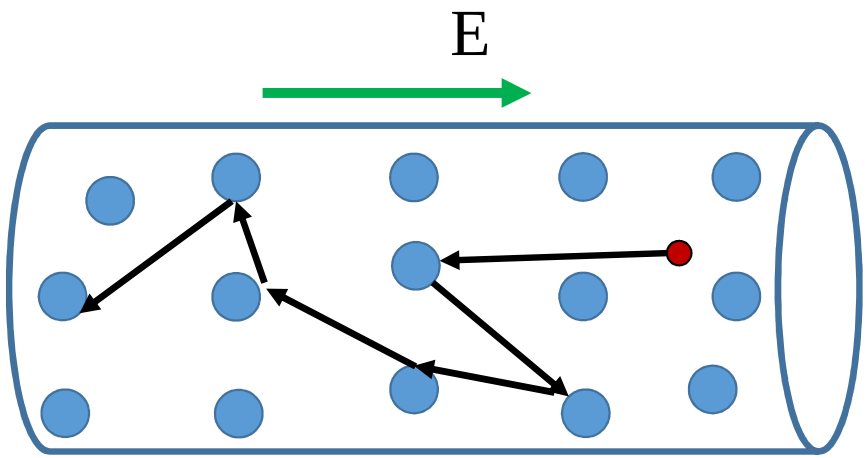
$$\begin{cases} \vec{F} = -e\vec{E} \\ \vec{F} = m\vec{a} \end{cases} \Rightarrow \vec{a} = -\frac{e\vec{E}}{m}$$



با توجه به حرکت شتابدار الکترونها انتظار آن می رود تا سرعت آنها مدام افزایش یابد اما چنین نیست؟

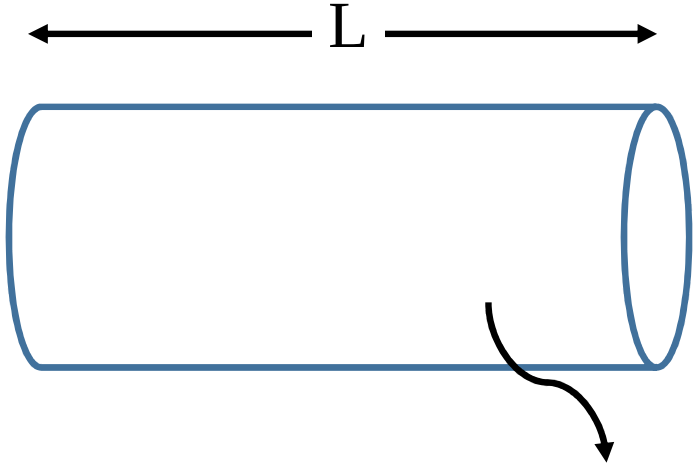
الکترونها در مسیر حرکت خود مدام با یونهای شبکه و نواقص ساختاری برخورد می نمایند پس اندازه و راستا و جهت آن تغییر می نماید.

بنابراین سرعت الکترونها محدود خواهد بود به این سرعت حدی متوسط که الکترونها با آن حرکت می کنند سرعت سوق گفته می شود



ب) بررسی یک سیم رسانا به طول L و سطح مقطع A دارای چگالی الکترونهای آزاد n :

در عبور جریان از سیم، الکترونهایی که در راهرویی به طول L و مقطع A قرار دارند با سرعت سوق و در مدت زمان t از مقطع چپ خارج می شوند.



تعداد الکترونهای آزاد درون این قطعه = چگالی × حجم $= n\ L\ A$

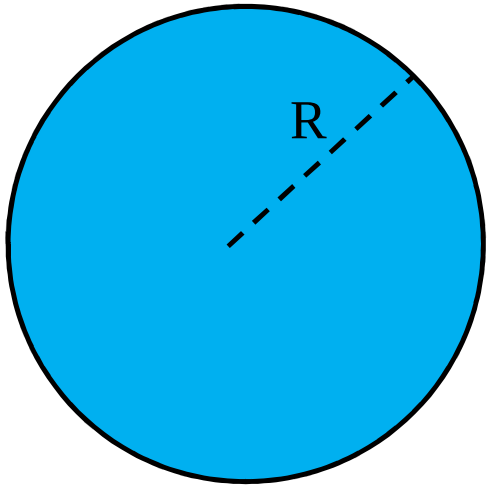
بار عبوری از مقطع چپ در مدت t $q = e\ n\ L\ A$

جریان عبوری از مقطع سیم $i = \frac{q}{t} = \frac{enLA}{t} = enA\frac{L}{t} = enAv_d$

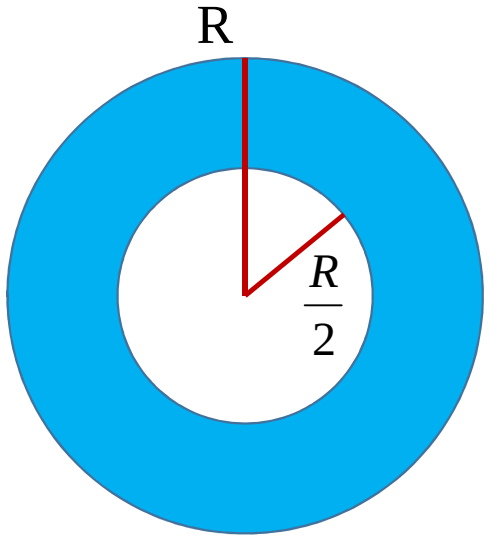
چگالی جریان یکنواخت $j = \frac{i}{A} = \frac{enAv_d}{A} = env_d$

بردار چگالی جریان $\vec{j} = -en\vec{v}_d$

مثال) سیمی به صورت استوانه به شعاع R حامل جریان i است. چگالی جریان در آن j یکنواخت است. چه سهمی از جریان از شعاع R/2 تا R عبور می نماید



$$i = j \times \pi R^2$$



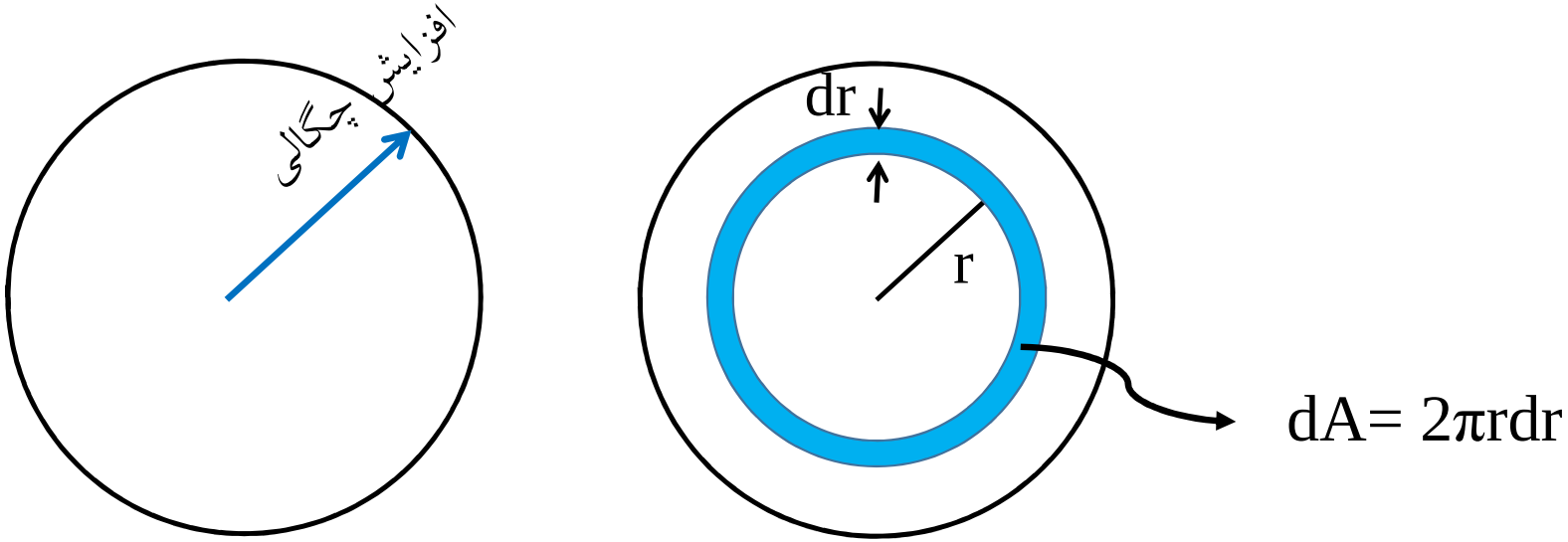
$$i' = j \times \pi (R^2 - \frac{R^2}{4})$$

$$\frac{i'}{i} = \frac{j \times \pi (R^2 - \frac{R^2}{4})}{j \times \pi R^2}$$

$$\frac{i'}{i} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

مثال) سیمی به صورت استوانه به شعاع R حامل جریان i است. چگالی جریان در آن $j = ar^2$ است.

چه سهمی از جریان از شعاع R/2 تا R عبور می نماید.



$$i = \int j dA$$

$$i = \int_{r=0}^{r=R} jdA = \int_{r=0}^{r=R} jdA = \int_{r=0}^{r=R} ar^2 2\pi r dr = 2\pi a \int_{r=0}^{r=R} r^3 dr = 2\pi a \frac{1}{4}(r^4)_0^R = \frac{\pi a}{2} R^4$$

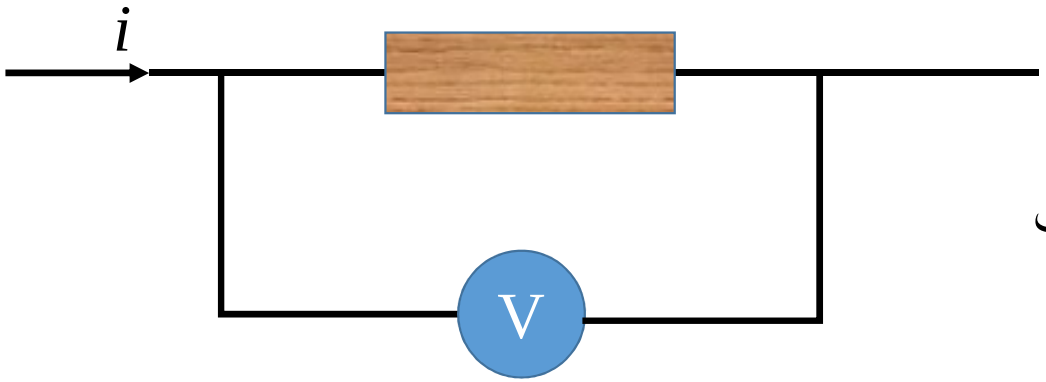
$$i' = \int_{r=\frac{R}{2}}^{r=R} jdA = \int_{r=\frac{R}{2}}^{r=R} ar^2 2\pi r dr = 2\pi a \int_{r=\frac{R}{2}}^{r=R} r^3 dr = 2\pi a \frac{1}{4}(r^4)_{\frac{R}{2}}^R =$$

$$i' = \frac{\pi a}{2}(R^4 - \frac{R^4}{32}) = \frac{\pi a}{2} \times \frac{31}{32} R^4$$

$$\frac{i'}{i} = \frac{\frac{\pi a}{2} \times \frac{31}{32} R^4}{\frac{\pi a}{2} R^4} = \frac{31}{32}$$

مقاومت الکتریکی

آنچه که عبور حاملهای بار را دچار سختی می نماید



$$\text{مقاومت} = \frac{\text{اختلاف پتانسیل}}{\text{جریان عبوری}}$$

$$V/A \quad \text{or} \quad \Omega$$

Table 26-1 Resistivities of Some Materials at Room Temperature (20°C)

Material	Resistivity, ρ ($\Omega \cdot m$)	Temperature Coefficient of Resistivity, α (K^{-1})
	Typical Metals	
Silver	1.62×10^{-8}	4.1×10^{-3}
Copper	1.69×10^{-8}	4.3×10^{-3}
Gold	2.35×10^{-8}	4.0×10^{-3}
Aluminum	2.75×10^{-8}	4.4×10^{-3}
Manganin[a]	4.82×10^{-8}	0.002×10^{-3}
Tungsten	5.25×10^{-8}	4.5×10^{-3}
Iron	9.68×10^{-8}	6.5×10^{-3}
Platinum	10.6×10^{-8}	3.9×10^{-3}
	Typical Semiconductors	
Silicon, pure	2.5×10^{3}	-70×10^{-3}
Silicon, *n*-type[b]	8.7×10^{-4}	
Silicon, *p*-type[c]	2.8×10^{-3}	
	Typical Insulators	
Glass	$10^{10} - 10^{14}$	
Fused quartz	$\sim 10^{16}$	

مقاومت الکتریکی وابسته به :

هندسه مقاومت

جنس بکار رفته در ساخت مقاومت

وابستگی جنس توسط مقاومت ویژه بیان می شود

$$\rho = \frac{E}{j} \quad \Rightarrow \quad \vec{E} = \rho \vec{j}$$

مقاومت ویژه

$\Omega.m$

رسانندگی:

عکس مقاومت ویژه

هرچه مقاومت یک رسانا بیشتر باشد انتقال حامها در آن سختتر و لذا رسانش آن کمتر است

$$\sigma = \frac{1}{\rho} = \frac{j}{E} \qquad \Rightarrow \qquad \vec{j} = \sigma \vec{E}$$

رسانش

نحوه بدست آوردن مقاومت یک قطعه رسانا

قطعه ای با هندسه و جنس معلوم

۱- فرض می شود که به دو سر قطعه یک اختلاف پتانسیل V اعمال می شود

$$V = \int_{+}^{-} \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

۲- در اثر اعمال اختلاف پتانسیل، جریان i در رسانا ایجاد می گردد.

$$i = \int \vec{j} \cdot d\vec{A}$$

۳- استفاده از ارتباط میدان و چگالی جریان

$$\rho = \frac{E}{j}$$

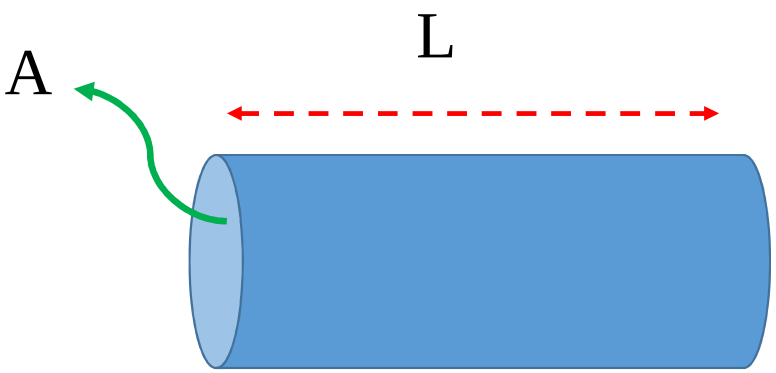
مثال) مقاومت سیمی به طول L و سطح مقطع A و مقاومت ویژه ρ را بدست آورید

تحت اختلاف پتانسیل V

$$V = \int_{+}^{-} \vec{E} \,.\, d\vec{s} = EL \quad \Rightarrow \quad E = \frac{V}{L}$$

با یک چگالی بار یکنواخت

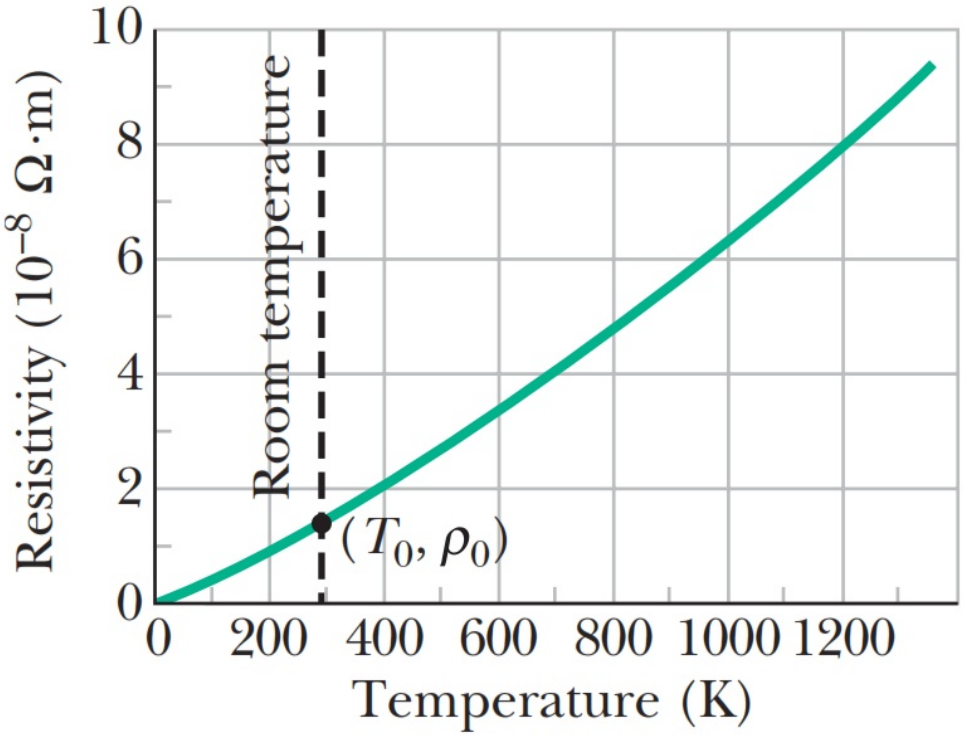
$$j = \frac{i}{A}$$



$$\rho = \frac{E}{j} = \frac{\frac{V}{L}}{\frac{i}{A}} = \frac{V}{i} \times \frac{A}{L} \quad \Rightarrow \quad \frac{V}{i} = \rho \frac{L}{A}$$

$$\Rightarrow \qquad \Rightarrow \quad R = \rho \frac{L}{A}$$

تغییرات مقاومت ویژه الکتریکی رساناها با دما



مقاومت ویژه در یک بازه وسیعی از دما، ارتباط خطی با تغییر دما دارد. بگونه ای که با افزایش دما مقاومت ویژه به صورت خطی افزایش می یابد.

$$\rho - \rho_0 = \rho_0 \alpha (T - T_0).$$

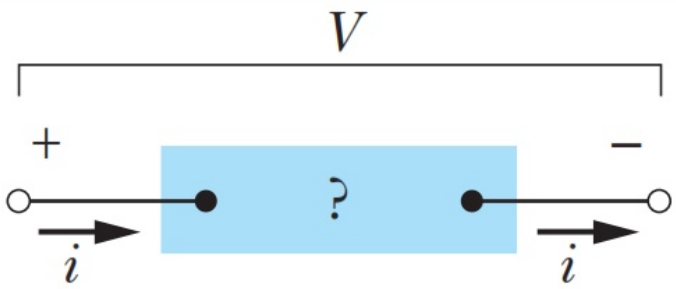
temperature coefficient of resistivity,

قانون اهم

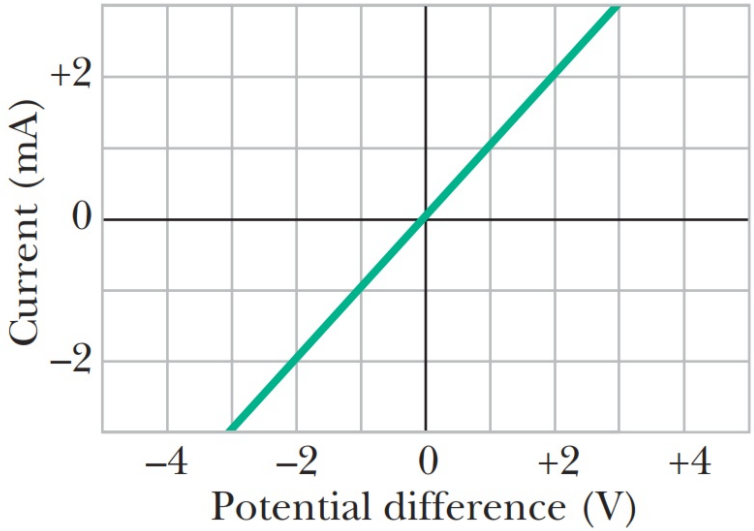
در یک رسانای اهمی، مقاومت رسانا در هر ولتاژ مستقل از اندازه و قطبیت اختلاف پتانسیل اعمالی می باشد.

بررسی به کمک نمودار جریان – ولتاژ (i-V):

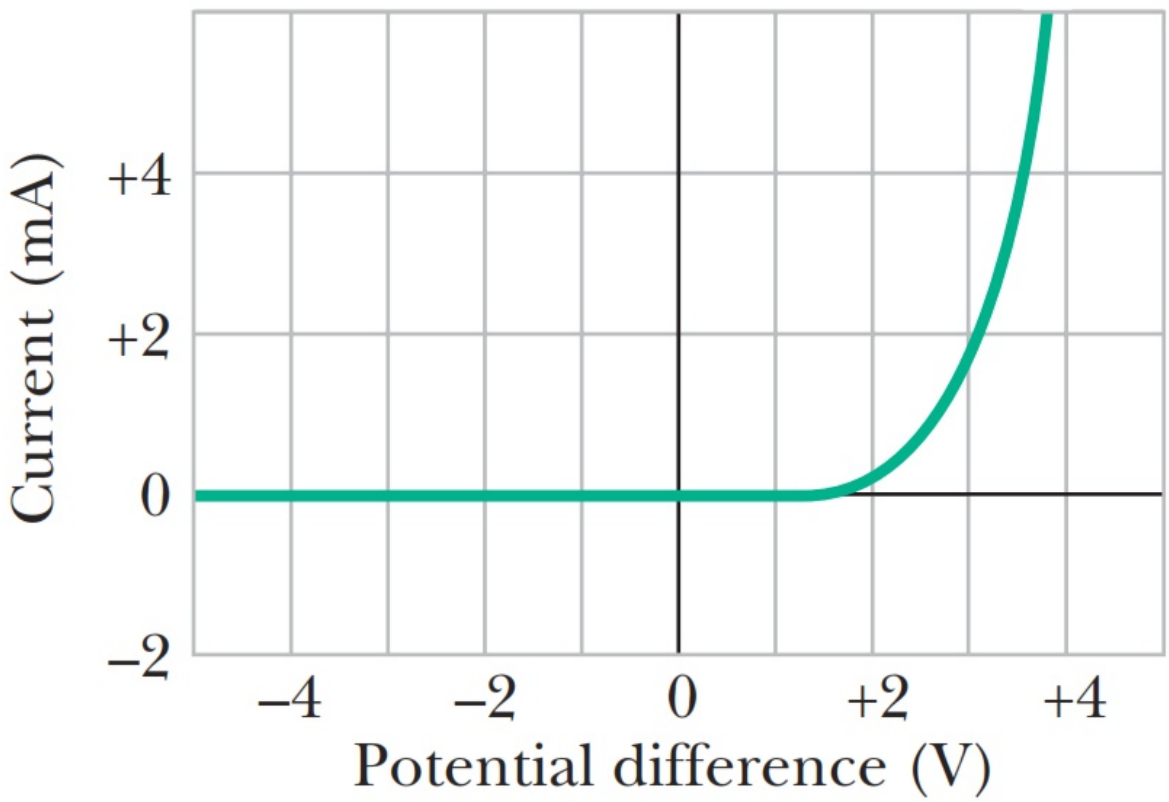
در ولتاژهای مختلف، جریان عبوری از قطعه را اندازه گیری می نمایند



$$Slope = \frac{i}{V} = \frac{1}{R} \quad \rightarrow \quad R = \frac{1}{Slope}$$

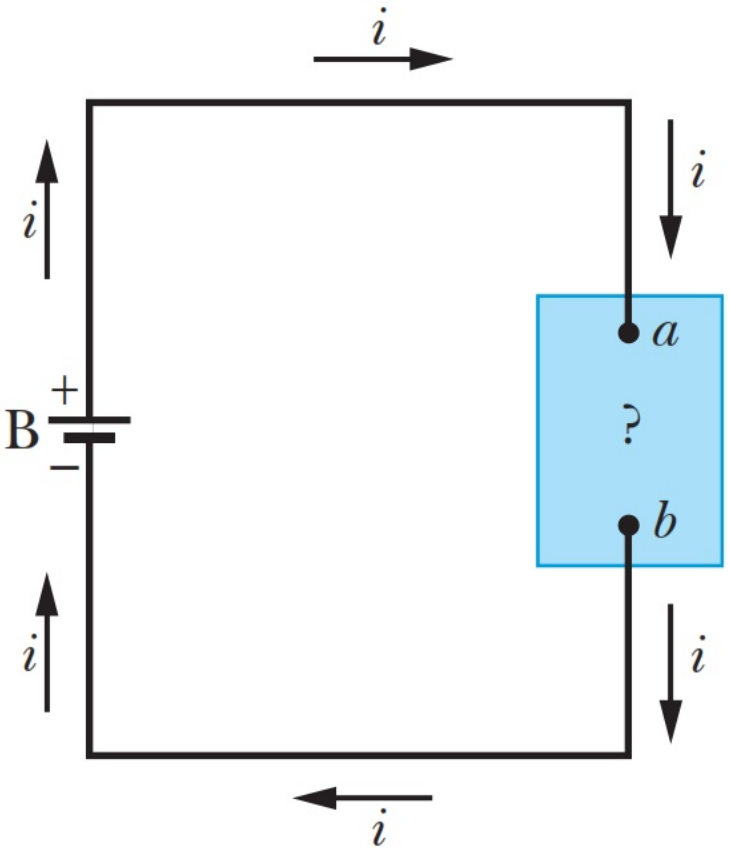


رفتار نمودار جریان – ولتاژ برای یک رسانای غیر اهمی



تبدیل انرژی در یک مدار الکتریکی

درون یک وسیله الکتریکی، انرژی الکتریکی به صورتهای مختلف انرژی تبدیل می شود



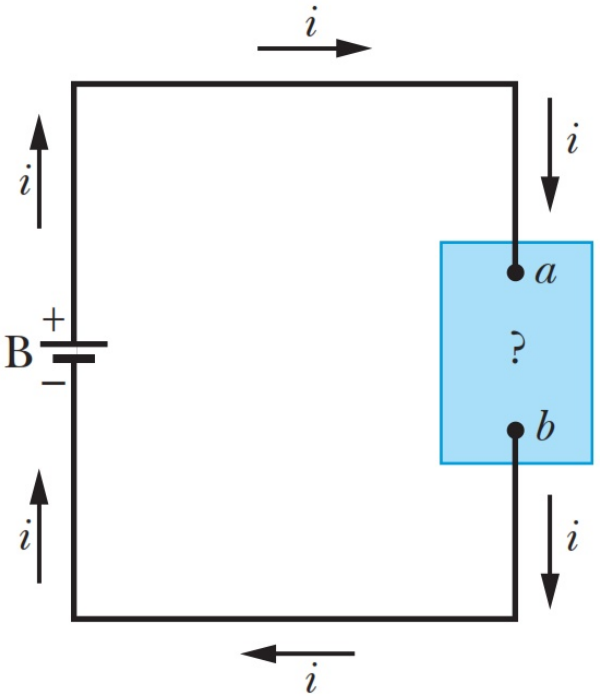
پنکه – چرخ گوشت

بخاری برقی – کتری برقی

باتری شارژی

توان

$$V_{ab} = V_a - V_b > 0 \qquad \Rightarrow \quad V_a > V_b$$



در انتقال بار dq از وسیله الکتریکی (بین دو نقطه a و b)، انرژی پتانسیل به اندازه dqV_{ab} کاهش می یابد

$$dU = dqV_{ab}$$

$$P = \frac{dU}{dt} = \frac{dq}{dt}V_{ab} = iV_{ab}$$

توان =

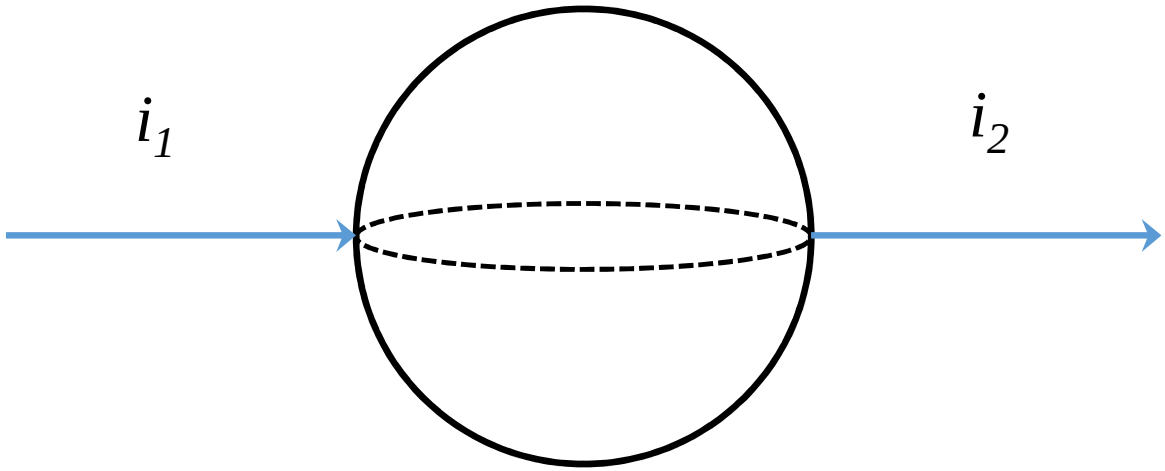
آهنگ تبدیل انرژی در مصرف کننده

اگر وسیله الکتریکی یک مقاومت الکتریکی باشد انرژی الکتریکی به انرژی گرمایی تبدیل می شود

$$P = iV \xrightarrow{V=iR} P = i^2R = \frac{V^2}{R}$$

مثال) یک کره منزوی به شعاع $R = 13\ cm$ داریم. جریان توسط سیم حامل جریانی برابر با i_1 به کره وارد و جریان i_2 از آن خارج می گردد. چه مدت زمان لازم است تا پتانسیل کره برابر با ۹۸۰ ولت گردد

$$i_1 = 1.00002A \quad , \quad i_2 = 1.00000A$$



بار ذخیره شده روی سطح کره در مدت ۱ ثانیه

$$\Delta q = \Delta i \times 1 = 1.00002 - 1.00000 = 0.00002\ C$$

بار ذخیره شده روی سطح کره در مدت t ثانیه

$$q = \Delta i \times t$$

پتانسیل کره ای به شعاع R و بار q

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{R} \quad \Rightarrow \quad q = 4\pi\varepsilon_0 VR$$

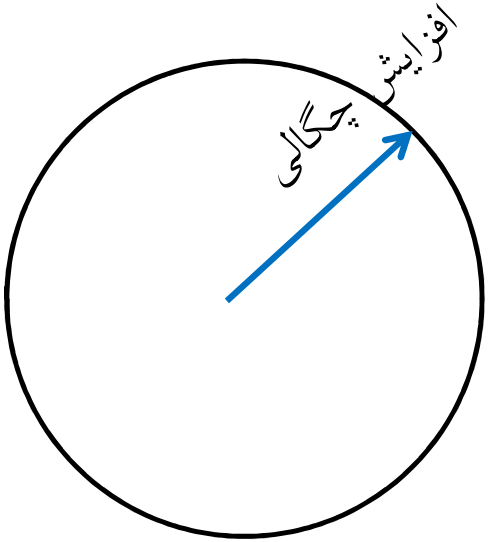
$$\Delta i \times t = 4\pi\varepsilon_0 VR \qquad \rightarrow t = \frac{4\pi\varepsilon_0 VR}{\Delta i}$$

مثال) چگالی جریان گذرنده از مقطع یک رسانای استوانه ای شکل به شعاع R از رابطه زیر پیروی می نماید. که در این رابطه j_0 یک عدد ثابت و r فاصله هر نقطع در مقطع سیم تا محور سیم است.

$$j = j_0(1-\frac{r}{R})$$

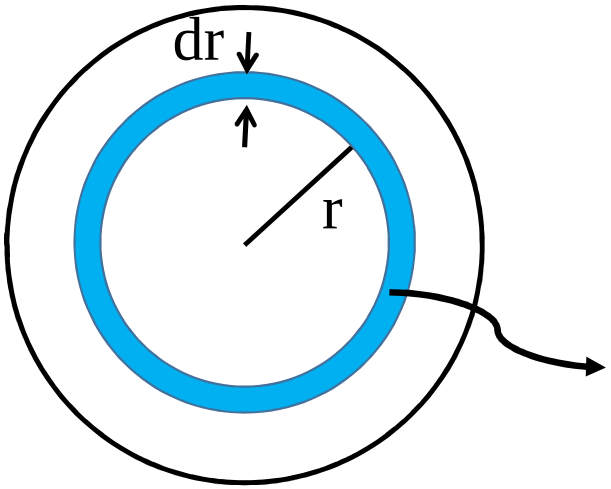
الف) جریان گذرنده از رسانا را حساب کنید

ب) در چه شعاعی از مرکز استوانه نیمی از جریان عبور می نماید.



(الف)

(ب)



$dA = 2\pi r dr$

$$i_t = \int j dA = \int_{r=0}^{R} j_0 (1 - \frac{r}{R}) 2\pi r dr = 2\pi\, j_0 \int_{r=0}^{R} (r - \frac{r^2}{R}) dr =$$

$$i_t = 2\pi\, j_0 (\frac{1}{2} r^2 - \frac{r^3}{3R}) \Big|_{r=0}^{R} = \frac{\pi\, j_0}{3} R^2$$

(ب)

(ب)

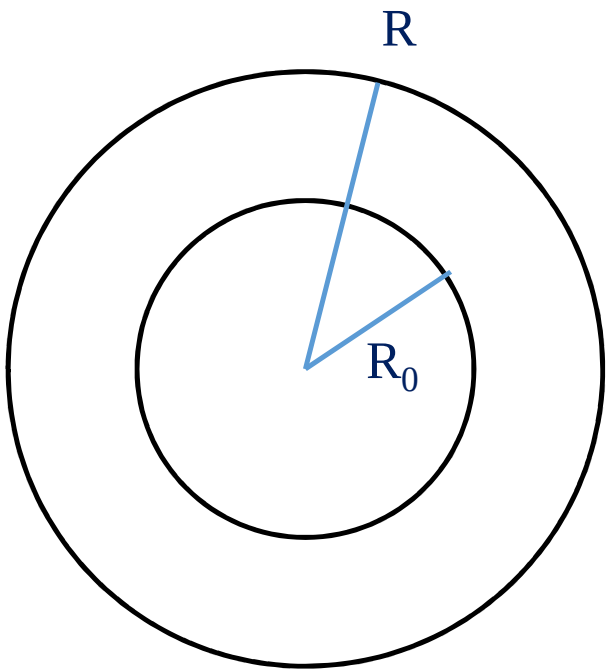
$$i_0 = \frac{1}{2} i_t$$

گذرنده از کل مقطع سیم

$0 < r < R$

گذرنده از مقطع به شعاع R_0

$0 < r < R_0$



$$i_0 = \frac{1}{2} i_t \quad \rightarrow \quad \int_{r=0}^{R_0} j_0 (1 - \frac{r}{R}) 2\pi r dr = \frac{1}{2} \int_{r=0}^{R} j_0 (1 - \frac{r}{R}) 2\pi r dr$$

$$\Rightarrow \int_{r=0}^{R_0} (r - \frac{r^2}{R}) r dr = \frac{1}{2} \int_{r=0}^{R} (r - \frac{r^2}{R}) dr$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} R_0^2 - \frac{1}{3} \frac{R_0^3}{R} = \frac{1}{2} (\frac{1}{2} R^2 - \frac{1}{3} \frac{R^3}{R})$$

$$\frac{1}{2} R_0^2 - \frac{1}{3} \frac{R_0^3}{R} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{6} R^2 \qquad \xrightarrow{\times(-6R)} \quad 2R_0^3 - R_0^2 + \frac{1}{2} R^2 = 0$$

مثال) مقاومت سیمی برابر با R است. مقاومت سیمی دیگر از همان جنس و با طول و قطر نصف شده چقدر است.

$$R_1 = R \qquad R_1 = \rho \frac{L}{A_1} = \rho \frac{L}{\frac{\pi}{4} d^2}$$

$$R_2 = ? \qquad R_2 = \rho \frac{\frac{L}{2}}{A_2} = \rho \frac{\frac{L}{2}}{\frac{\pi}{4}(\frac{d}{2})^2}$$

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{1}{2} \Rightarrow R_2 = 2R_1 \Rightarrow R_2 = 2R$$

مثال) سیمی به مقاومت $6\ \Omega$ با دستگاه حدیده کشیده می شود به طوری که طول آن به سه برابر مقدار اولیه افزیش می یابد. با فرض آنکه مقاومت ویژه ماده تغییر نکند مقاومت سیم بلندتر را حساب کنید.

طول سیم L
مقطع سیم A
مقاومت $6\ \Omega$

طول سیم 3L
مقطع سیم A' = ?
مقاومت R' =?

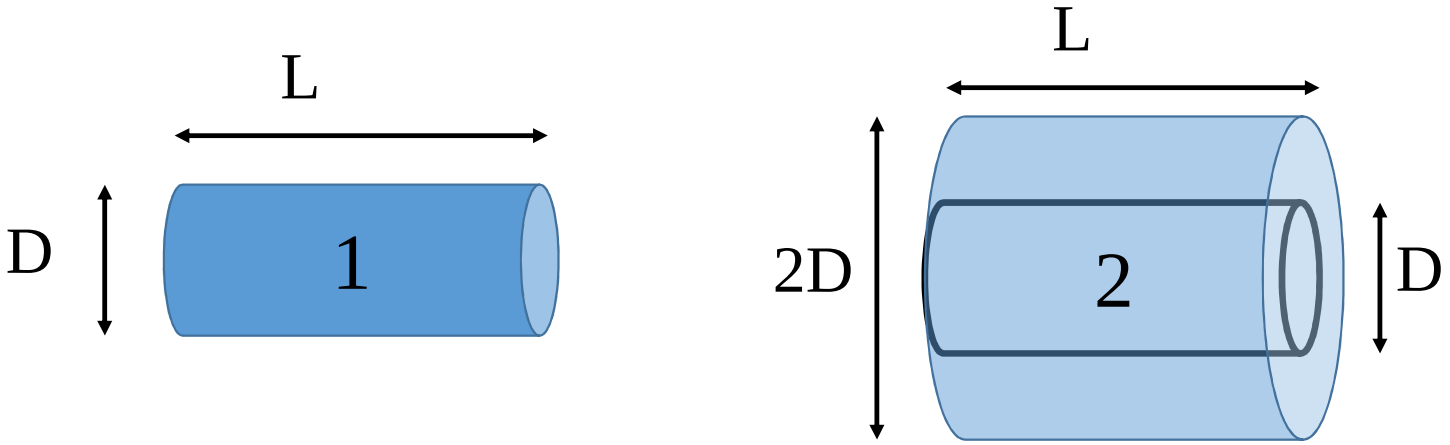
حجم ماده ثابت $V_1 = V_2$

$$LA = 3LA'$$

$$A' = \frac{1}{3}A$$

$$\frac{R'}{R} = \frac{\rho \frac{3L}{A'}}{\rho \frac{L}{A}} \rightarrow R' = 9R$$

مثال) دو سیم رسانا از یک ماده ساخته شده اند و دارای طول یکسانی می باشند. یکی از آنها یک سیم توپر به قطر D و رسانای دیگر لوله ای به قطر داخلی D و قطر خارجی 2D است. نسبت مقاومت آنها را به همدیگر بدست آورید.

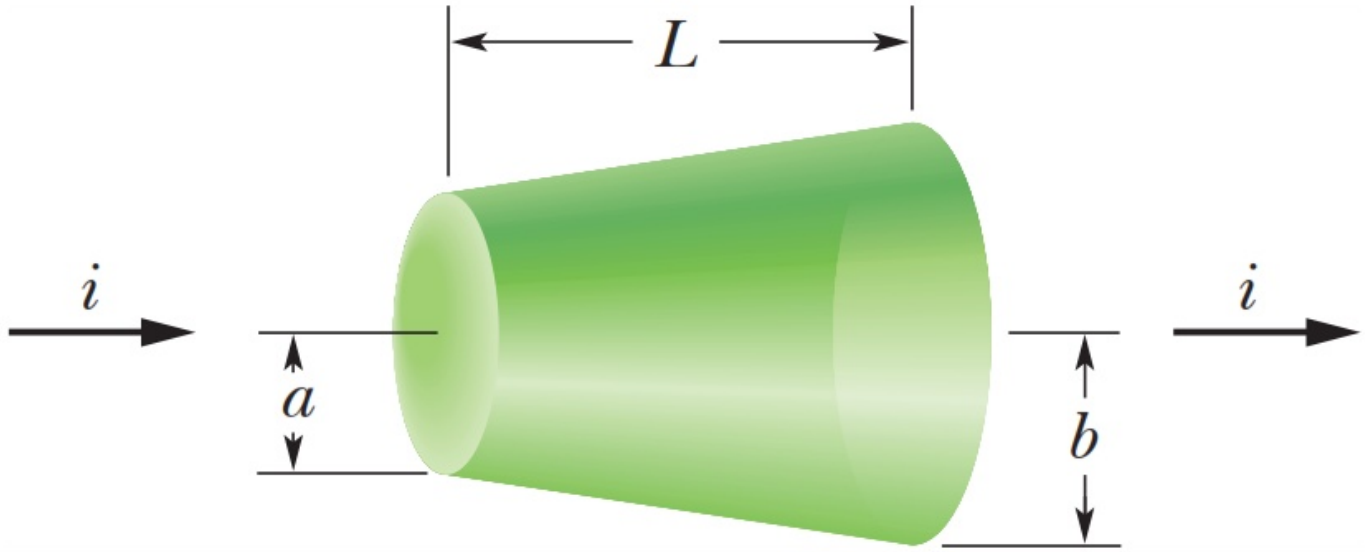


$$A_1 = \frac{\pi}{4} D^2$$

$$A_2 = \frac{\pi}{4}((2D)^2 - D^2) = \frac{3\pi}{4} D^2$$

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{\rho \frac{L}{A_1}}{\rho \frac{L}{A_2}} = \frac{A_2}{A_1} = 3$$

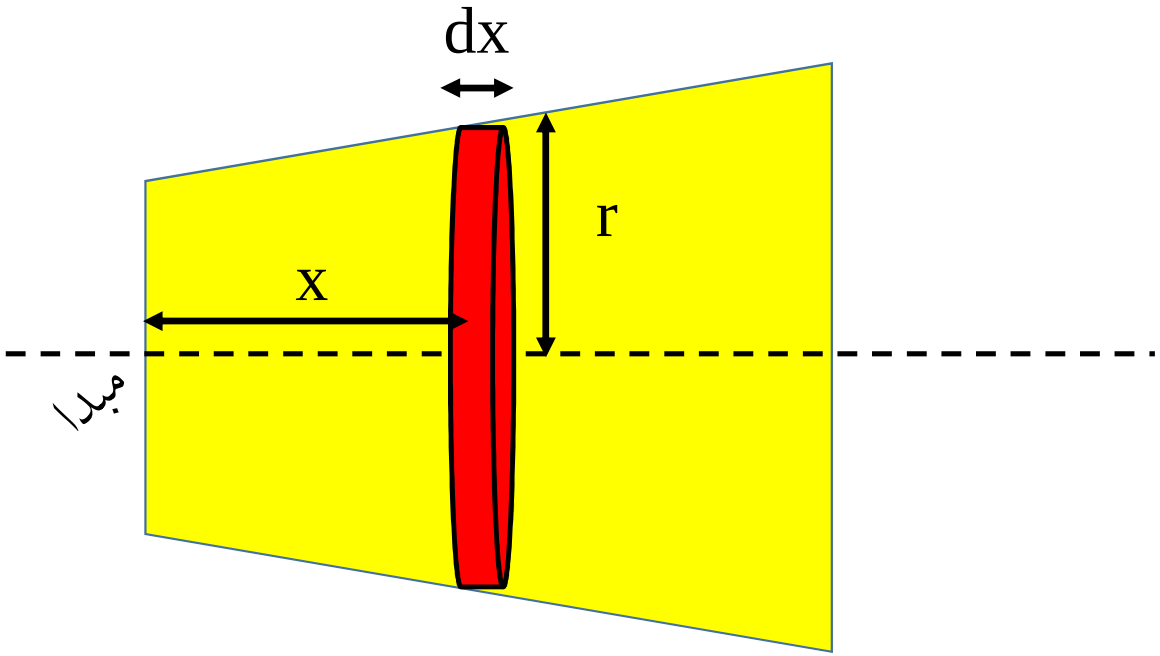
مثال) مقاومتی به شکل یک مخروط ناقص ساخته شده است. شعاع قاعده های آن a و b و ارتفاع آن L می باشد. اگر شیب مخروط کم باشد می توان فرض نمود چگالی جریان در هر مقطع ثابت است. مقاومت رسانا را حساب کنید



مقاومت به شکل استوانه نیست تا بتوان از رابطه $\rho L/A$ استفاده کرد.

المان مقاومت به شکل دیسکی به شعاع r و در فاصله x از مبدا در نظر می گیریم.

بدلیل نازکی دیسک می توان مقاومت آن را به صورت زیر در نظر گرفت



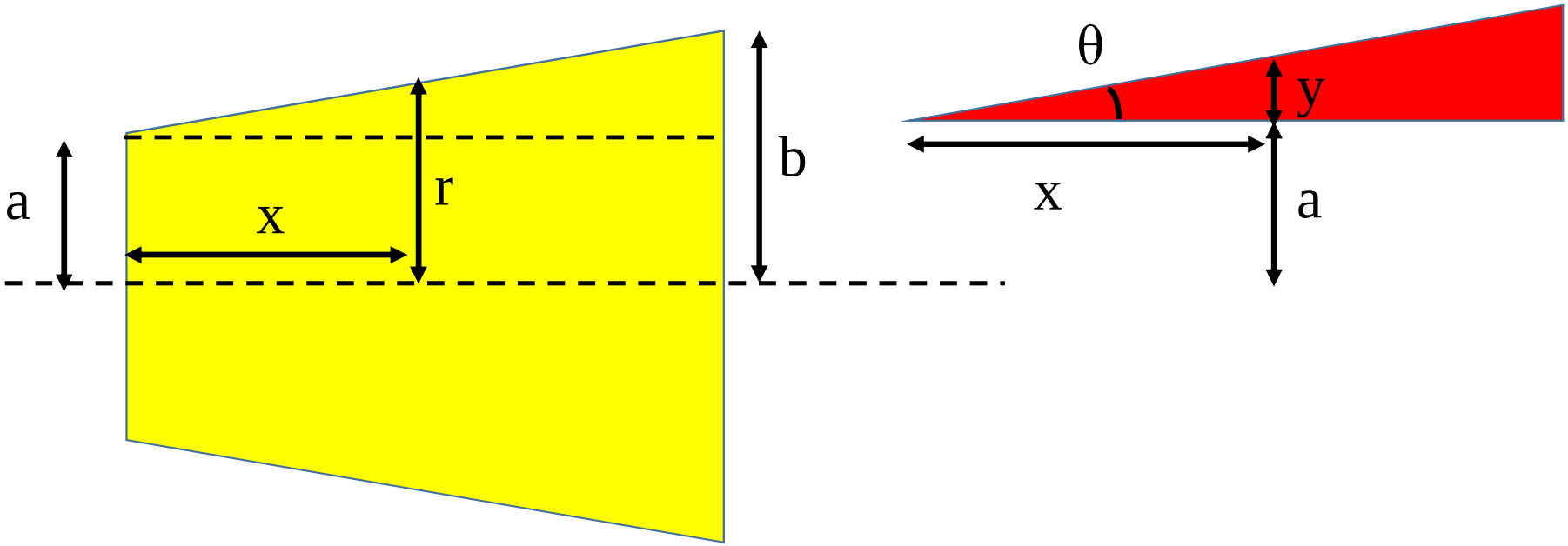
$$dR = \rho \frac{dx}{\pi r^2}$$

$$dR = \rho \frac{dx}{\pi r^2} \qquad r = ?$$

$$r = y + a$$

$$y = x \tan\theta$$

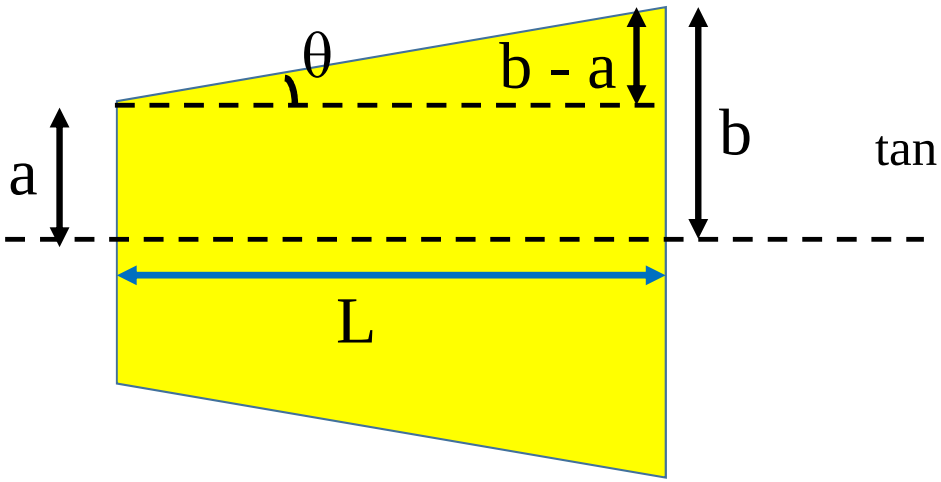
$$r = a + x \tan\theta$$



$$dR = \rho \frac{dx}{\pi r^2} = \rho \frac{dx}{\pi (a + x\tan\theta)^2}$$

$$R = \int dR = \int_{x=0}^{x=L} \rho \frac{dx}{\pi (a + x\tan\theta)^2} = \frac{\rho}{\pi} \times \frac{-1}{\tan\theta} \times \left[\frac{1}{a + x\tan\theta}\right]\Bigg|_{x=0}^{x=L}$$

$$R = \frac{-\rho}{\pi \tan\theta}\left[\frac{1}{a + L\tan\theta} - \frac{1}{a}\right] = \frac{-\rho}{\pi \frac{b-a}{L}}\left[\frac{1}{a + L\frac{b-a}{L}} - \frac{1}{a}\right]$$



$$\tan\theta = \frac{b-a}{L}$$

$$R = \frac{\rho L}{\pi a b}$$