



فصل سوم فشار و استاتیک سیالات



John Ninomiya flying a cluster of 72 helium-filled balloons over Temecula, California in April of 2003. The helium balloons displace approximately 230 m^3 of air, providing the necessary buoyant force.

Pressure

Pressure Measurement Devices

Introduction to Fluid Statics

3? Hydrostatic Forces on Submerged Plane

Hydrostatic Forces on Submerged Curved Surfaces

Buoyancy and Stability

Fluids in Rigid-Body Motion

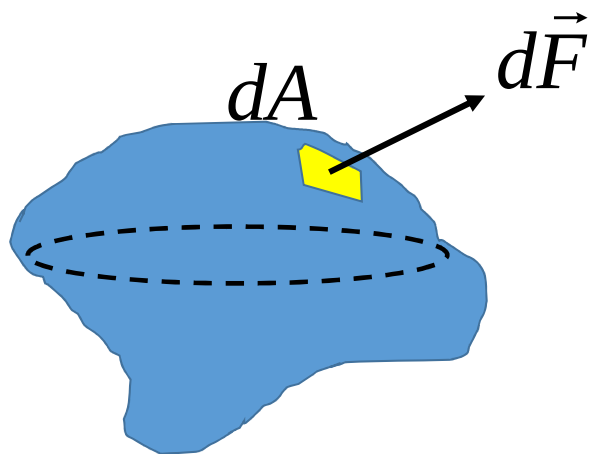
سیال ساکن

- سرعت سیال صفر
- لایه های سیال نسبت به همدیگر حرکتی نداشته باشند

نیروهای وارد بر یک سیال

- نیروی حجمی : نیروی وزن
- نیروی سطحی : ازطرف سیال مجاور به حجم مشخص از سیال وارد می شود

تعریف فشار



$$d\vec{F} = d\vec{F}_{\parallel} + d\vec{F}_{\perp}$$

$$\tau = \frac{dF_{\parallel}}{dA}$$

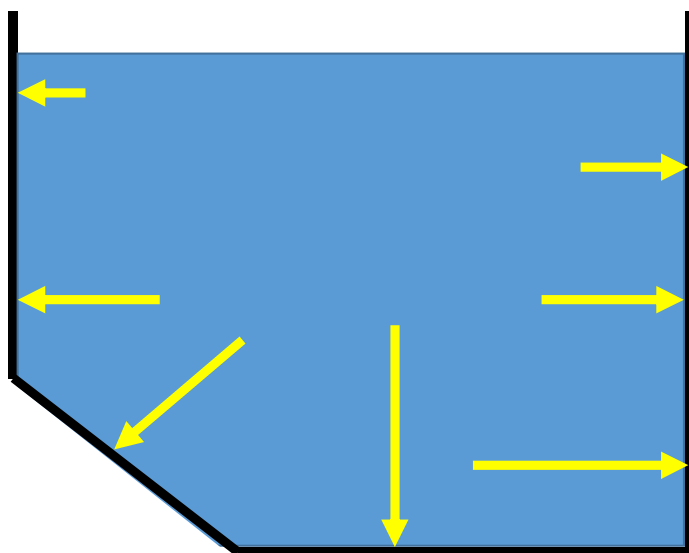
تنش برشی

$$P = \frac{dF_{\perp}}{dA}$$

تنش فشاری

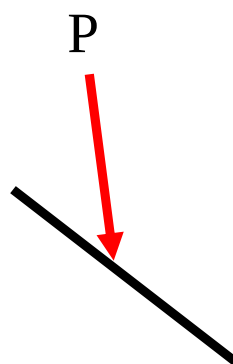
قانون پاسکال:

فشار بر هر سطحی عمود است



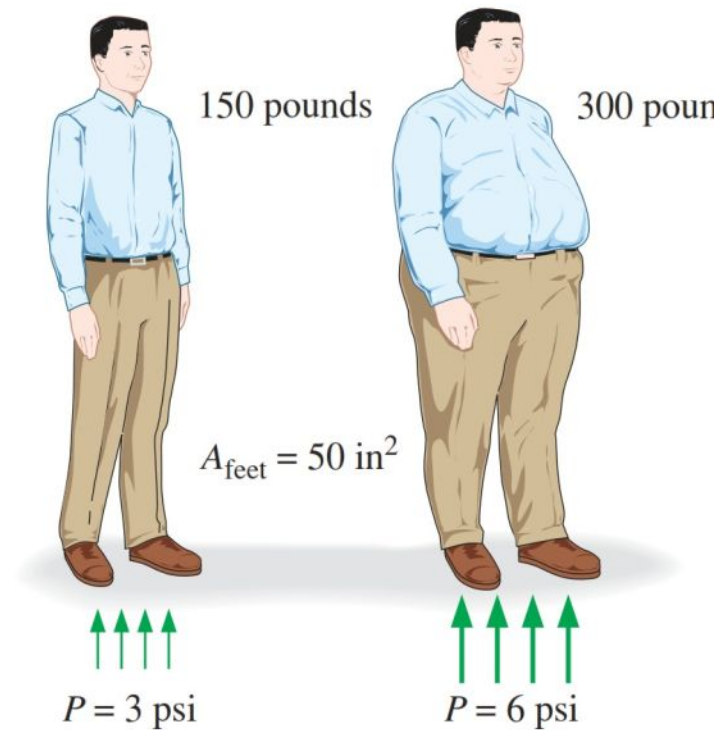
اثبات به کمک برهان خلف:
اگر فشار مولفه مماس بر سطح داشته باشد
وجود نیروی مماسی
ایجاد تنش برشی
حرکت سیال

در تناقض با فرض اصلی سیال ساکن



Pressure فشار

Pressure is defined as *a normal force exerted by a fluid per unit area. W*



$$P = \sigma_n = \frac{W}{A_{\text{feet}}} = \frac{150 \text{ lbf}}{50 \text{ in}^2} = 3 \text{ psi}$$

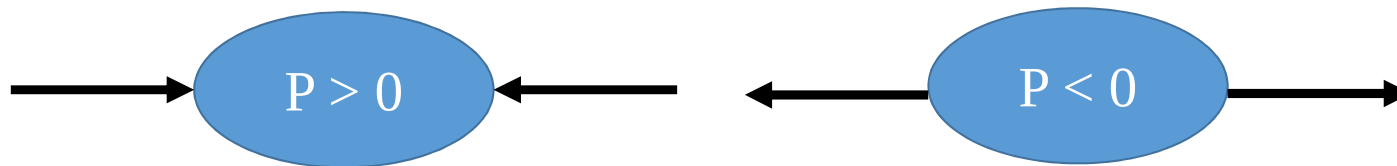
واحدهای فشار

$$1 \text{ bar} = 10^5 \text{ Pa} = 0.1 \text{ MPa} = 100 \text{ kPa}$$

$$1 \text{ atm} = 101,325 \text{ Pa} = 101.325 \text{ kPa} = 1.01325 \text{ bars}$$

$$\begin{aligned} 1 \text{ kgf/cm}^2 &= 9.807 \text{ N/cm}^2 = 9.807 \times 10^4 \text{ N/m}^2 = 9.807 \times 10^4 \text{ Pa} \\ &= 0.9807 \text{ bar} \\ &= 0.9679 \text{ atm} \end{aligned}$$

علامت فشار



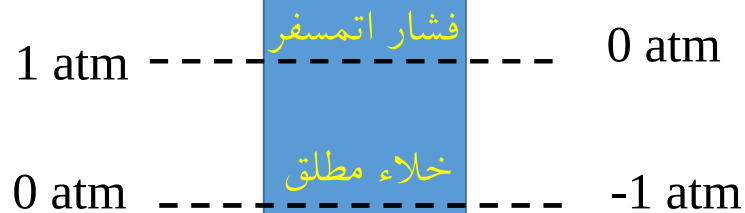
خط کش سنجش فشار

۳- فشار مطلق و فشار نسبی

absolute pressure- gage pressure

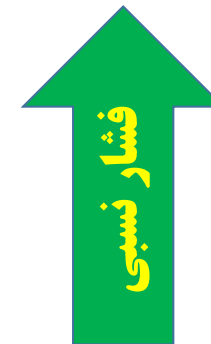
$$P_{water} = P_0 + \rho gh$$

$$P_{air} = P_0 - \rho gh$$



$$P_{water} = \rho gh$$

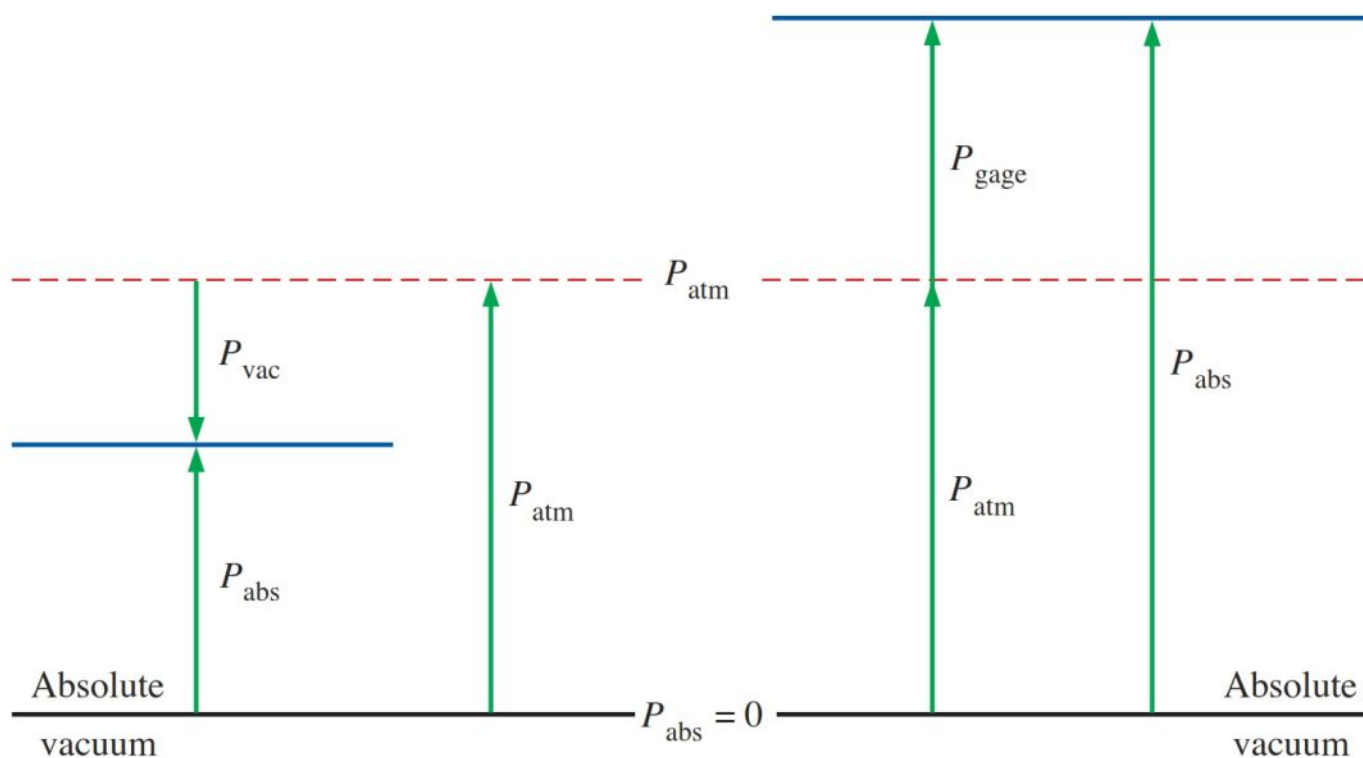
$$P_{air} = -\rho gh$$



$$P_{Abs} = P_{gage} + P_{atm.}$$

فشار نسبی

$$\left\{ \begin{array}{l} P_{\text{gage}} = P_{\text{abs}} - P_{\text{atm}} \\ P_{\text{vac}} = P_{\text{atm}} - P_{\text{abs}} \end{array} \right.$$



$$P_{atm}(\text{absolut}) = 10^5 \text{ Pa} = 100 \text{ kPa}$$

$$P_{fluid}(\text{absolut}) = 106 \text{ kPa} \quad \left\{ \begin{array}{l} P_{fluid}(\text{gage}) = +6 \text{ kPa} \\ P_{fluid}(\text{vac.}) = -6 \text{ kPa} \end{array} \right.$$

$$P_{fluid}(\text{absolut}) = 93 \text{ kPa} \quad \left\{ \begin{array}{l} P_{fluid}(\text{gage}) = -7 \text{ kPa} \\ P_{fluid}(\text{vac.}) = +7 \text{ kPa} \end{array} \right.$$

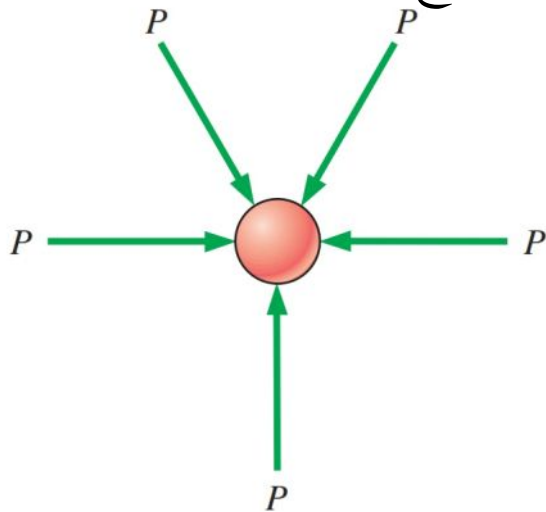
فشار در یک نقطه

فشار در یک نقطه از سیال در تمام جهات یکسان است
یا

اگر یک حجم بسیار کوچک از سیال در نظر گرفته شود نیروی سیال بر همه سطوح آن یکسان است
یا

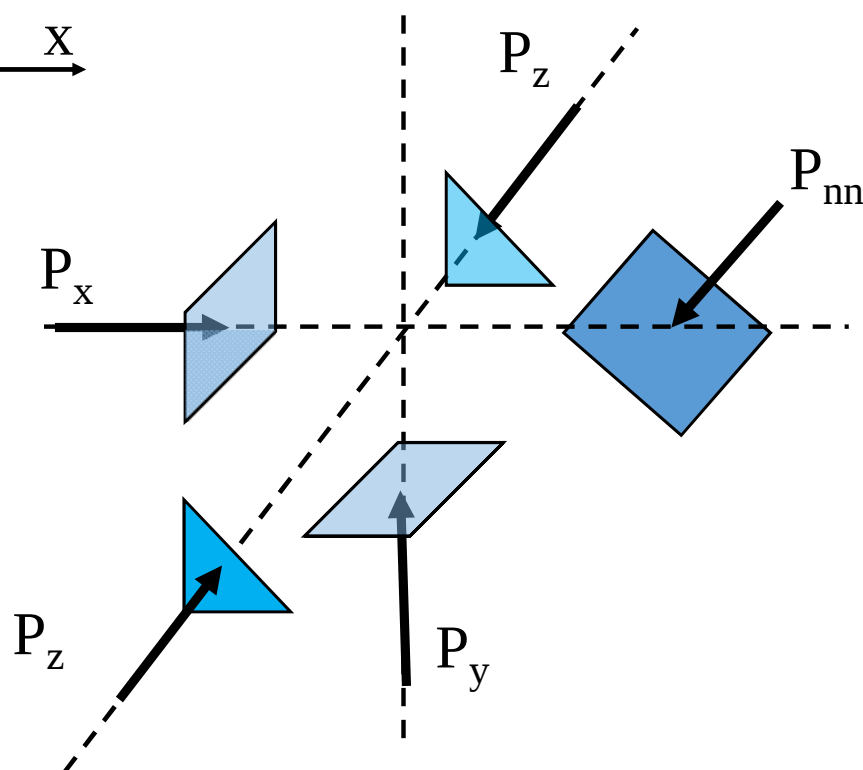
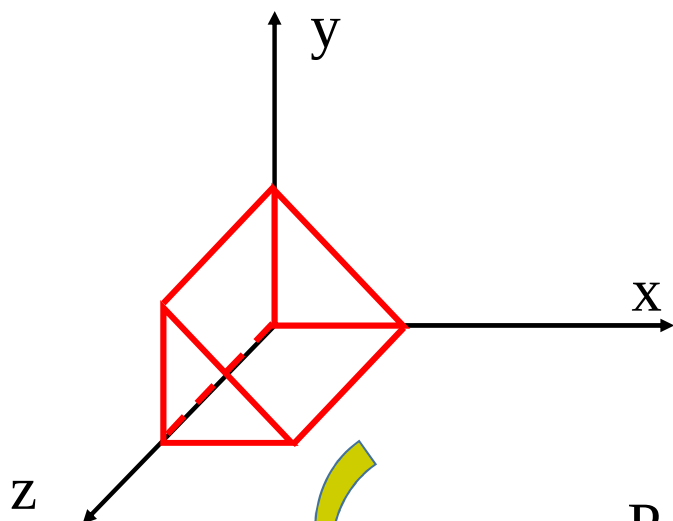
فشار در یک نقطه به راستا و جهت بستگی ندارد و فقط وابسته به ارتفاع هست
یا

فشار یک کمیت اسکالر است



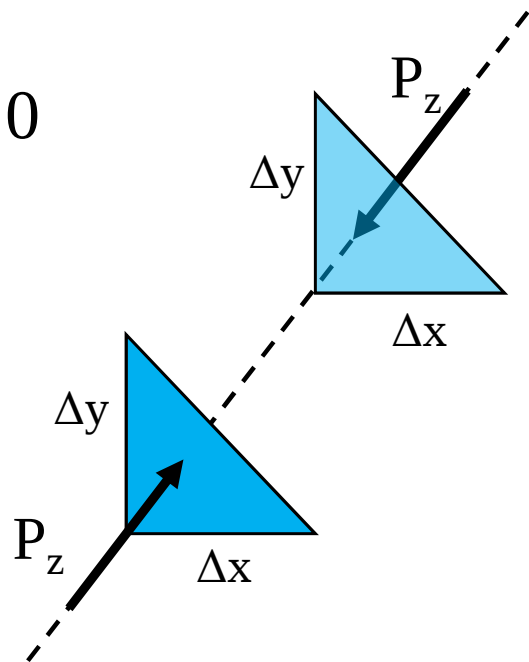
اثبات

در نظر گرفتن یک المان داخل سیال



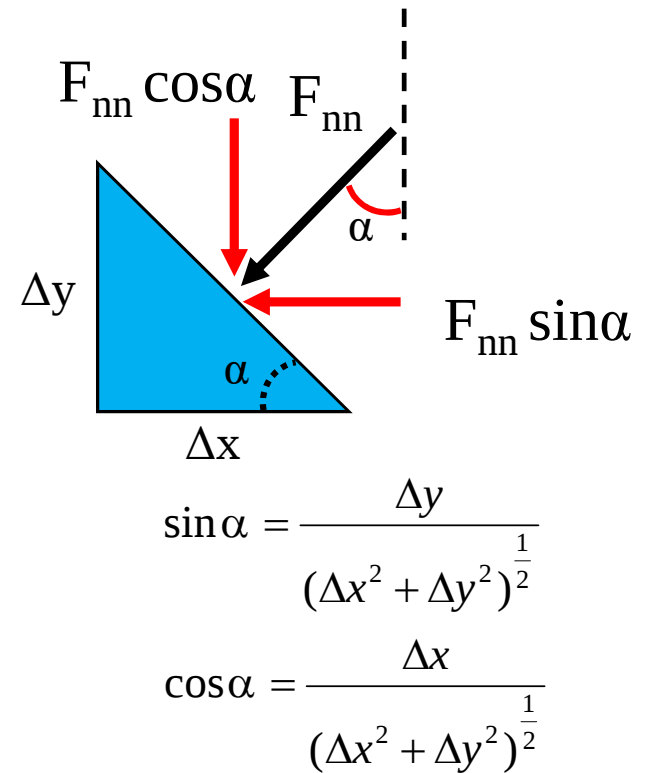
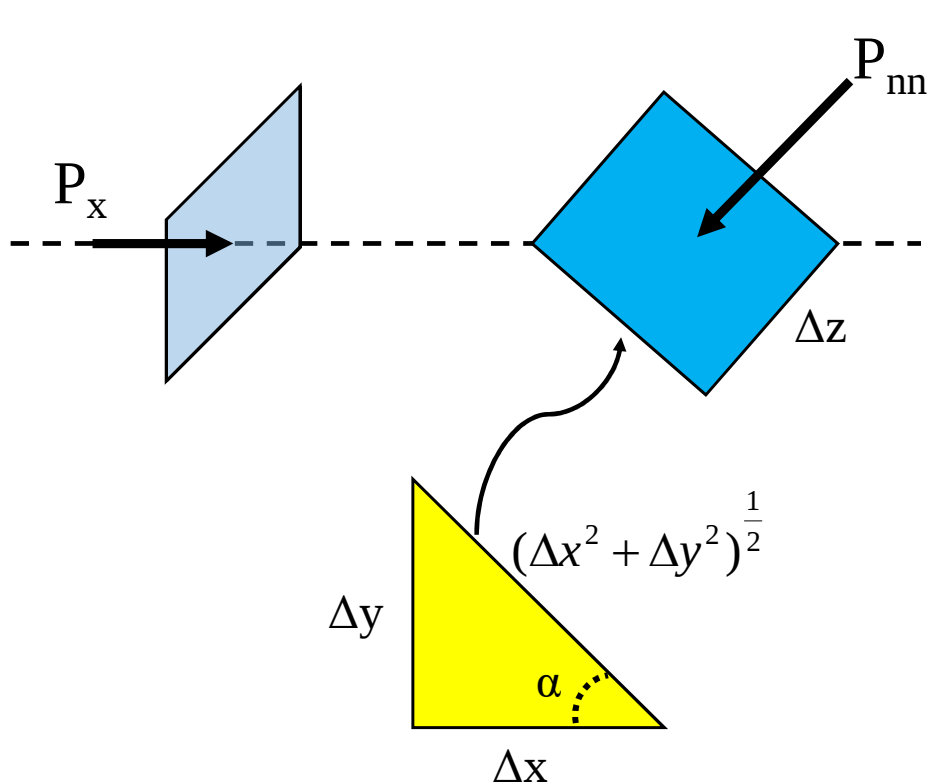
$$\sum \vec{F} = 0 \Rightarrow \begin{aligned} \sum F_x &= 0 \\ \sum F_y &= 0 \\ \sum F_z &= 0 \end{aligned}$$

$$\sum F_z = 0 \quad \rightarrow \quad P_z \Delta x \Delta y - P_z \Delta x \Delta y = 0$$



$$\sum F_x = 0 \quad \rightarrow \quad P_x \Delta y \Delta z - P_{nn} (\Delta x^2 + \Delta y^2)^{\frac{1}{2}} \Delta z \sin \alpha = 0$$

$$\rightarrow \quad P_x \Delta y \Delta z - P_{nn} \Delta y \Delta z = 0 \quad \rightarrow \quad P_x = P_{nn}$$

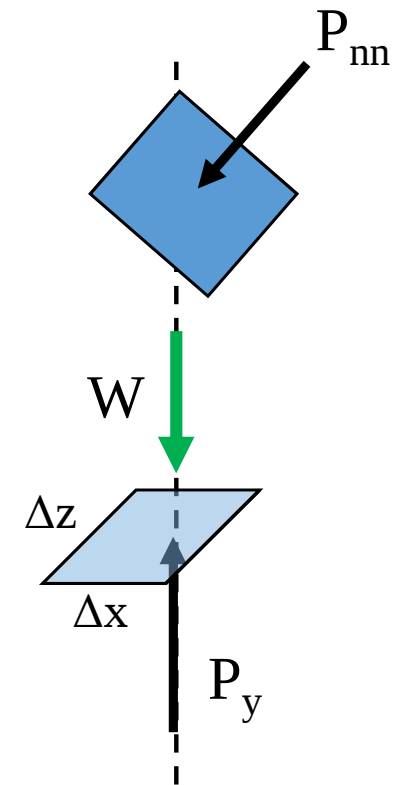


$$\sum F_y = 0 \quad \rightarrow$$

$$P_y \Delta x \Delta z - P_{nn} (\Delta x^2 + \Delta y^2)^{\frac{1}{2}} \Delta z \cos \alpha - W = 0$$

$$P_y \Delta x \Delta z - P_{nn} \Delta x \Delta z - \frac{1}{2} \underbrace{\Delta x \Delta y \Delta z}_{\text{برای یک المان حجم نقطه ای این جمله صفر می شود}} \rho g = 0$$

$$\rightarrow P_y = P_{nn}$$



نکات:

۱- فشار در یک نقطه در راستاهای مختلف یکسان است

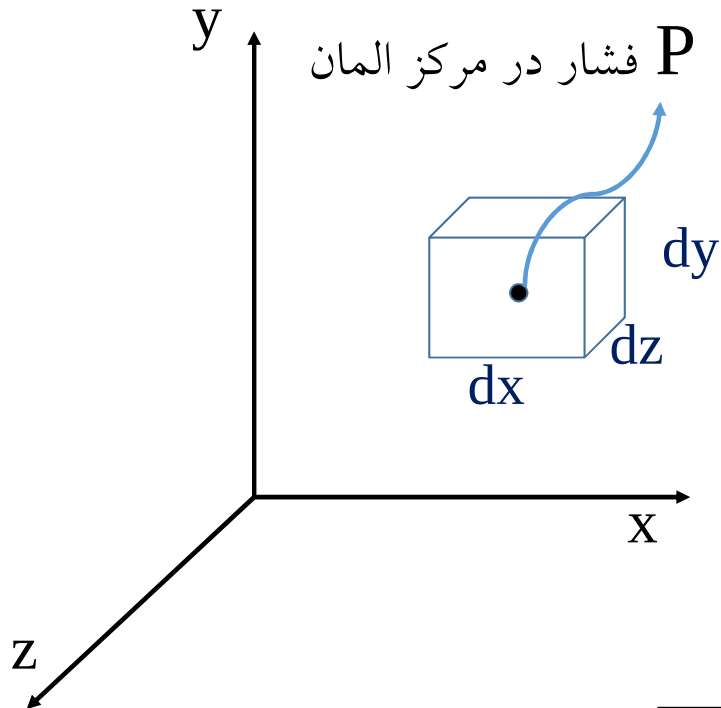
$$P_x = P_y = P_z = P_{nn}$$

۲- فشار یک کیت اسکالر است چون مستقل از راستا است

۳- نیروی وارد بر صفحات گذرنده از یک نقطه (المان صفحه) با جهت گیری های مختلف یکسان است

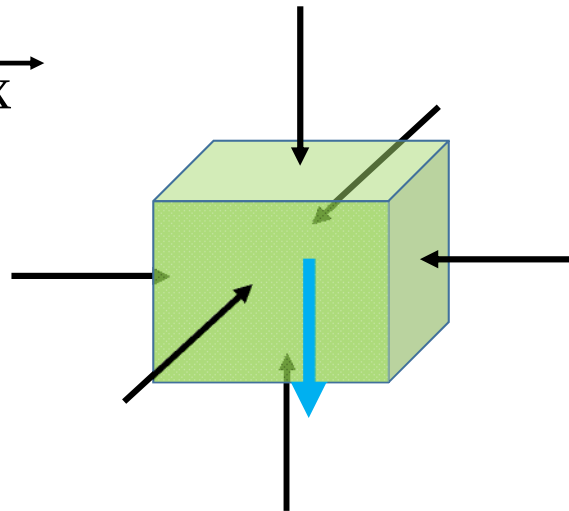
معادلات اساسی در ایستایی سیالات:

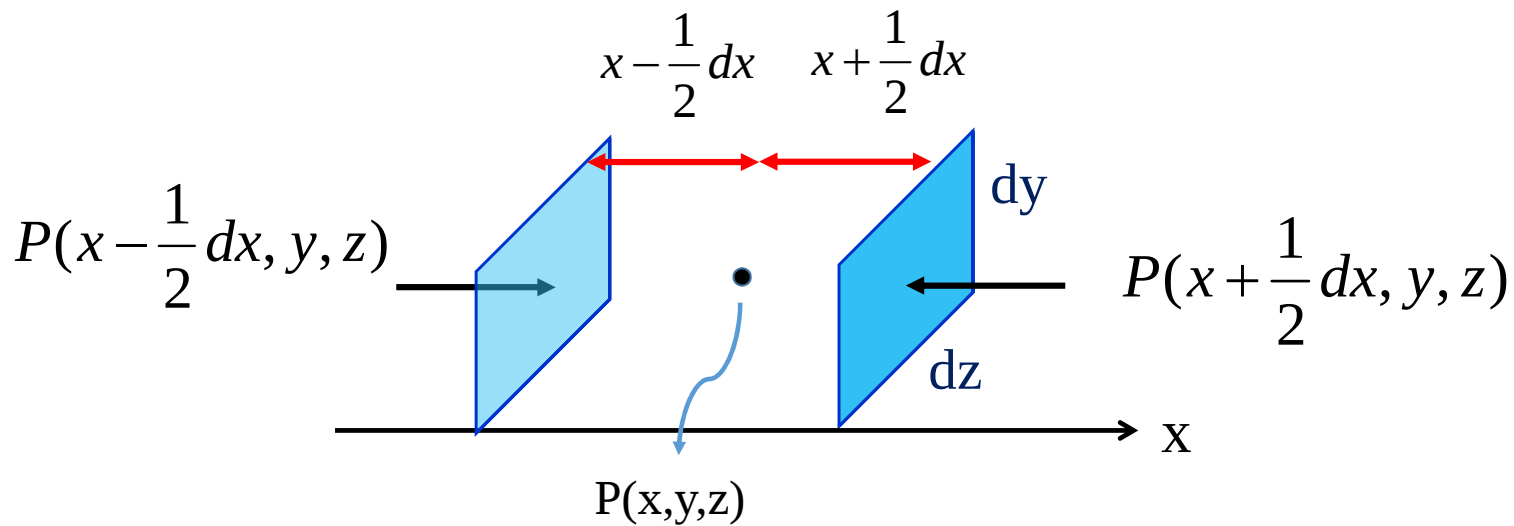
تحلیل نیروها وارد بر المان حجمی از سیال
در مکان (x, y, z) و با ابعاد $dx dy dz$



نیروهای وارد بر یک سیال

- نیروی حجمی
- نیروی سطحی

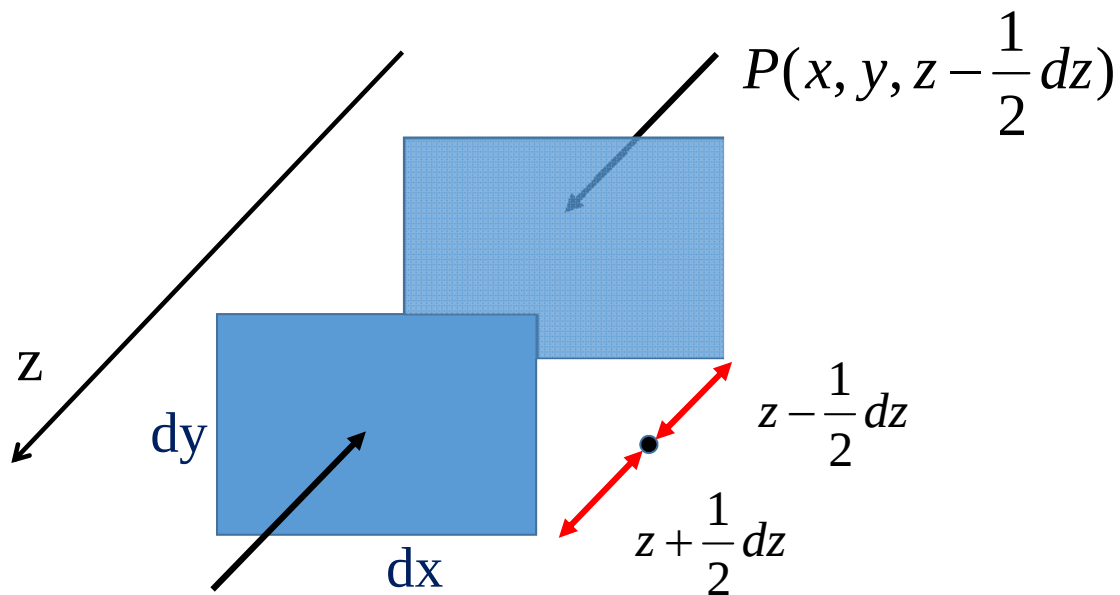




$$\sum dF_x = \{P(x - \frac{1}{2}dx, y, z) - P(x + \frac{1}{2}dx, y, z)\}dydz$$

$$\sum dF_x = \{P(x, y, z) - \frac{\partial P}{\partial x} \cdot \frac{dx}{2} - P(x, y, z) - \frac{\partial P}{\partial x} \cdot \frac{dx}{2}\}dydz$$

$$\sum dF_x = -\frac{\partial P}{\partial x} \cdot dx dy dz$$

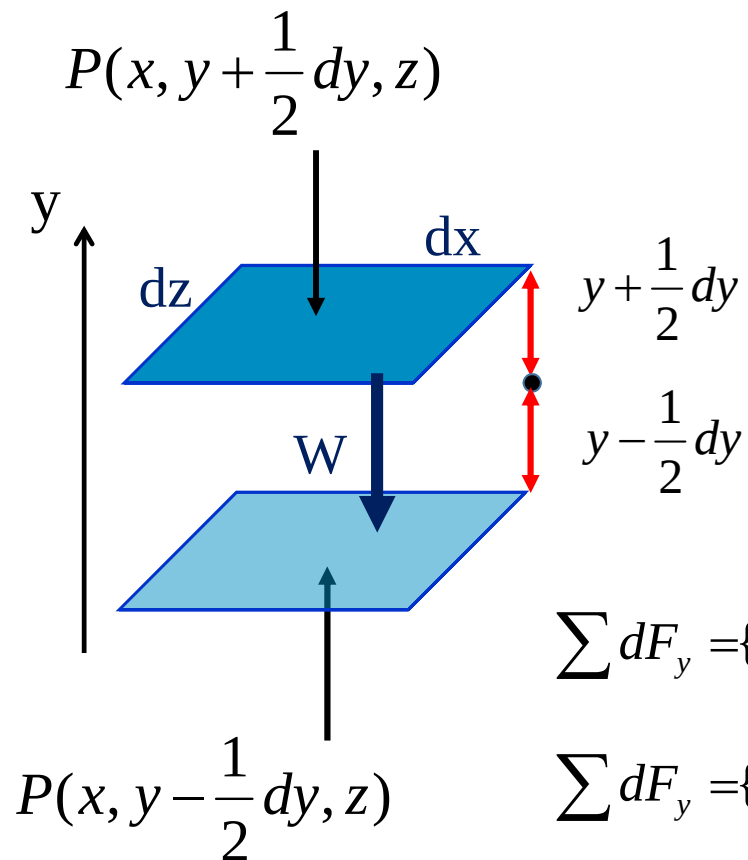


$$P(x, y, z + \frac{1}{2} dz)$$

$$\sum dF_z = \{P(x, y, z - \frac{1}{2} dz) - P(x, y, z + \frac{1}{2} dz)\} dx dy$$

$$\sum dF_z = \{P(x, y, z) - \frac{\partial P}{\partial z} \cdot \frac{dz}{2} - P(x, y, z) - \frac{\partial P}{\partial z} \cdot \frac{dz}{2}\} dx dy$$

$$\sum dF_z = -\frac{\partial P}{\partial z} \cdot dx dy dz$$



$$\sum dF_y = \{P(x, y - \frac{1}{2} dy, z) - P(x, y + \frac{1}{2} dy, z)\} dx dz - W$$

$$\sum dF_y = \{P(x, y, z) - \frac{\partial P}{\partial y} \cdot \frac{dy}{2} - P(x, y, z) - \frac{\partial P}{\partial y} \cdot \frac{dy}{2}\} dx dz - \rho g dx dy dz$$

$$\sum dF_y = (-\frac{\partial P}{\partial y} - \rho g) \cdot dx dy dz$$

$$d\vec{F} = dF_x \hat{i} + dF_y \hat{j} + dF_z \hat{k}$$

$$d\vec{F} = \left(-\frac{\partial P}{\partial x} \hat{i} - \frac{\partial P}{\partial y} \hat{j} - \frac{\partial P}{\partial z} \hat{k}\right) dx dy dz - \rho g \hat{j} dx dy dz$$



$$\frac{d\vec{F}}{dV} = -\vec{\nabla} P - \gamma \hat{j} \quad , \quad \gamma = \rho g$$

نکات

۱- رابطه مشابه با قانون دوم نیوتن است.

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$

$$\rightarrow \frac{\sum \vec{F}}{V} = m \frac{\vec{a}}{V} \rightarrow \sum \vec{f} = \rho \vec{a}$$

$$\sum \vec{f} = f_P + f_g + f_\mu$$

۲- نیروهای وارد بر سیال

نیروی ناشی از فشار
نیروی ناشی از وزن
نیروی ناشی از لزجت

۳- در سیال ساکن لایه ها نسبت به هم ساکنند لذا نیروی ناشی از لزجت نداریم

$$f_{\mu} = 0 \quad \rightarrow \quad \sum \vec{f} = f_P + f_g$$

$$\sum \vec{f} = \rho \vec{a} \quad \rightarrow \quad f_P + f_g = \rho \vec{a}$$

$$\rightarrow \quad \rightarrow \quad -\vec{\nabla} P - \rho g \hat{j} = \rho \vec{a}$$

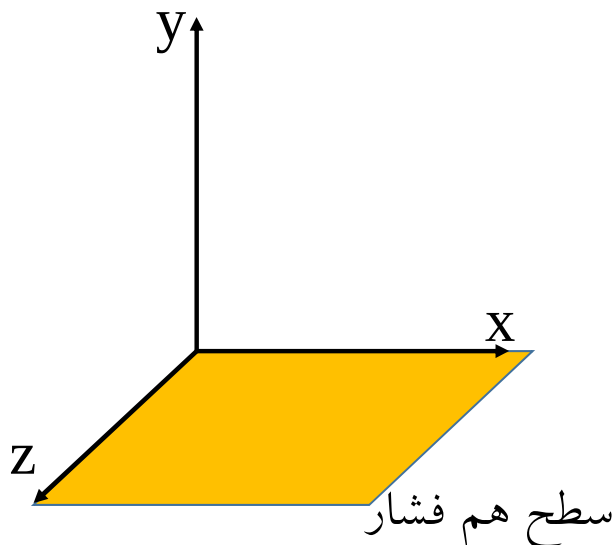
$$\rightarrow \quad \rightarrow \quad -\vec{\nabla} P - \rho g \hat{j} = \frac{\delta \vec{F}}{\delta V} \quad \text{معادله اساسی سیال ساکن}$$

۴- در سیال ساکن برآیند نیروهای وارد بر سیال صفر است

$$\sum \vec{f} = 0 \quad \rightarrow \quad \vec{a} = 0 \quad \rightarrow \quad -\vec{\nabla}P - \rho g \hat{j} = 0$$
$$\rightarrow \quad \vec{\nabla}P = -\rho g \hat{j}$$

اختلاف فشار بین دو نقطه ناشی از وزن سیال بین آن دو نقطه

۵- در سیال ساکن برآیند نیروهای وارد بر سیال صفر است



$$\vec{\nabla} P = -\rho g \hat{j} \rightarrow \begin{cases} \frac{\partial P}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial P}{\partial y} = -\rho g \\ \frac{\partial P}{\partial z} = 0 \end{cases}$$

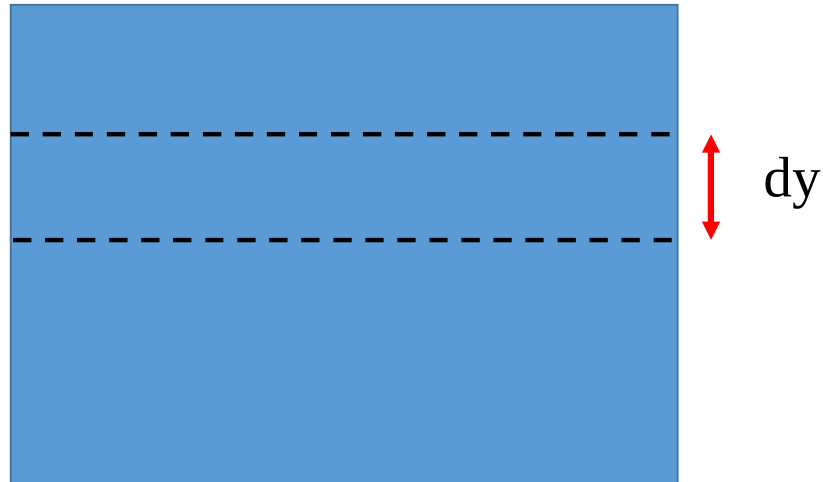
تغییر فشار در راستای X و Z صفر است یعنی سطح افقی یک سطح هم فشار است

فشار در راستای قائم با ارتفاع تغییر می کند (ناشی از وزن سیال)

۶- تغییر فشار در راستای قائم

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -\rho g \quad \rightarrow \quad dP = -\rho g dy$$

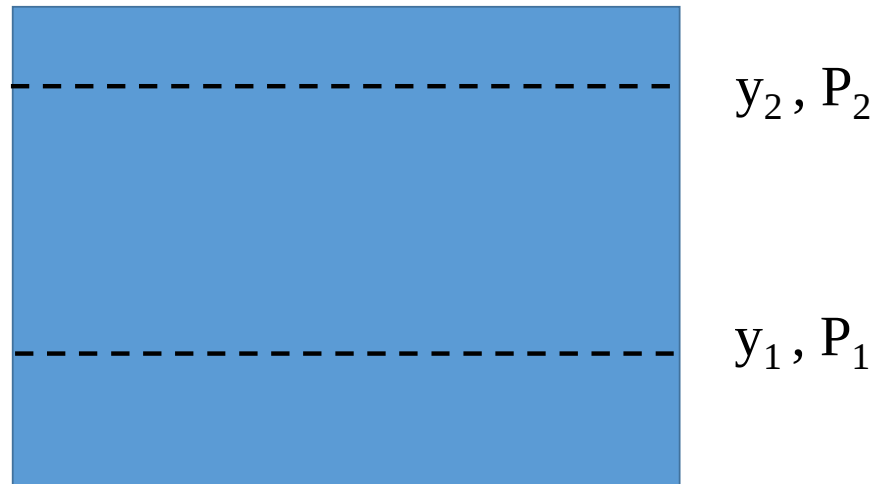
تغییر فشار به ازاء یک تغییر ارتفاع
به اندازه بسیار کوچک dy



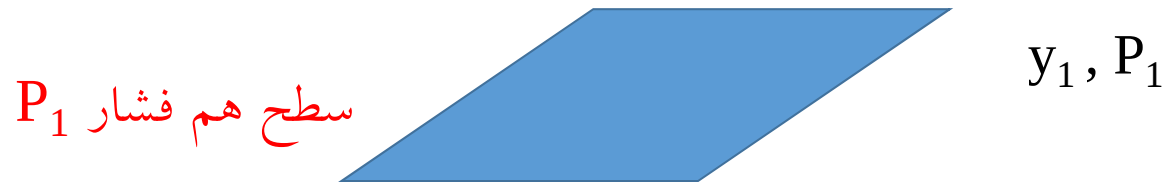
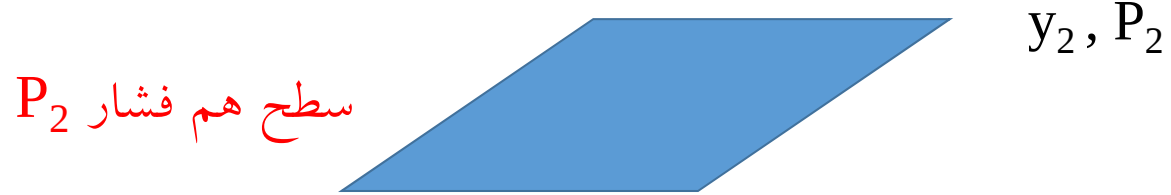
۷- اگر $\gamma = \rho g$ ثابت در نظر گرفته شود

$$dP = -\rho g dy \quad \rightarrow \quad \int_{P_1}^{P_2} dP = -\rho g \int_{y_1}^{y_2} dy$$

$$P_2 - P_1 = -\rho g (y_2 - y_1)$$

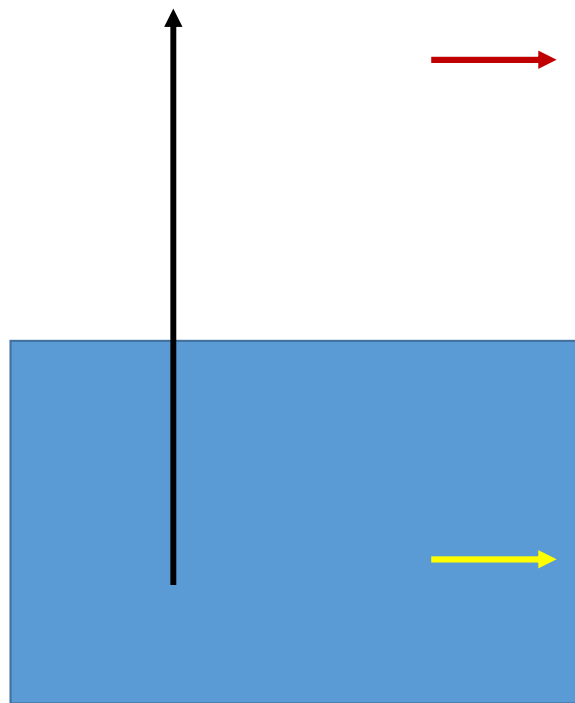


۸- اختلاف فشار بین دو سطح



$$P_2 - P_1 = -\rho g(y_2 - y_1)$$

۸- اگر مبداء مختصات سطح دریای آزاد باشد



$$\longrightarrow y_2 < 0$$

$$y_2 - y_1 = h$$

$$P_2 = P_0 - \rho g h$$

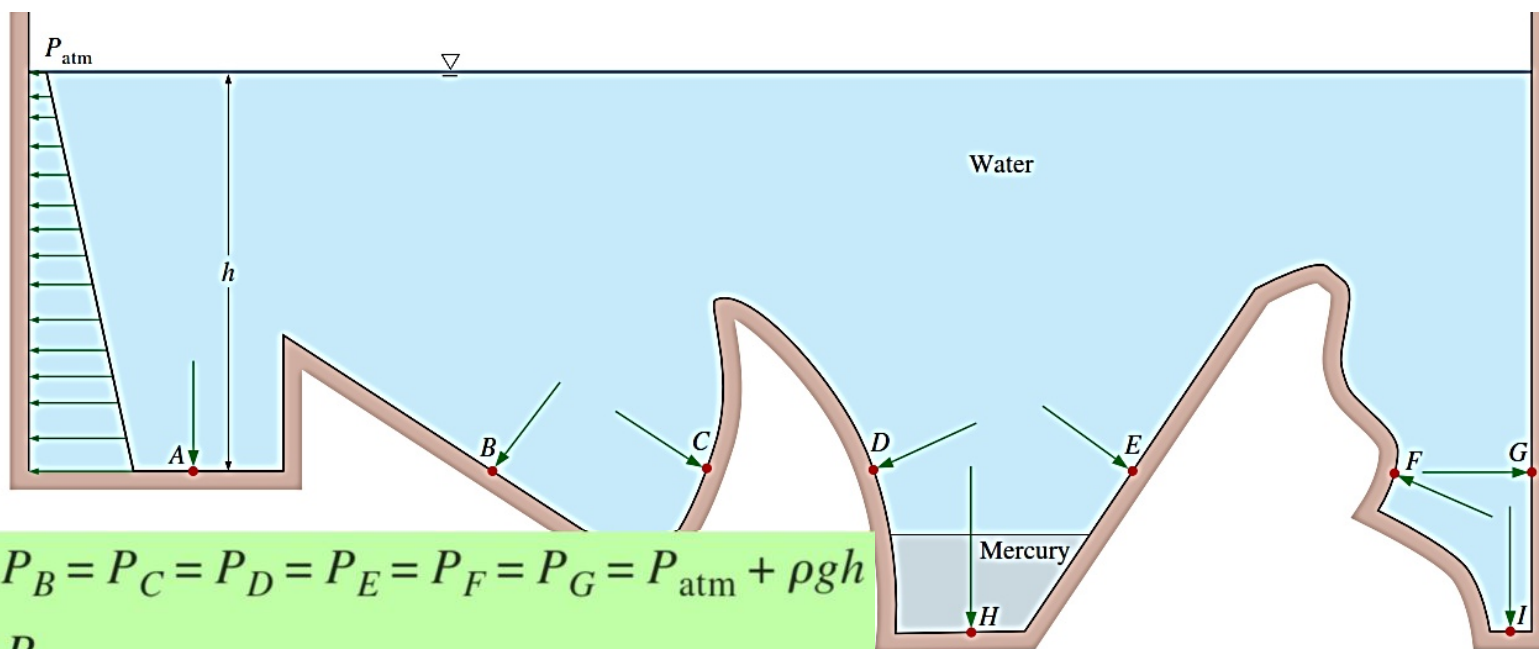
$$y_1 = 0, P_1 = P_0$$

$$y_2 - y_1 = -h$$

$$P_2 = P_0 + \rho g h$$

$$\longrightarrow y_2 < 0$$

۹- در یک سیال بدون توجه به هندسه فشار در تمام نقاط قرار گرفته روی یک صفحه در صورتی که نقاط توسط یک سیال به هم متصل می شوند یکسان است
در صورتی که نوع سیال متصل کننده دو سطح هم تراز متفاوت باشد دیگر این سطوح سطوح هم فشار نیستند



$$P_A = P_B = P_C = P_D = P_E = P_F = P_G = P_{atm} + \rho gh$$

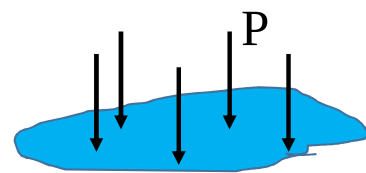
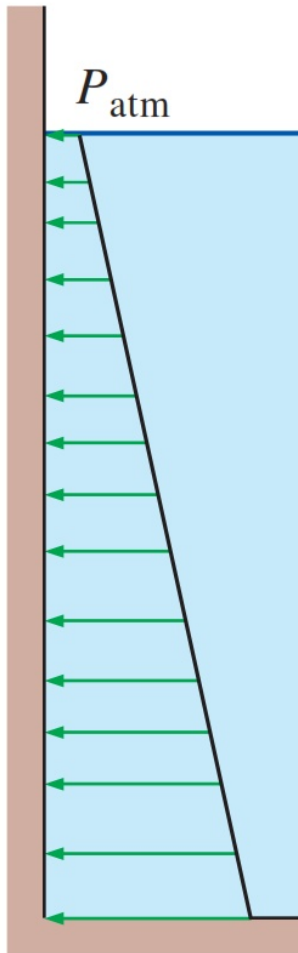
$$P_H \neq P_I$$

۱۰- پروفایل فشار:

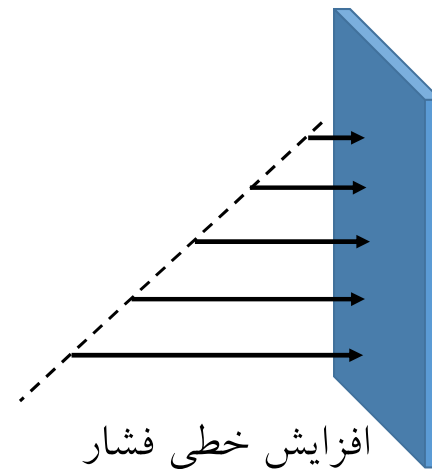
نمودار تغییرات فشار سیال بر حسب تغییرات ارتفاع سیال

هرچه فشار کمتر می شود طول خط متناظر کوچکتر و

برعکس هر جا فشار افزایش یابد طول خط بلندتر



سطح هم ارتفاع = هم فشار

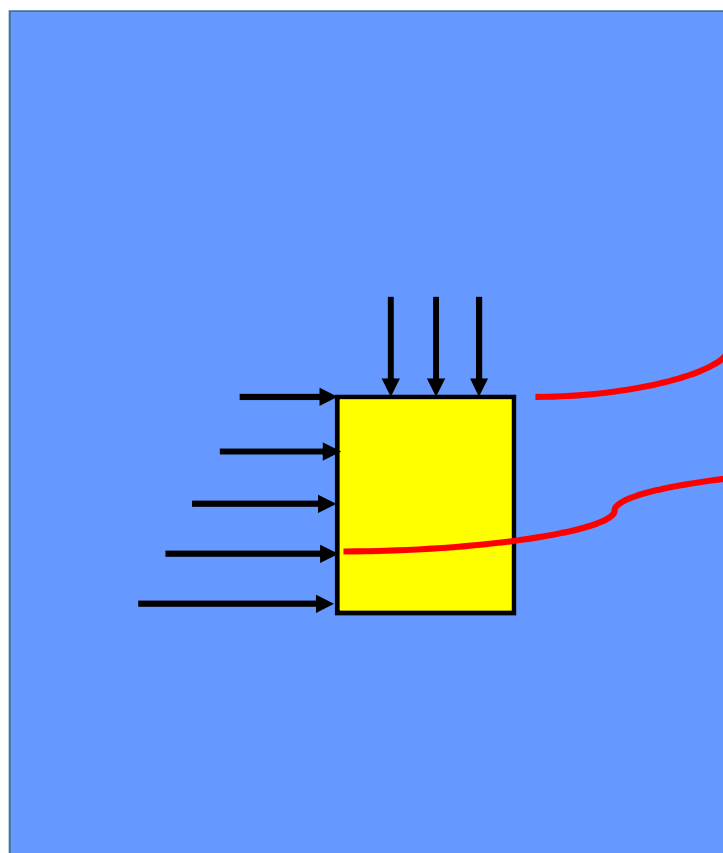


افزایش خطی فشار

مثال) اتاقکی به گونه ای طراحی شده که سطح آن تا سطح دریا 100m فاصله دارد. اگر چگالی آب دریا $1/02$ برابر آب باشد مطلوبست:

الف) مقدار فشار بر سقف اتاقک

ب) تغییرات فشار در دیواره اتاقک



$$P = P_0 + \rho gh$$

$$P = P_0 + \rho gy$$

قانون پاسکال (Pascal's Law)

قانون پاسکال:

در یک سیستم سیال بسته، اگر فشار در یک نقطه از آن تغییر نماید فشار در همه نقاط آن و نیز دیواره ظرف به همان اندازه تغییر خواهد نمود.

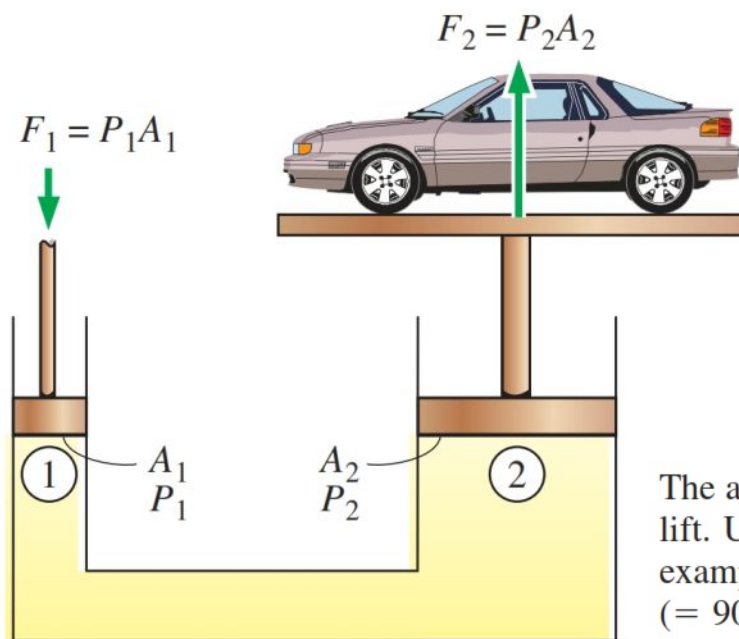
پرس یا بالابرهای هیدرولیک:

براساس قانون پاسکال می توان یک نیروی خروجی بزرگ را از یک نیروی ورودی کوچک بدست آورد.

با اعمال یک نیروی کوچک در سمت چپ می توان وزنه سنگینی را در سمت راست بلند نمود.

$$P_1 = P_2 \quad \rightarrow \quad \frac{F_1}{A_1} = \frac{F_2}{A_2}$$

$$\rightarrow \quad \frac{F_2}{F_1} = \frac{A_2}{A_1}$$



The area ratio A_2/A_1 is called the *ideal mechanical advantage* of the hydraulic lift. Using a hydraulic car jack with a piston area ratio of $A_2/A_1 = 100$, for example, a person can lift a 1000-kg car by applying a force of just 10 kgf ($= 90.8 \text{ N}$).

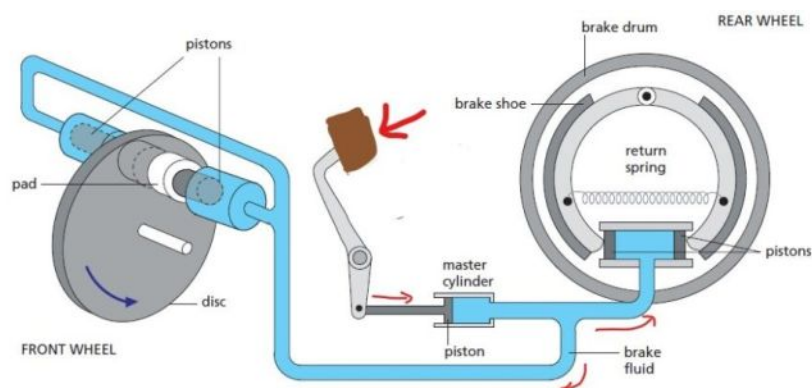
کاربردهای قانون پاسکال

❖ ترمز هیدرولیک

❖ بالابر ماشین

❖ جکهای هیدرولیک

❖ جرثقیل هیدرولیکی



مثال) در شکل زیر مقطع A و B به ترتیب برابر با 0.004 m^2 و 0.2 m^2 و وزن قطعه B برابر با 40 kg است. بین A و B مایعی با چگالی برابر با 0.75 چگالی آب قرار دارد. نیروی F لازم برای حفظ تعادل سیستم چقدر است. قطعه A بدون جرم است.

تغییرات فشار

$$\vec{\nabla} P = -\rho g \hat{j}$$

$$\text{در راستای } y \quad \frac{\partial P}{\partial y} = -\rho g \quad \rightarrow \quad dP = -\rho g dy$$

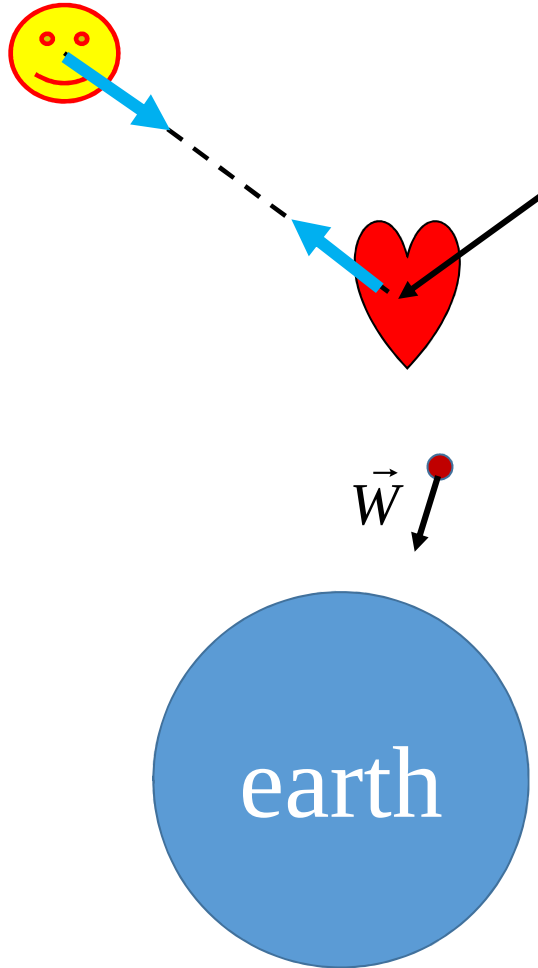
تغییرات فشار تابعی از:

0 تغییر ارتفاع

0 تغییر چگالی

0 تغییر شتاب گرانش زمین

تغییر فشار با تغییر شتاب گرانش زمین



اندازه: $F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$

راستا: روی خط واصل میان دو جسم

جهت: جاذبه

بردار نیروی گرانش

$$w = G \frac{m_E m}{r^2} = mg \rightarrow g = G \frac{m_E}{r^2}$$

$$g \propto \frac{1}{r^2}$$

فاصله هر نقطه نسبت به مرکز زمین

$$r_0 = 6400 \text{ km} \rightarrow g_0 = 9.81 \text{ m/s}^2$$

$$r = 6? \rightarrow |g - g_0| = 0.01g_0$$

$$\frac{|g - g_0|}{g_0} = \frac{\frac{1}{r^2} - \frac{1}{r_0^2}}{\frac{1}{r_0^2}} \rightarrow 0.01 = \frac{r_0^2}{r^2} - 1 \rightarrow \dots \rightarrow |r - r_0| = 31.7 \text{ km}$$

تغییر فشار با تغییر چگالی

مایعات: سیال تراکم ناپذیر
گازها: سیال تراکم پذیر

چگالی مایعات در مسائل زمینی ثابت



عمیقترین اقیانوس حدود 10 km

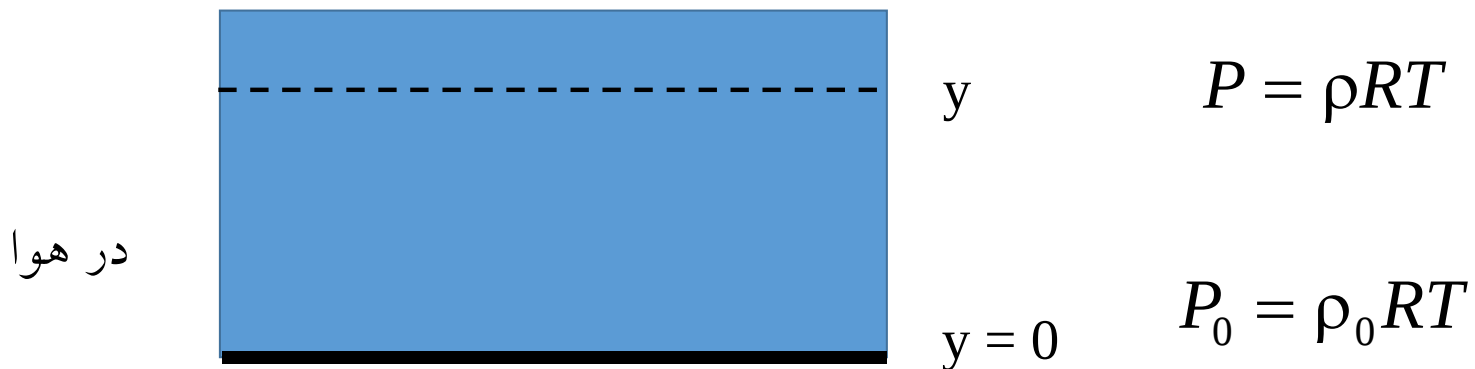
تغییر چگالی نسبی 4.6 %

تغییر فشار در گازها

در گازها، چگالی گاز با ارتفاع تغییر می کند

$$P = \rho RT$$

فرض حالت اول: دما ثابت



$$\frac{P}{P_0} = \frac{\rho RT}{\rho_0 RT} \rightarrow \frac{P}{P_0} = \frac{\rho}{\rho_0} \rightarrow \rho = \frac{\rho_0}{P_0} P \quad \textcircled{1}$$

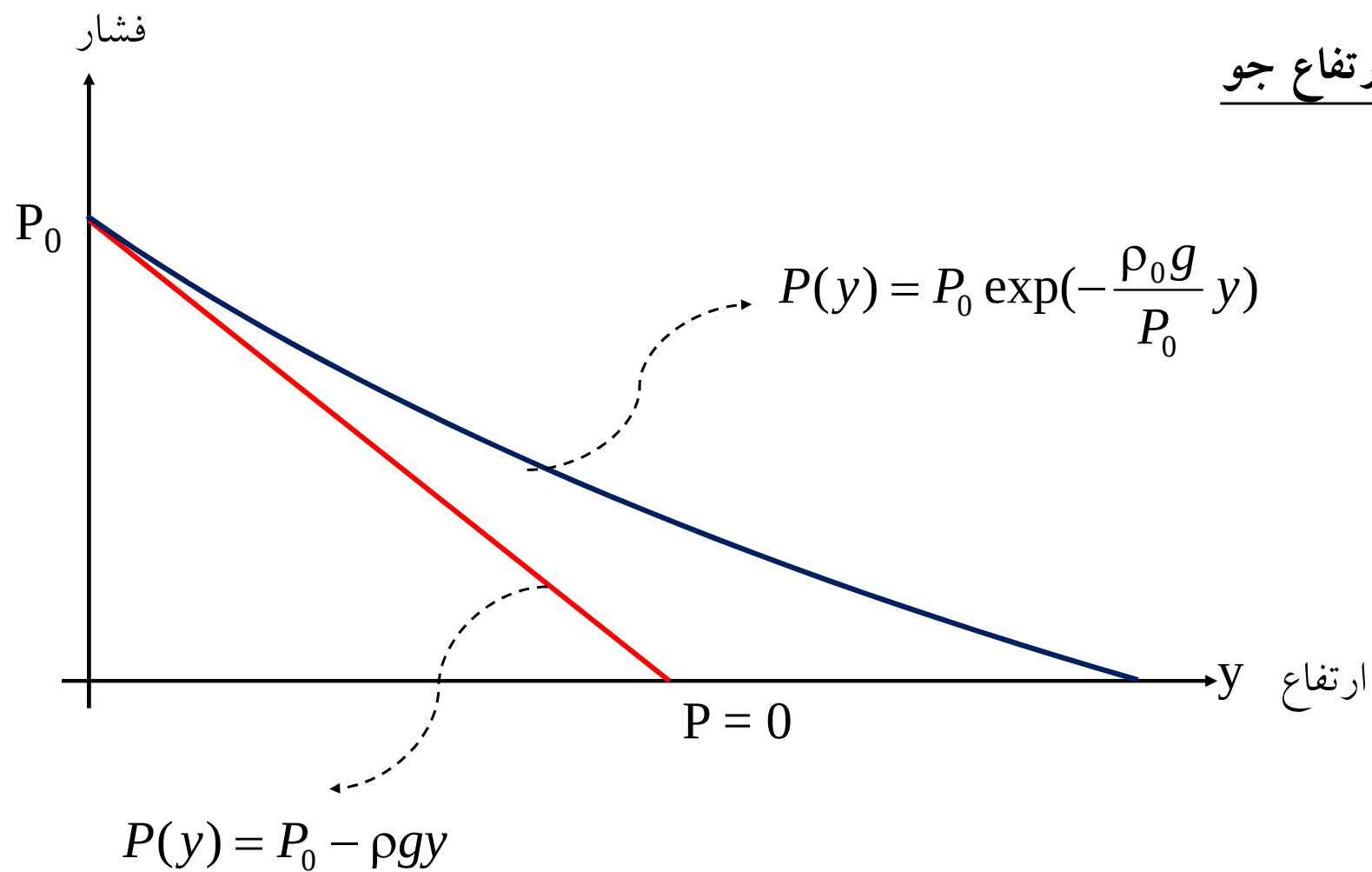
$$dP = -\rho g dy \quad \textcircled{2}$$

$$\textcircled{2} \textcircled{1} \rightarrow dP = -\frac{\rho_0}{P_0} P g dy \rightarrow \frac{dP}{P} = -\frac{\rho_0}{P_0} g dy$$

$$\int_{P=P_0}^{P=P(y)} \frac{dP}{P} = -\frac{\rho_0}{P_0} g \int_{y=0}^y dy \rightarrow \ln \frac{P(y)}{P_0} = -\frac{\rho_0 g}{P_0} y$$

$$P(y) = P_0 \exp\left(-\frac{\rho_0 g}{P_0} y\right)$$

تخمین ارتفاع جو



فرض حالت دوم: دما متغیر با ارتفاع

دمای هوا با ارتفاع به صورت خطی تغییر می کند

$$T = T_0 - ky \rightarrow dT = -kdy \rightarrow dy = \frac{-dT}{k} \quad \textcircled{1}$$

$$P = \rho RT \rightarrow \rho = \frac{P}{RT} \quad \textcircled{2}$$

$$dP = -\rho g dy \quad \textcircled{3}$$

$$\textcircled{3} \quad \textcircled{2} \quad \textcircled{1} \rightarrow dP = -\frac{P}{RT} g \times \frac{-dT}{k} \rightarrow \frac{dP}{P} = \frac{gk}{R} \frac{dT}{T} \quad \textcircled{4}$$

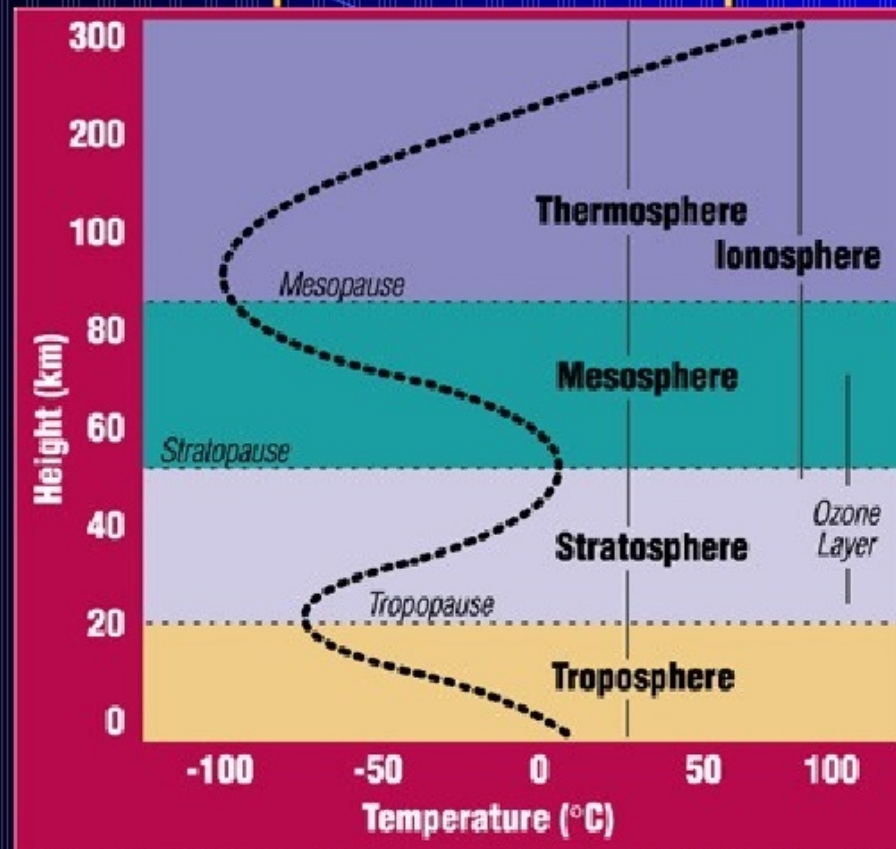
4

$$\frac{dP}{P} = \frac{gk}{R} \frac{dT}{T} \quad \rightarrow \quad \int_{P_0}^P \frac{dP}{P} = \frac{gk}{R} \int_{T_0}^T \frac{dT}{T}$$

$$\ln \frac{P}{P_0} = \frac{gk}{R} \ln \frac{T}{T_0} \quad \rightarrow \quad \ln \frac{P}{P_0} = \ln \left(\frac{T}{T_0} \right)^{\frac{gk}{R}}$$

$$\frac{P}{P_0} = \left(\frac{T}{T_0} \right)^{\frac{gk}{R}} \quad \rightarrow \quad P = P_0 \left(\frac{T_0 - ky}{T_0} \right)^{\frac{gk}{R}}$$

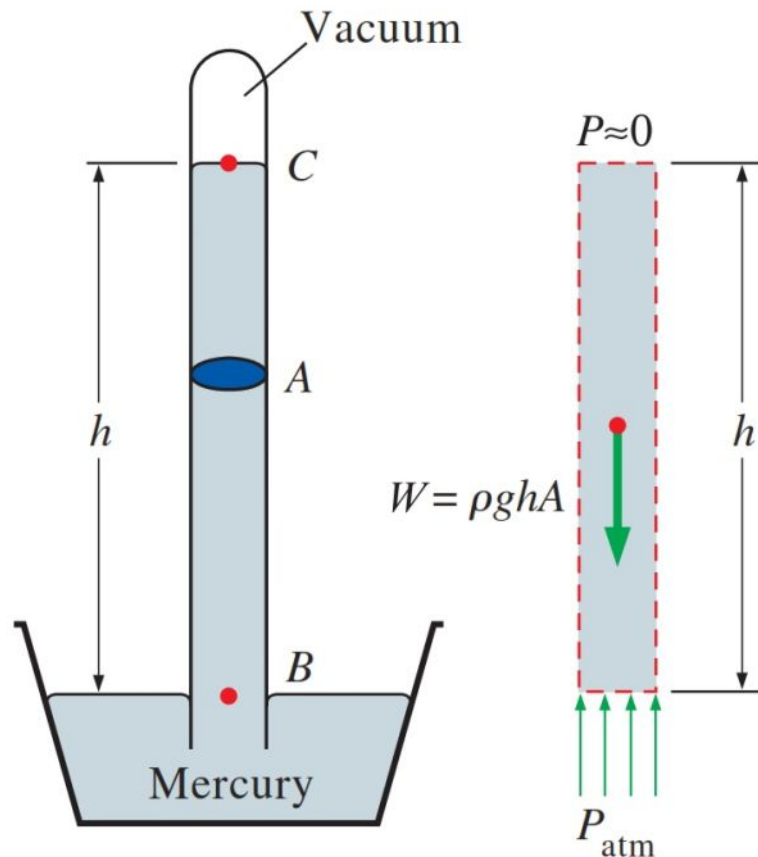
Temperature Graph



ابزارهای اندازه گیری فشار

The Barometer بارومتر

برای اندازه گیری فشار جو



$$P_{atm} = P_B$$

$$P_{atm} = P_C + \rho g h \quad , \quad P_C = 0$$

$$P_{atm} = \rho g h$$

فشار اتمسفر:

فشار روی سطح زمین ناشی از وزن هوای بالای سطح زمین

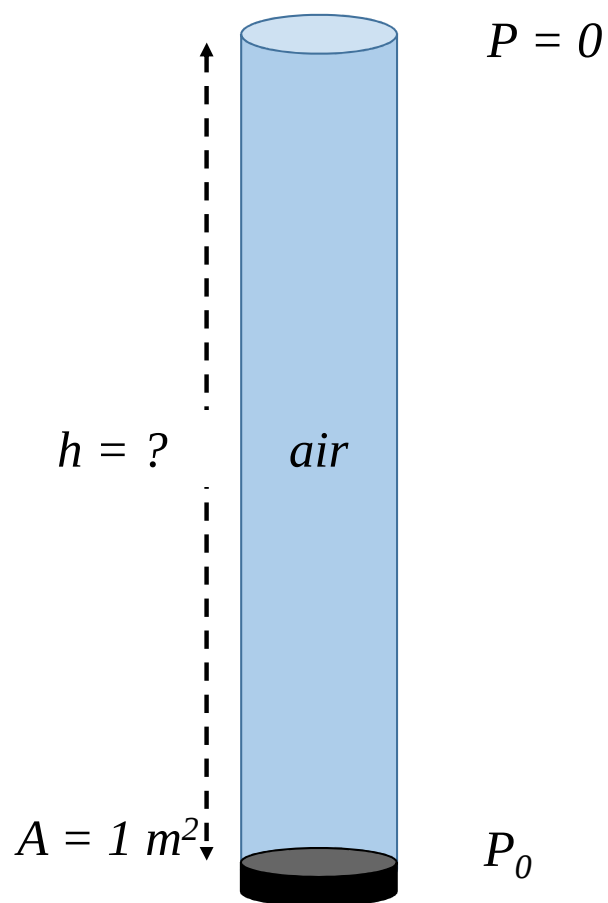
$$P_0 = 1.00 \text{ atm} = 1.013 \times 10^5 \text{ Pa}$$

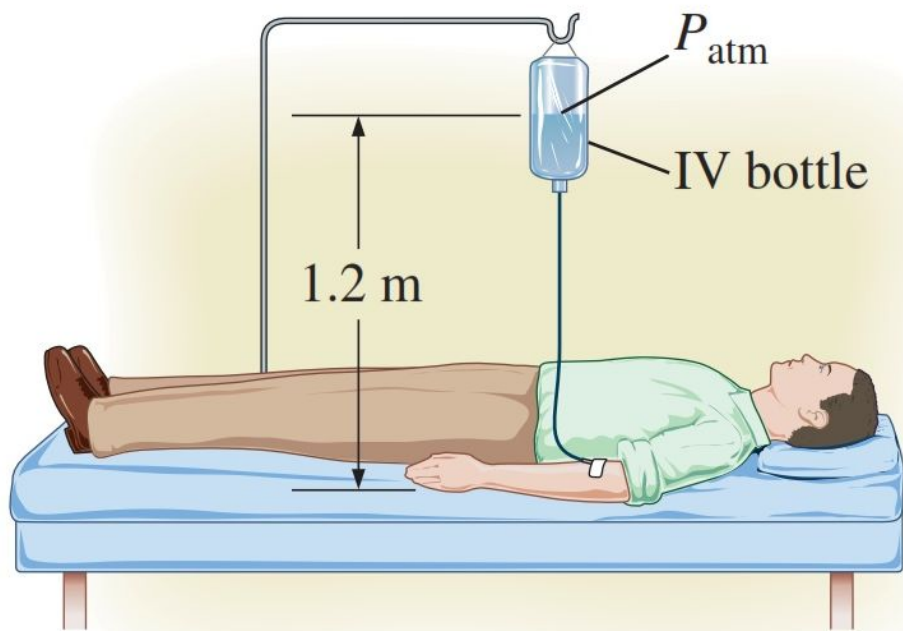
$$W_{\text{air}} = mg$$

$$P_0 = \frac{W_{\text{air}}}{A}$$

واحد فشار : پاسکال Pa

$$1 \text{ Pa} \sim 10^{-5} \text{ atm}$$





مثال) جریان گرانشی از یک سرم

تزریق های داخل وریدی معمولاً توسط نیروی جاذبه و با آویزان کردن بطری مایع در ارتفاع مناسب برای مقابله با فشار خون در ورید و فشار دادن مایع به بدن انجام می شود. (الف) اگر مشاهده شد که مایع و فشار خون در زمانی که بطری 1.2 متر از سطح بازو بالاتر است تعادل یکدیگر را برقرار می کنند، فشار گیج خون را تعیین کنید. (ب) اگر فشار گیج سیال در سطح بازو برای سرعت جریان کافی ۲۰ کیلو پاسکال باشد، تعیین کنید که شیشه سرم باید در چه ارتفاعی قرار گیرد. چگالی سیال را ۱۰۲۰ کیلوگرم بر متر مکعب در نظر بگیرید.

$$\begin{aligned}P_{\text{gage, arm}} &= P_{\text{abs}} - P_{\text{atm}} = \rho g h_{\text{arm} - \text{bottle}} \\&= (1020 \text{ kg/m}^3)(9.81 \text{ m/s}^2)(1.20 \text{ m}) \left(\frac{1 \text{ kN}}{1000 \text{ kg}\cdot\text{m/s}^2} \right) \left(\frac{1 \text{ kPa}}{1 \text{ kN/m}^2} \right) \\&= \mathbf{12.0 \text{ kPa}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}h_{\text{arm} - \text{bottle}} &= \frac{P_{\text{gage, arm}}}{\rho g} \\&= \frac{20 \text{ kPa}}{(1020 \text{ kg/m}^3)(9.81 \text{ m/s}^2)} \left(\frac{1000 \text{ kg}\cdot\text{m/s}^2}{1 \text{ kN}} \right) \left(\frac{1 \text{ kN/m}^2}{1 \text{ kPa}} \right) \\&= \mathbf{2.00 \text{ m}}\end{aligned}$$

مثال) فشار هیدرواستاتیک در حوضچه خورشیدی با چگالی متغیر

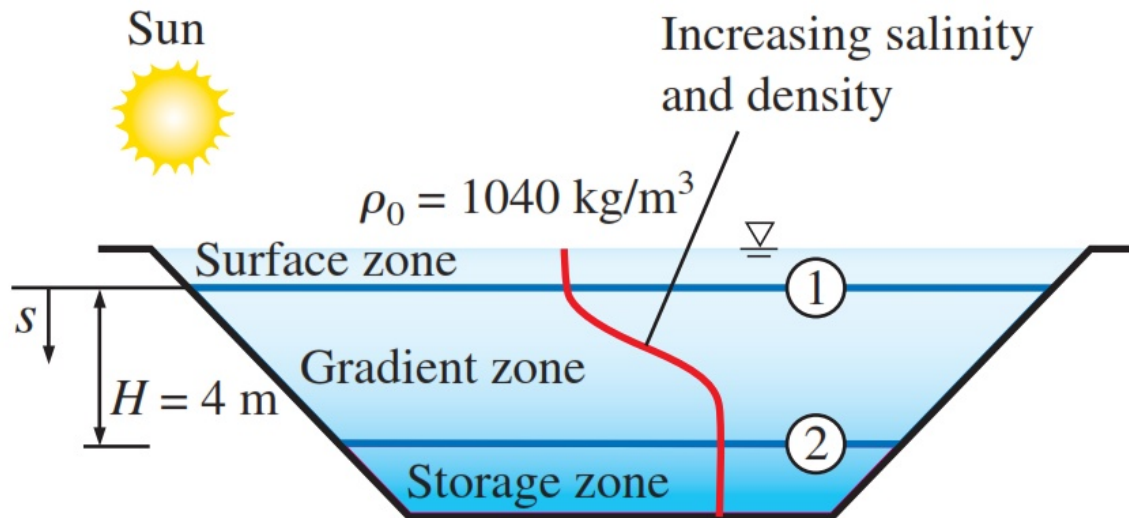
حوضچه های خورشیدی دریاچه های مصنوعی کوچکی به عمق چند متر هستند که برای ذخیره انرژی خورشیدی استفاده می شوند. با افزودن نمک در کف حوضچه، از بالا آمدن آب گرم شده (و در نتیجه چگالی کمتر) به سطح جلوگیری می شود. در یک حوضچه خورشیدی معمولی، چگالی آب در ناحیه گرادیان افزایش می یابد، گرادیان نمک به صورت زیر است

$$\rho = \rho_0 \sqrt{1 + \tan^2 \left(\frac{\pi}{4} \frac{s}{H} \right)}$$

در این رابطه ρ_0 چگالی روی سطح آب را بیان می کند، s فاصله عمودی است که به سمت پایین و از بالای ناحیه گرادیان اندازه گیری می شود ($s = -z$). و H ضخامت ناحیه گرادیان است. برای $H = 4 \text{ m}$ چگالی ρ_0 برابر با 1040 kg/m^3 است. فشار گنج در پایین منطقه گرادیان را محاسبه کنید

the top of the gradient zone

$$P_1 = \rho g h_1 = (1040 \text{ kg/m}^3)(9.81 \text{ m/s}^2)(0.8 \text{ m}) \left(\frac{1 \text{ kN}}{1000 \text{ kg} \cdot \text{m/s}^2} \right) = 8.16 \text{ kPa}$$



In the gradient zone

$$P - P_1 = \int_0^s \rho g \, ds \quad \rightarrow \quad P = P_1 + \int_0^s \rho_0 \sqrt{1 + \tan^2\left(\frac{\pi}{4} \frac{s}{H}\right)} g \, ds$$



$$P = P_1 + \rho_0 g \frac{4H}{\pi} \sinh^{-1}\left(\tan \frac{\pi}{4} \frac{s}{H}\right)$$

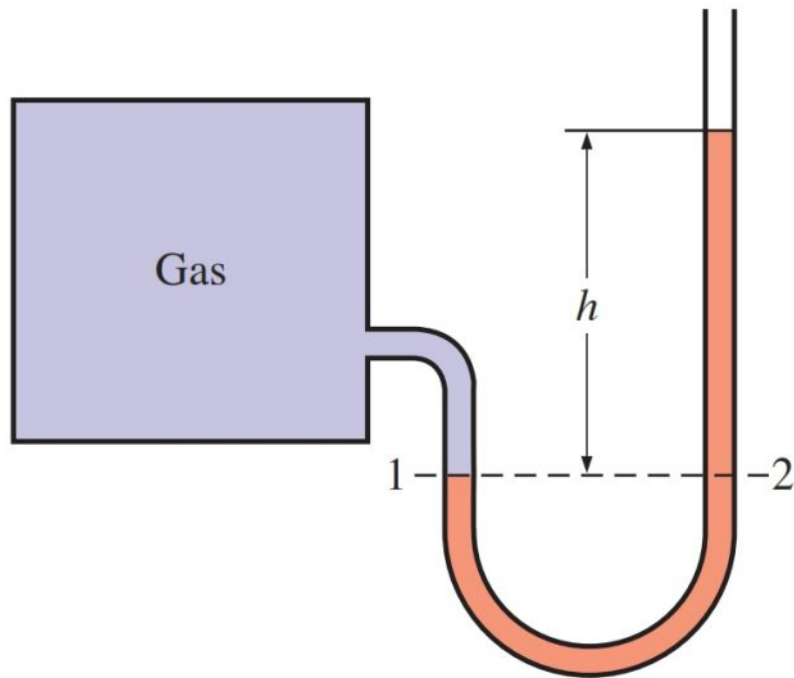
The Manometer

مانومتر

برای اندازه گیری فشار سیال
شامل لوله U شکل و حاوی جیوه

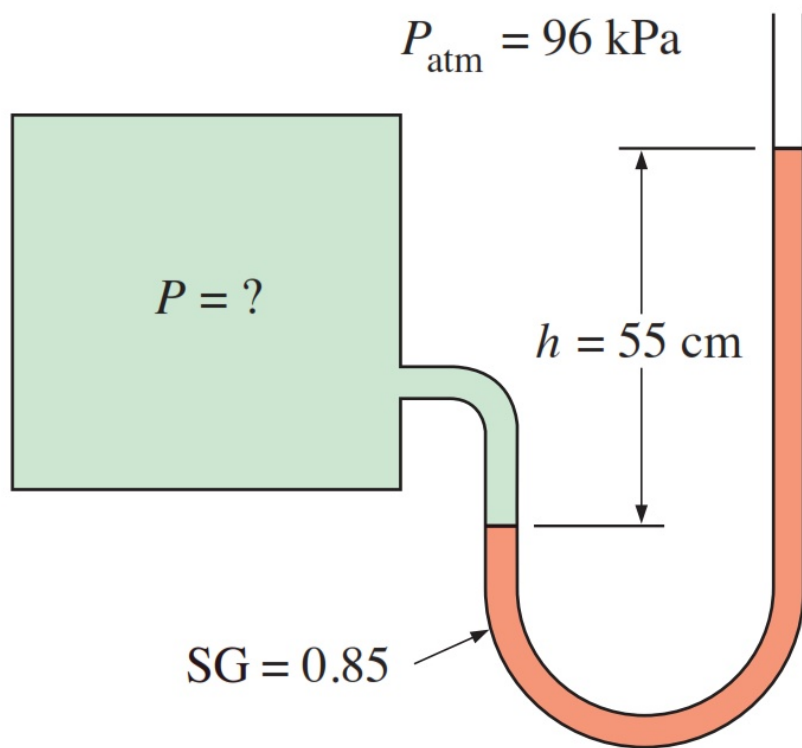


A simple U-tube manometer, with high pressure applied to the right side.



$$P_{gas} = P_1 = P_2$$

$$P_2 = P_{atm} + \rho gh$$

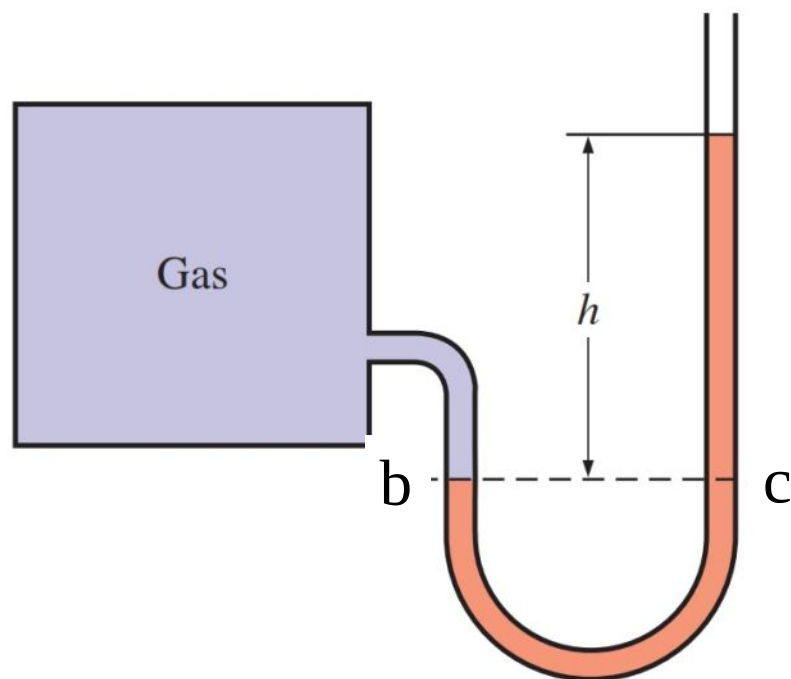


مثال) مانومترمانومتر برای اندازه گیری فشار گاز در مخزن استفاده می شود. سیال مورد استفاده دارای وزن مخصوص 0.85 و ارتفاع ستون مانومتر 55 سانتی متر است. اگر فشار اتمسفر محلی ۹۶ کیلو پاسکال باشد، فشار مطلق را در مخزن تعیین کنید.

$$\rho = SG (\rho_{\text{H}_2\text{O}}) = (0.85)(1000 \text{ kg/m}^3) = 850 \text{ kg/m}^3$$

Then from Eq. 3-13,

$$\begin{aligned} P &= P_{\text{atm}} + \rho gh \\ &= 96 \text{ kPa} + (850 \text{ kg/m}^3)(9.81 \text{ m/s}^2)(0.55 \text{ m}) \left(\frac{1 \text{ N}}{1 \text{ kg} \cdot \text{m/s}^2} \right) \left(\frac{1 \text{ kPa}}{1000 \text{ N/m}^2} \right) \\ &= \mathbf{100.6 \text{ kPa}} \end{aligned}$$

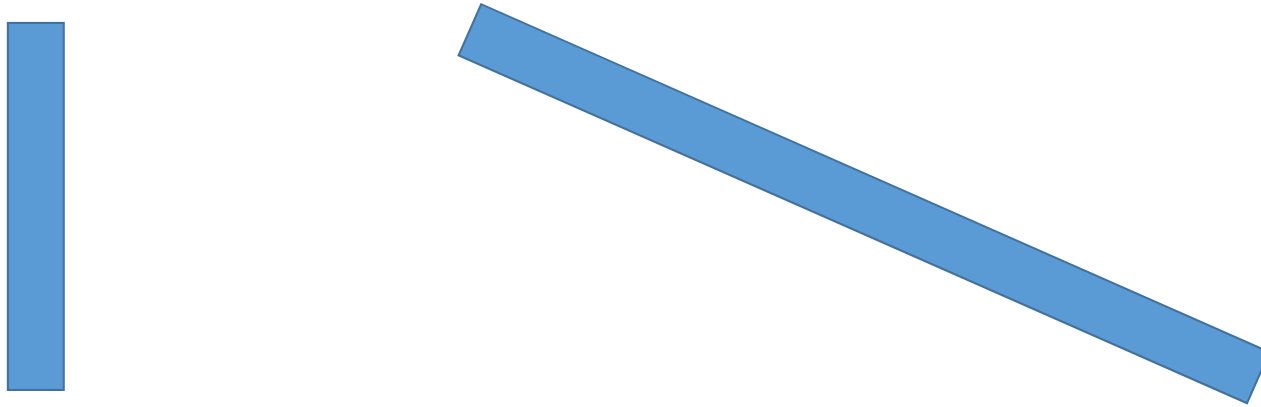


(مثال) در سیستم زیر فشار اولیه محفظه برابر با P_{A1} می باشد. جیوه در لوله سمت چپ در نقطه b قرار دارد. اگر فشار افزایش یافته P_{A2} باشد و به ازاء آن سطح جیوه در لوله سمت چپ به اندازه x نسبت به نقطه b پایین رود نسبت زیر را بدست آورید

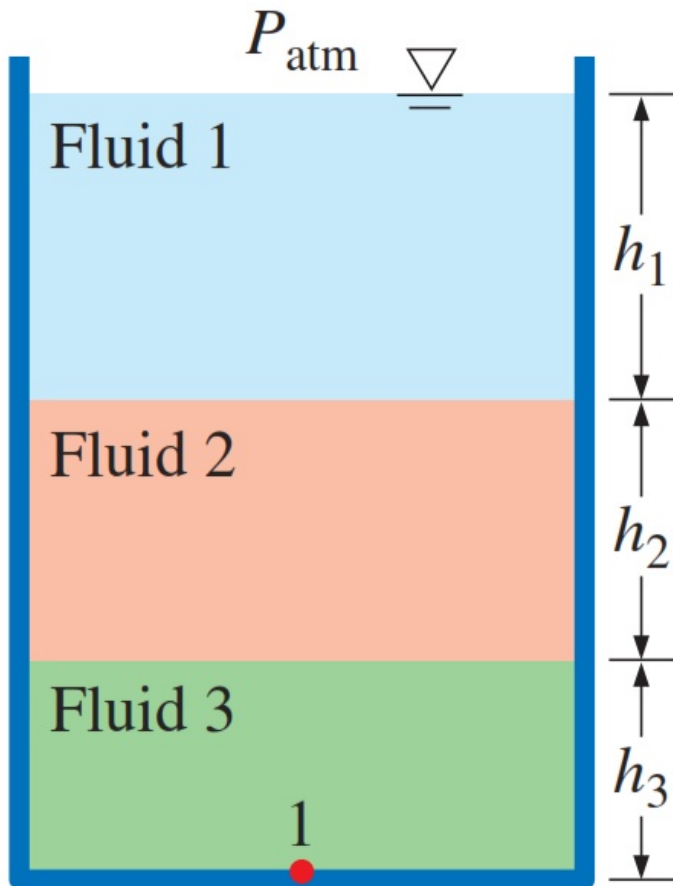
$$\frac{P_{A2}}{P_{A1}} = ?$$

$$P_{A1} = P_{atm} + \rho gh$$

$$P_{A2} = P_{atm} + \rho g(h + 2x)$$

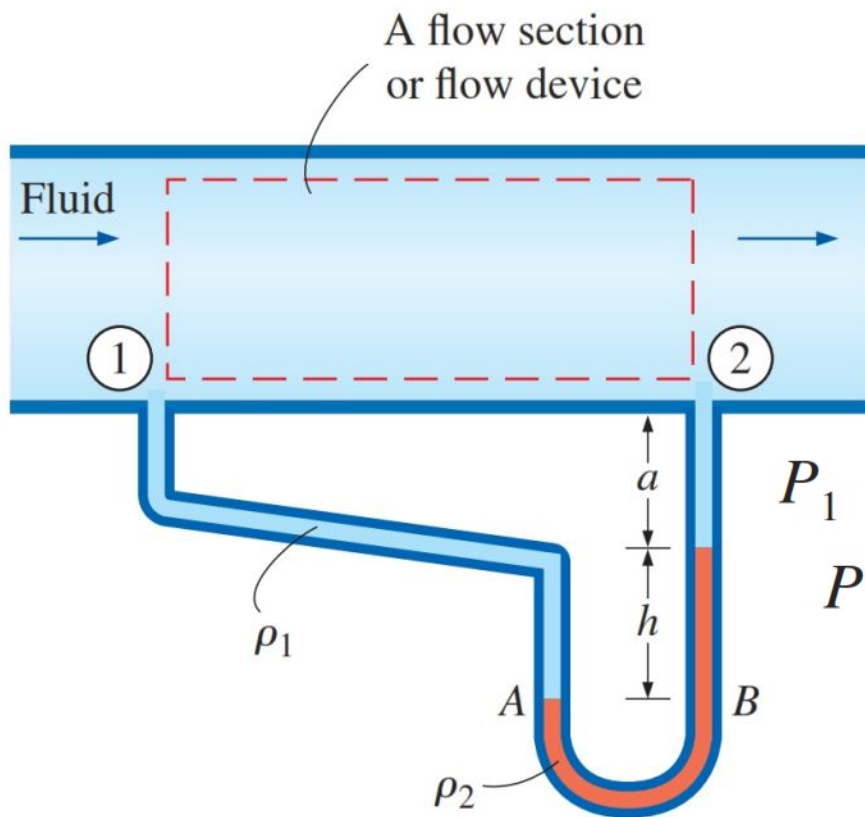


Some manometers use a slanted or inclined tube in order to increase the resolution (precision) when reading the fluid height. Such devices are called **inclined manometers**.



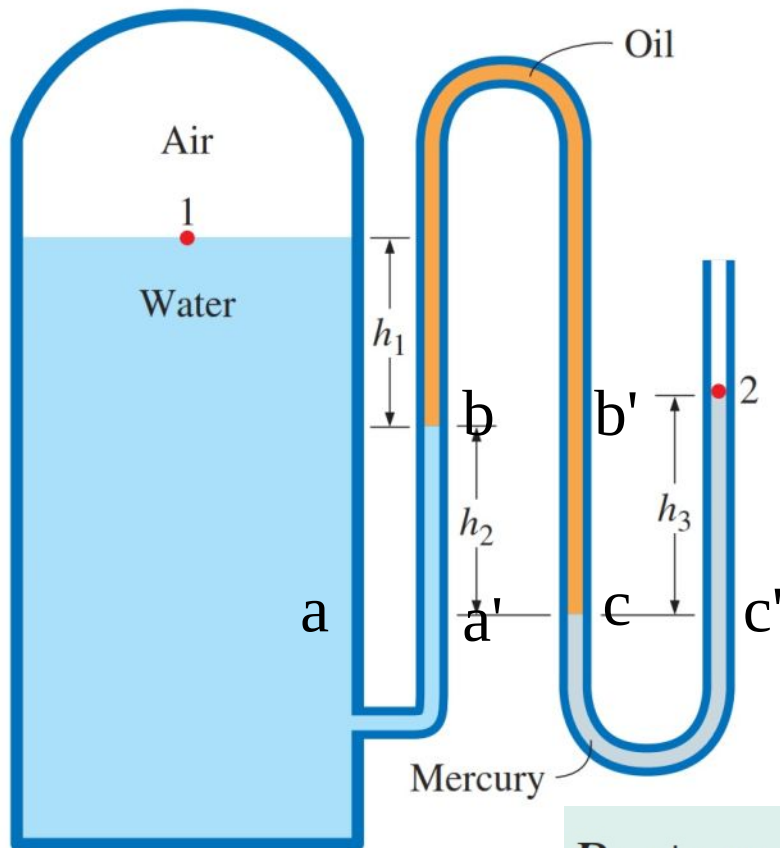
$$P_{\text{atm}} + \rho_1 g h_1 + \rho_2 g h_2 + \rho_3 g h_3 = P_1$$

مثال) مانومترها مخصوصاً برای اندازه گیری افت فشار در یک بخش جریان افقی بین دو نقطه مشخص به دلیل وجود وسیله ای مانند شیر یا مبدل حرارتی یا هرگونه مقاومت در برابر جریان مناسب هستند. همانطور که در شکل نشان داده شده است، این کار با اتصال دو پایه مانومتر به این دو نقطه انجام می شود. سیال عامل می تواند گاز یا مایعی باشد که چگالی آن ρ است. چگالی سیال مانومتر Γ و ارتفاع سیال دیفرانسیل h است. دو سیال باید غیرقابل اختلاط باشند و باید بزرگتر از Γ باشند.



$$P_1 + \rho_1 g(a + h) - \rho_2 g h - \rho_1 g a = P_2$$

$$P_1 - P_2 = (\rho_2 - \rho_1) g h$$



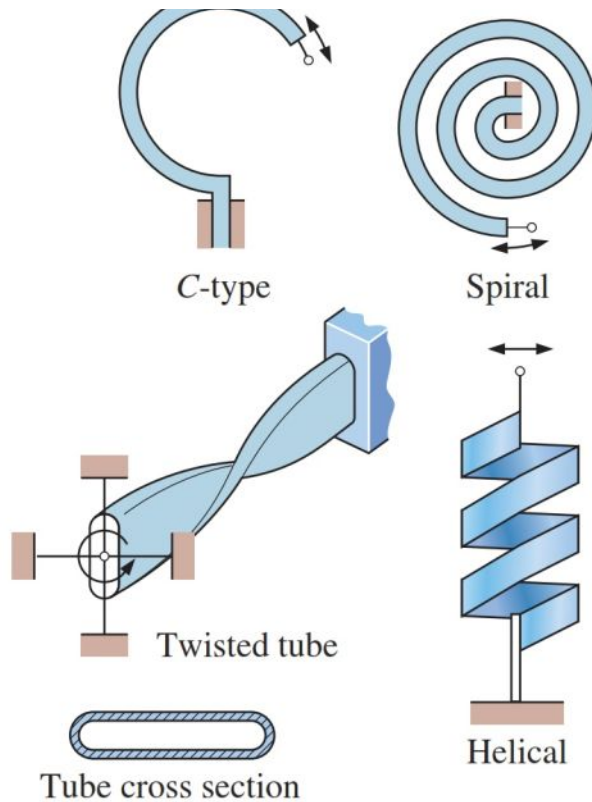
$$P_1 - P_2 = ?$$

$$P_1 - P_2 = P_1 - P_a + P_{a'} - P_b + P_{b'} - P_c + P_{c'} - P_2$$

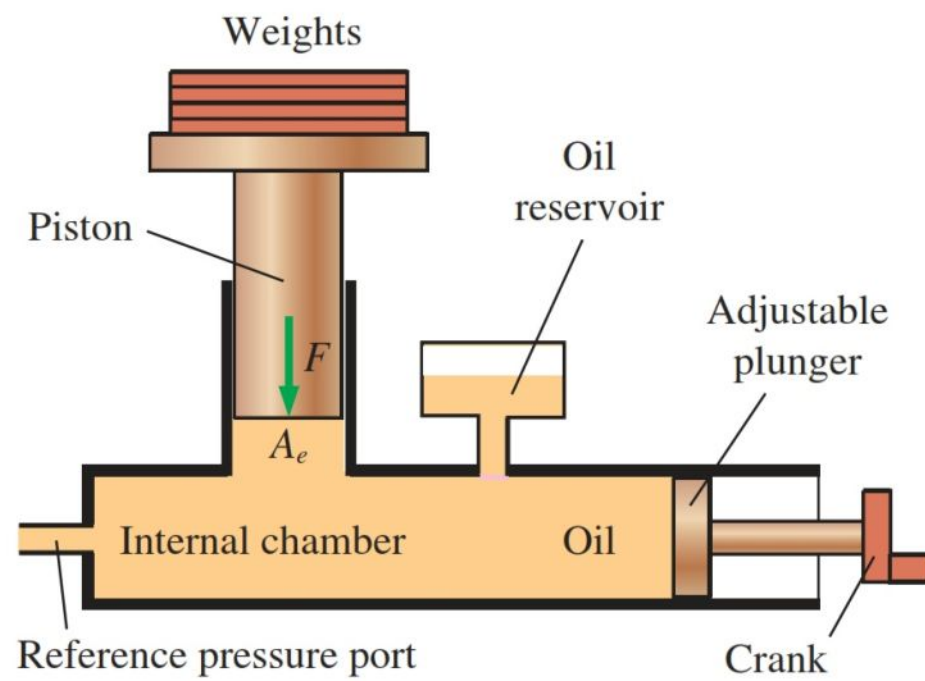
$$P_1 - P_2 = -\rho_w g(h_1 + h_2) + \rho_w g h_2 - \rho_{oil} g h_2 + \rho_{mercury} g h_3$$

$$P_1 + \rho_{water} g h_1 + \rho_{oil} g h_2 - \rho_{mercury} g h_3 = P_2 = P_{atm}$$

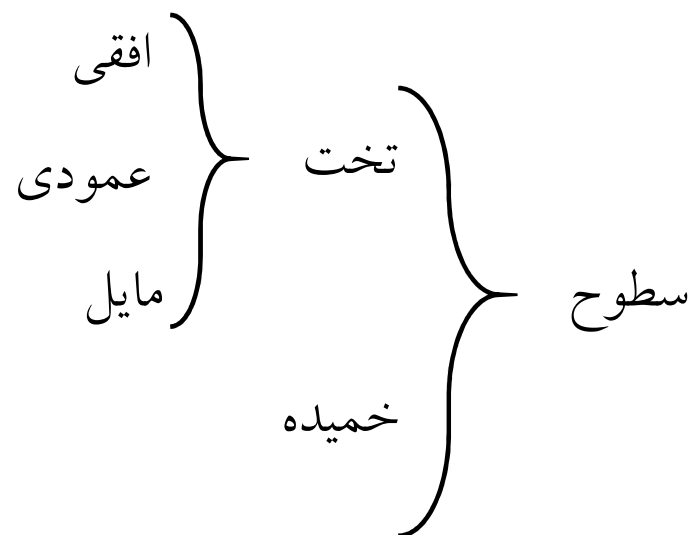
وسایل دیگر برای اندازه گیری فشار



Various types of Bourdon tubes used to measure pressure. They work on the same principle as party noise-makers (bottom photo) due to the flat tube cross section.



نیروی وارد بر سطوح غوطه ور در آب



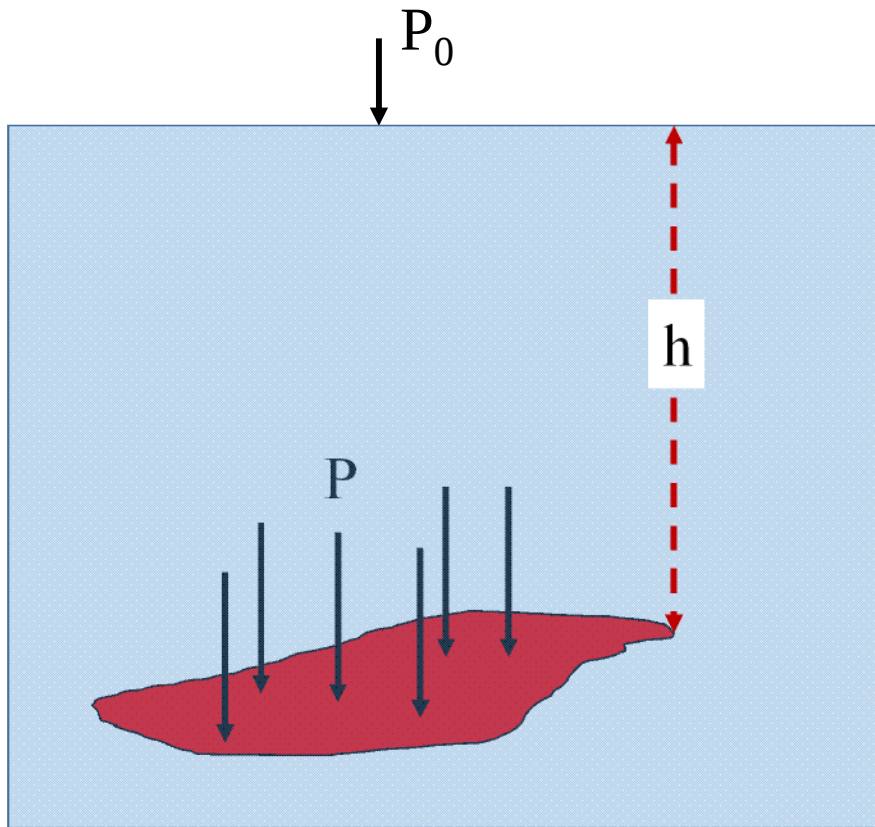
نیروی وارد بر سطح تخت افقی

سطح هم فشار

$$P = \frac{F}{A} \rightarrow F = PA$$

$$P = P_0 + \rho gh$$

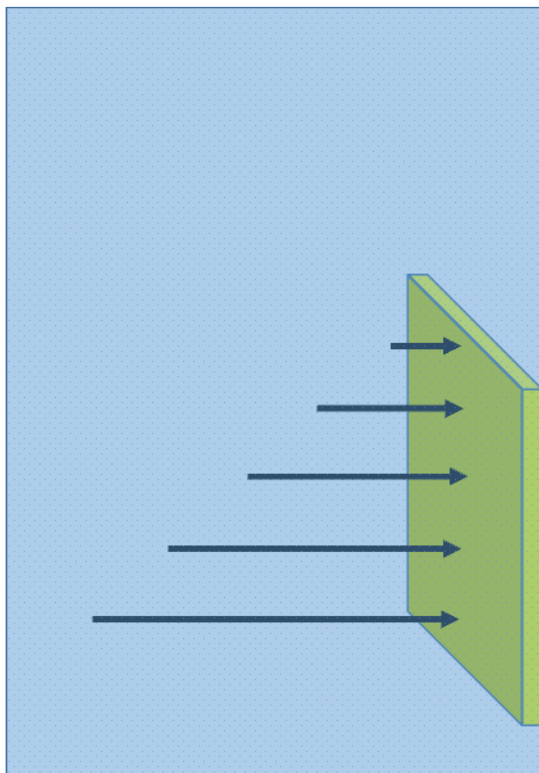
$$F = (P_0 + \rho gh)A$$

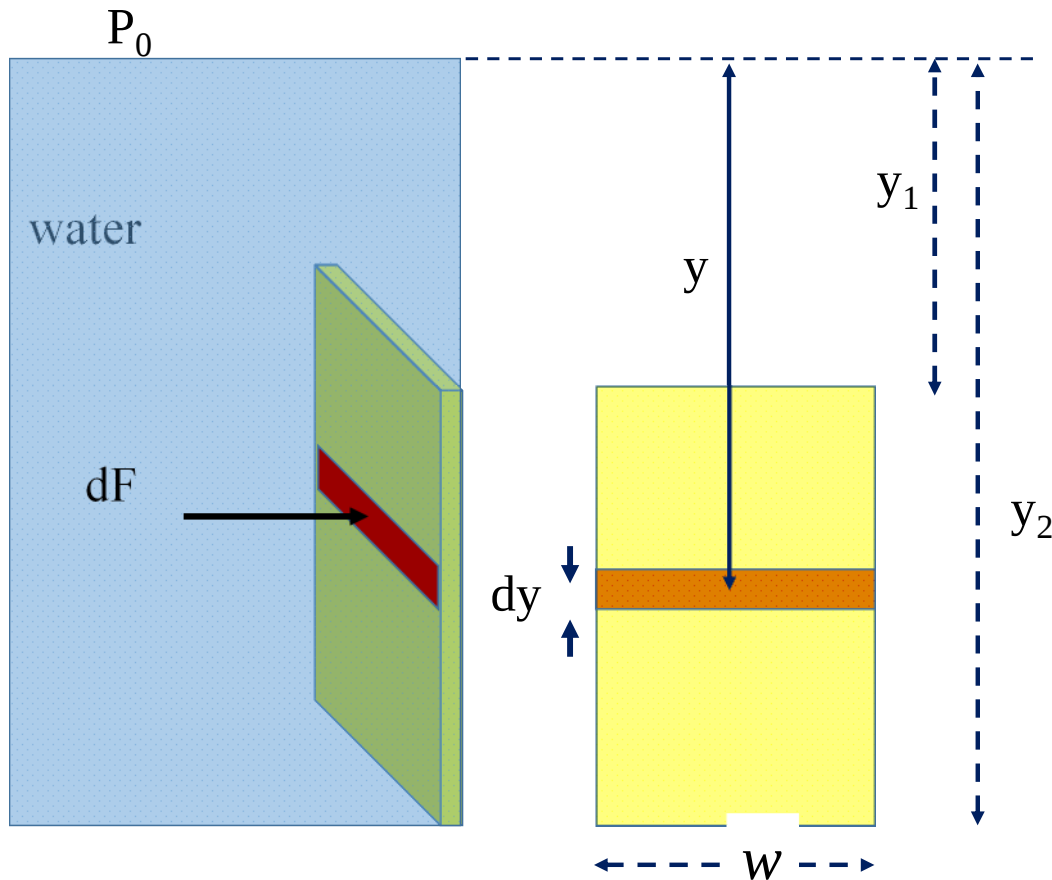


نیروی وارد بر سطوح تخت قائم

«فشار در امتداد سطح متغیر است لذا نیروی وارد بر

هر بخش صفحه با افزایش عمق افزایش می یابد»





$$dF = P dA = (P_0 + \rho g y) w dy$$

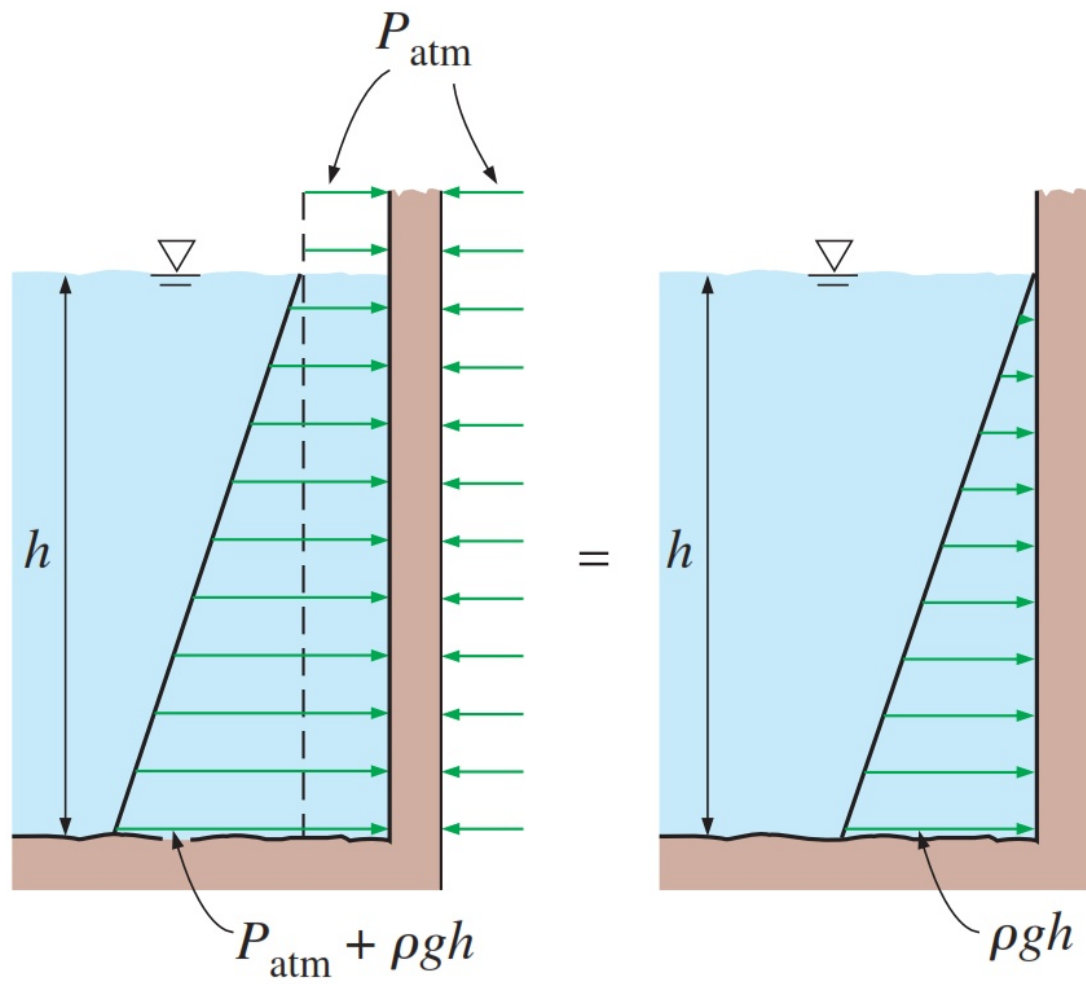
$$F = \int_{y=y_1}^{y=y_2} (P_0 + \rho g y) w dy$$

$$F = P_0 w (y_2 - y_1) + \rho g w \int_{y=y_1}^{y=y_2} y dy$$

$$F = P_0 w (y_2 - y_1) + \rho g w \times \frac{1}{2} (y_2^2 - y_1^2)$$

$\underbrace{\hspace{10em}}$ ناشی از فشار آب $\underbrace{\hspace{10em}}$ ناشی از فشار جو

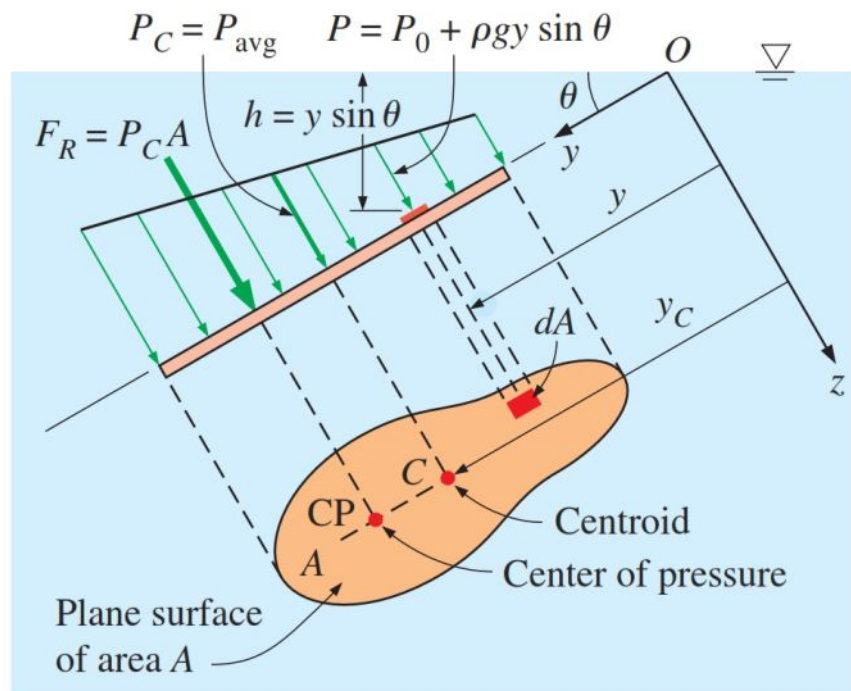
$$F_{\text{water}} = \rho g w \times \frac{1}{2} (y_2^2 - y_1^2)$$



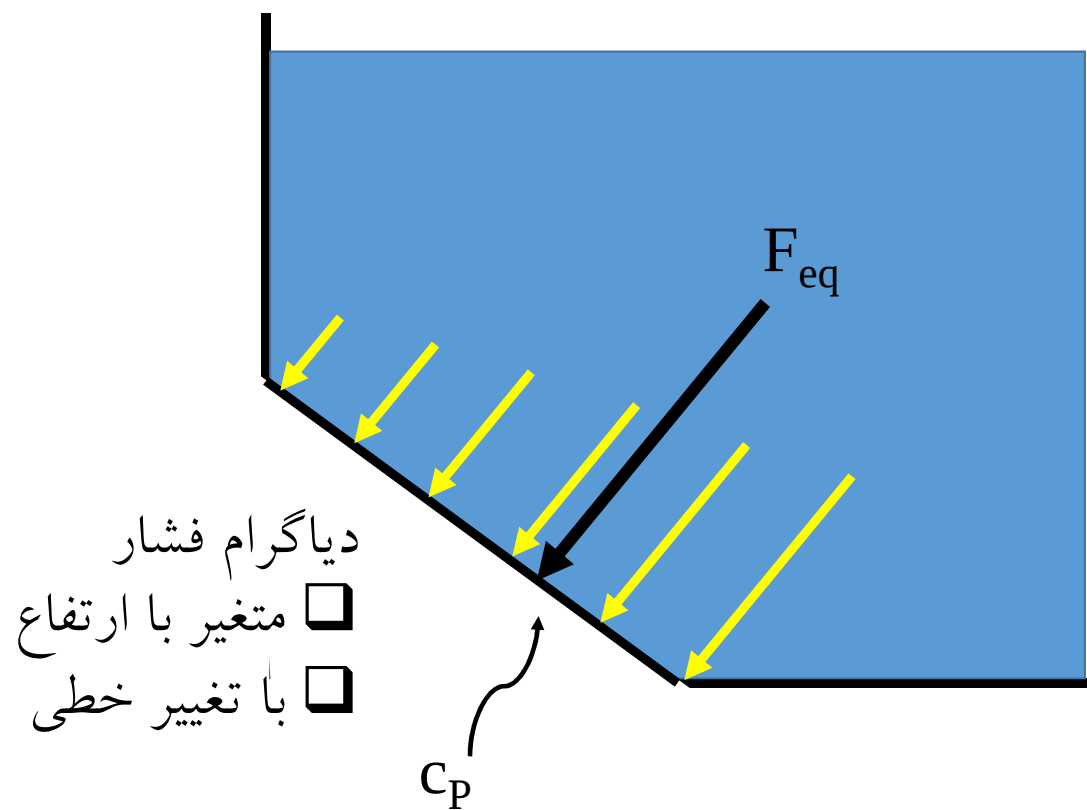
(a) P_{atm} considered

(b) P_{atm} subtracted

نیروی وارد بر سطوح تخت مایل



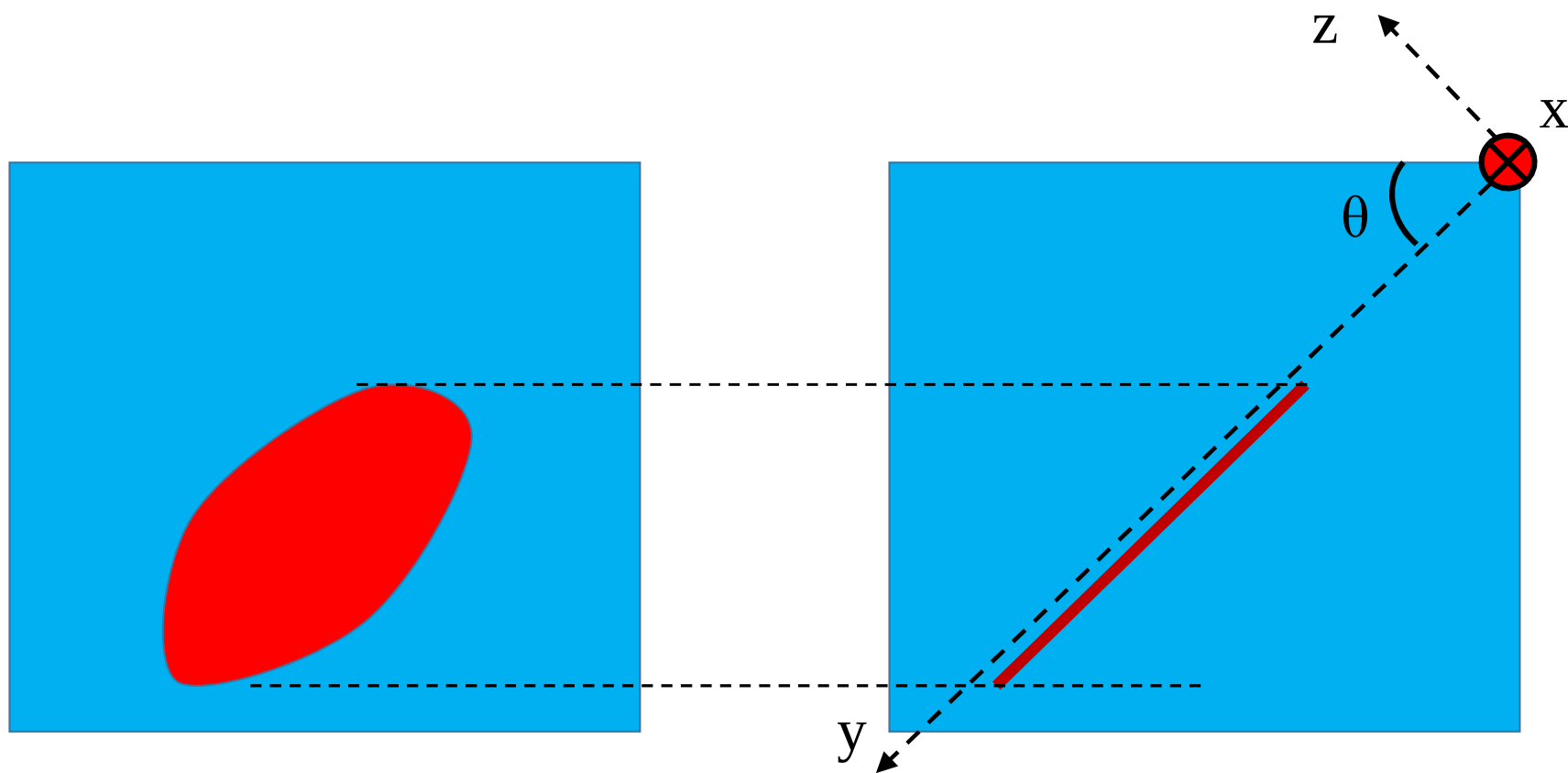
نیروی وارد بر سطوح تخت مایل



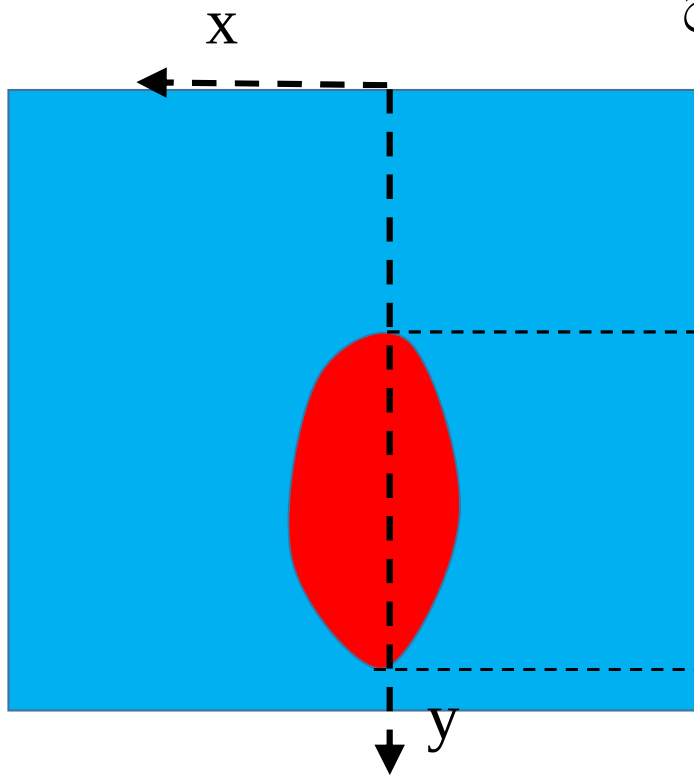
$F_{eq} = ?$ نیروی معادل

$C_P = ?$ مرکز فشار

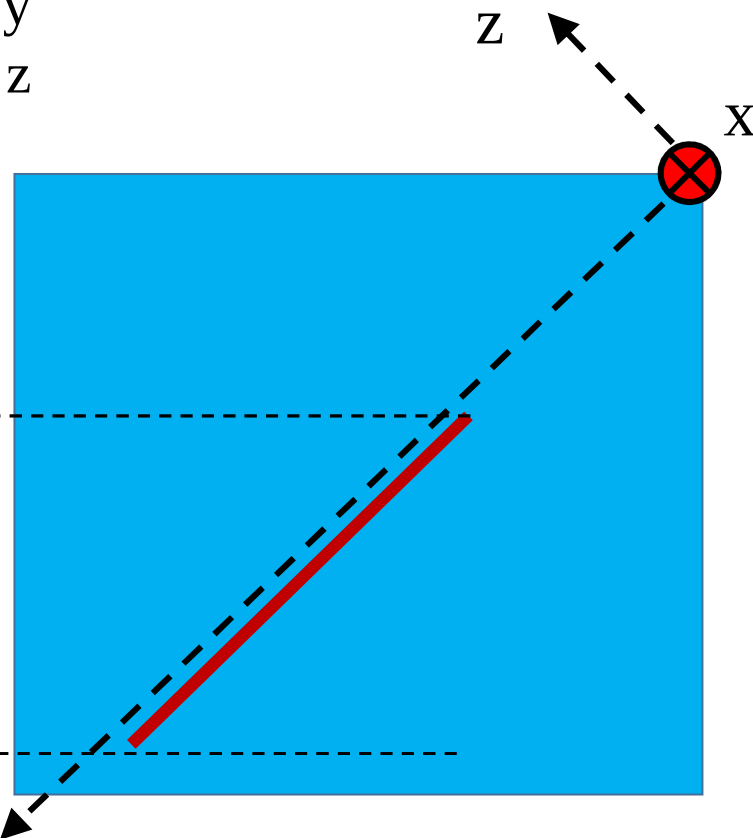
نیروی وارد بر سطوح تخت مایل



X : به موازات سطح آب
Y : به موازات سطح
Z : عمود بر سطح

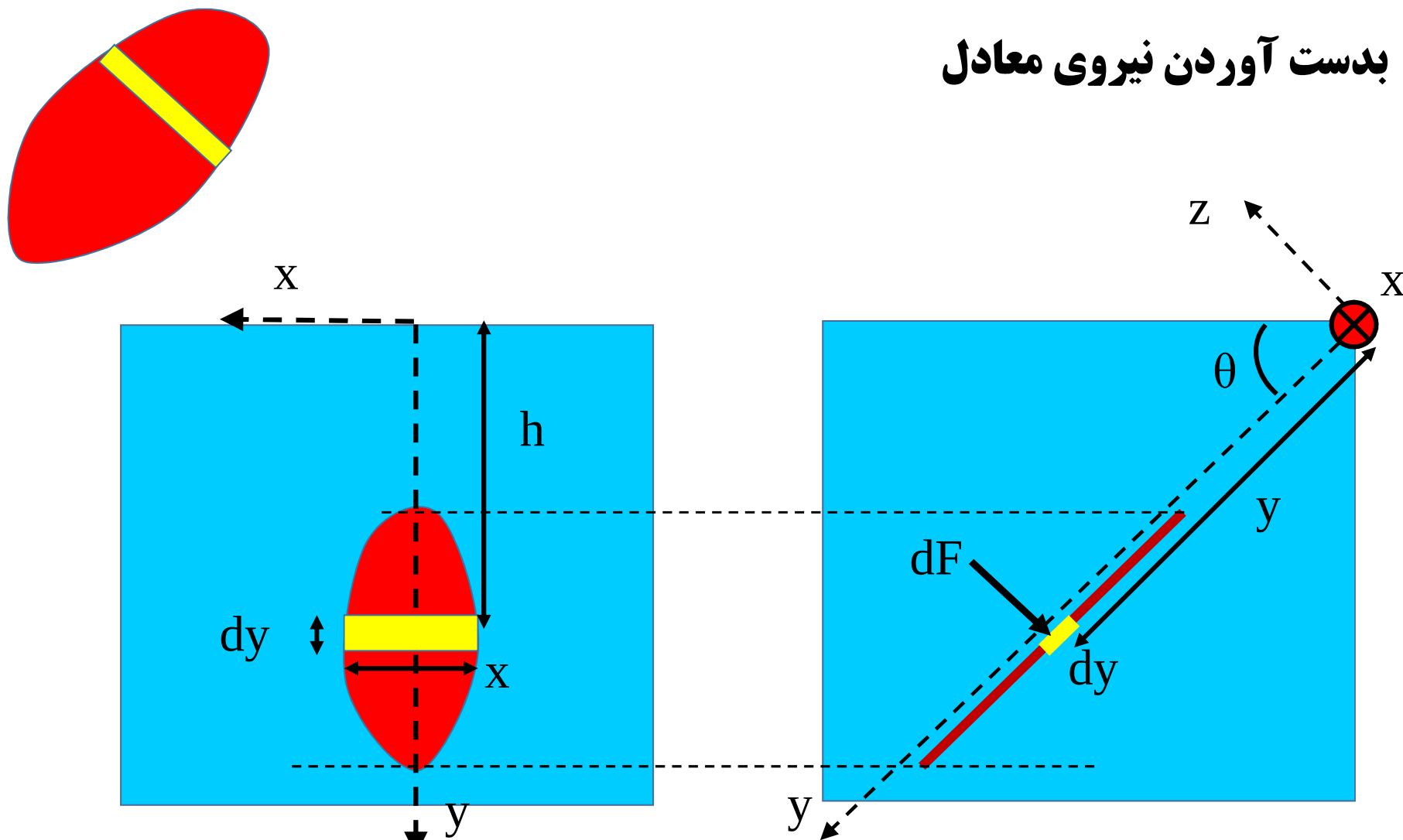


دید از روبرو



دید از کنار

بدست آوردن نیروی معادل



$$P = P_0 + \rho gh = P_0 + \rho gy \sin \theta$$

$$F_{eq} = \int_A P dA = \int_A (P_0 + \rho gy \sin \theta) dA = P_0 A + \rho g \sin \theta \int_A y dA$$

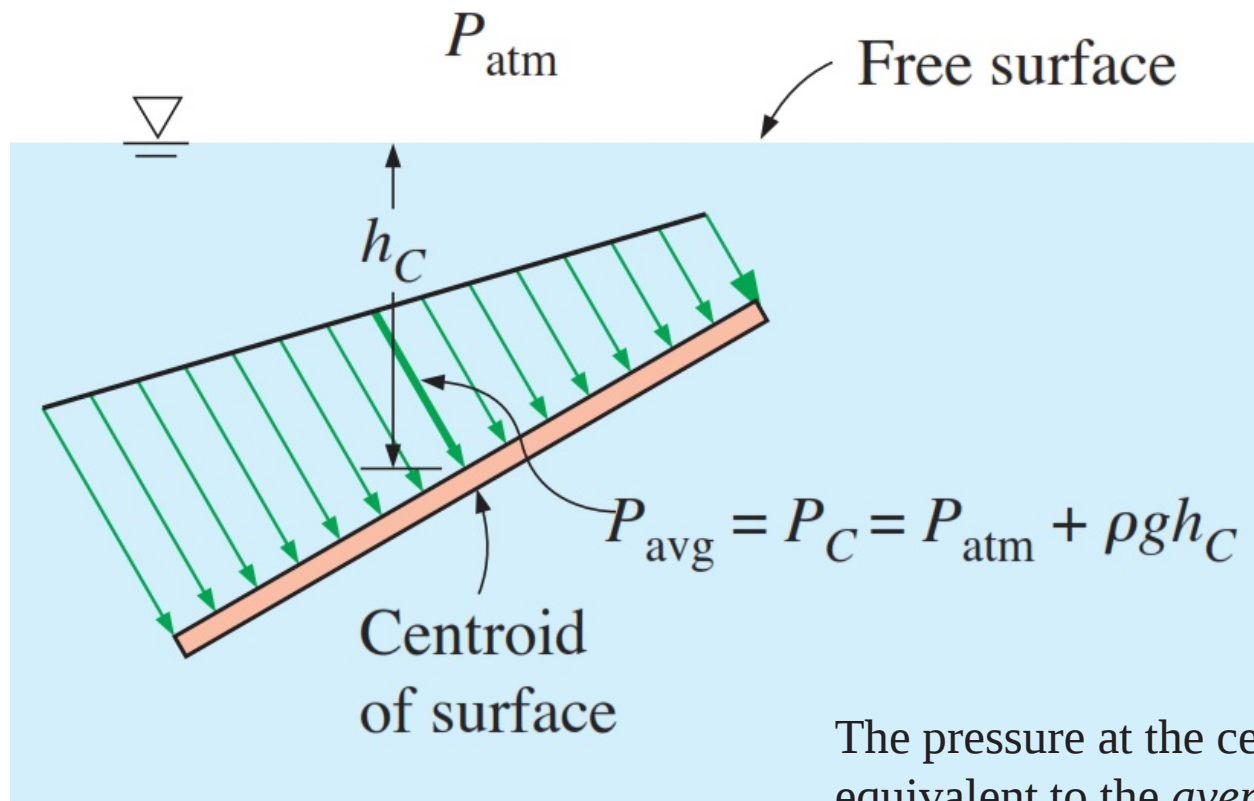
مولفه y مرکز سطح

$$y_C = \frac{1}{A} \int_A y dA \quad \rightarrow \quad y_C A = \int y dA$$

$$F_{eq} = (P_0 + \rho gy_C \sin \theta) A = (P_0 + \rho gh_C) A = P_C A = P_{avg} A$$

$$F_{eq} = P_{avg} A$$

$$\vec{F}_{eq} = P_{avg} A \hat{k}$$



The pressure at the centroid of a plane surface is equivalent to the *average* pressure on the surface.

مرکز فشار C_P

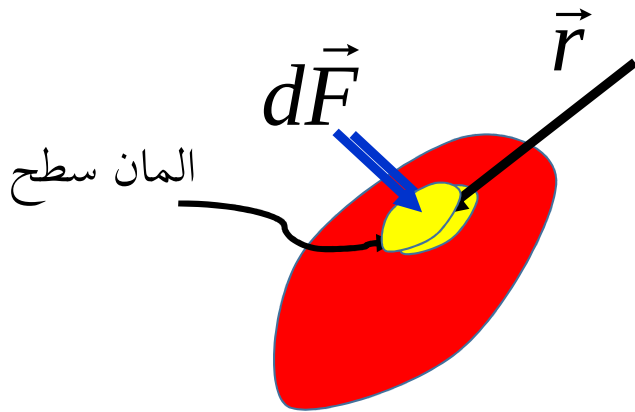
نقطه اثر نیروی معادل روی سطح

دو سیستم نیروی معادل

دو سیستم نیروی موازی هنگامی با همدیگر معادل هستند که مقدار آنها برابر بوده و دارای گشتاور نیروی یکسانی حول هر نقطه دلخواه باشند.

$$\vec{F}_{eq} = \int d\vec{F} \quad , \quad \vec{\tau}_{eq} = \int d\vec{\tau} = \int \vec{r} \times d\vec{F}$$

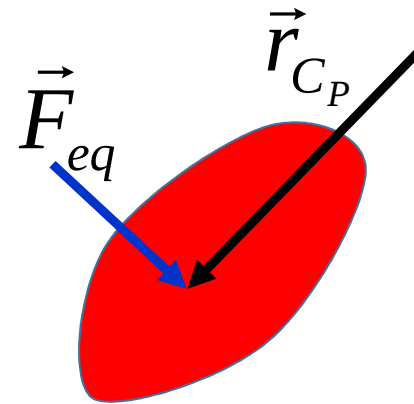
$$\vec{\tau}_{eq} = \int d\vec{\tau} = \int \vec{r} \times d\vec{F}$$



$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j}$$

$$d\vec{F} = dF \hat{k}$$

$$\vec{\tau} = \int \vec{r} \times d\vec{F}$$



$$\vec{r}_{C_P} = x_{C_P} \hat{i} + y_{C_P} \hat{j}$$

$$\vec{F}_{eq} = F_{eq} \hat{k}$$

$$\vec{\tau}_{eq} = \vec{r}_{C_P} \times \vec{F}_{eq}$$

$$\vec{\tau} = \int \vec{r} \times d\vec{F} = \int \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ x & y & 0 \\ 0 & 0 & dF \end{vmatrix} = \hat{i} \int y dF - \hat{j} \int x dF \quad \textcircled{1}$$

$$\vec{\tau}_{eq} = \vec{r}_{C_P} \times \vec{F}_{eq} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ x_{C_P} & y_{C_P} & 0 \\ 0 & 0 & F_{eq} \end{vmatrix} = \hat{i}(y_{C_P} F_{eq}) - \hat{j}(x_{C_P} F_{eq}) \quad \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} \quad \textcircled{2} \quad \begin{cases} x_{C_P} F_{eq} = \int x dF \\ y_{C_P} F_{eq} = \int y dF \end{cases}$$

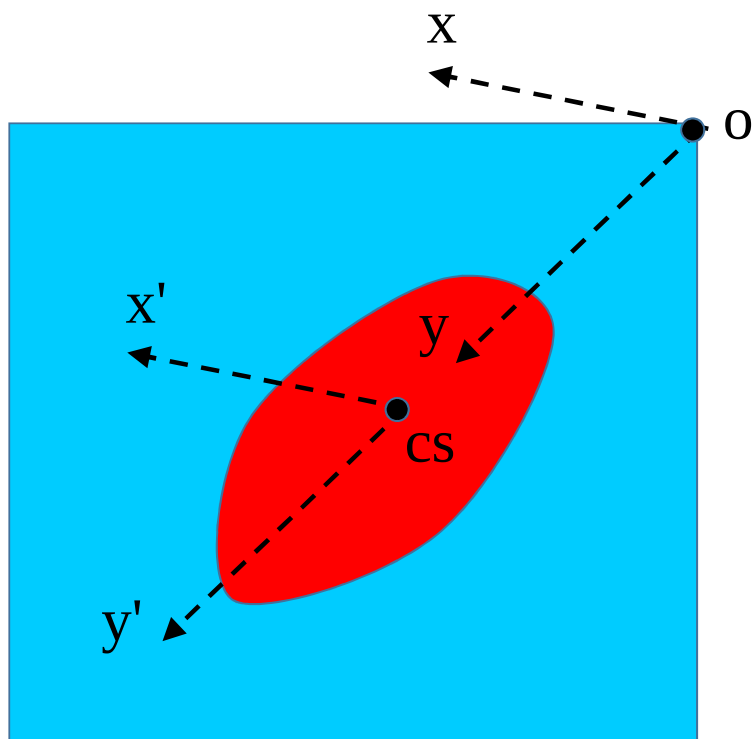
مثال) مرکز فشار برای سطح تخت افقی

فشار روی همه صفحه یکنواخت است

$$F_{eq} = PA$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_{C_P} F_{eq} = \int x dF \rightarrow x_{C_P} (PA) = \int x P dA \rightarrow x_{C_P} = \frac{1}{A} \int x dA \\ \rightarrow x_{C_P} = x_{cs} \\ \\ y_{C_P} F_{eq} = \int y dF \rightarrow y_{C_P} (PA) = \int y P dA \rightarrow y_{C_P} = \frac{1}{A} \int y dA \\ \rightarrow y_{C_P} = y_{cs} \end{array} \right.$$

مرکز فشار سطح مایل غوطه ور



تغییر دستگاه مختصات از XOY با مبدا سطح سیال به دستگاه جدید $X'OY'$ با مبدا مرکز سطح (جابه جایی انتقالی)

پیدا کردن مرکز فشار نسبت به مرکز سطح

$$y'_{C_p} F_{eq} = \int y' dF = \int y' P dA$$

$$y'_{C_p} F_{eq} = \int y' (P_0 + \rho g y_{cm} \sin \theta + \rho g y' \sin \theta) dA$$

$$y'_{C_p} F_{eq} = P_0 \int y' dA + \rho g y_{cm} \sin \theta \int y' dA + \rho g \sin \theta \int y'^2 dA$$



$$y'_{cs}=0$$

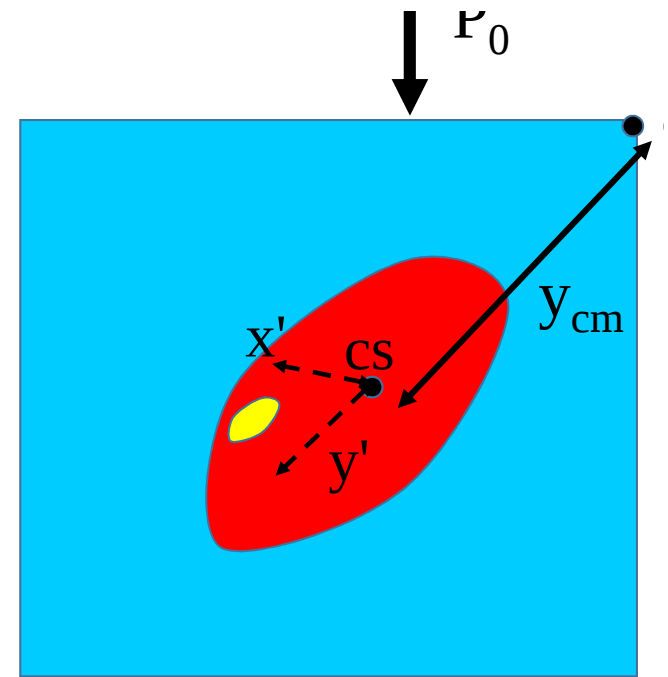


$$y'_{cs}=0$$



$$I_{xx, cs}$$

ممان اینرسی یا
ممان دوم سطح



$$y'_{C_p} F_{eq} = \rho g \sin \theta \int y'^2 dA$$

$$y'_{C_p} = \frac{1}{F_{eq}} \rho g \sin \theta \int y'^2 dA > 0$$

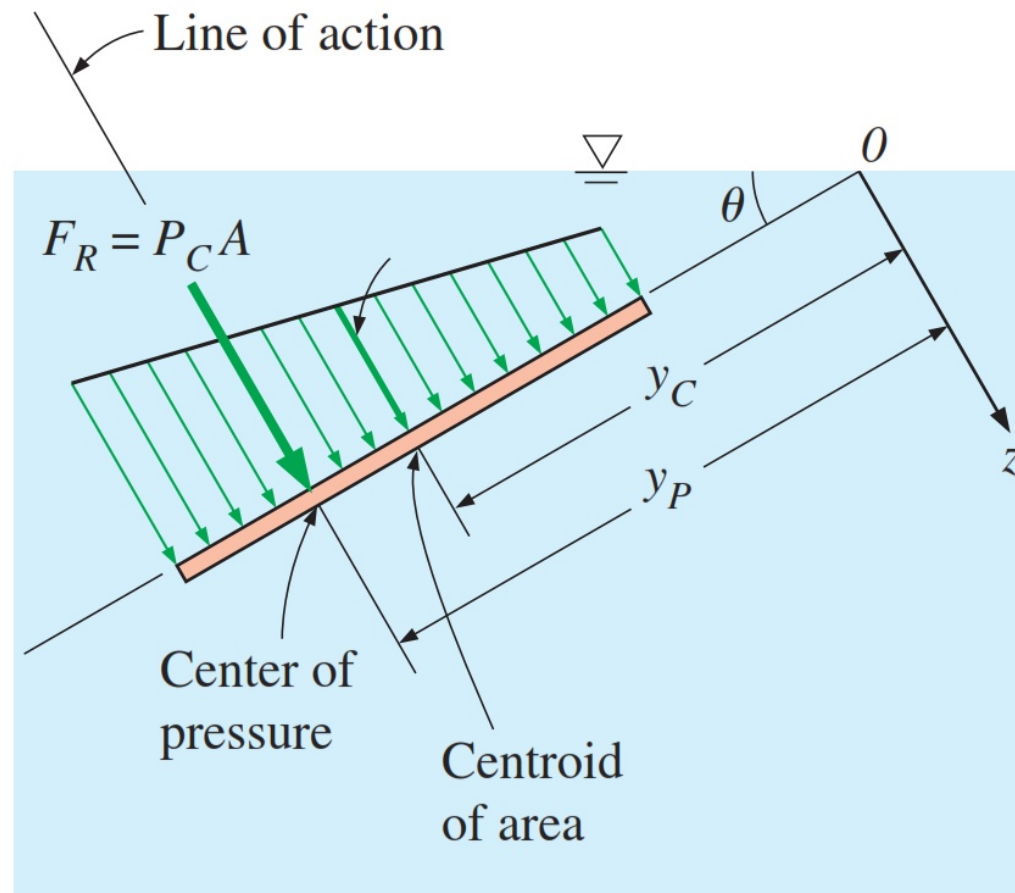
$$y'_{C_p} = \frac{\rho g \sin \theta}{F_{eq}} I_{x'x'}$$

$$y_{cp} = y_{cs} + y'_{cp}$$

y'_{cp} در دستگاه با مبدا مرکز سطح

مرکز فشار پایین تر از مرکز سطح

y_{cp} در دستگاه با مبدا در سطح سیال



$$x'_{C_p} F_{eq} = \int x' dF = \int x' P dA$$

$$x'_{C_p} F_{eq} = \int x' (P_0 + \rho g y_{cm} \sin \theta + \rho g y' \sin \theta) dA$$

$$x'_{C_p} F_{eq} = P_0 \underbrace{\int x' dA}_{x'_{cs}=0} + \rho g y_{cm} \sin \theta \underbrace{\int x' dA}_{x'_{cs}=0} + \rho g \sin \theta \underbrace{\int x' y' dA}_{I_{xy, cs}}$$

$$x'_{C_p} F_{eq} = \rho g \sin \theta \int x' y' dA$$

$$x'_{C_p} = \frac{1}{F_{eq}} \rho g \sin \theta \int x' y' dA =$$

$$x'_{C_p} = \frac{\rho g \sin \theta}{F_{eq}} I_{x'y'}$$

$$X_{cp} = X_{cs} + X'_{cp}$$

X'_{cp} در دستگاه با مبدا مرکز سطح

X'_{cp} می تواند مثبت یا منفی باشد

X_{cp} در دستگاه با مبدا در سطح سیال

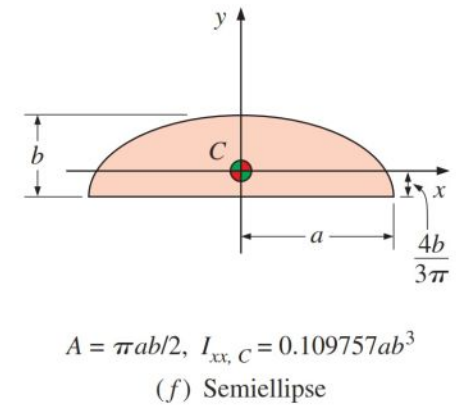
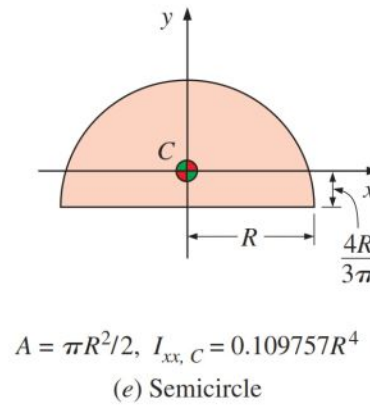
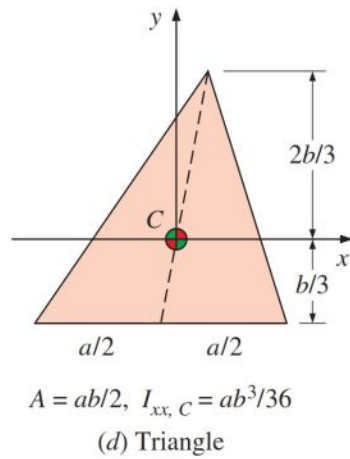
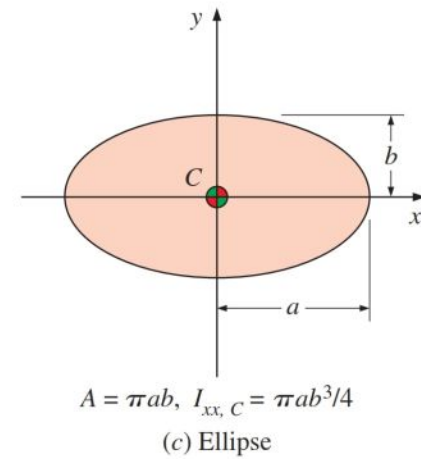
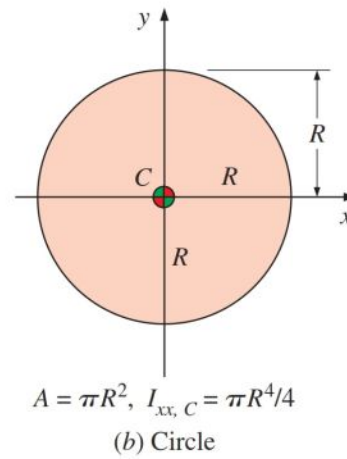
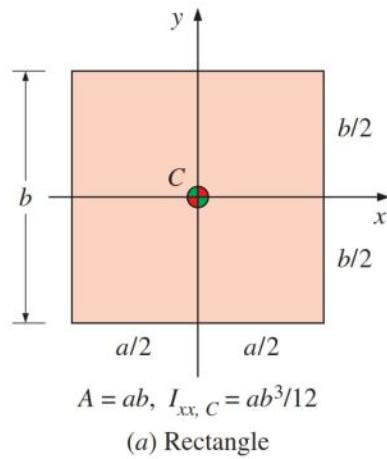
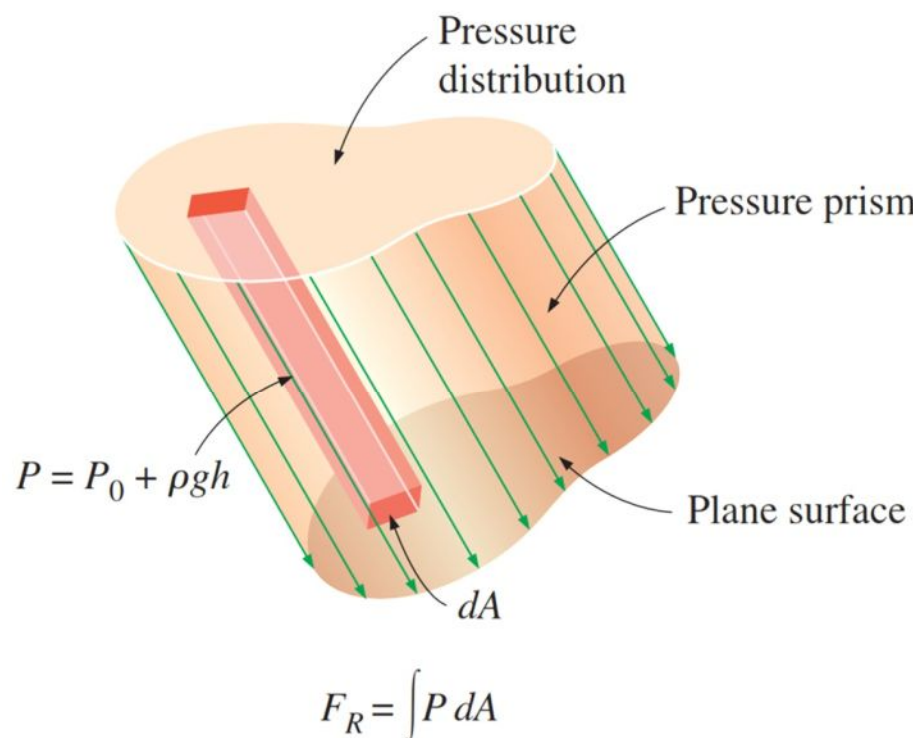


FIGURE 3–31

منشور فشار

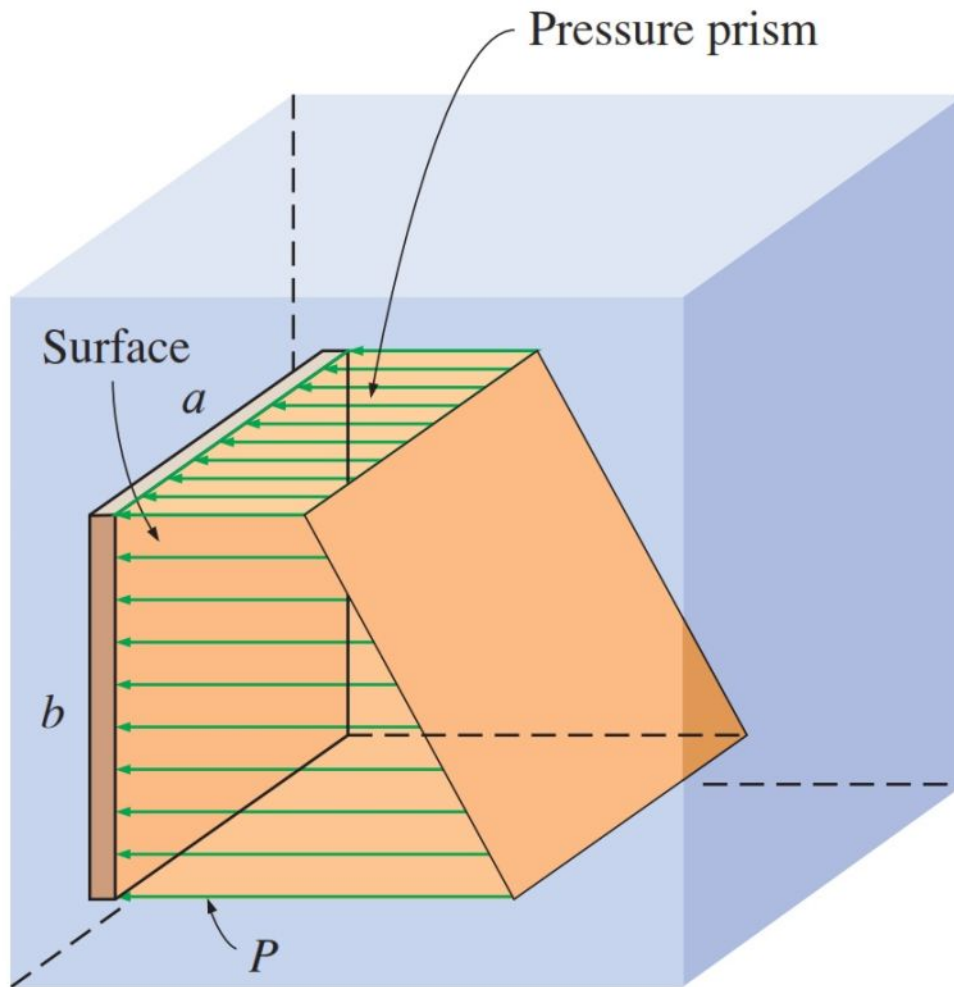


منشوری که قاعده آن صفحه مسطح که می تواند دارای هر شکلی باشد و ارتفاع آن از طریق توزیع خطی فشار به دست می آید

نیروی معادل = حجم منشور فشار

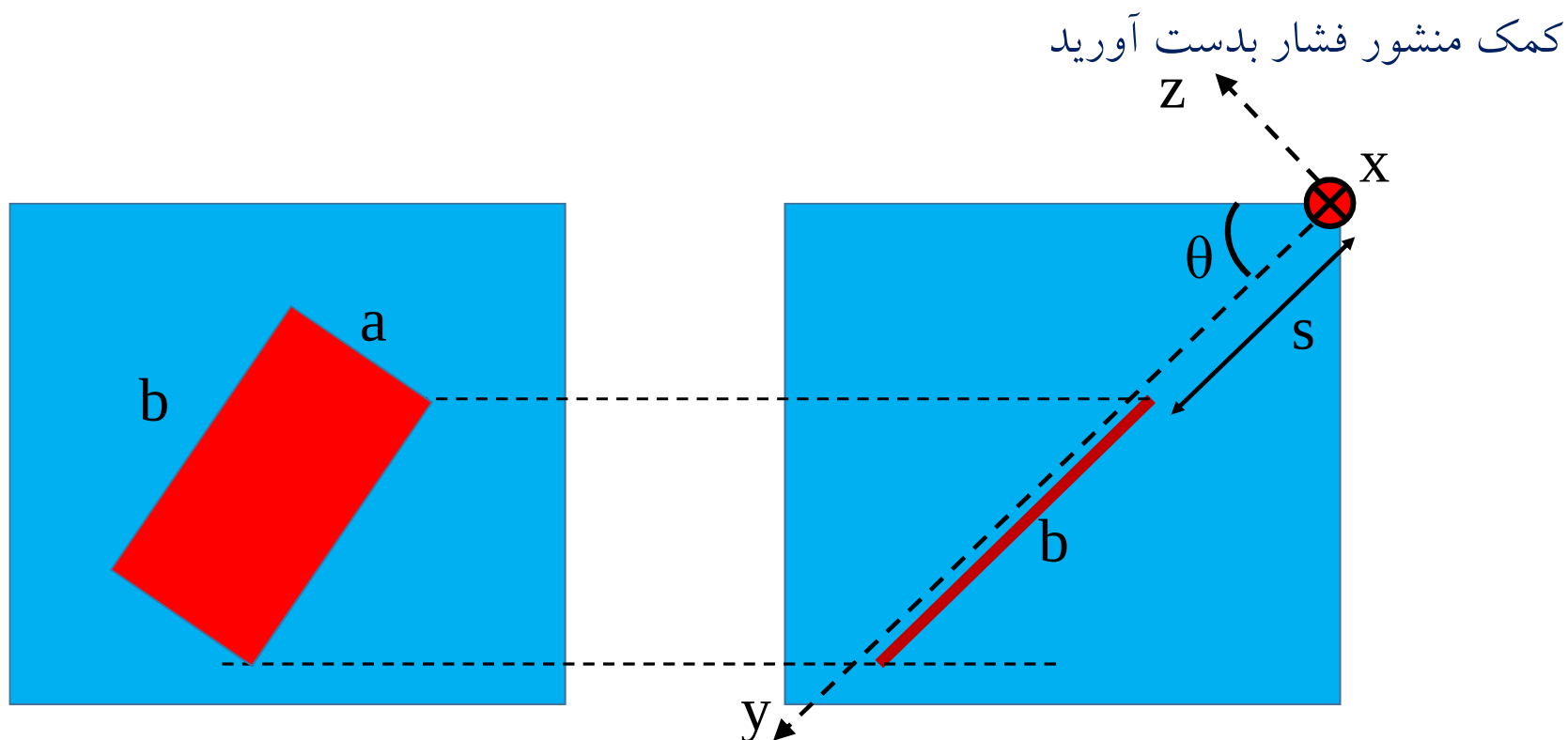
(حاصلضرب فشار متوسط در مساحت سطح)

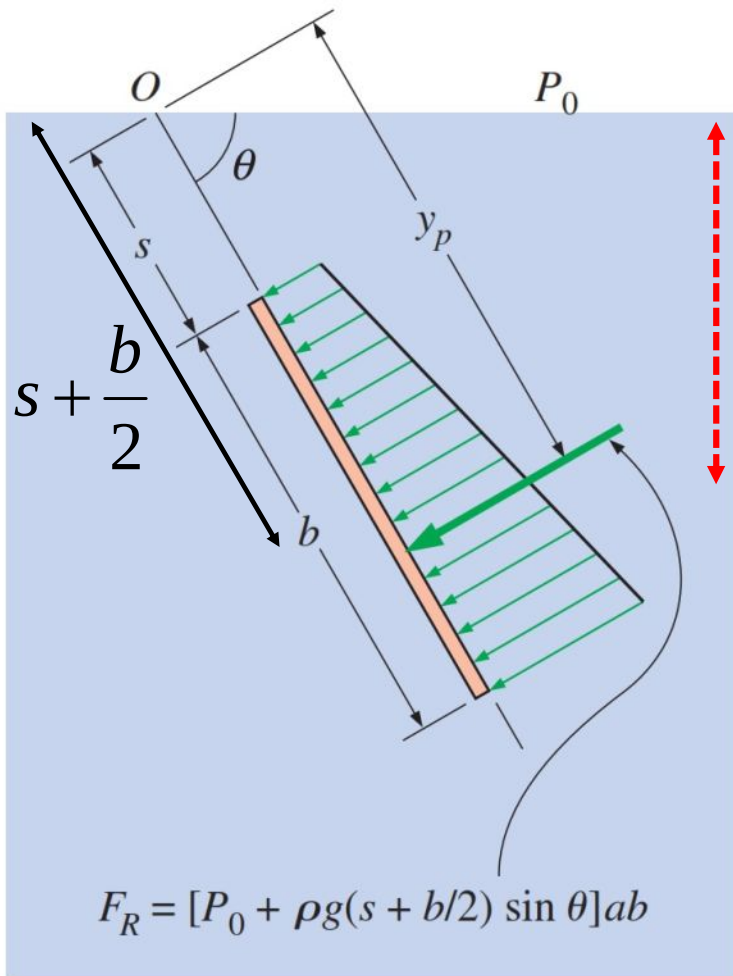
مرکز فشار = تصویر مرکز سطح منشور بر روی صفحه مسطح



The hydrostatic forces acting on a plane surface form a pressure prism whose base (left face) is the surface and whose length is the pressure.

(مثال) یک صفحه مسطح مستطیلی با ابعاد $a \times b$ کاملاً در آب غوطه‌ور است. این صفحه نسبت به افق در زاویه θ قرار دارد. فاصله بالای صفحه تا سطح آب s هست. نیروی هیدروستاتیکی وارد بر سطح را به کمک منشور فشار بدست آورید





$$h_c = \left(s + \frac{b}{2}\right) \sin \theta$$

$$F_R = P_C A = [P_0 + \rho g(s + b/2) \sin \theta]ab$$

مرکز فشار

$$y_{cp} = y_{cs} + y'_{cp}$$

$$y'_{C_P} = \frac{\rho g \sin \theta}{F_{eq}} I_{x'x'}$$

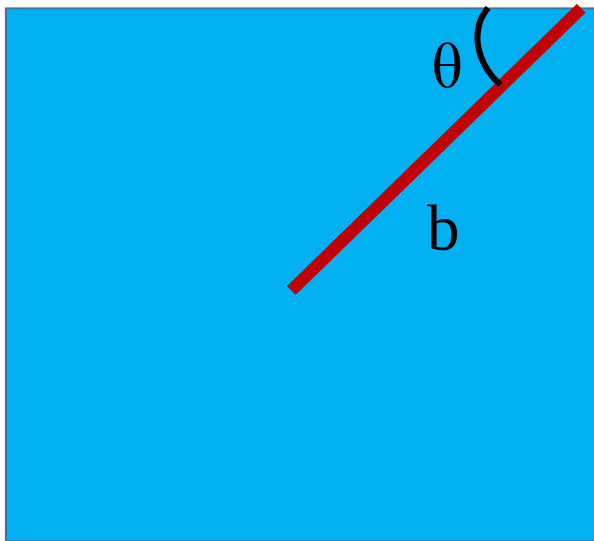
$$I_{x'x'} = \int y'^2 dA$$



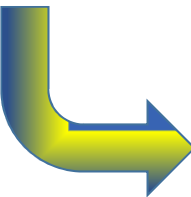
$$y_P = s + \frac{b}{2} + \frac{ab^3/12}{[s + b/2 + P_0/(\rho g \sin \theta)]ab}$$

$$= s + \frac{b}{2} + \frac{b^2}{12[s + b/2 + P_0/(\rho g \sin \theta)]}$$

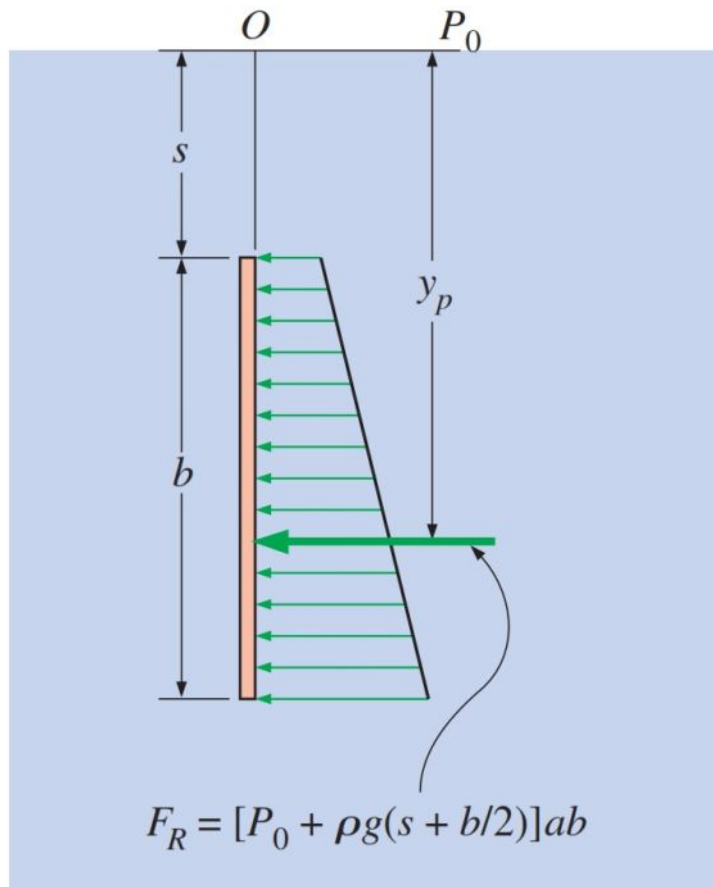
حالت خاص ۱: لبه بالایی سطح بر سطح آزاد منطبق باشد $s = 0$



Tilted rectangular plate ($s = 0$):


$$F_R = [P_0 + \rho g(b \sin \theta)/2]ab$$

حالت خاص ۲: سطح عمودی کاملاً غوطه ور



(b) Vertical plate

Vertical rectangular plate:



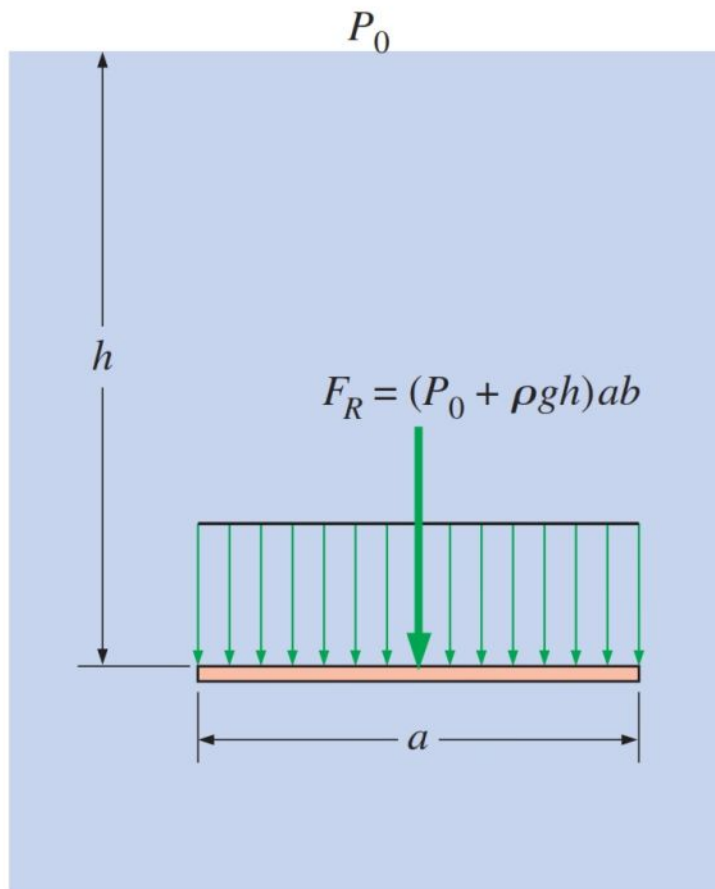
$$F_R = [P_0 + \rho g(s + b/2)]ab$$

Vertical rectangular plate ($s = 0$):



$$F_R = (P_0 + \rho gb/2)ab$$

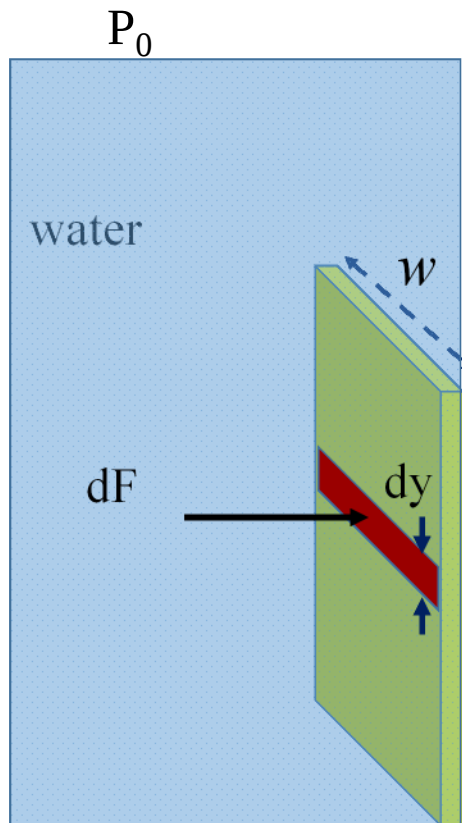
حالت خاص ۳: سطح کاملاً غوطه ور افقی



(c) Horizontal plate

$$F_R = [P_0 + \rho g(s + b/2)]ab$$

مثال) یک صفحه مسطح مربعی شکل با ابعاد $1 \times 1 \text{ m}^2$ داخل آب به صورت عمودی قرار دارد به گونه ای که لبه بالایی آن از سطح آب ارتفاع 10 m را دارد. نیروی لازم برای بسته نگذاشتن دریچه و نیز محل اعمال نیرو را بدست آورید.



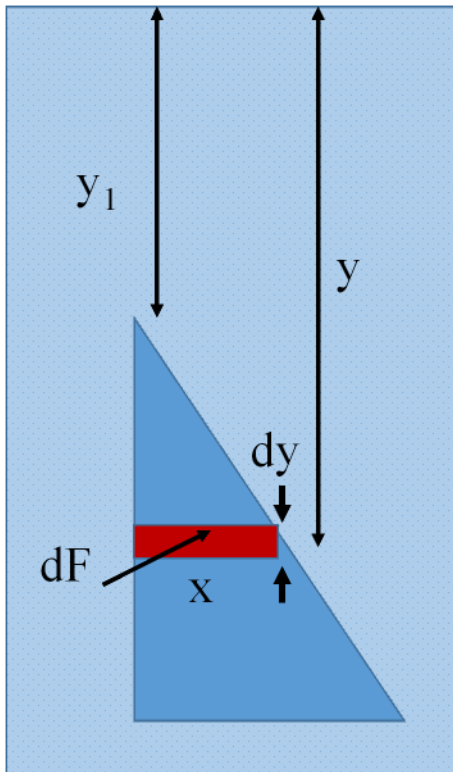
$$F_{water} = \rho g w \times \frac{1}{2} (y_2^2 - y_1^2)$$

$$F_{ext} = F_{water}$$

$$F_{ext} = 10^3 \times 10 \times 1 \times \frac{1}{2} (11^2 - 10^2)$$

$$y'_{C_P} F_{eq} = \rho g \sin \theta \int y'^2 dA = \rho g \int_{10}^{11} y'^2 w dy'$$

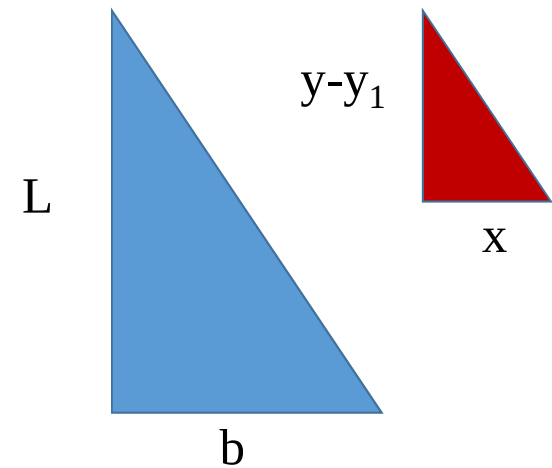
(مثال) یک صفحه مسطح به شکل مثلث قائم زاویه دارای ارتفاع $L=1\text{ m}$ و قاعده $b=05\text{ m}$ داخل آب به صورت عمودی قرار دارد به گونه ای که لبه بالایی آن از سطح آب ارتفاع 10 m را دارد. نیروی لازم برای بسته نگذاشتن دریچه و نیز محل اعمال نیرو را بدست آورید.



$$dF = P dA = \rho g y x dy$$

$$F = \int_{y=y_1}^{y=y_2} \rho g y x dy$$

↑
?

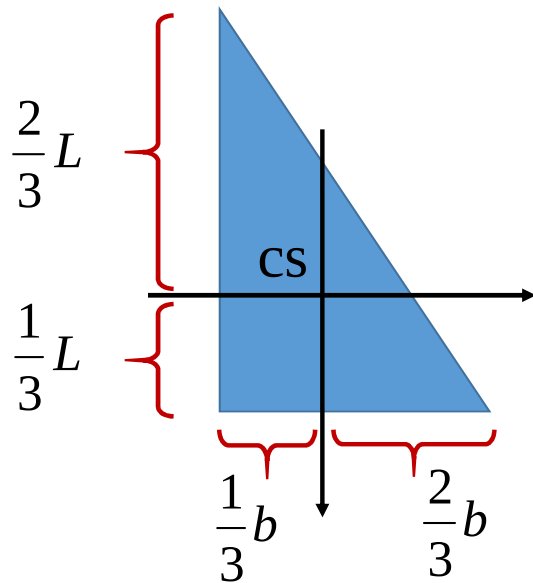


$$\frac{x}{b} = \frac{y - y_1}{L} \rightarrow x = \frac{b}{L} (y - y_1)$$

تشابه مثلث ها

نیروی برآیند

$$F = \int_{y=y_1}^{y=y_2} \rho g y \frac{b}{L} (y - y_1) dy = \frac{\rho g b}{L} \int_{y=y_1}^{y=y_1+L} y(y - y_1) dy$$



مرکز فشار

در دستگاه مرکز سطح

$$y'_{C_P} F_{eq} = \int y' dF$$

$$x'_{C_P} F_{eq} = \int x' dF$$

$$y'_{C_p} F_{eq} = \int y' dF = \int y' P dA = \int y' \rho g (y' + y_1) x' dy' \rightarrow$$

$$y'_{C_p} F_{eq} = \int_{y' = \frac{-2}{3}L}^{y' = \frac{+1}{3}L} y' \rho g (y' + y_1) \frac{b}{L} (y' - y_1) dy' =$$

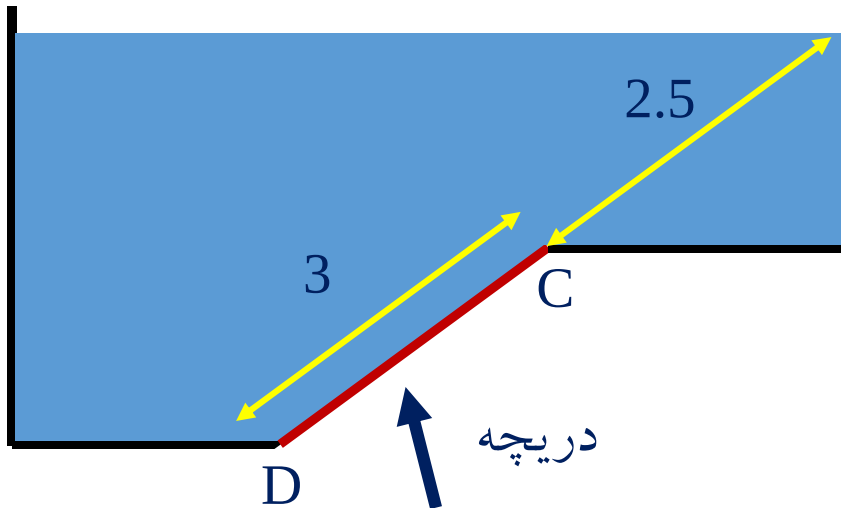
$$x'_{C_p} F_{eq} = \int x' dF = \int x' P dA = \int x' \rho g (y' + y_1) x' dy'$$

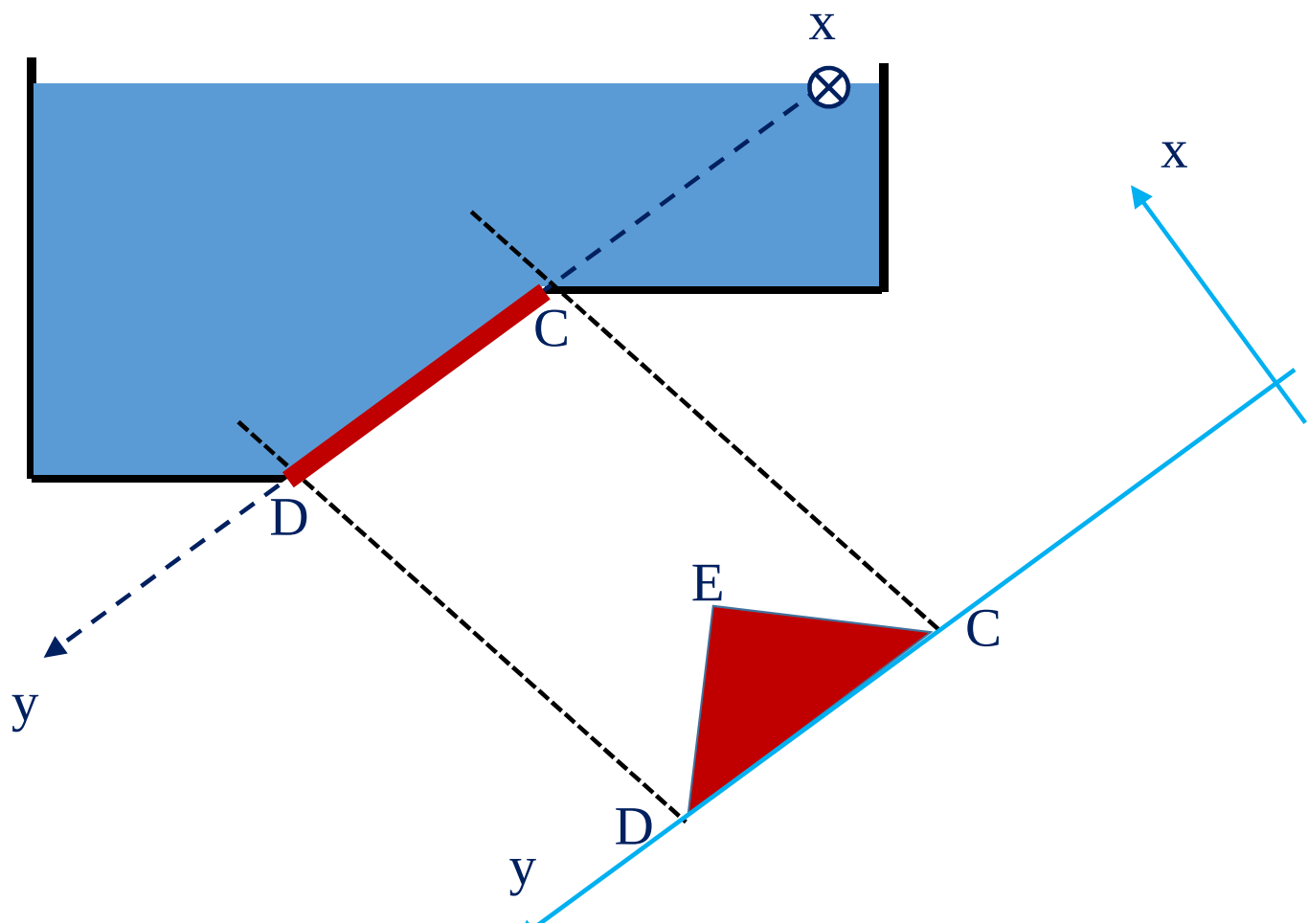
$$x'_{C_p} F_{eq} = \int_{y' = \frac{-2}{3}L}^{y' = \frac{+1}{3}L} \rho g \frac{b^2}{L^2} (y' - y_1)^2 (y' + y_1) dy' =$$

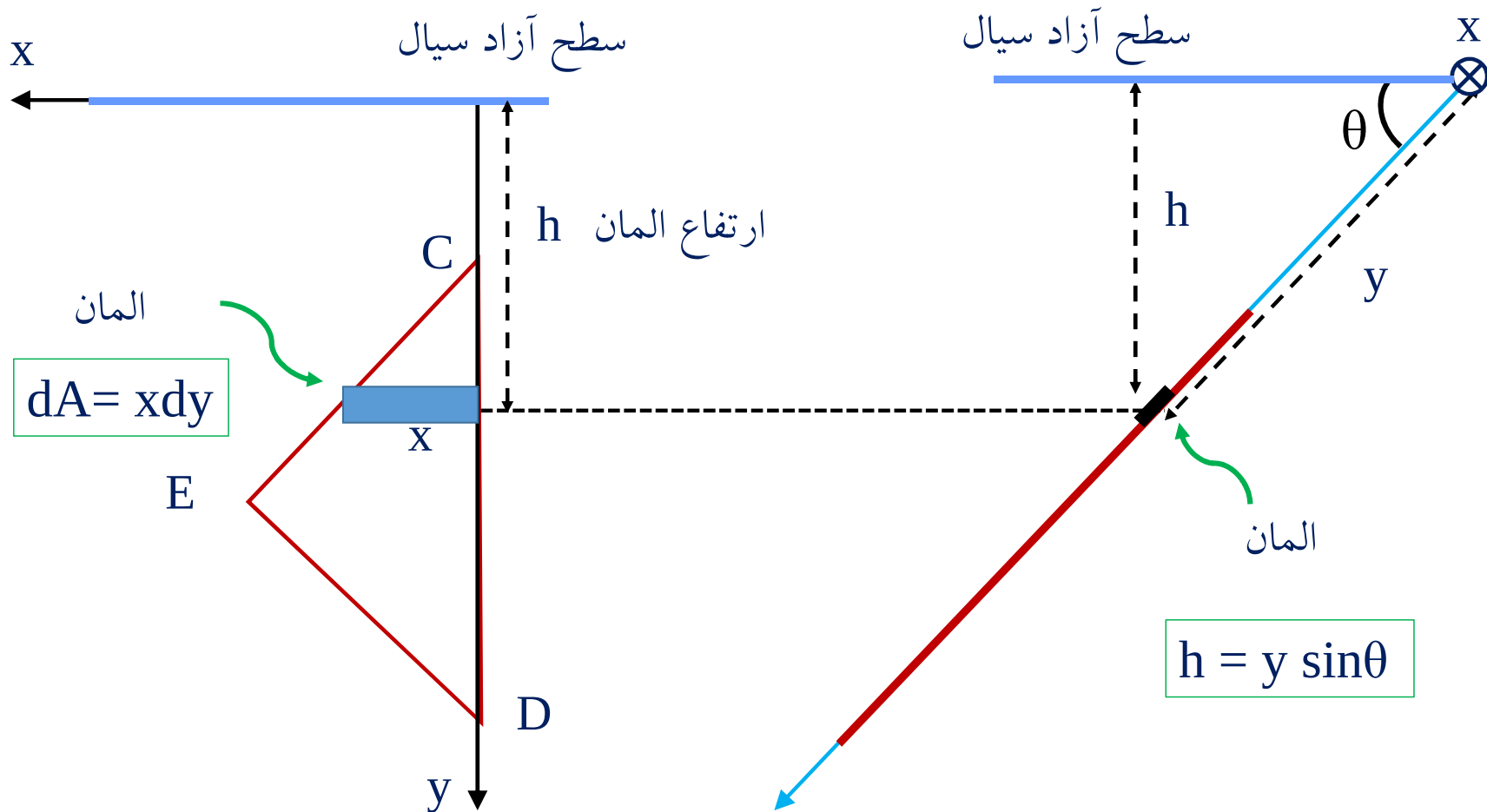
(مثال) دریچه ای به شکل مثلث در بدنه یک مخزن آب قرار دارد (دریچه CDE). دریچه با راستای افق زاویه $\theta = 30^\circ$ می سازد. این دریچه در امتداد لولای CD می چرخد. قاعده مثلث ۳ متر و ارتفاع آن ۲ متر است. برای باز شدن دریچه به آن یک نیروی عمودی وارد می شود. در داخل مخزن سیالی با چگالی 0.8 چگالی آب قرار دارد. پایین دریچه هوای آزاد است. با صرف نظر کردن از وزن دریچه مطلوبست

الف) نیروی فشاری آب بر دریچه

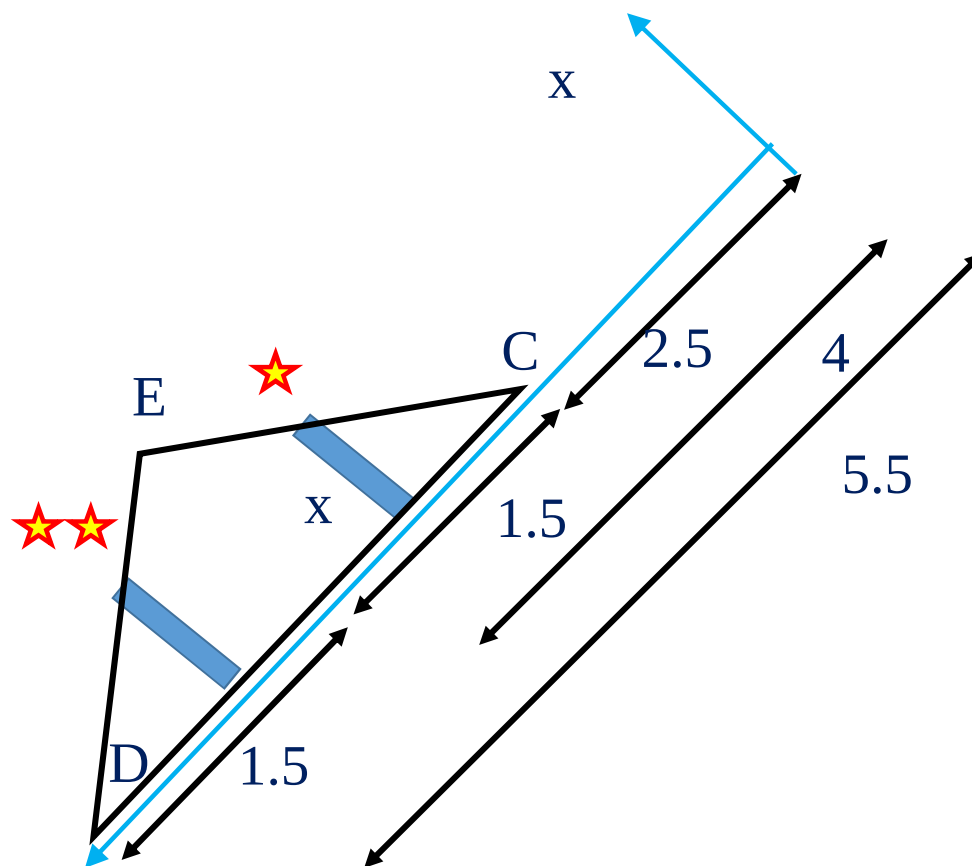
ب) مرکز فشار







نیروی وارد بر المان از طرف سیال $dF = PdA = \rho g h x dy = \rho g y \sin \theta x dy$ ↑ ?



معادله خط ★

$$x = ay + b$$

$$\begin{cases} x = 0 & , & y = 2.5 \\ x = 2 & , & y = 4 \end{cases} \Rightarrow a = \frac{4}{3}, b = \frac{-20}{6}$$



$$x = \frac{4}{3}y - \frac{20}{6}$$

$$\begin{cases} x = 2 & , & y = 4 \\ x = 0 & , & y = 5.5 \end{cases} \Rightarrow a = \frac{-4}{3}, b = \frac{44}{6}$$



$$x = -\frac{4}{3}y + \frac{44}{6}$$

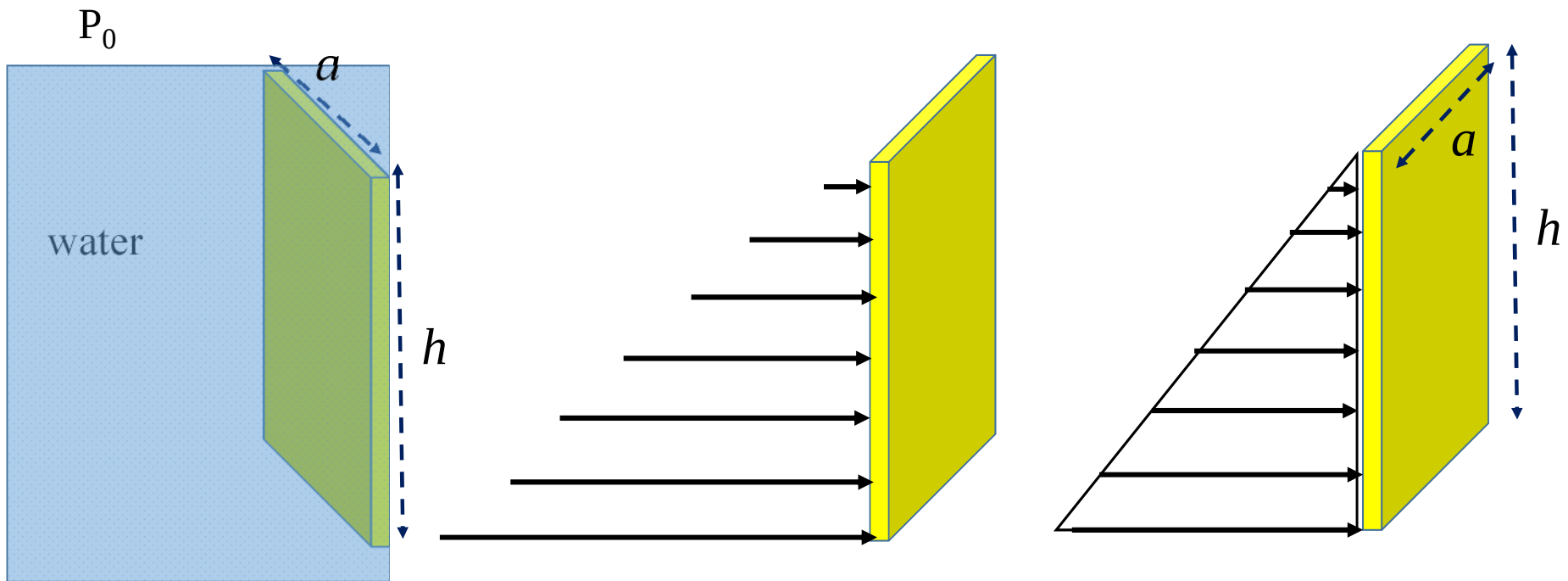
$$dF = PdA = \rho gh \, xdy = \rho g y \sin \theta \, xdy$$

$$F = \int dF = \rho g \sin \theta \left\{ \int_{y=2.5}^{y=4} xydy + \int_{y=4}^{y=5.5} xydy \right\}$$

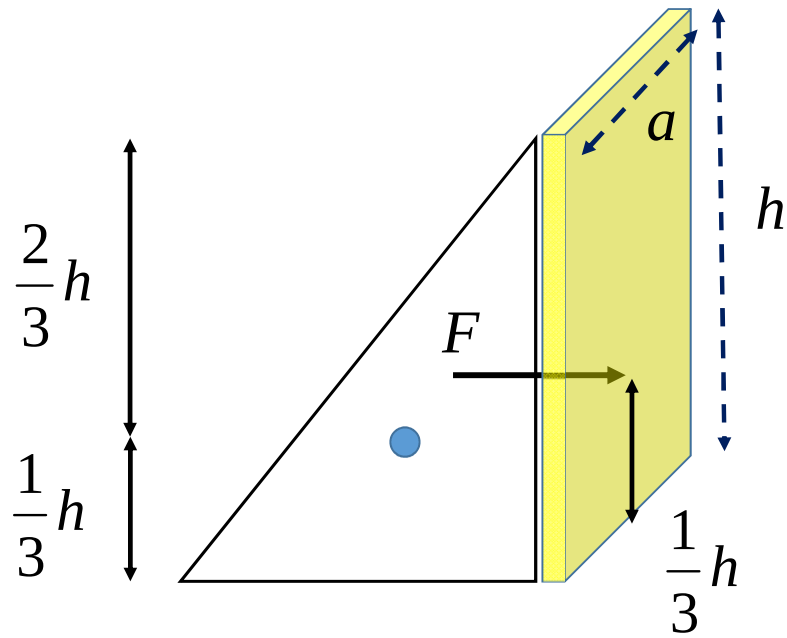
$$F = \rho g \sin \theta \left\{ \int_{y=2.5}^{y=4} \left(\frac{4}{3}y - \frac{20}{6} \right) ydy + \int_{y=4}^{y=5.5} \left(-\frac{4}{3}y + \frac{44}{6} \right) ydy \right\}$$

$$F = 47068.8 \, N$$

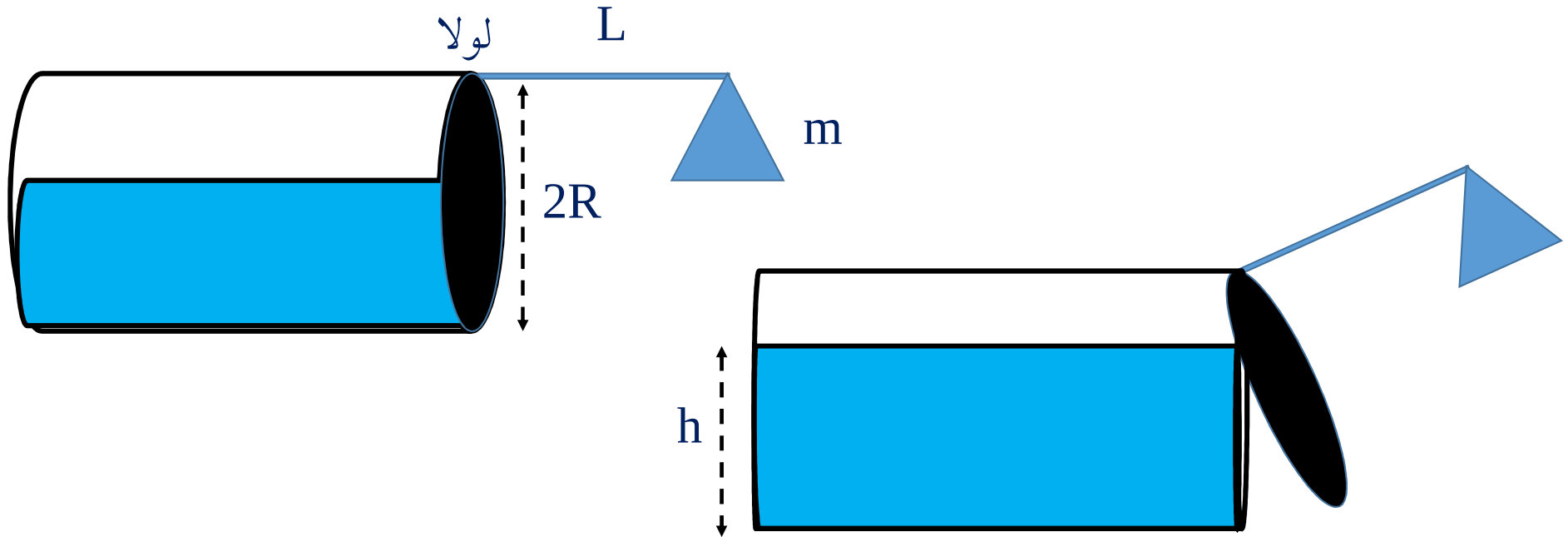
مثال) یک صفحه مسطح مستطیل شکل با عرض a و ارتفاع h داخل آب به صورت عمودی به گونه ای قرار دارد که لبه بالایی آن از هم سطح آب است. مرکز فشار را به کمک منشور فشار بدست آورید.



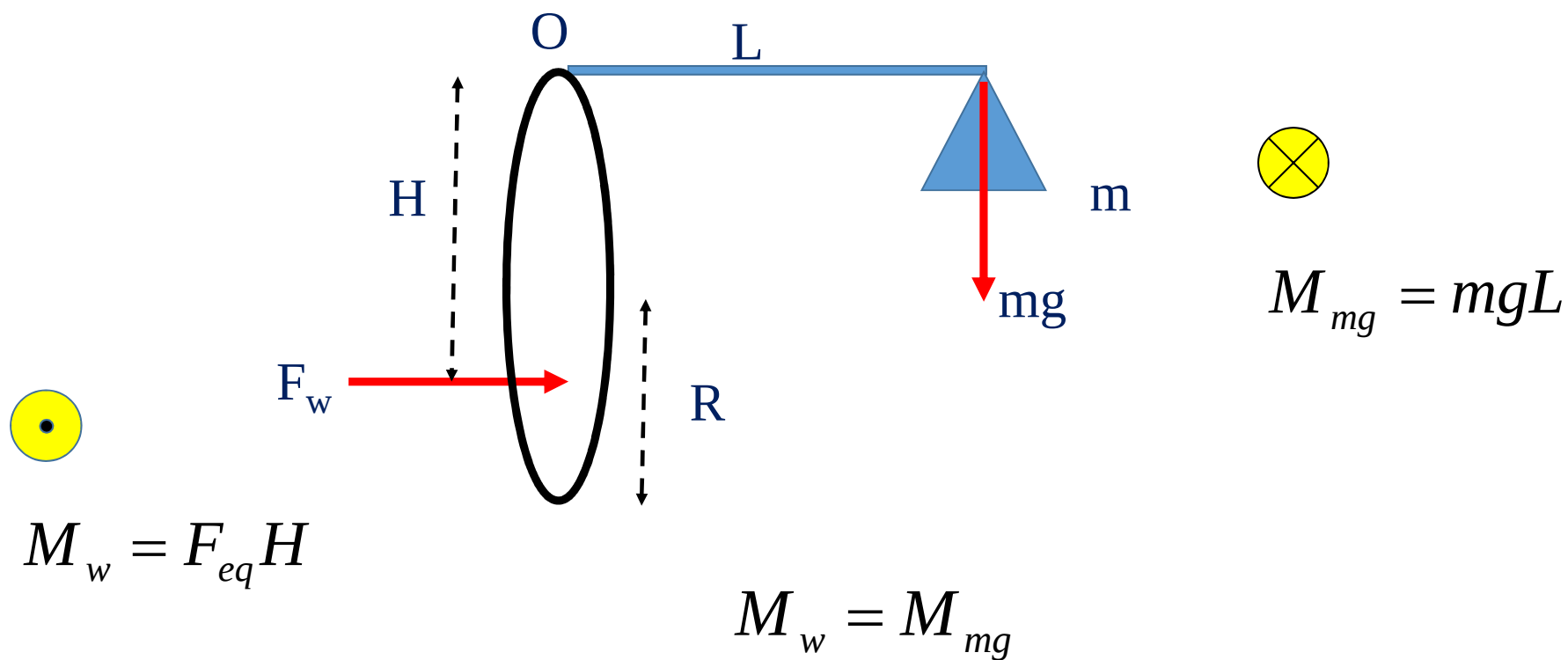
تشخیص مرکز فشار به کمک منشور فشار

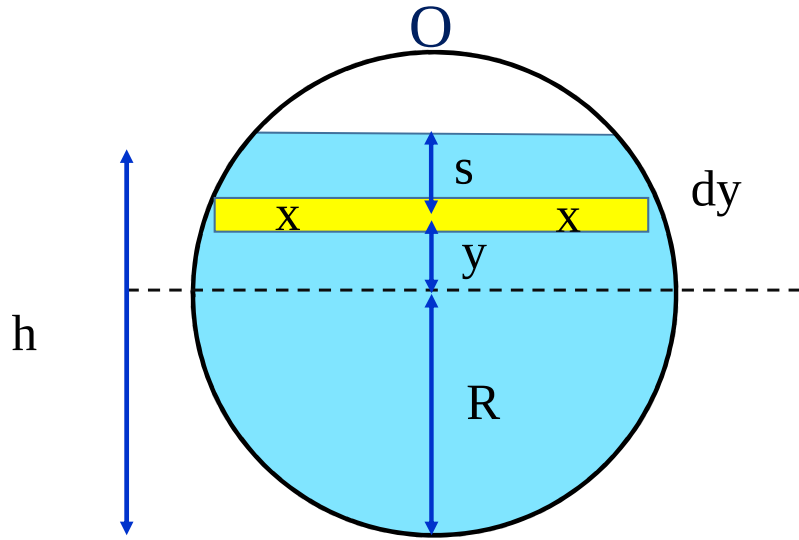


مثال) در شکل زیر سیستم کنترل آب درون یک کانال به مقطع شعاع R نشان داده شده است. برای کنترل ارتفاع آب در کانال از یک لنگر با بازوی L و جرم وزنه m استفاده می شود تا سطح آب درون کانال از ارتفاع h بالاتر نرود. با توجه به جرم لنگر ارتفاع h را مشخص کنید.



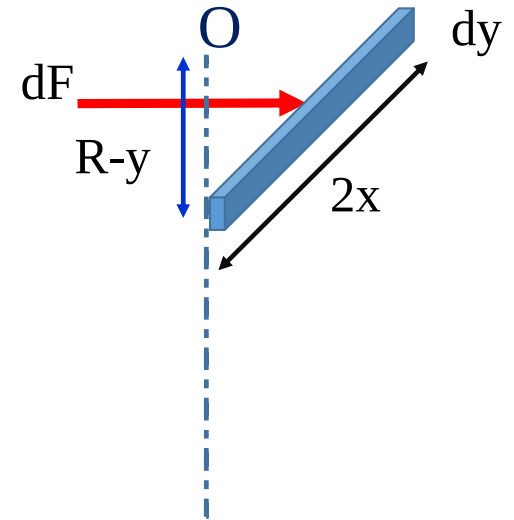
در نقطه تعادل: گشتاور ناشی از نیروی آب وارد بر دریچه دایره ای شکل گشتاور حاصل از نیروی لنگر برابر خواهد شد.





$$R + y + s = h \quad \rightarrow \quad s = h - R - y$$

$$x = (R^2 - y^2)^{\frac{1}{2}}$$



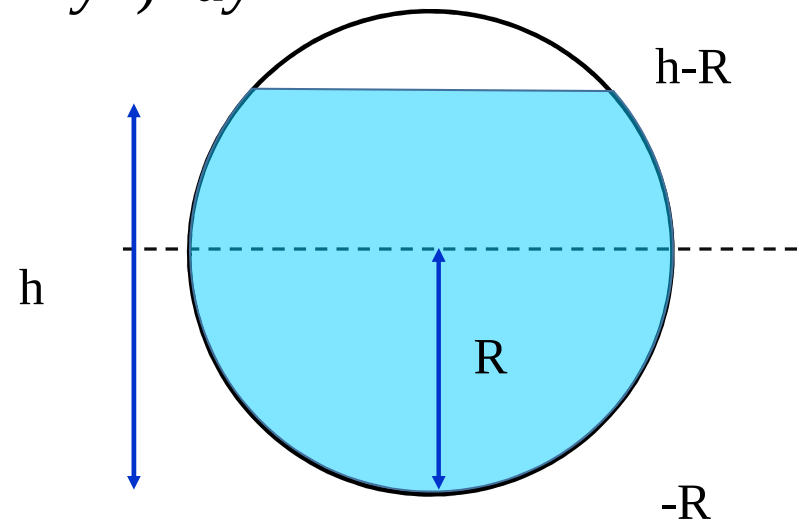
$$dF = PdA = \rho g s \times 2x dy$$

$$dM_w = dF \times (R - y) =$$

$$dM_w = dF \times (R - y) = \rho g s \times 2x dy \times (R - y)$$

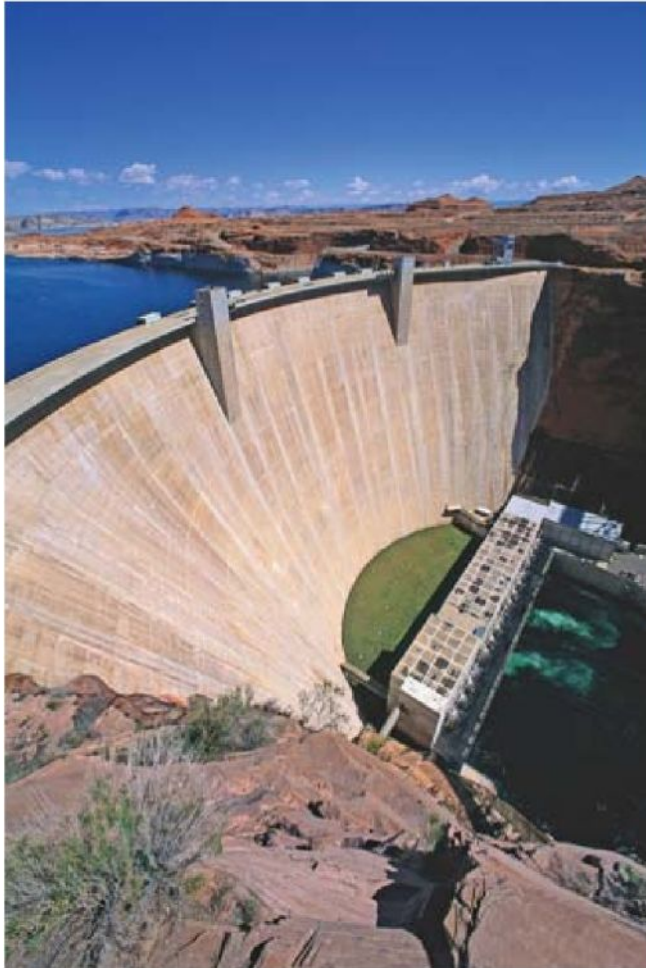
$$dM_w = \rho g (h - R - y) \times 2(R^2 - y^2)^{\frac{1}{2}} dy \times (R - y)$$

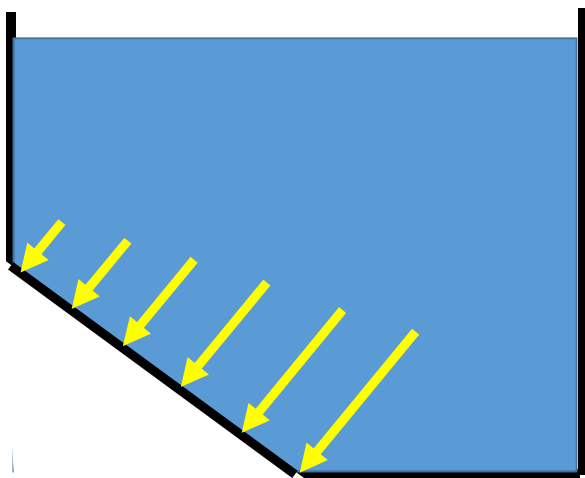
$$M_w = 2\rho g \int_{y=-R}^{y=h-R} (h - R - y) \times (R - y) \times (R^2 - y^2)^{\frac{1}{2}} dy$$



نیروی وارد بر سطوح خمیده

Hydrostatic forces on submerged curved surfaces



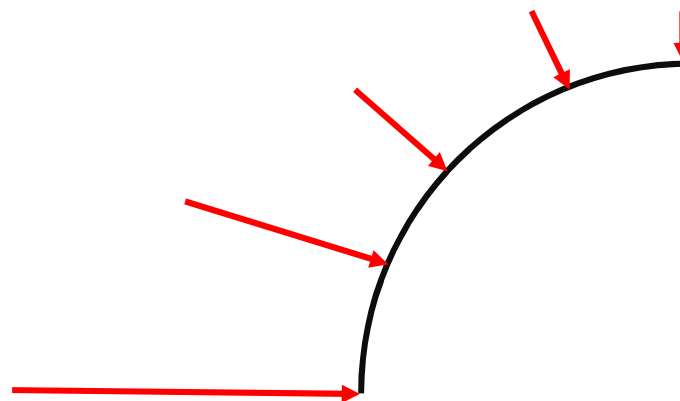


فشار با افزایش ارتفاع افزایش می یابد

نیرو همواره عمود بر سطح است

راستای نیرو در ارتفاع های مختلف یکسان است

$$dF \propto h$$



فشار با افزایش ارتفاع افزایش می یابد

نیرو در هر نقطه عمود بر سطح است

راستای نیرو در ارتفاع های مختلف متفاوت است

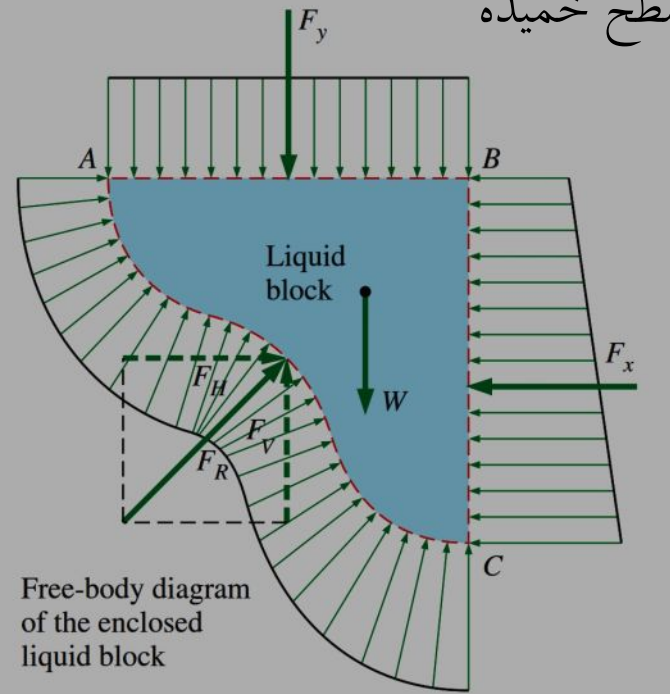
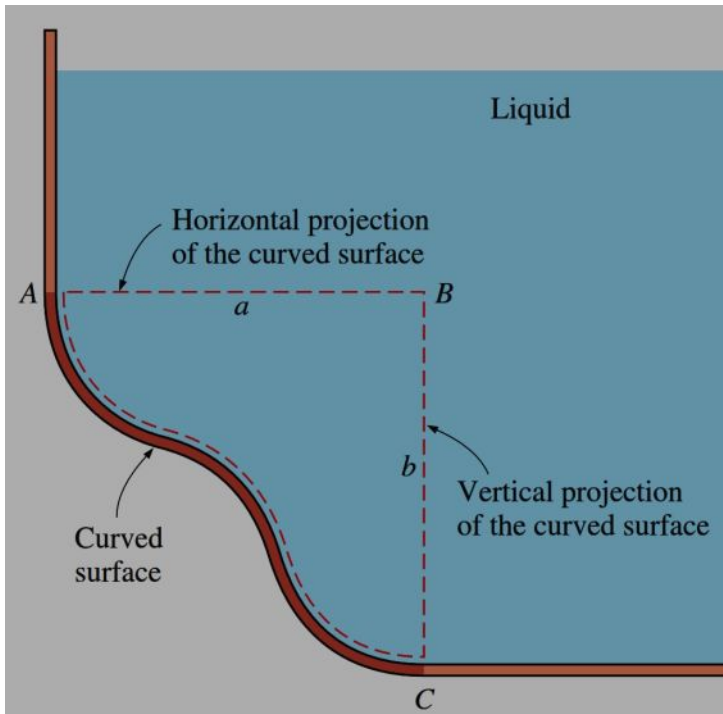
$$dF \propto h$$

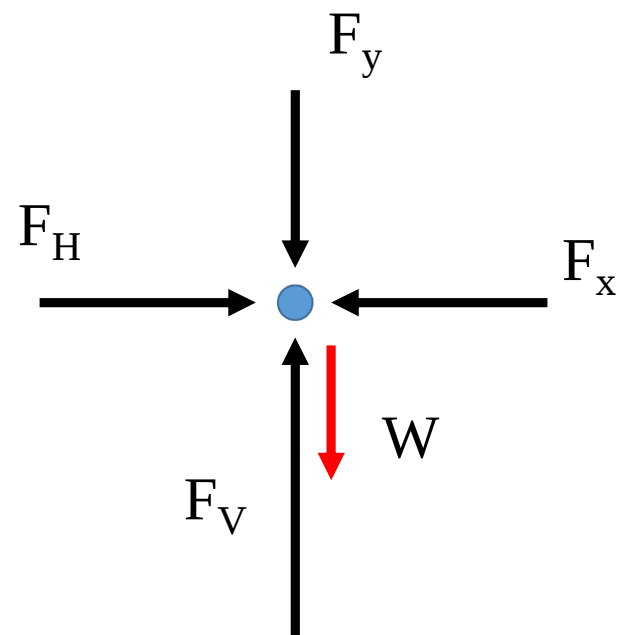
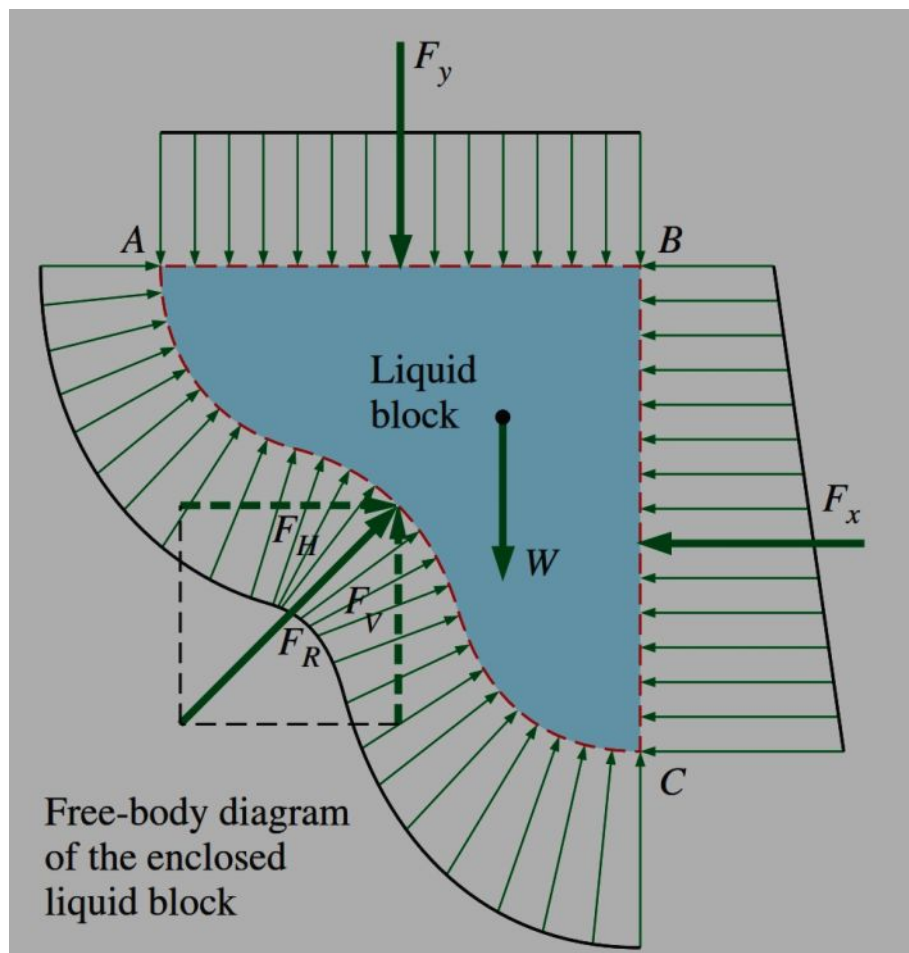
راه کار برای یافتن نیروی معادل بر سطح خمیده:

نیروی سیال وارد بر سطح = نیروی سیال مجاور آن

تحلیل نیروهای وارد بر یک حجم از سیال محصور بین سطح خمیده و سطوح افقی و عمودی رسم شده از

انتهای سطح خمیده





سیال در تعادل:

$$F_H = F_x$$

$$F_y + W = F_V$$

قاعده:

$$F_H = F_x$$

$$F_y \pm W = F_V$$

نیروی افقی سیال وارد بر سطح = نیروی هیدرواستاتیک وارد بر تصویر عمودی صفحه خمیده

نیروی عمودی سیال وارد بر سطح = نیروی هیدرواستاتیک وارد بر تصویر افقی صفحه خمیده به اضافه وزن

حجم سیال محصور (اگر حجم بالای سطح باشد علامت + و اگر زیر سطح باشد از علامت - استفاده می

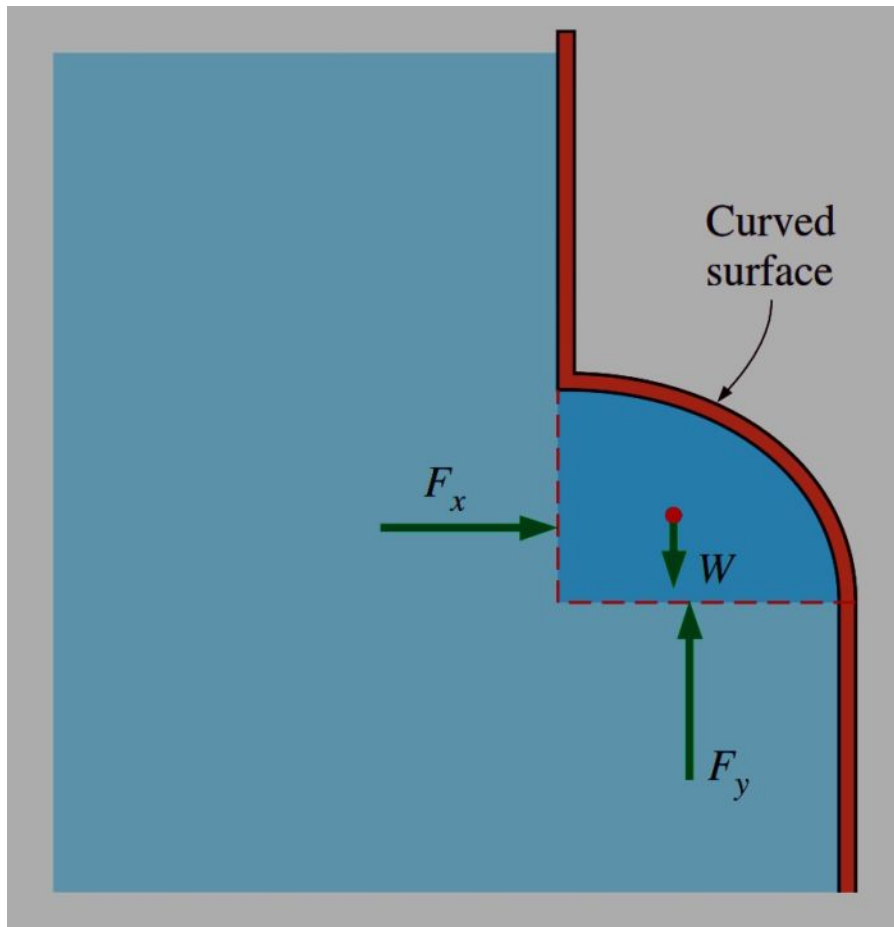
شود)

$$F_R = \sqrt{F_H^2 + F_V^2} \quad \text{نیروی کل} =$$

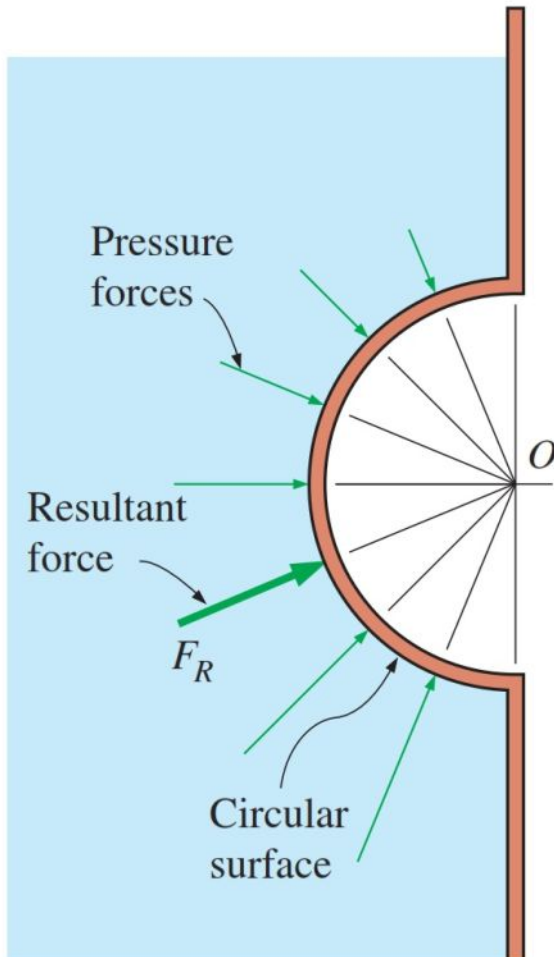
راستای نیروی معادل = در راستای شعاع سطح خمیده (در صورتی که سطح خمیده قوسی از دایره باشد) و

در راستایی وارد می شود که تانژانت زاویه آن با سطح افق از رابطه زیر پیروی نماید

$$\tan \alpha = \frac{F_V}{F_H}$$

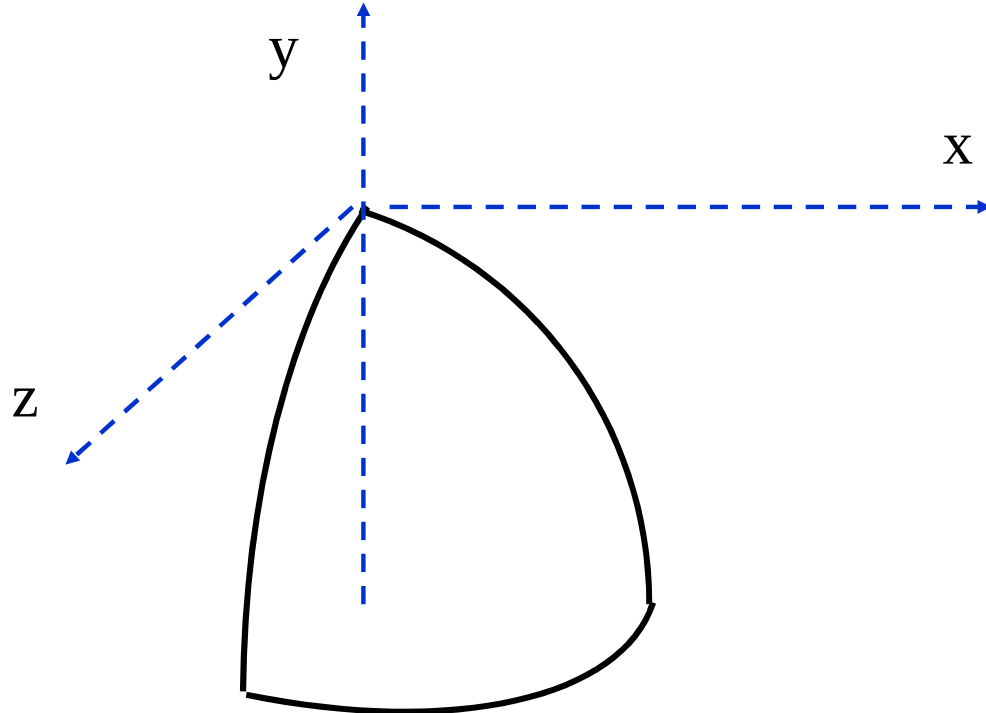


$$F_R = \sqrt{F_x^2 + (F_y - W)^2}$$

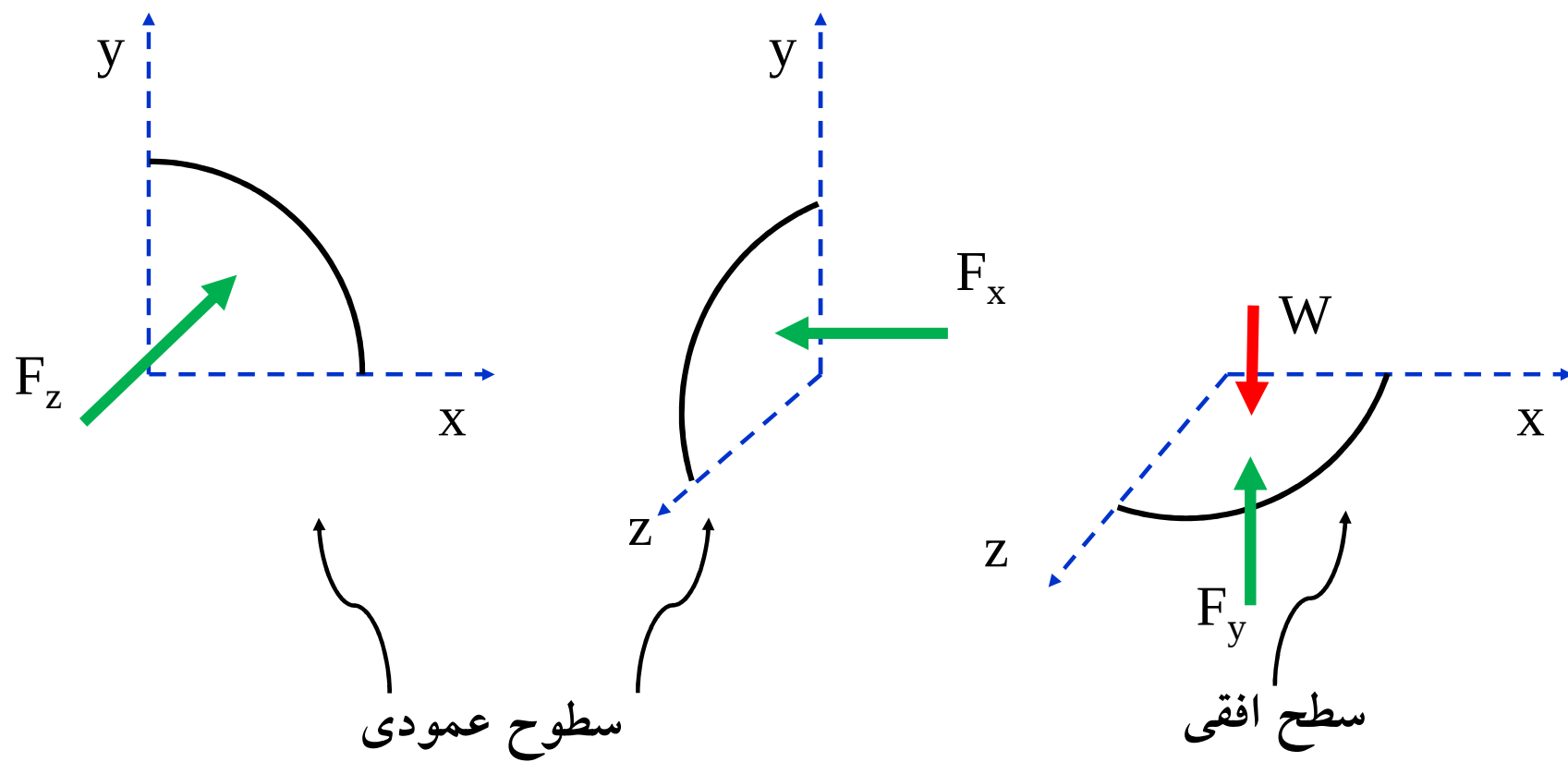


The hydrostatic force acting on a circular surface always passes through the center of the circle since the pressure forces are normal to the surface and they all pass through the center.

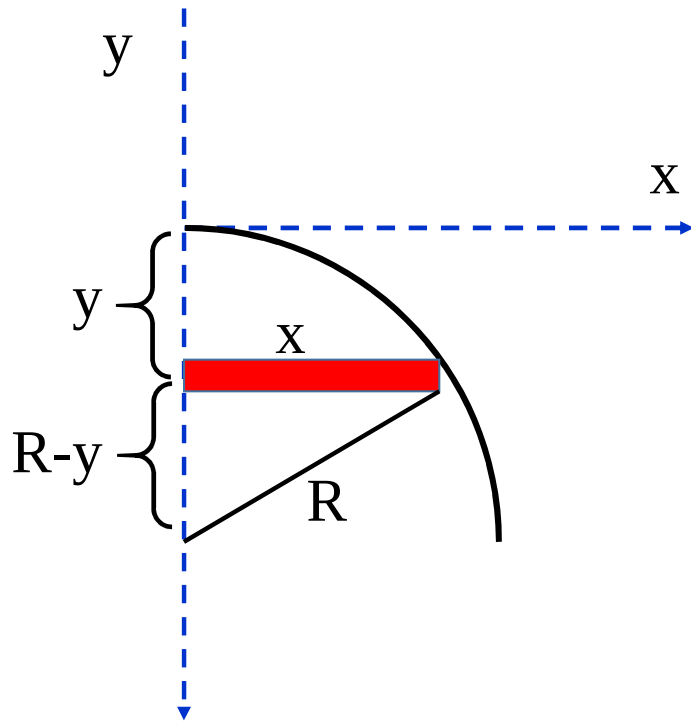
مثال) صفحه ای به شکل یک هشتم کره درون آب قرار دارد به گونه ای که نقطه بالایی آن هم سطح آب است. نیروی وارد بر صفحه را بدست آورید. شعاع کره R است



تصویر صفحه خمیده روی سطوح افقی و عمودی



سطوح عمودی

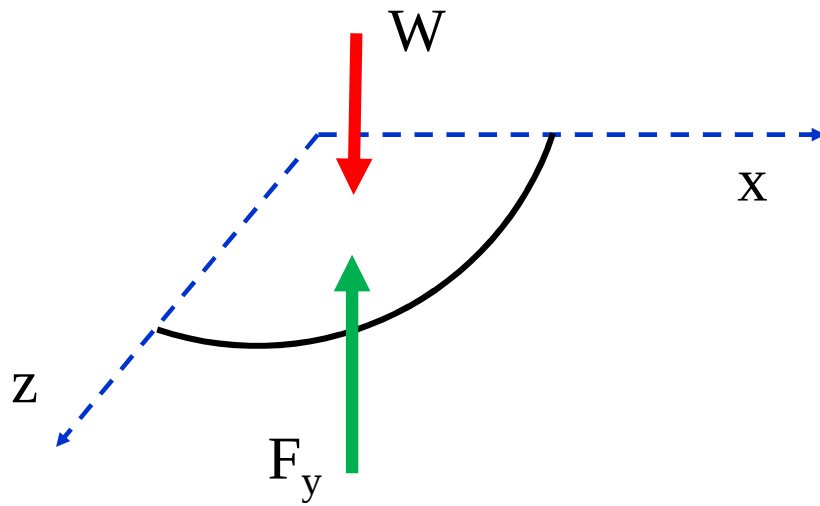


$$dF = PdA = Pxdy = \rho g y x dy$$

$$x = (R^2 - (R - y)^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$F_z = \rho g \int_{y=0}^{y=R} y(R^2 - (R - y)^2)^{\frac{1}{2}} dy$$

سطح افقی

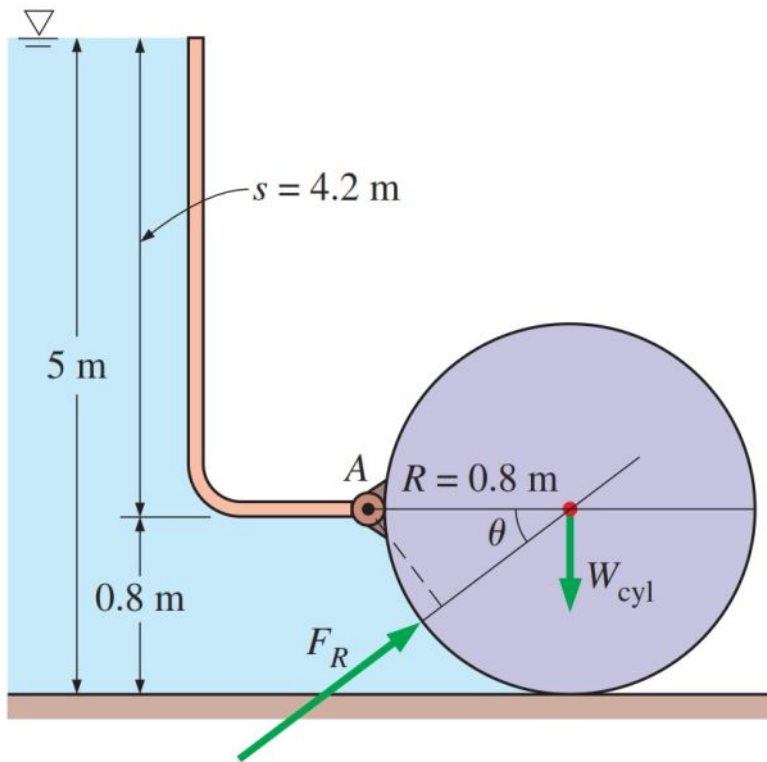


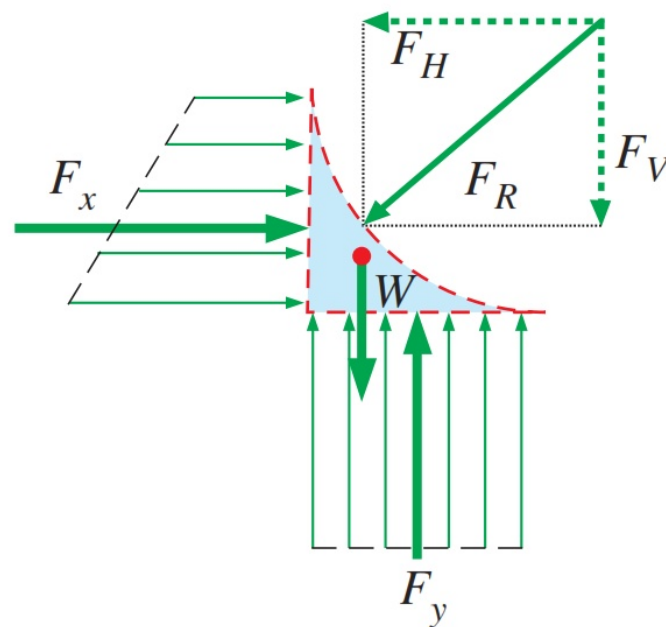
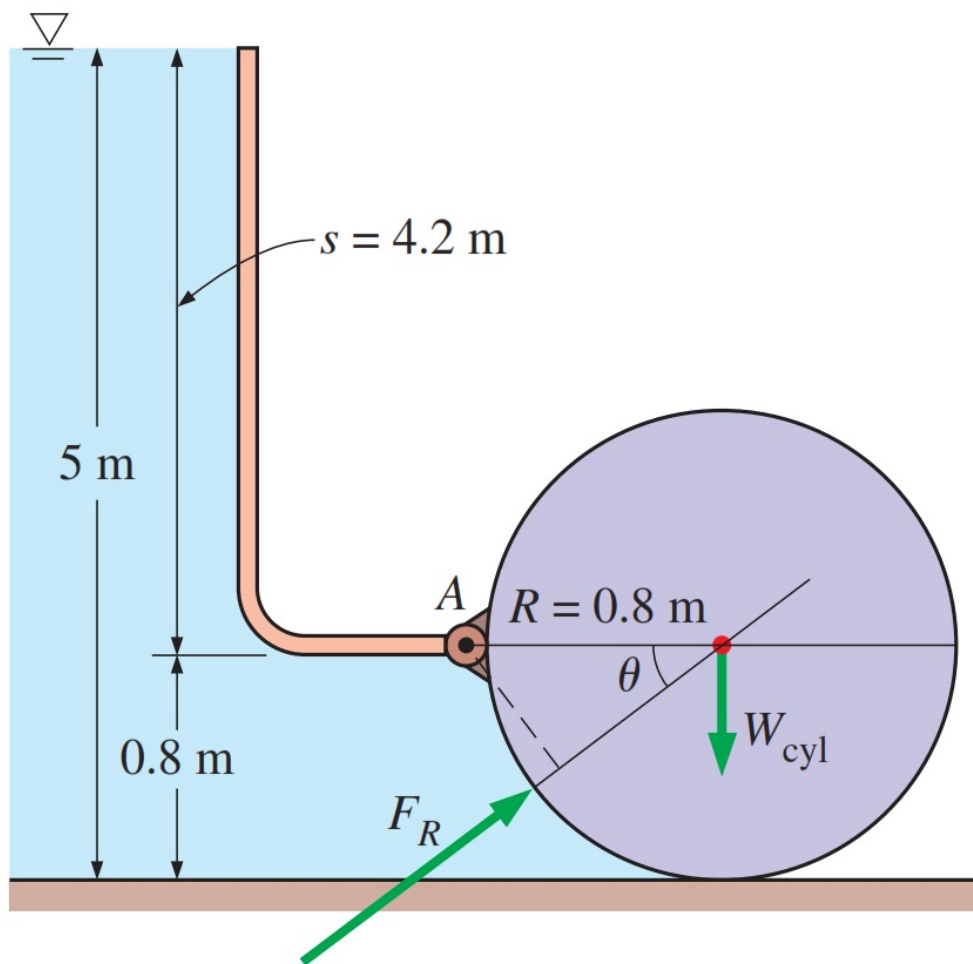
$$F_y = \text{fluid force} - W$$

$$F_y = \rho g R \times \frac{1}{4} \pi R^2 - \rho g \times \frac{1}{8} \times \frac{4}{3} \pi R^3$$

مثال) دریچه استوانه ای تحت جاذبه

از سیلندر جامد طویلی به شعاع 0.8 m که در نقطه A لولا شده است (دریچه خودکار). هنگامی که سطح آب به 5 m برسد دریچه با گردش حول لولا در نقطه A باز می شود. وزن سیلندر بر واحد طول را حساب کنید





Horizontal force on vertical surface:

$$\begin{aligned} F_H &= F_x = P_{\text{avg}} A = \rho g h_c A = \rho g (s + R/2) A \\ &= (1000 \text{ kg/m}^3)(9.81 \text{ m/s}^2)(4.2 + 0.8/2 \text{ m})(0.8 \text{ m} \times 1 \text{ m}) \left(\frac{1 \text{ kN}}{1000 \text{ kg} \cdot \text{m/s}^2} \right) \\ &= 36.1 \text{ kN} \end{aligned}$$

Vertical force on horizontal surface (upward):

$$\begin{aligned} F_y &= P_{\text{avg}} A = \rho g h_c A = \rho g h_{\text{bottom}} A \\ &= (1000 \text{ kg/m}^3)(9.81 \text{ m/s}^2)(5 \text{ m})(0.8 \text{ m} \times 1 \text{ m}) \left(\frac{1 \text{ kN}}{1000 \text{ kg} \cdot \text{m/s}^2} \right) \\ &= 39.2 \text{ kN} \end{aligned}$$

Weight (downward) of fluid block for one m width into the page:

$$\begin{aligned} W &= mg = \rho g V = \rho g (R^2 - \pi R^2/4)(1 \text{ m}) \\ &= (1000 \text{ kg/m}^3)(9.81 \text{ m/s}^2)(0.8 \text{ m})^2(1 - \pi/4)(1 \text{ m}) \left(\frac{1 \text{ kN}}{1000 \text{ kg} \cdot \text{m/s}^2} \right) \\ &= 1.3 \text{ kN} \end{aligned}$$

Therefore, the net upward vertical force is

$$F_V = F_y - W = 39.2 - 1.3 = 37.9 \text{ kN}$$

Then the magnitude and direction of the hydrostatic force acting on the cylindrical surface become

$$F_R = \sqrt{F_H^2 + F_V^2} = \sqrt{36.1^2 + 37.9^2} = \mathbf{52.3 \text{ kN}}$$

$$\tan \theta = F_V/F_H = 37.9/36.1 = 1.05 \rightarrow \theta = 46.4^\circ$$

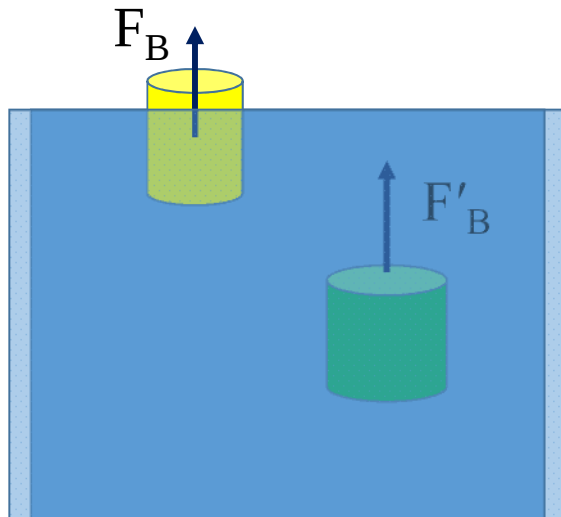
(b) When the water level is 5 m high, the gate is about to open and thus the reaction force at the bottom of the cylinder is zero. Then the forces other than those at the hinge acting on the cylinder are its weight, acting through the center, and the hydrostatic force exerted by water. Taking a moment about point A at the location of the hinge and equating it to zero gives

$$F_R R \sin \theta - W_{\text{cyl}} R = 0 \rightarrow W_{\text{cyl}} = F_R \sin \theta = (52.3 \text{ kN}) \sin 46.4^\circ = \mathbf{37.9 \text{ kN}}$$

اصل ارشمیدوس (Archimedes' Principle)

وقتی جسمی به طور کامل یا جزئی در سیالی غوطه ور می شود یک نیروی شناوری ($\text{buoyant force} = F_B$) از شاره به طرف بالا بر آن وارد می گردد.

– اندازه: برابر با وزن شاره ای که توسط جسم جابه جا یا اشغال شده است



– راستا: عمود بر سطح سیال

– جهت: روبه بالا

نیروی شناوری

اثبات:

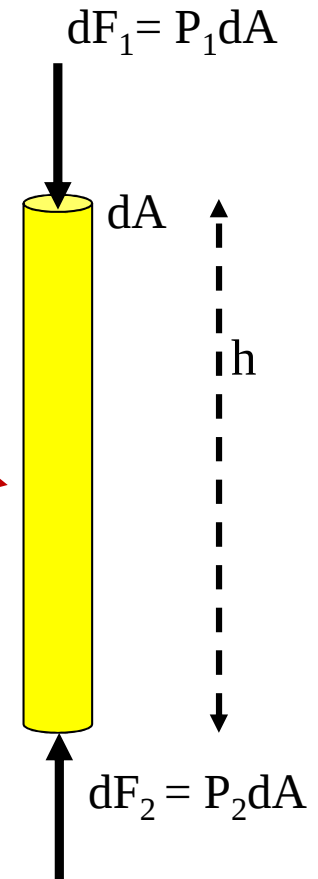
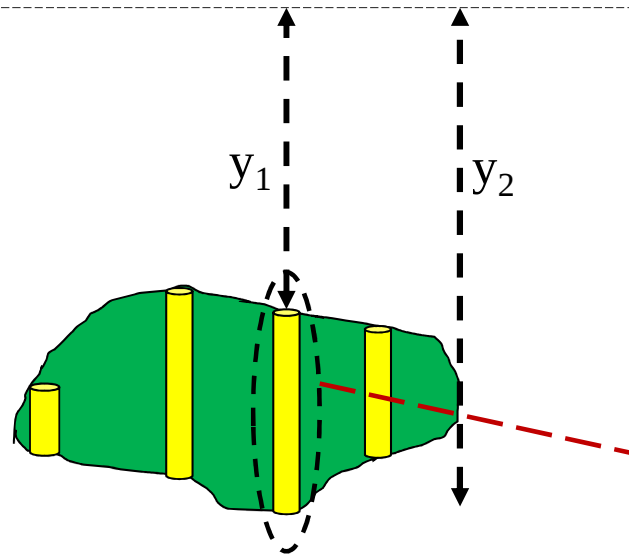
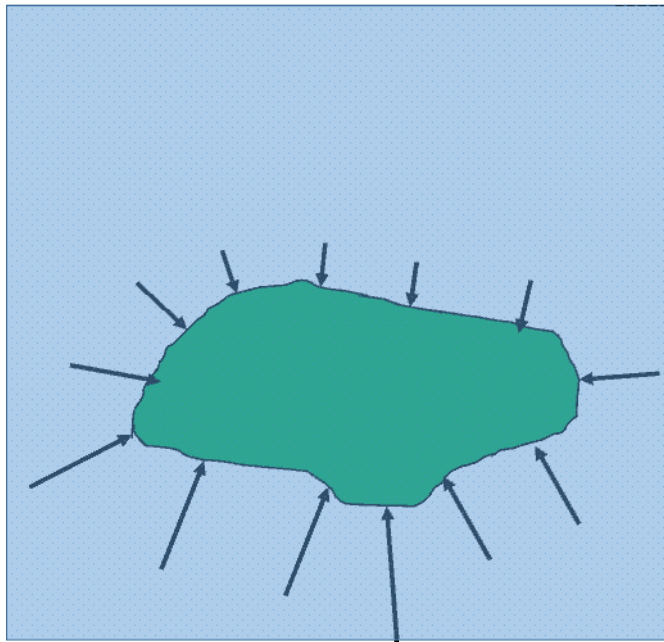
«اندازه نیروی شناوری برابر با وزن شاره ای که توسط جسم جابه جا شده است»

جسم در حالت سکون (تعادل)

برآیند نیروهای وارد بر جسم توسط سیال در ارتباط با آن و نیز نیروی وزن صفر است

$$\sum \vec{F} = 0$$

برآیند نیروها در صفحه افقی (X-Z) صفر است (نیروی سطحی سیال)
برآیند نیروها در راستای قائم (y) صفر است (نیروی سطحی سیال + نیروی وزن)



$$dF_t = dF_2 - dF_1 = (P_2 - P_1)dA = [(P_0 + \rho g y_2) - (P_0 + \rho g y_1)]dA$$

$$dF_t = \rho g (y_2 - y_1) dA = \rho g (h dA) = \rho g dV$$

حجم المان استوانه ای

$$F_B = \int \rho g dV = \rho_{fluid} g V$$

تکامل گیری روی کل جسم

حجم کل جسم

پیرامون نیروی شناوری

$$F_B = \rho g V'$$

۱- حجم ظاهر شده در رابطه برابر با حجم سیال جابه جا شده توسط جسم بعد از ورود جسم درون سیال است.

۲- اگر V حجم کل جسم بوده و V' حجمی از جسم که درون آب قرار دارد:

$$a) F_B = mg \rightarrow \rho_w g V' = \rho_O g V$$

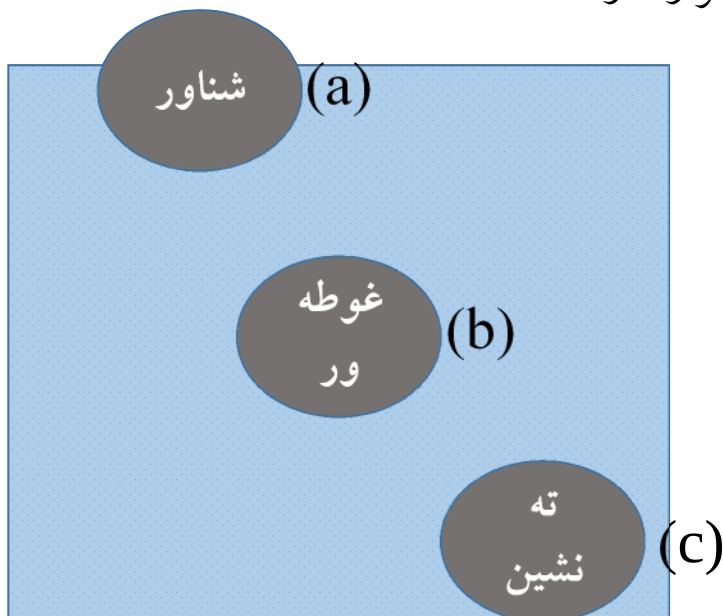
$$V' < V \rightarrow \rho_w > \rho_O$$

$$b) F_B = mg \rightarrow \rho_w g V' = \rho_O g V$$

$$V' = V \rightarrow \rho_w = \rho_O$$

$$c) F_B < mg \rightarrow \rho_w g V' < \rho_O g V$$

$$V' = V \rightarrow \rho_w < \rho_O$$



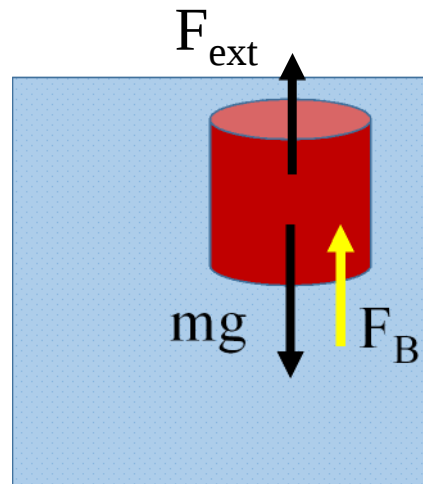
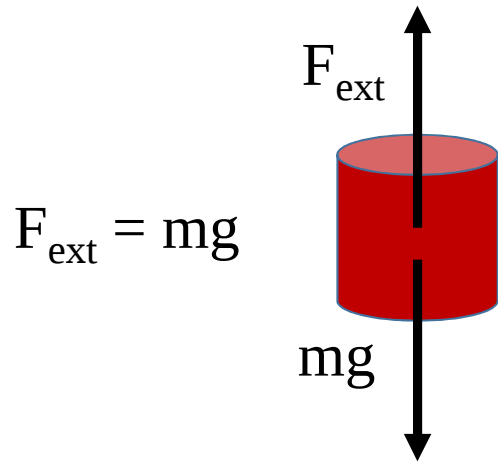
۳- شرط شناوری:

وقتی یک جسم بر روی سیالی شناور است که بزرگی نیروی شناوری وارد بر جسم از طرف سیال برابر با بزرگی نیروی وزن وارد بر جسم از طرف زمین باشد.

$$F_B = mg$$

۴- V' حجم خارجی جسم در مجاورت سیال است و کاری به توپر یا خالی بودن جسم ندارد

۵- وزن ظاهری یک جسم در شاره



$$F_{\text{ext}} + F_B = mg$$

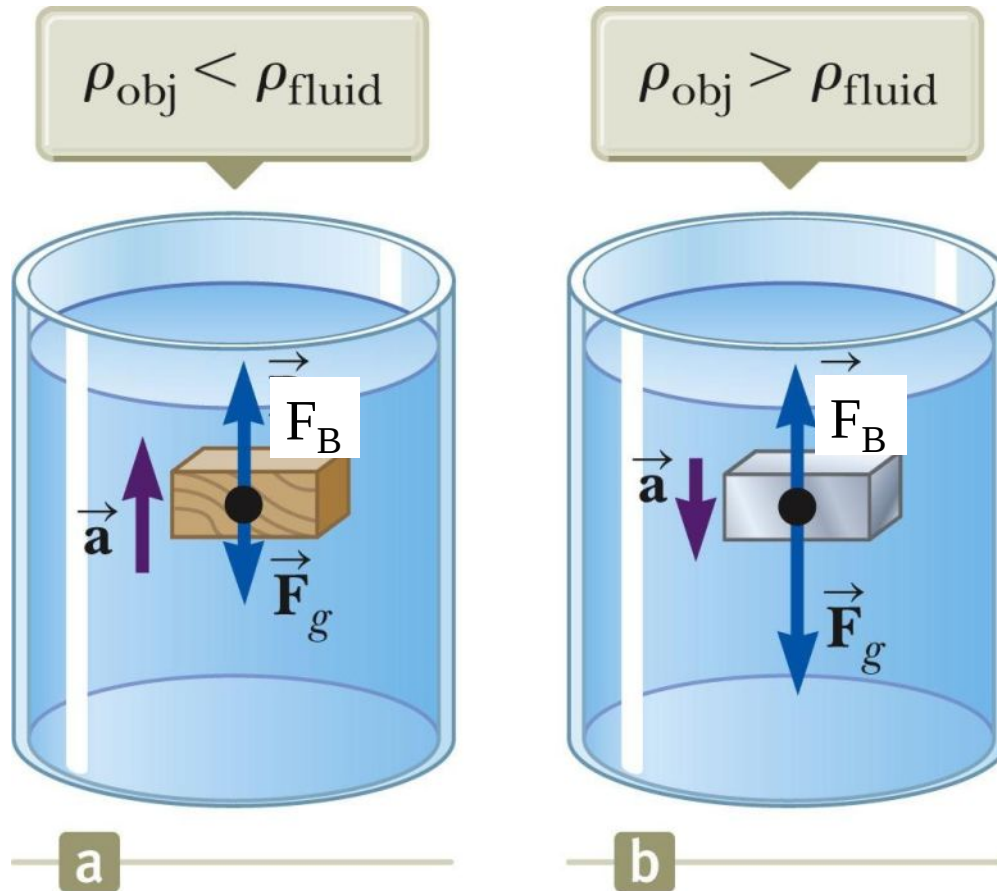
$$F_{\text{ext}} = mg - F_B$$

وزن ظاهری

وزن واقعی

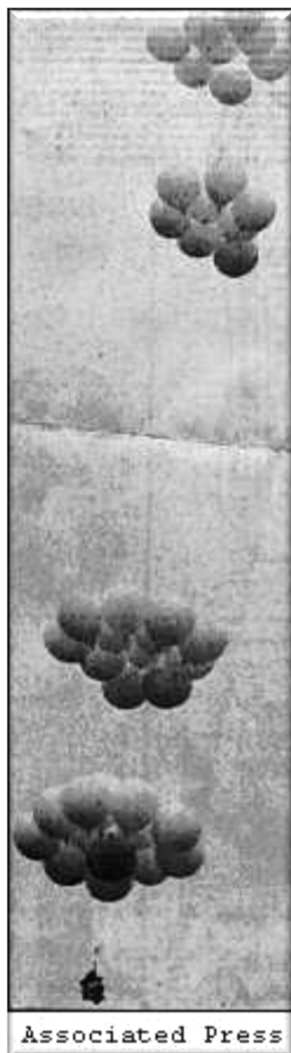
وزن ظاهری = وزن واقعی - نیروی شناوری

۶- جهت حرکت جسم در سیال



مثال

یک مرد یک خوشه از بادکنک های حاوی گاز هلیوم را به صندلی خود متصل نموده است تا به ارتفاع های بالاتر منتقل شود. اگر هر بادکنک یک کره با شعاع 20 cm باشد. نیروی خالص وارد بر هر بادکنک چقدر است. چه تعداد بادکنک برای بلند کردن مرد و صندلیش با جرم کلی 80 kg لازم است



$$\Sigma F = F_B - W_{He}$$

$$V_{balloon} = \frac{4}{3}\pi(0.2 \text{ m})^3 = 0.03351 \text{ m}^3$$

$$F_B = \rho_{air} V_{balloon} g = \left(1.29 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\right) (0.03351 \text{ m}^3) \left(9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right) = 0.4236 \text{ N}$$

$$W_{He} = \rho_{He} V_{balloon} g = \left(0.179 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\right) (0.03351 \text{ m}^3) \left(9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right) = 0.05878 \text{ N}$$

$$\Sigma F = 0.4236 \text{ N} - 0.05878 \text{ N} = 0.3648 \text{ N}$$

$$\Sigma F = F_B x - W_{He} x - W_{man} = 0 \rightarrow (0.3648 \text{ N})x - (80 \text{ kg}) \left(9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right) = 0$$

$$\rightarrow (0.3648 \text{ N})x = 784 \text{ N} \rightarrow x = 2150 \text{ balloons}$$

(مثال) وزن یک قطعه سنگ معدنی $w = 0.15\text{N}$ است. درحالیکه وزن آن به هنگام غوطه ور شدن در آب 0.11 N است. با صرف نظر کردن از نیروی رانشی هوا مطلوبست: حجم و چگالی سنگ

$$W_{\text{Appearance weight}} = W_{\text{real weight}} - F_B$$

$$0.11 = 0.15 - F_B \rightarrow F_B = 0.04\text{N}$$

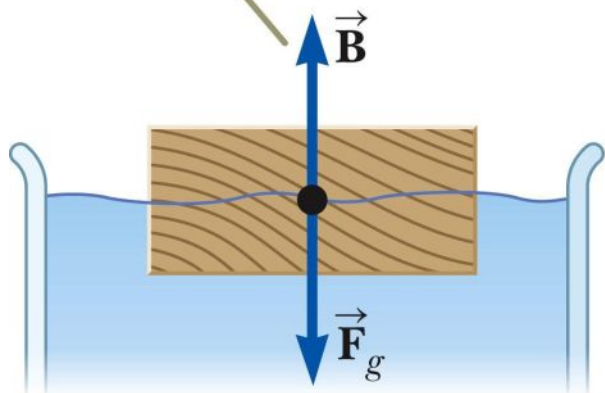
$$F_B = \rho g V \rightarrow V = \frac{F_B}{\rho g} = \frac{0.04}{10^3 \times 10} = 4 \times 10^{-6} \text{m}^3 = 4 \text{cm}^3$$

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{\frac{W_{\text{real}}}{g}}{V} = \frac{\frac{0.15}{10}}{4 \times 10^{-6}} = \frac{0.15}{4} \times 10^5 = 3.7 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$$

تکلیف:

برای یک جسم شناور: کسری از حجم جسم که در زیر سطح آب قرار دارد معادل با نسبت چگالی جسم به چگالی سیال است

Because the object floats in equilibrium, $B = F_g$.



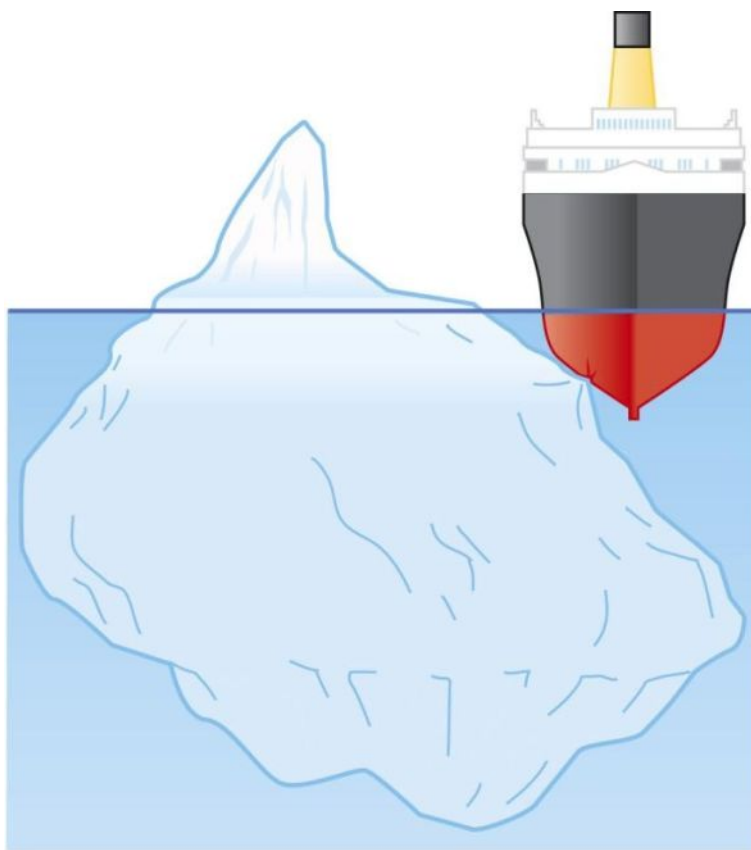
$$\frac{V_{\text{disp}}}{V_{\text{obj}}} = \frac{\rho_{\text{obj}}}{\rho_{\text{fluid}}}$$

مثال:

چه کسری از یک کوه یخ شناور داخل آب فرو می رود؟

$$\frac{V_{disp}}{V_{ice}} = \frac{\rho_{ice}}{\rho_{seawater}}$$

حدود 89 % یخ زیر آب قرار می گیرد



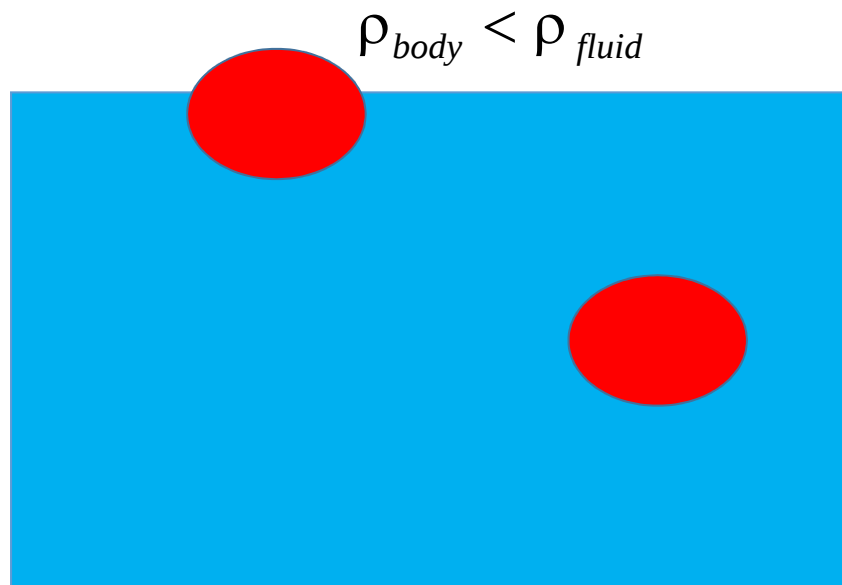
Stability of Immersed and Floating Bodies

پایداری اجسام غوطه ور و شناور

در غوطه وری جسم کاملاً داخل سیال است ولی در شناوری بخشی از جسم بیرون از سیال و بخشی داخل آن

در هر دو تعادل هیدروستاتیک برقرار است:

موازنه نیروی شناوری و نیروی وزن



$$\rho_{body} < \rho_{fluid}$$

$$\rho_{body} = \rho_{fluid}$$

پایداری

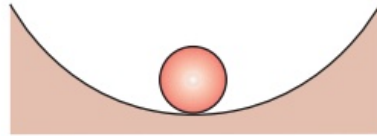
خطی یا عمودی

یک جسم هنگامی پایداری خطی دارد که با یک تغییر مکان خطی کوچک از حالت تعادل، نیرویی ایجاد شود که منجر به بازگرداندن آن جسم به حالت اولیه خود می شود

چرخشی

یک جسم هنگامی پایداری چرخشی دارد که با یک تغییر مکان زاویه ای کوچک از حالت تعادل، گشتاور نیرویی ایجاد شود که منجر به بازگرداندن آن جسم به حالت اولیه خود می شود

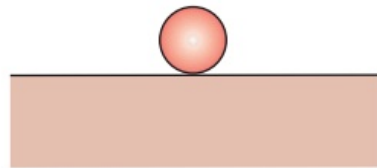
مثال) تعادل یک گلوله روی یک سطح



(a) Stable

تعادل پایدار

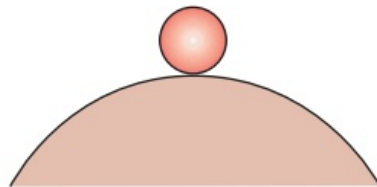
با جابه جایی اندک گلوله از حالت تعادل، نیروی وزن آن را به نقطه تعادلش باز می گرداند



(b) Neutrally stable

پایداری خنثی

عدم ایجاد نیروی بازگرداننده



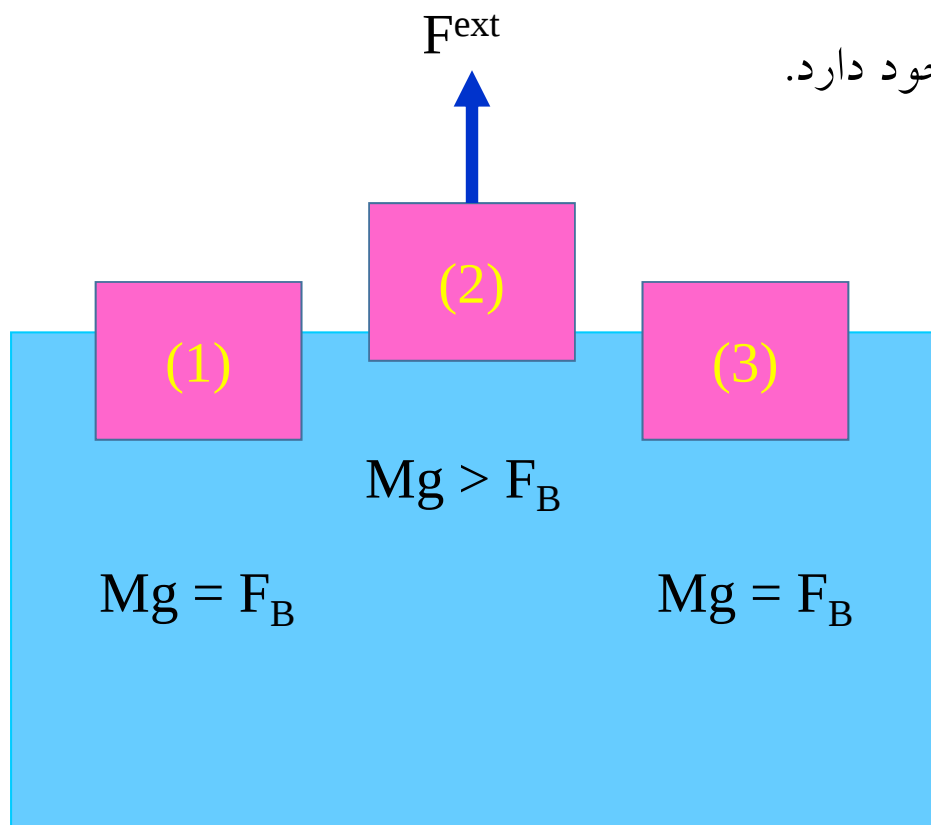
(c) Unstable

تعادل ناپایدار

با جابه جایی اندک گلوله از حالت تعادل، نیروی وزن سبب می شود تا آن به سمت پایین ادامه حرکت دهد و دیگر به نقطه اولیه باز نمی گردد

پایداری خطی

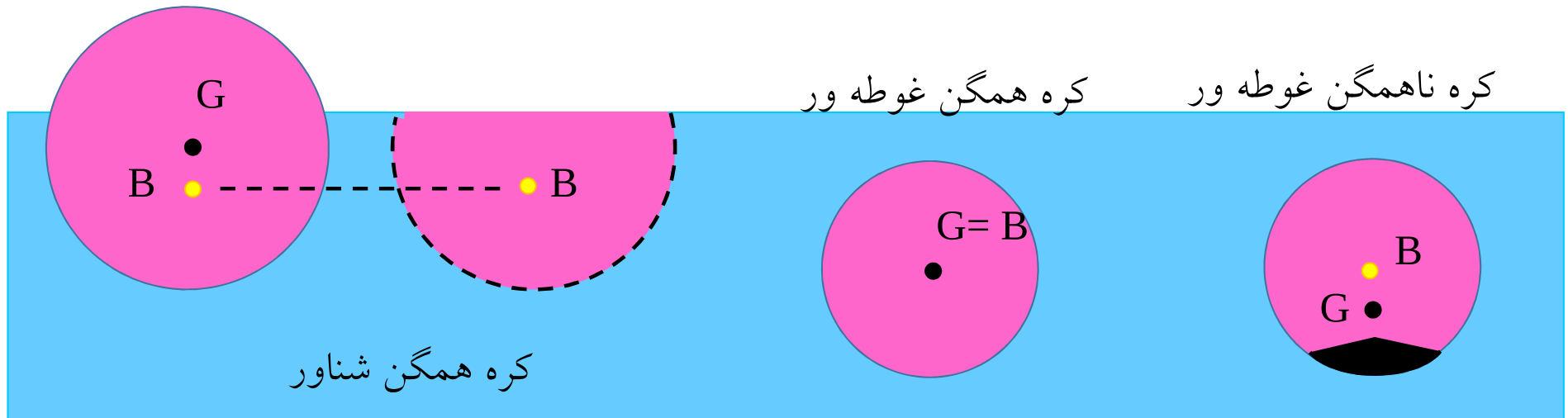
در هر دو حالت چه شناوری و چه غوطه وری وجود دارد.

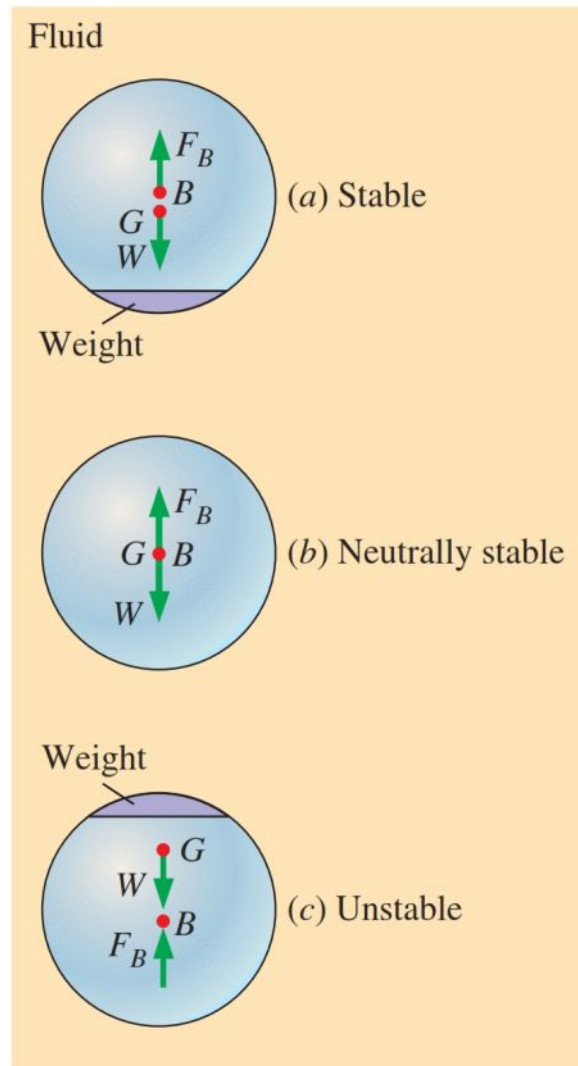


پایداری چرخشی برای اجسام غوطه ور

نکته: پایداری چرخشی برای اجسام غوطه ور به موقعیت نسبی مرکز گرانش (G) و مرکز شناوری (B) بستگی دارد

مرکز جرم = مرکز اعمال نیروی وزن
مرکز شناوری = مرکز جرم حجمی از مایع که توسط جسم جابه جا شده است
(مرکز اعمال نیروی شناوری)





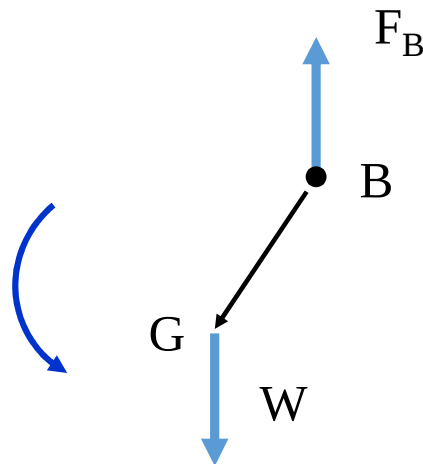
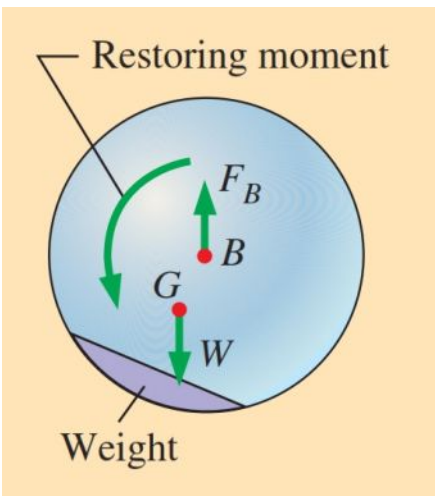
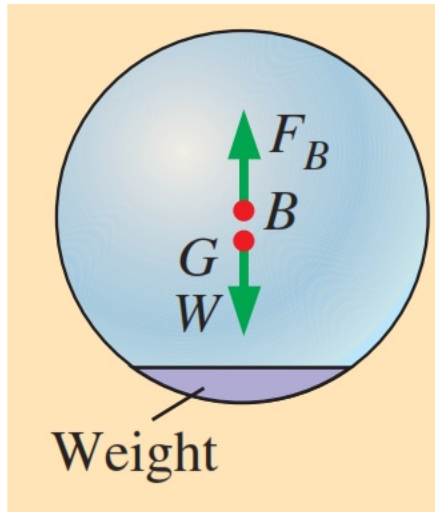
قاعده تعادل چرخشی در اجسام غوطه ور

۱- هرگاه G پایین تر از B باشد تعادل پایدار

۲- هرگاه G روی B باشد تعادل خنثی

۱- هرگاه G بالاتر از B باشد تعادل ناپایدار

حالت اول) مرکز گرانش پایین تر از مرکز شناوری



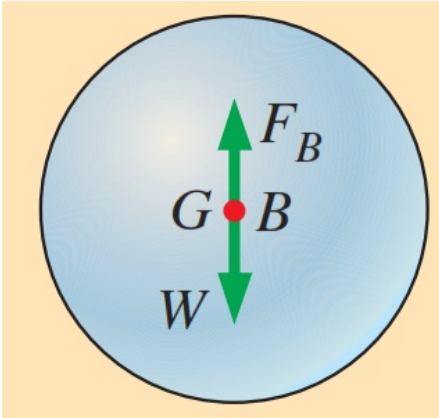
$$M_{F_B} = 0$$

$$M_W \neq 0$$

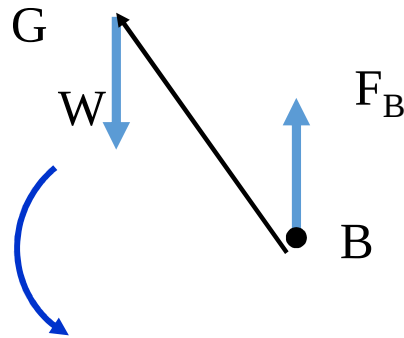
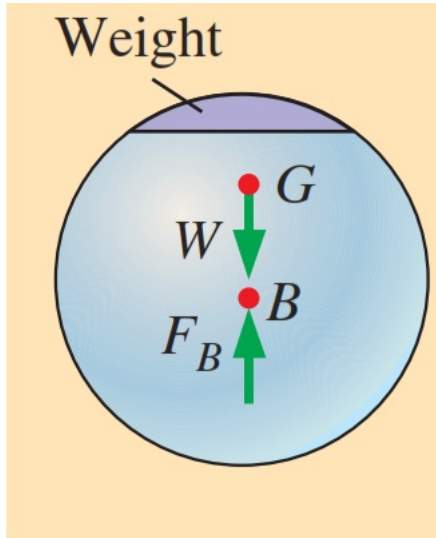
با یک چرخش ساعتگرد کوچک، گشتاور بازگرداننده حول مرکز کره سبب چرخش آن به سمت حالت تعادل می شود

حالت دوم) مرکز گرانش روی مرکز شناوری $G = B$

گشتاور هر دو نیروی حول نقطه مرکزی صفر است پس
گشتاور بازگرداننده ای وجود ندارد بنابراین اگر در اثر
گشتاور خارجی این جسم چرخانده شود به حالت تعادل
اولیه خود باز نمی گردد.

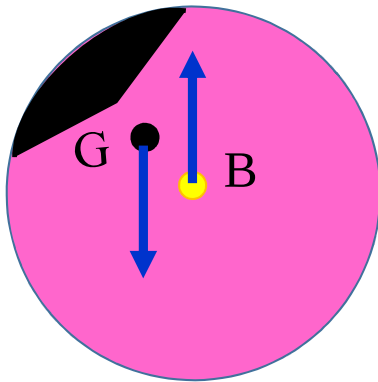


حالت سوم) مرکز گرانش بالاتر از مرکز شناوری



$$M_{F_B} = 0$$

$$M_W \neq 0$$



با یک چرخش پادساعتگرد کوچک، گشتاور ایجاد شده
چرخش اولیه جسم را تشدید می کند و دیگر جسم به
حالت اولیه خود بازمی گردد

پایداری چرخشی برای اجسام شناور

قاعده:

۱- اگر مرکز گرانش پایین تر از مرکز شناوری باشد جسم حتما در حالت تعادل پایدار خواهد بود

۲- اگر مرکز گرانش بالاتر از مرکز شناوری باشد و شبه مرکز بالای مرکز گرانش آنگاه جسم در حالت تعادل پایدار خواهد بود

۳- اگر مرکز گرانش بالاتر از مرکز شناوری باشد و شبه مرکز پایین مرکز گرانش آنگاه جسم در حالت تعادل ناپایدار خواهد بود

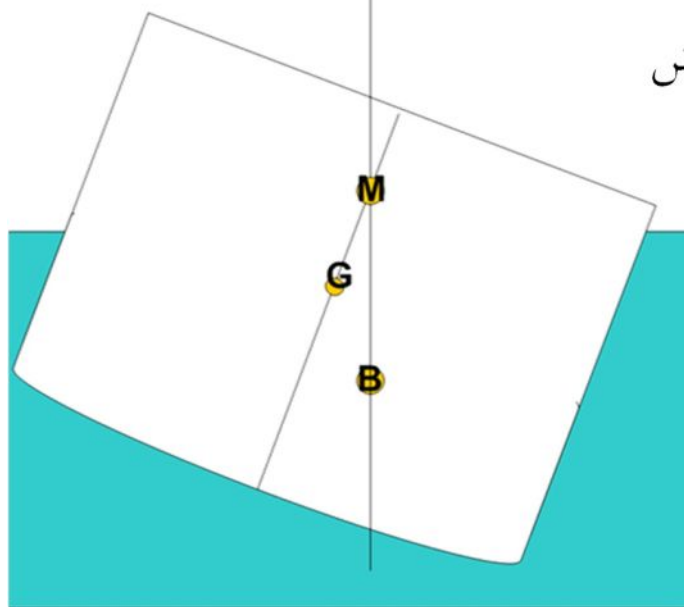
نکته:

شبه مرکز (metacenter):

محل تلاقی نیروی شناوری و محور تقارن جسم

یا محل محل تلاقی نیروی شناوری و راستای تعادل نیروی وزن در حالت تعادل

یا محل تلاقی راستای نیروی شناوری قبل و بعد از چرخش

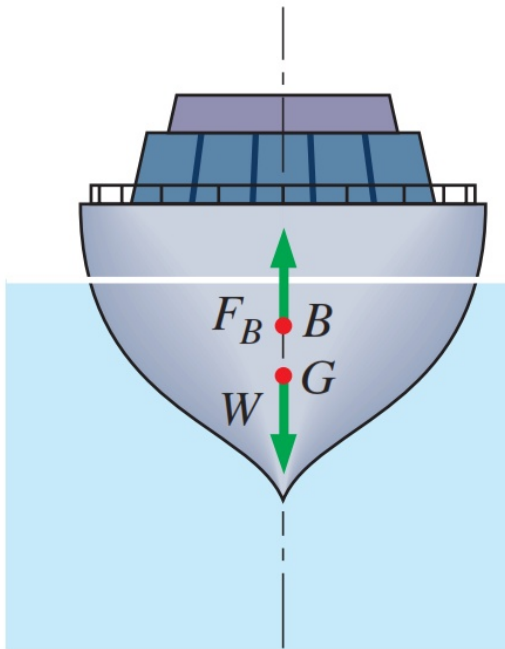


ارتفاع شبه مرکز (metacenter height):

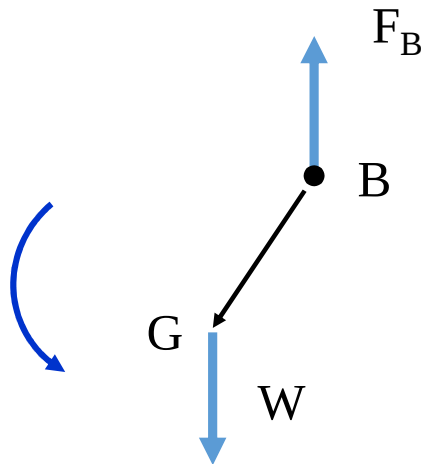
فاصله مرکز گرانش تا شبه مرکز (MG)

هر چه این ارتفاع بزرگتر باشد پایداری بیشتر است

مرکز گرانش پایین تر از مرکز شناوری (تبادل پایدار)



(a) Stable

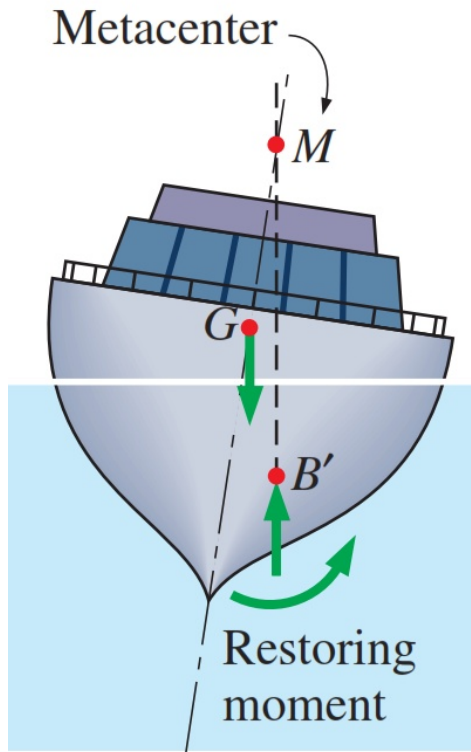


$$M_{F_B} = 0$$

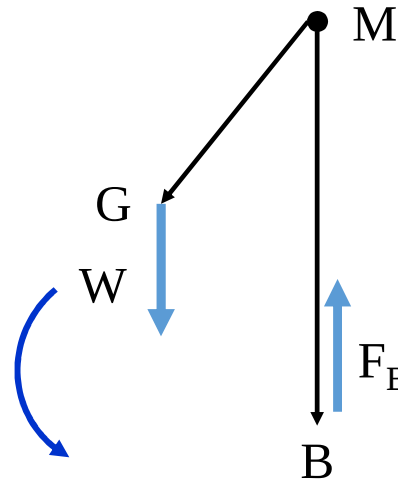
$$M_W \neq 0$$

با یک چرخش پادساعتگرد کوچک،

مرکز گرانش بالاتر از مرکز شناوری باشد و شبه مرکز بالای مرکز گرانش (تعادل پایدار)



(b) Stable

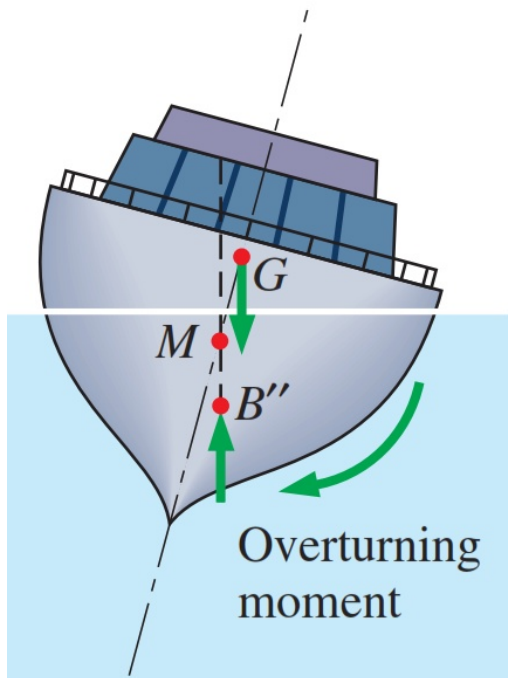


$$M_{F_B} = 0$$

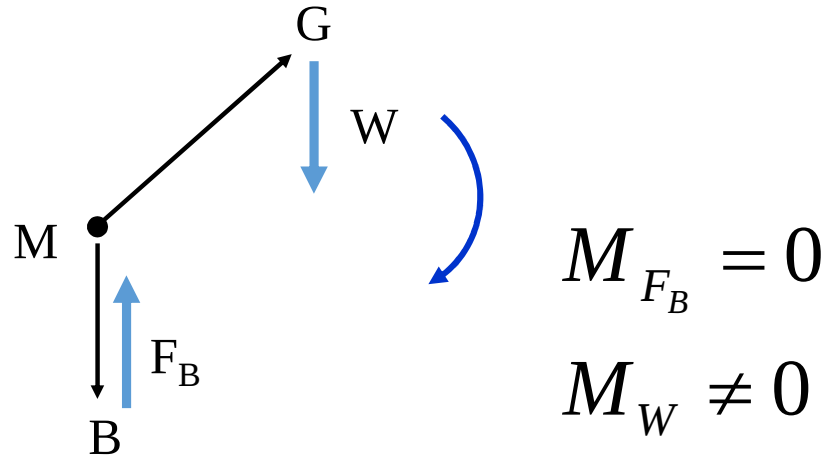
$$M_W \neq 0$$

با یک چرخش ساعتگرد کوچک، گشتاور بازگرداننده سبب چرخش آن به سمت حالت تعادل می شود

مرکز گرانس بالاتر از مرکز شناوری باشد و شبه مرکز پایین مرکز گرانس (تعادل ناپایدار)



(c) Unstable



با یک چرخش ساعتگرد کوچک، گشتاور ایجاد شده سبب تشدید چرخش ساعتگرد شده و لذا دیگر جسم به حالت اولیه باز نمی گردد

سیال با حرکت یکپارچه **Fluids in rigid-body motion**

حرکت همه سیال با هم دیگر - بدون وجود تنش برشی بین لایه های سیال

در حرکت شابداری یک ماشین حامل سیال مانند تانکر بنزین؛ سیال در ابتدا به عقب رانده شده و با تشکیل یک سطح آزاد جدید در همان حال باقی می ماند

$$\sum f = f_{pressure} + f_{gravity} + \underbrace{f_{viscosity}}_0$$

نیروی وارد بر واحد حجم سیال

حرکت جسم صلب ← حرکت همه ذرات با هم

سیال بدون اصطکاک داخلی: حرکت سیال مشابه یک جسم صلب $\mu = 0$

$$\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \rightarrow \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial y} = 0 & \text{لایه های سیال نسبت به هم اختلاف} \\ & \text{سرعتی نداشته باشند} \\ \mu = 0 \end{cases}$$

A glass of water at rest is a special case of a fluid in rigid-body motion. If the glass of water were moving at constant velocity in any direction,



$$\sum f = f_{\text{pressure}} + f_{\text{gravity}}$$

$$\sum f = -\vec{\nabla}P - \rho g \hat{j}$$

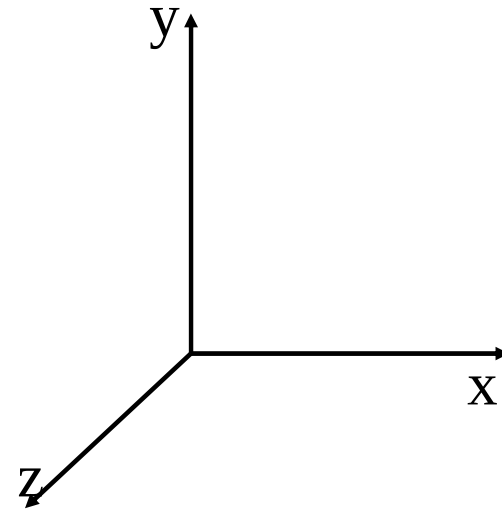
$$\rho \vec{a} = -\vec{\nabla}P - \rho g \hat{j} \rightarrow \vec{\nabla}P = -\rho \vec{a} - \rho g \hat{j}$$

$$\rightarrow \vec{\nabla}P = -\rho(\vec{a} + g \hat{j})$$

$$\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial x} = -\rho a_x \\ \frac{\partial P}{\partial y} = -\rho(a_y + g) \\ \frac{\partial P}{\partial z} = -\rho a_z \end{cases}$$

حرکت خطی

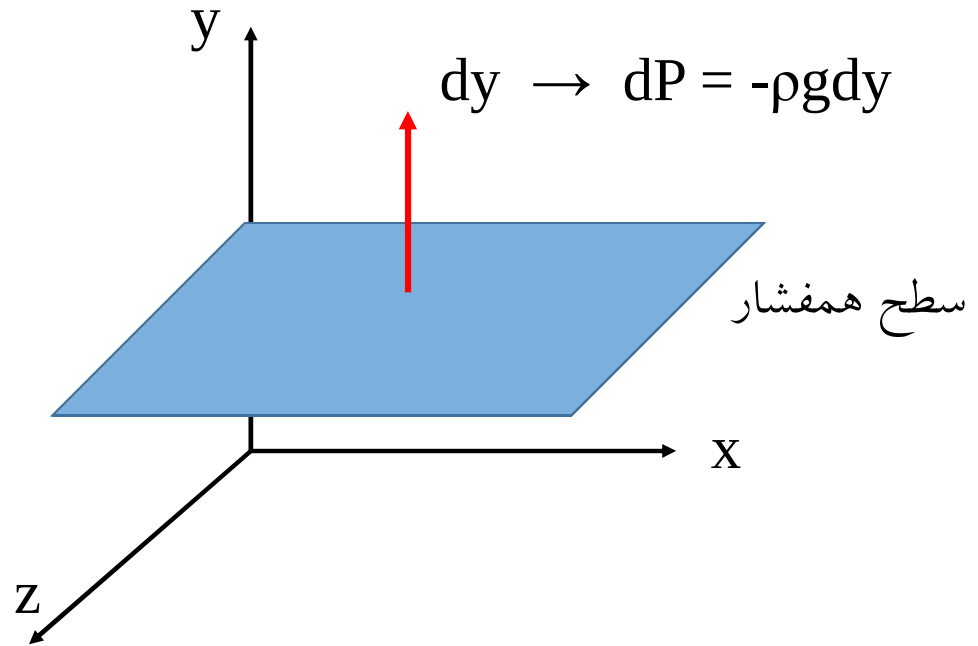
حرکت دایره ای



الف) سیال ساکن

$$\vec{a} = 0 \rightarrow$$

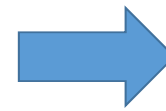
$$\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial x} = 0 \rightarrow P(x) = \text{constant} \\ \frac{\partial P}{\partial y} = -\rho g \\ \frac{\partial P}{\partial z} = 0 \rightarrow P(z) = \text{constant} \end{cases}$$



ب) سقوط آزاد

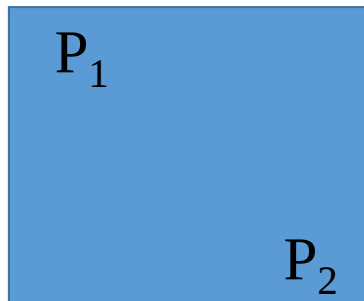
$$\vec{a} = (0, -g, 0) \rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial P}{\partial x} = 0 \rightarrow P(x) = \text{const} \tan t \\ \frac{\partial P}{\partial y} = -\rho(-g + g) = 0 \rightarrow P(y) = \text{const} \tan t \\ \frac{\partial P}{\partial z} = 0 \rightarrow P(z) = \text{const} \tan t \end{array} \right.$$



$$\vec{P} = \text{const} \tan t$$

فشار کاملاً مستقل از مکان = فشار در همه ارتفاعات از سیال یکسان است



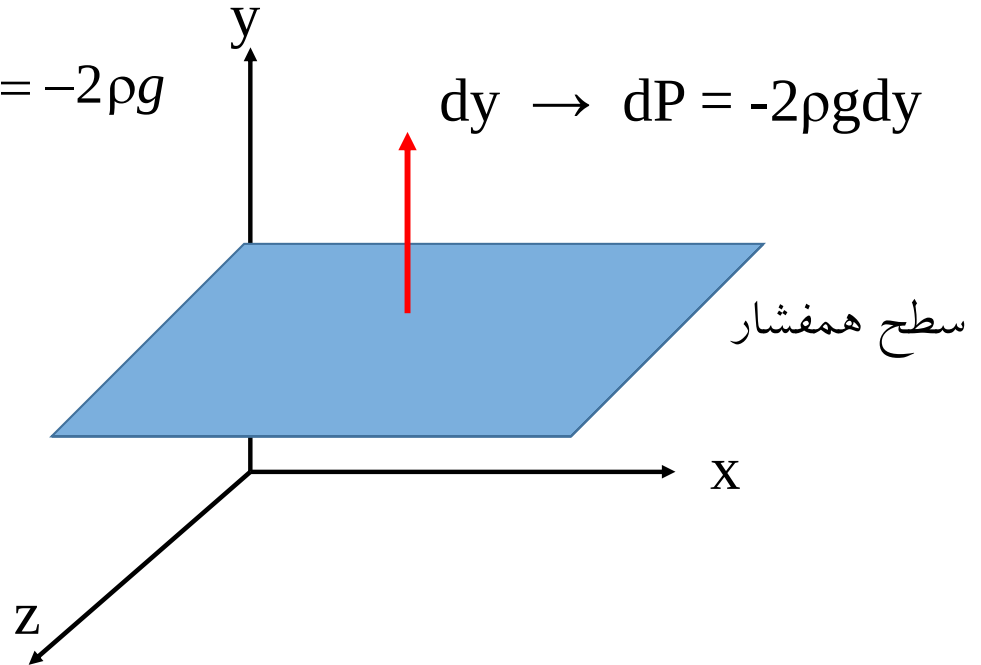
$$P_1 = P_2$$

ج) حرکت با شتاب گرانش به سمت بالا

$$\vec{a} = (0, +g, 0) \rightarrow$$

$$\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial x} = 0 \rightarrow P(x) = \text{const} \tan t \\ \frac{\partial P}{\partial y} = -\rho(+g + g) = 0 \rightarrow P(y) = -2\rho g y \\ \frac{\partial P}{\partial z} = 0 \rightarrow P(z) = \text{const} \tan t \end{cases}$$

اختلاف فشار بین لایه های عمودی سیال دو برابر حالت ساکن است



(د) حرکت شتابدار سیال در صفحه xy

$$\vec{a} = (a_x, a_y, 0) \rightarrow$$

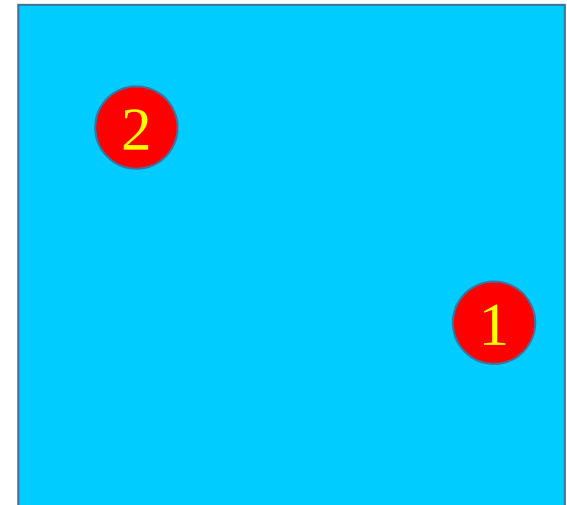
$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial P}{\partial x} = -\rho a_x \\ \frac{\partial P}{\partial y} = -\rho(a_y + g) \\ \frac{\partial P}{\partial z} = 0 \end{array} \right. \rightarrow \begin{array}{l} \text{فشار تابعی از } xy \\ P(z) = \text{constan } t \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{فشار مستقل از } z \end{array}$$

$$dP = \frac{\partial P}{\partial x} dx + \frac{\partial P}{\partial y} dy + \frac{\partial P}{\partial z} dz = -\rho a_x dx - \rho(a_y + g)dy + 0$$

$$dP = -\rho a_x dx - \rho(a_y + g)dy$$

$$\int_1^2 dP = -\int_1^2 \rho a_x dx - \int_1^2 \rho(a_y + g)dy$$

$$P_2 - P_1 = -\rho a_x(x_2 - x_1) - \rho(a_y + g)(y_2 - y_1)$$



بدست آوردن معادله سطح آزاد سیال

$$P_1 = P_2$$

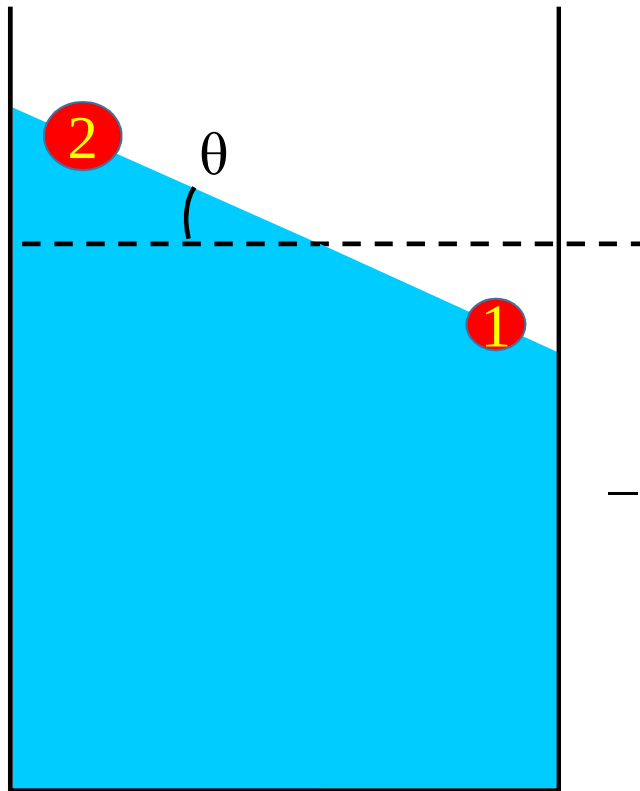
مکان هندسی نقاط هم فشار

$$P_2 - P_1 = 0 \rightarrow -\rho a_x (x_{2s} - x_{1s}) - \rho (a_y + g)(y_{2s} - y_{1s}) = 0$$

$$\rightarrow y_{2s} - y_{1s} = \frac{-a_x}{a_y + g} (x_{2s} - x_{1s})$$

شیب خط آزاد جدید

$$-\tan \theta = \frac{-a_x}{a_y + g} \rightarrow \theta = \tan^{-1} \left(\frac{a_x}{a_y + g} \right)$$



$$y_{2s} - y_{1s} = \frac{-a_x}{a_y + g} (x_{2s} - x_{1s})$$

شیب خط آزاد جدید

$$-\tan \theta = \frac{-a_x}{a_y + g} \rightarrow \theta = \tan^{-1} \left(\frac{a_x}{a_y + g} \right)$$

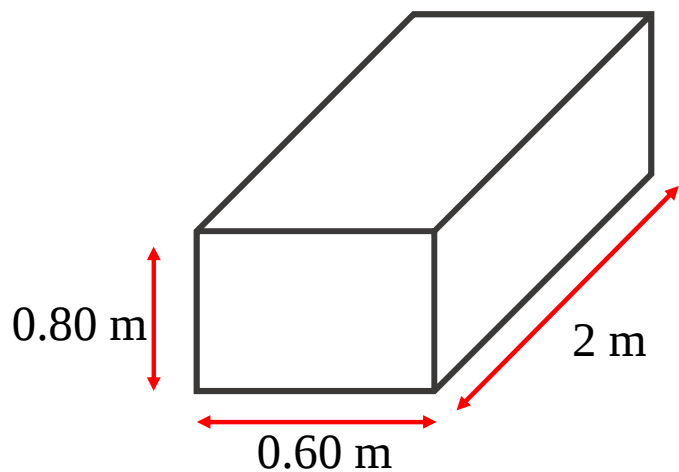
مثال) یک مخزن حمل ماهی به ارتفاع 80 cm و سطح مقطع $2 \text{ m} \times 0.6 \text{ m}$ حاوی آب است که عقب کامیونی قرار دارد. سرعت کامیون در عرض ۱۰ ثانیه از صفر به ۹۰ کیلومتر بر ساعت افزایش می یابد. اگر بخواهیم در هنگام شتاب گرفتن هیچ آبی از مخزن نریزد، ارتفاع مجاز آب را حساب کنید

$$-\tan\theta = \frac{-a_x}{a_y + g} \rightarrow \theta = \tan^{-1}\left(\frac{a_x}{a_y + g}\right)$$

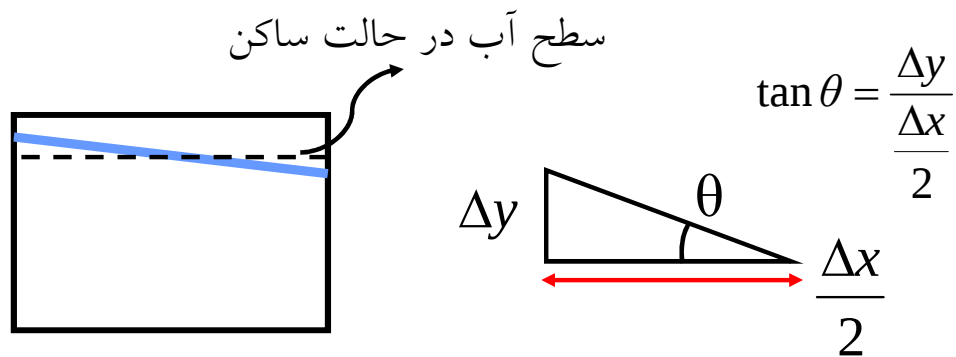
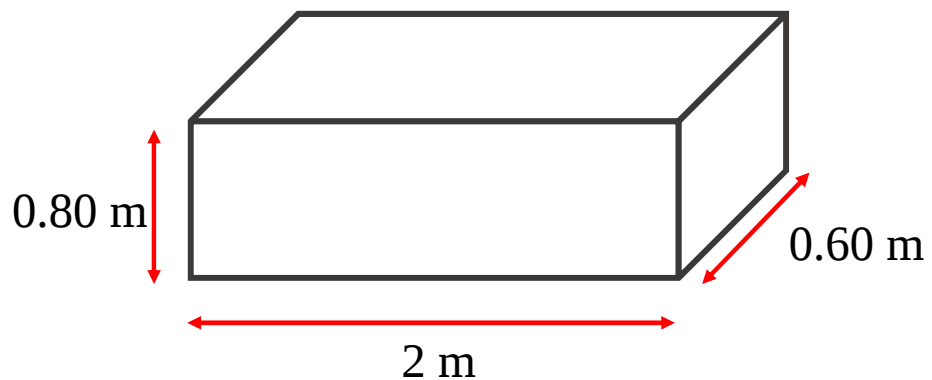
$$a_y = 0$$

$$a_x = ? \quad V - V_0 = a_x t \rightarrow \frac{90}{3.6} = 10a_x \rightarrow a_x = 2.5 \frac{m}{s^2}$$

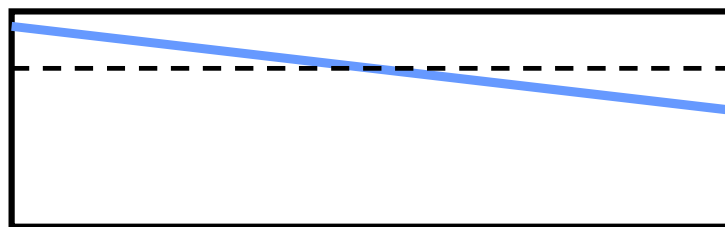
$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{a_x}{a_y + g}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{2.5}{9.8}\right) \rightarrow \theta = 14.3^\circ$$



a



$$\Delta y_1 = \frac{\Delta x_1}{2} \tan \theta \rightarrow \Delta y_1 = 7.6 \text{ cm}$$



$$\Delta y_2 = \frac{\Delta x_2}{2} \tan \theta \rightarrow \Delta y_2 = 25.5 \text{ cm}$$

بحثی پیرامون سطح آزاد سیال

$$\vec{\nabla} P = -\rho \vec{a} - \rho g \hat{j}$$

تغییرات P در جهتی که میزان تغییرات در آن بیشتر است $\vec{\nabla} P$

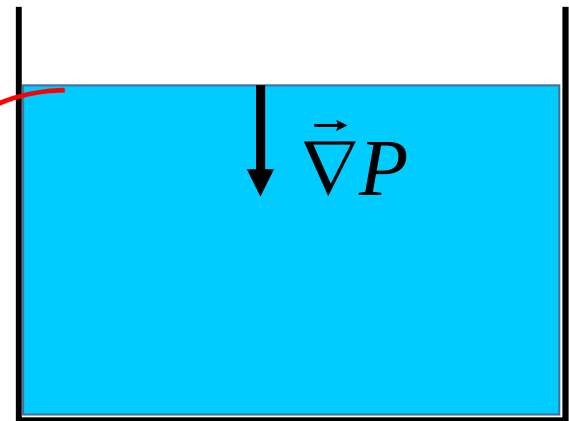
سیال ساکن

$$\vec{a} = 0$$

$$\vec{\nabla} P = -\rho g \hat{j}$$

سطح آزاد آب (سطح هم فشار)

$\vec{\nabla} P$ بر سطوح هم فشار عمود است

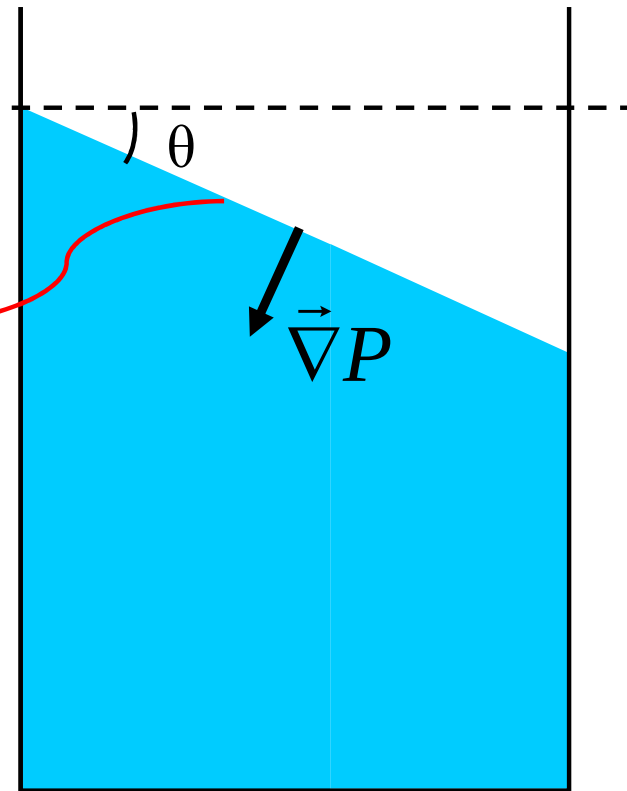


سیال شتاب دارد

$$\vec{\nabla} P = -\rho \vec{a} - \rho g \hat{j}$$

$$\vec{\nabla} P \parallel (\vec{a} + g \hat{j})$$

سطح آزاد آب (سطح هم فشار)

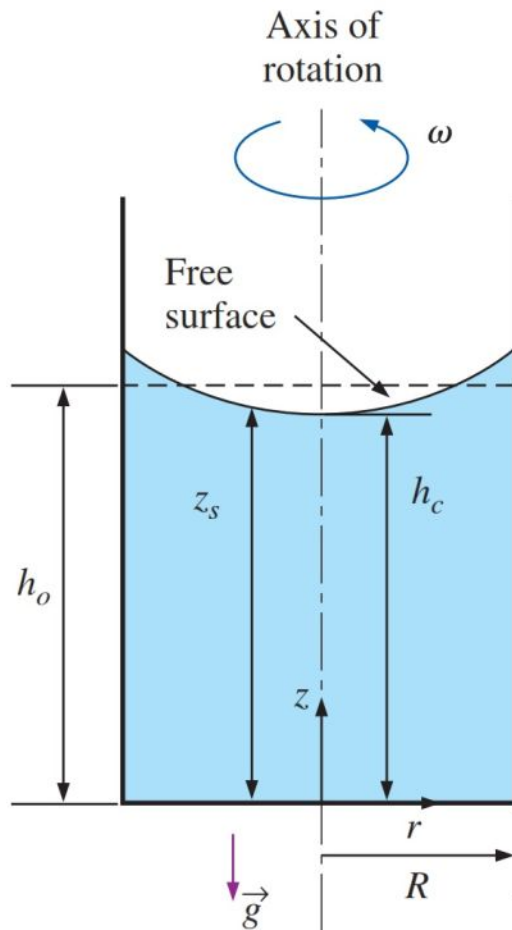


گرادیان فشار به موازات برآیند شتاب وارد بر سیال جهتگیری می نماید. حال سطح آزاد سیال به نحوی سمت گیری می کند که بر گرادیان فشار عمود شود

سیال چرخان در دستگاه مختصات استوانه ای

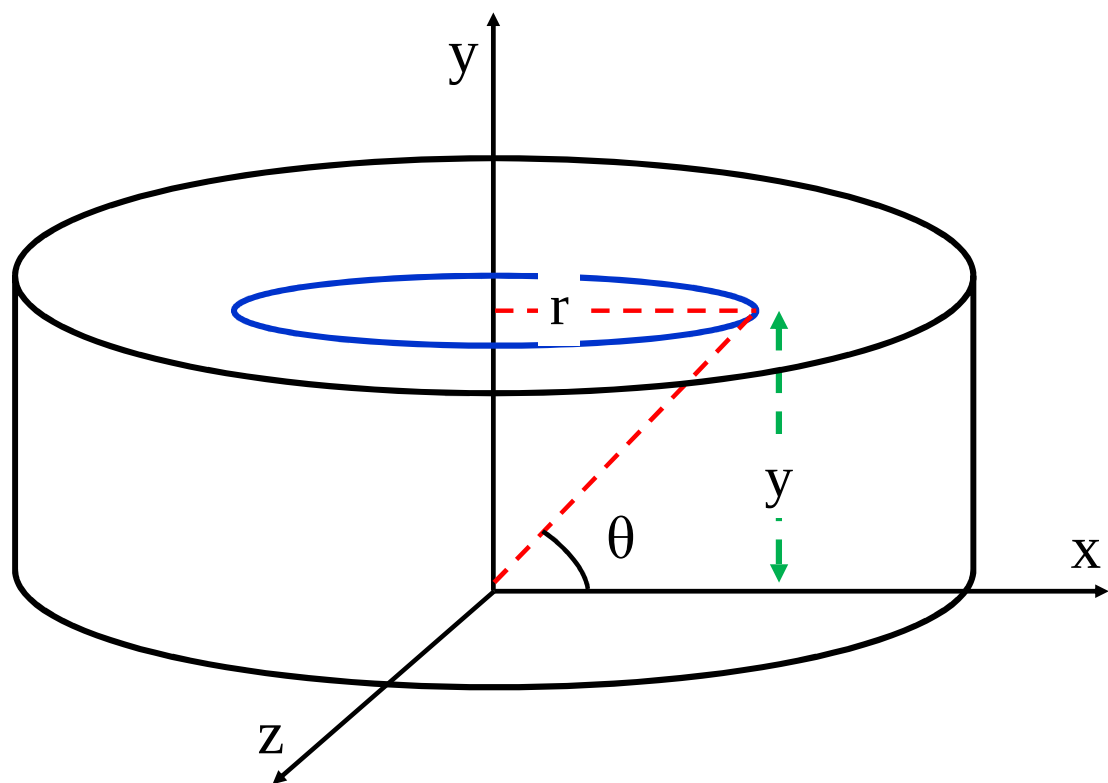
بدلیل چرخش سیال به سمت لبه ها رانده می شود

در حالت تعادل تنش برشی میان لایه های مختلف سیال صفر است



$$\vec{\nabla} P = -\rho(\vec{a} + g \hat{j})$$

مولفه های دستگاه مختصات استوانه ای
(r, θ, y)



$$\vec{\nabla} P = -\rho(\vec{a} + g \hat{j})$$

$$\vec{\nabla} P \propto -\rho g \hat{j} \quad \text{سهم ناشی از اختلاف ارتفاع}$$

$$\vec{\nabla} P \propto -\rho \vec{a} \quad \text{سهم ناشی از شتاب جانب مرکز}$$

ذرات سیال با سرعت زاویه ای ω حول محور ظرف در فاصله r از محور در حال دوران هستند.

$$a_r = -r\omega^2$$

$$\vec{\nabla} P = -\rho(\vec{a} + g \hat{j})$$

$$\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial r} = \rho r \omega^2 \\ \frac{\partial P}{\partial \theta} = 0 \\ \frac{\partial P}{\partial y} = -\rho g \end{cases}$$

تغییرات فشار ناشی از تغییر فاصله از محور ظرف و نیز تغییر ارتفاع در آن است

$$dP = \frac{\partial P}{\partial r} dr + \frac{\partial P}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial P}{\partial y} dy = \rho r \omega^2 dr - \rho g dy$$

$$dP = \rho r \omega^2 dr - \rho g dy$$

برای سطوح هم فشار $dP = 0$

$$\rho r \omega^2 dr - \rho g dy = 0 \rightarrow \rho g dy = \rho r \omega^2 dr$$


$$y(r) = \frac{\omega^2}{2g} r^2 + c_i$$

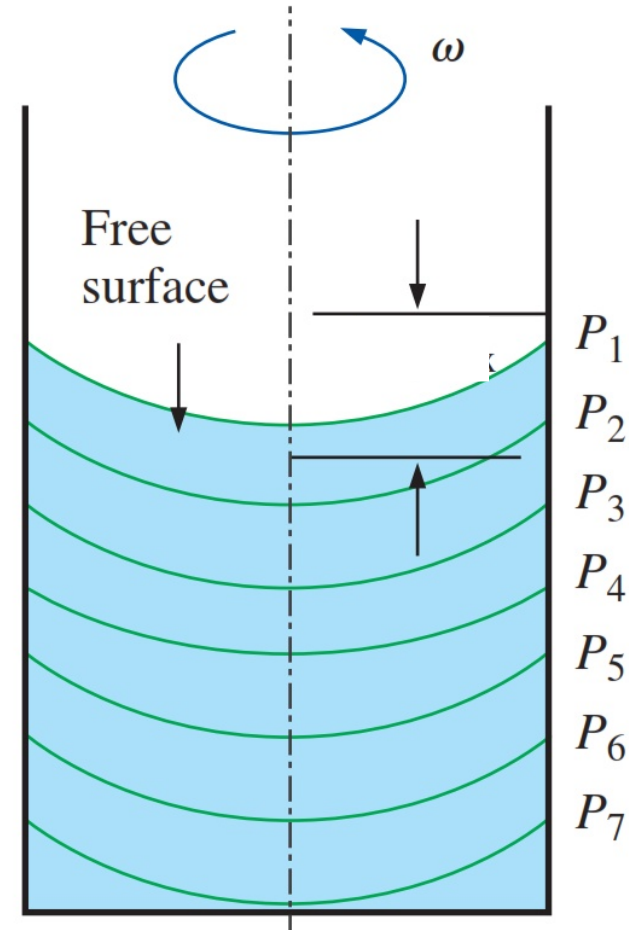
معادله سطوح همفشار، معادله یک سهمی است که همه نقاط روی آن دارای فشار یکسانی هستند
از جمله آنها سطح آزاد سیال می باشد

سطوح فشار ثابت

$$y(r) = \frac{\omega^2}{2g} r^2 + c_i$$

فشار روی سطوح هم فشار مختلف متفاوت است و
لذا مقدار c_i روی هر یک مقدار متفاوتی دارد

? = مقدار c_i روی سطح آزاد سیال در حال دوران



$$y(r) = \frac{\omega^2}{2g} r^2 + c_i$$

روی سطح آزاد و
نقطه محوری

$$y_s(r) = y_s(r = 0)$$

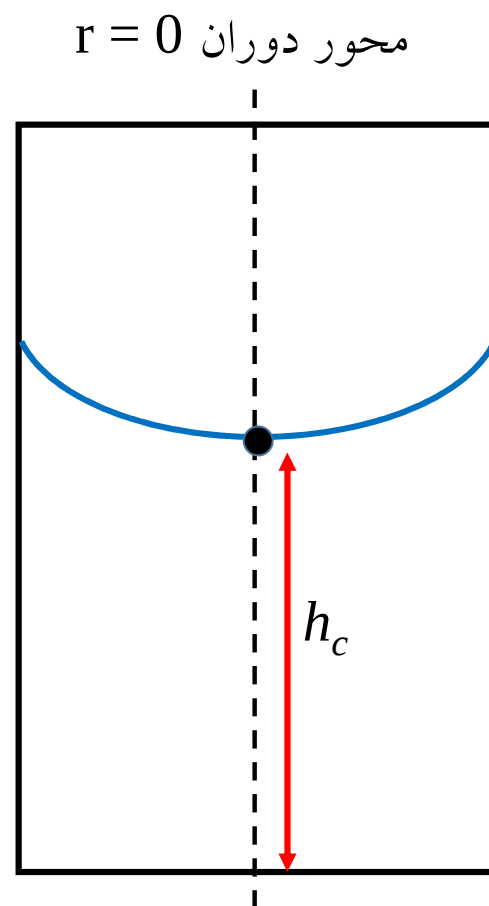
$$y_s(r = 0) = c_i$$

$$h_c = c_i$$

مقدار c_i روی سطح آزاد سیال در حال دوران برابر است با
ارتفاع سطح سیال در نقطه محوری آن ($r = 0$) تا کف ظرف

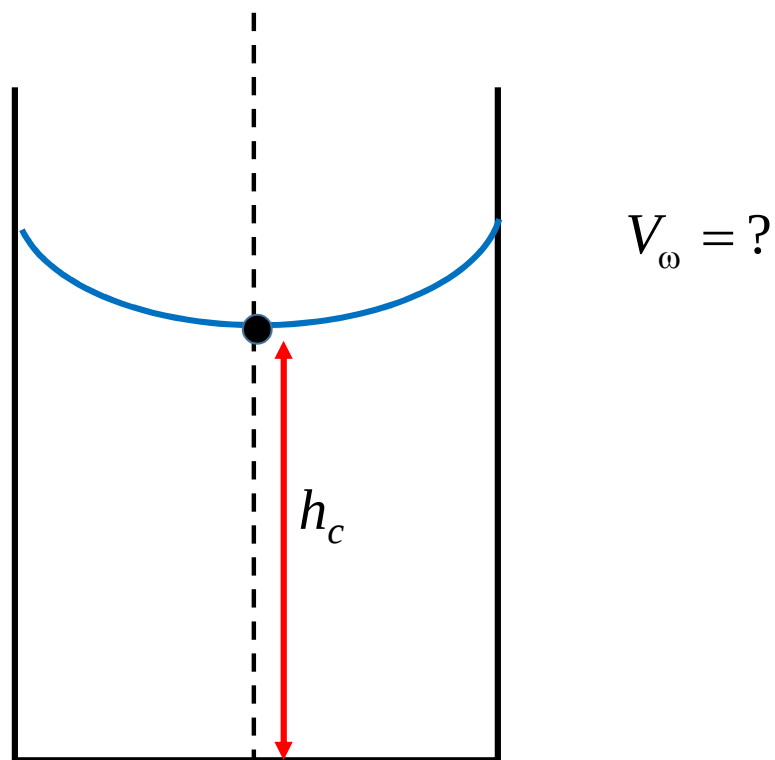
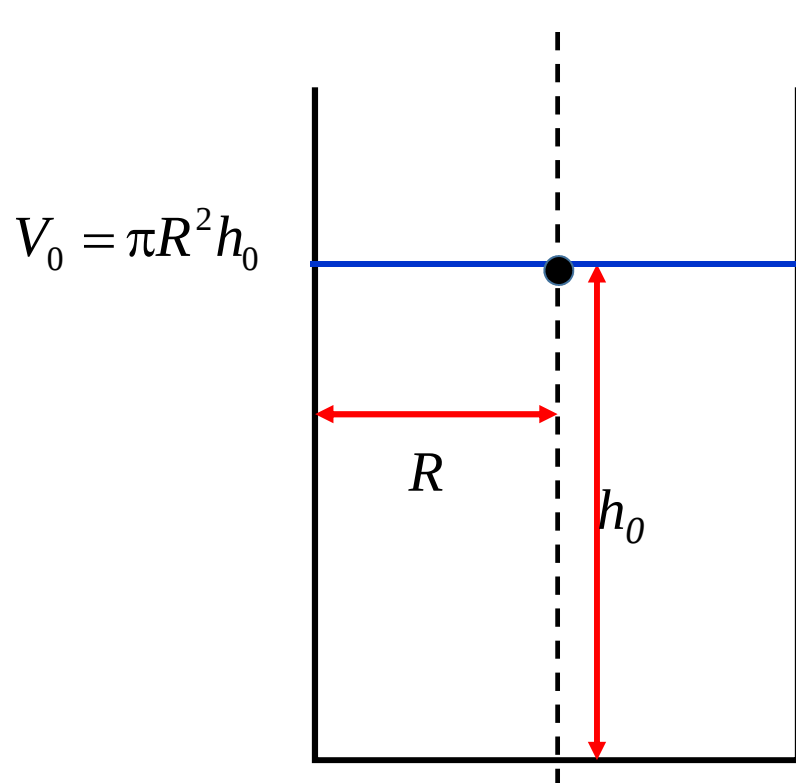
معادله سطح آزاد

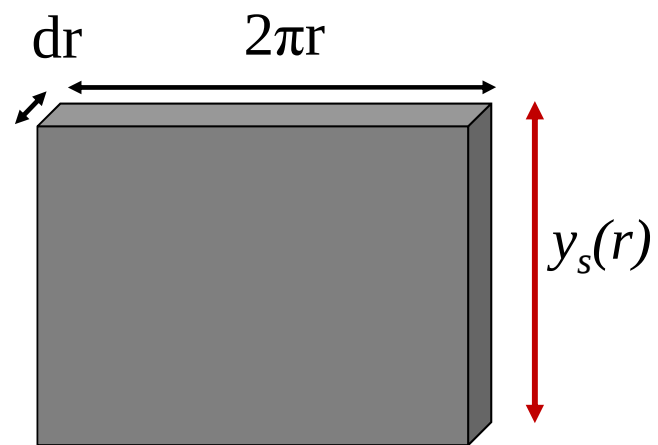
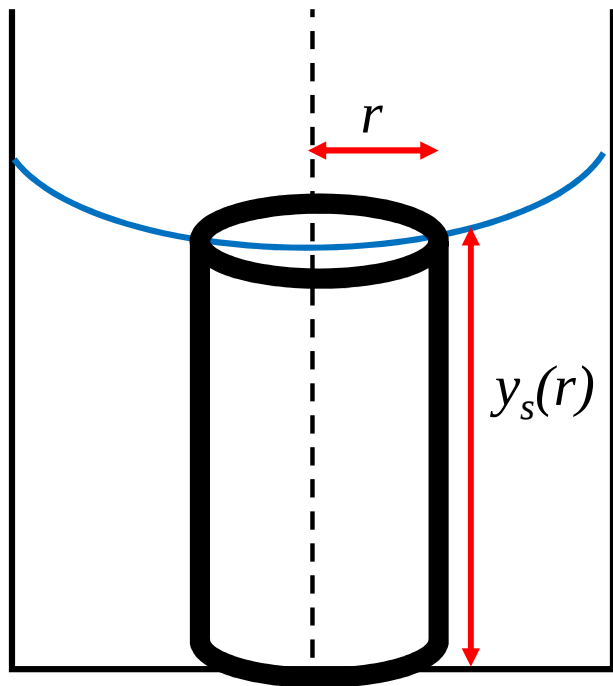
$$y_s(r) = \frac{\omega^2}{2g} r^2 + h_c$$



بدست آوردن h_c

روش: ثابت ماندن حجم سیال ساکن و در حال چرخش





$$dV_{\omega} = 2\pi r dr y_s(r)$$

$$dV_{\omega} = 2\pi \, r dr \, y_s(r)$$

$$V_{\omega} = 2\pi \int_{r=0}^{r=R} r dr \, y_s(r) = 2\pi \int_{r=0}^{r=R} r dr \, y_s(r) \quad , \quad y_s(r) = \frac{\omega^2}{2g} r^2 + h_c$$

$$V_{\omega} = 2\pi \int_{r=0}^{r=R} r dr \left(\frac{\omega^2}{2g} r^2 + h_c \right) = 2\pi \left[\frac{\omega^2}{2g} \times \frac{R^4}{4} + \frac{1}{2} h_c R^2 \right]$$

$$V_{\omega} = \pi R^2 \left[\frac{\omega^2 R^2}{4g} + h_c \right]$$

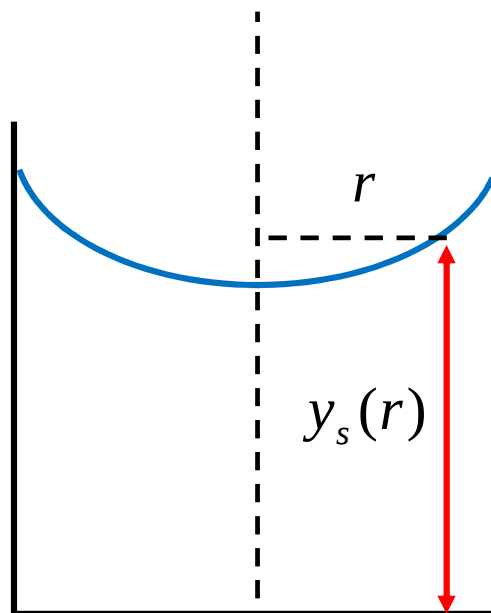
$$V_0 = V_{\omega} \quad \rightarrow \quad \pi R^2 h_0 = \pi R^2 \left[\frac{\omega^2 R^2}{4g} + h_c \right]$$

$$h_c = h_0 - \frac{\omega^2 R^2}{4g}$$

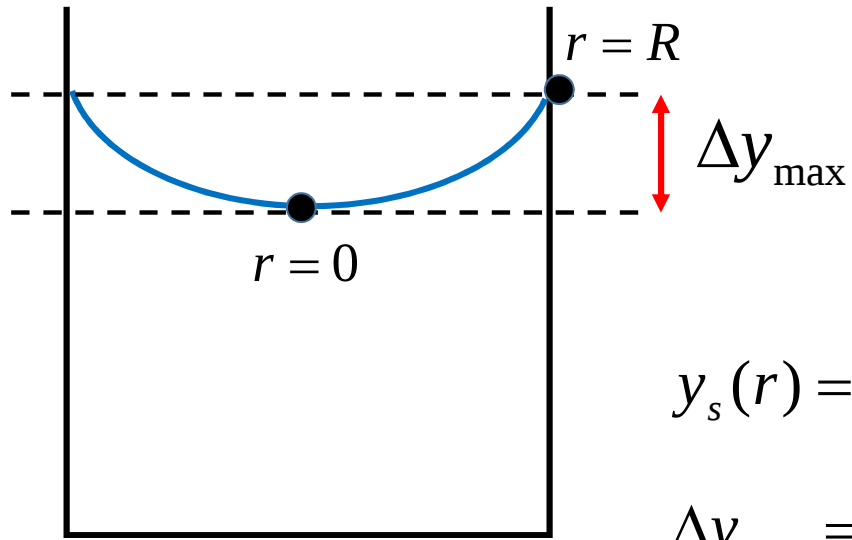
$$y_s(r) = \frac{\omega^2}{2g} r^2 + h_c \quad , \quad h_c = h_0 - \frac{\omega^2 R^2}{4g}$$



$$y_s(r) = h_0 - \frac{\omega^2}{4g} (R^2 - 2r^2) \quad \text{معادله سطح آزاد}$$



محاسبه اختلاف ارتفاع روی سطح آزاد



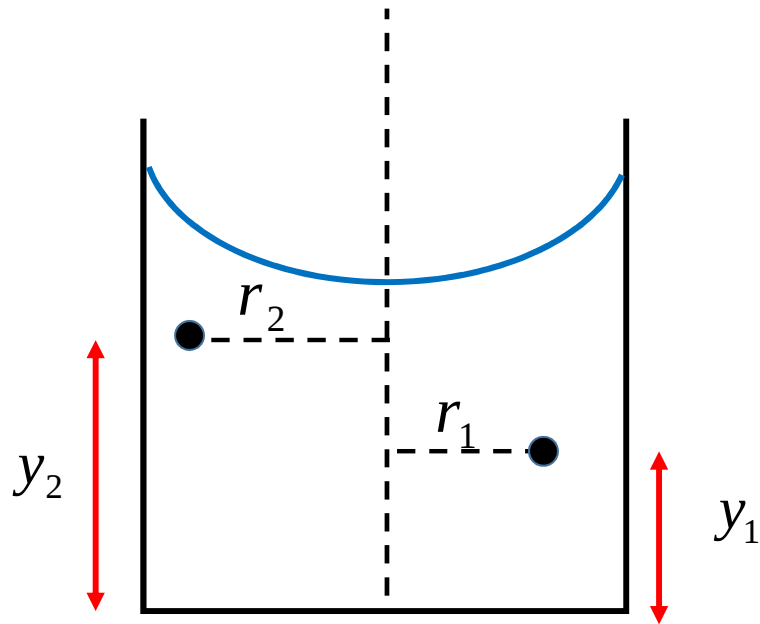
$$y_s(r) = h_0 - \frac{\omega^2}{4g}(R^2 - 2r^2)$$

$$\Delta y_{\max} = y_s(r = R) - y_s(r = 0) =$$

$$= \left[h_0 - \frac{\omega^2}{4g}(R^2 - 2R^2) \right] - \left[h_0 - \frac{\omega^2}{4g}(R^2 - 0) \right] =$$

$$\Delta y_{\max} = \frac{\omega^2}{2g} R^2$$

محاسبه اختلاف فشار بین دو نقطه از سیال

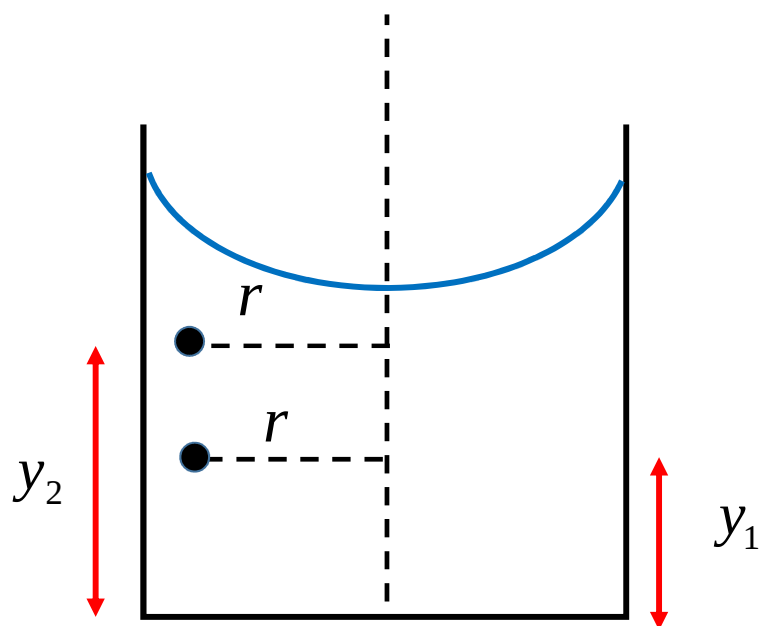


$$dP = \rho r \omega^2 dr - \rho g dy$$

$$\int_1^2 dP = \int_1^2 \rho r \omega^2 dr - \int_1^2 \rho g dy$$

$$P_2 - P_1 = \frac{\rho \omega^2}{2} (r_2^2 - r_1^2) - \rho g (y_2 - y_1)$$

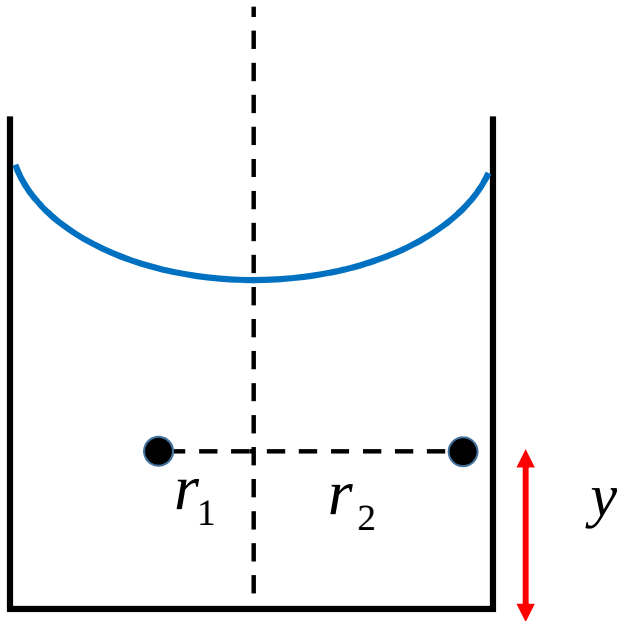
اختلاف فشار بین نقاط در شعاع یکسان



$$P_2 - P_1 = -\rho g(y_2 - y_1)$$

اختلاف فشار ناشی از اختلاف ارتفاع است یا
به عبارتی ناشی از وزن سیال بین این دو نقطه

اختلاف فشار بین نقاط در ارتفاع یکسان



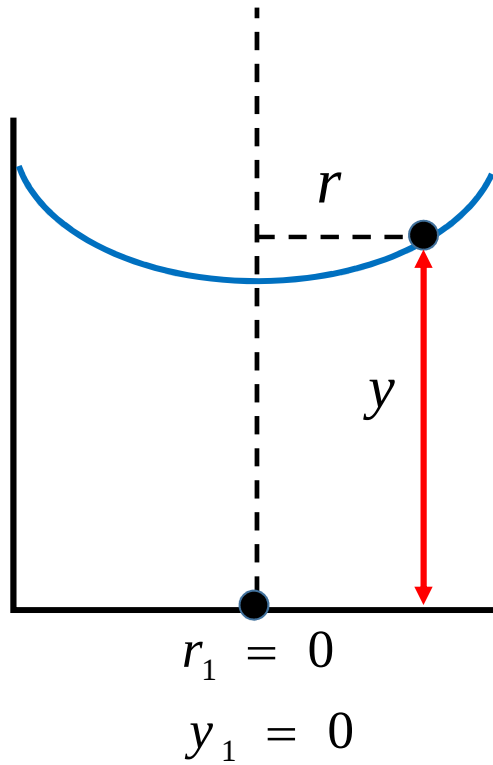
$$P_2 - P_1 = \frac{\rho \omega^2}{2} (r_2^2 - r_1^2)$$

اختلاف فشار ناشی از اختلاف شعاع

$$\Delta P = P(r = R) - P(r = 0) = \frac{\rho \omega^2}{2} R^2$$

اختلاف فشار بین نقطه روی محور
دروان و جداره ظرف در یک ارتفاع

اختلاف فشار در مبدا نسبت به سطح سیال



$$P_2 - P_1 = \frac{\rho \omega^2}{2} (r_2^2 - r_1^2) - \rho g (y_2 - y_1)$$

$$r_1 = 0 \quad , \quad y_1 = 0 \quad , \quad r_{2s} = r \quad , \quad y_{2s} = y$$

$$P_0 - P = \frac{\rho \omega^2}{2} r^2 - \rho g y$$



The 6-meter spinning liquid-mercury mirror of the Large Zenith Telescope located near Vancouver, British Columbia.