بسم الله الرحمن الرحيم

لختی دورانی

کمیتی است که تمایل جسم به حفظ حرکت دورانی را نشان می دهد.

لختی دورانی وابسته است به

- جرم جسم یا ذرات سیستم
- توزیع جرم حول محور دوران

$$I = \sum m_i r_i^2$$

لختی دورانی سیستم ذرات گسسته

جمع روی همه ذرات سیستم

$$I = \int r^2 dm$$

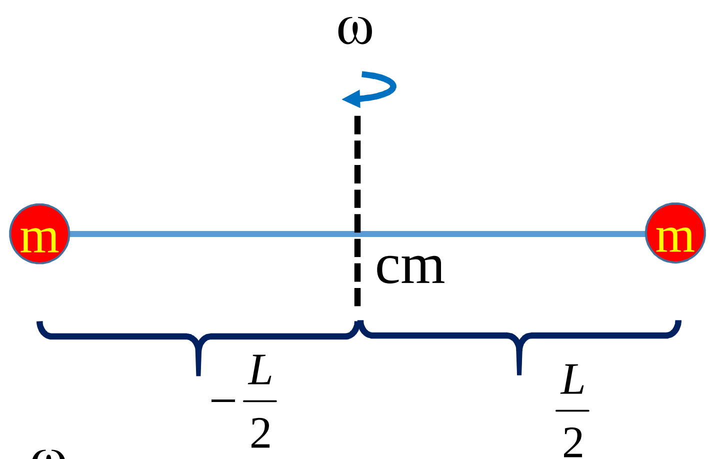
لختی دورانی جسم صلب

انتگرال روی کل جسم (حدود جسم)

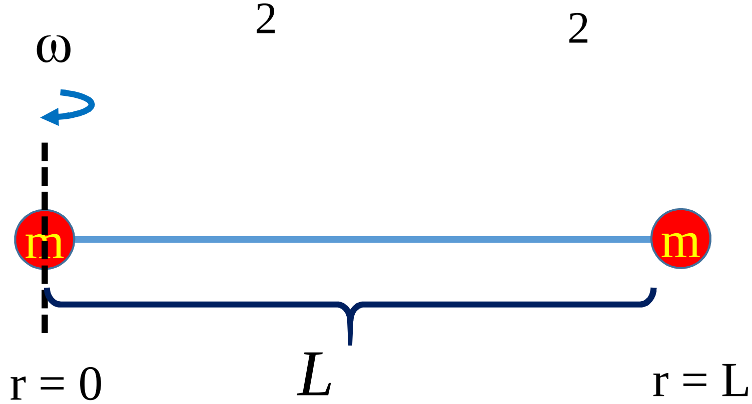
مثال: دو جسم به جرم های m توسط میله بدون جرمی به هم متصل شده اند. مطلوبست لختی دورانی:

الف) حول محور گذرنده از مرکز جرم

ب) حول محور گذرنده از یکی از اجسام



$$I = \sum m_i r_i^2 = m(\frac{L}{2})^2 + m(\frac{L}{2})^2 = \frac{1}{2} mL^2$$

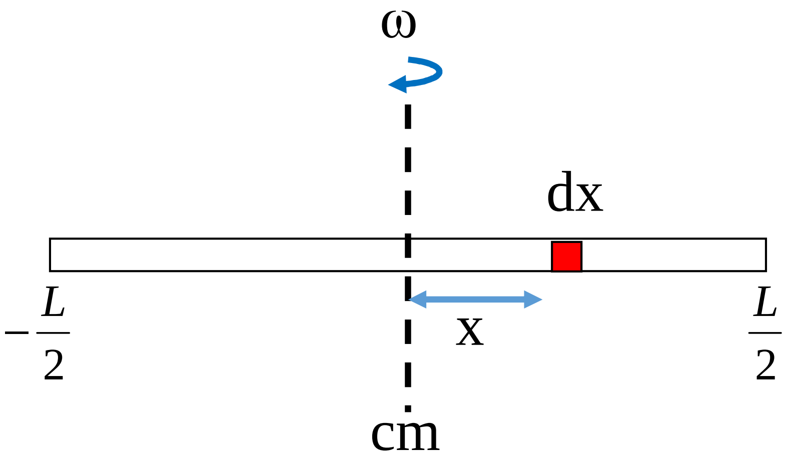


$$I = \sum m_i r_i^2 = m \times 0 + m(L)^2 = mL^2$$

مثال: میله ای به طول L و دارای جرم یکنواخت m داریم. مطلوبست لختی دورانی:

الف) حول محور گذرنده از مرکز جرم

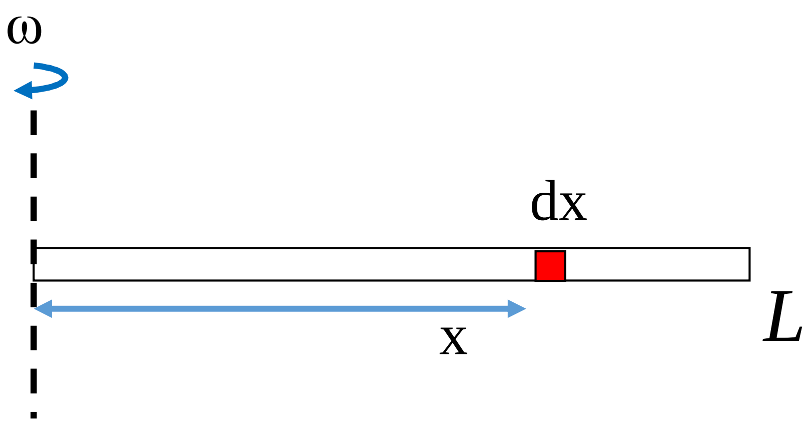
ب) حول محور گذرنده از یکی انتهای آن



$$dm = \lambda dx$$

$$I = \int_{-\frac{L}{2}}^{+\frac{L}{2}} x^2 dm = \int_{-\frac{L}{2}}^{+\frac{L}{2}} x^2 \lambda dx = \lambda \int_{-\frac{L}{2}}^{+\frac{L}{2}} x^2 dx = \lambda \times \frac{1}{3} x^3 \Big|_{-\frac{L}{2}}^{+\frac{L}{2}} = \frac{\lambda}{3}[(\frac{L}{2})^3 - (-\frac{L}{2})^3] = \frac{1}{12}\lambda L^3$$

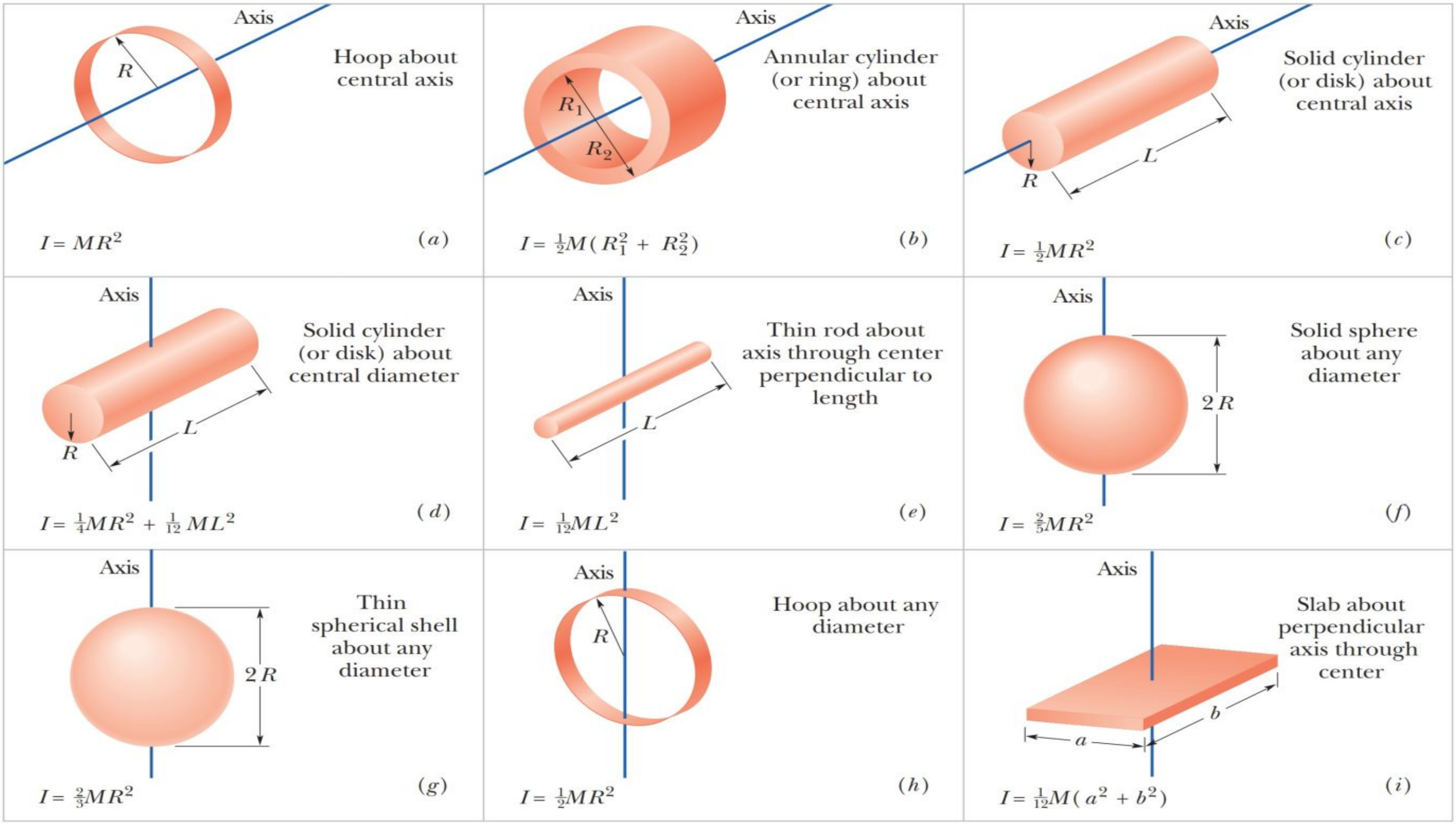
$$I = \frac{1}{12} \times \frac{m}{L} \times L^3 \qquad \rightarrow \qquad \boxed{I = \frac{1}{12} mL^2}$$



$$I = \int_0^L x^2 dm = \int_0^L x^2 \lambda dx = \lambda \int_0^L x^2 dx = \lambda \times \frac{1}{3} x^3 \Big|_0^L = \frac{\lambda}{3}[(L)^3 - 0] = \frac{1}{3}\lambda L^3$$

$$I = \frac{1}{3} \times \frac{m}{L} \times L^3 \quad \rightarrow \quad \boxed{I = \frac{1}{3} m L^2}$$

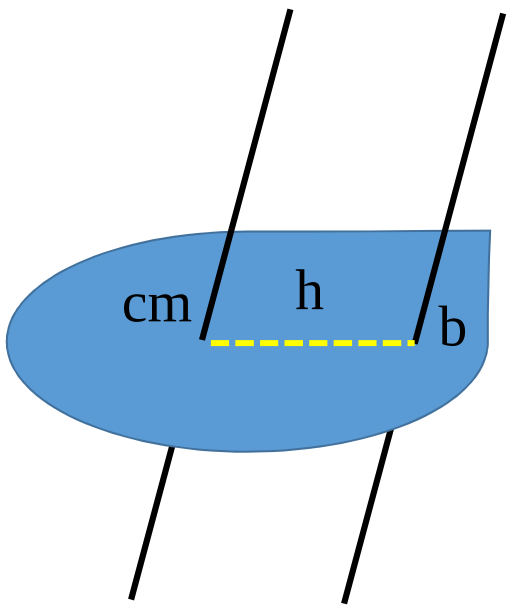
Table 10-2 Some Rotational Inertias



قضیه محورهای موازی:

اگر لختی دورانی حول محور گذرنده از مرکز جرم مشخص باشد (I_{cm})، آنگاه اگر بخواهیم لختی دورانی را حول محور دیگری موازی با محور گذرنده از مرکز جرم پیدا کنیم از رابطه زیر استفاده می شود:

$$I_b = I_{cm} + mh^2$$



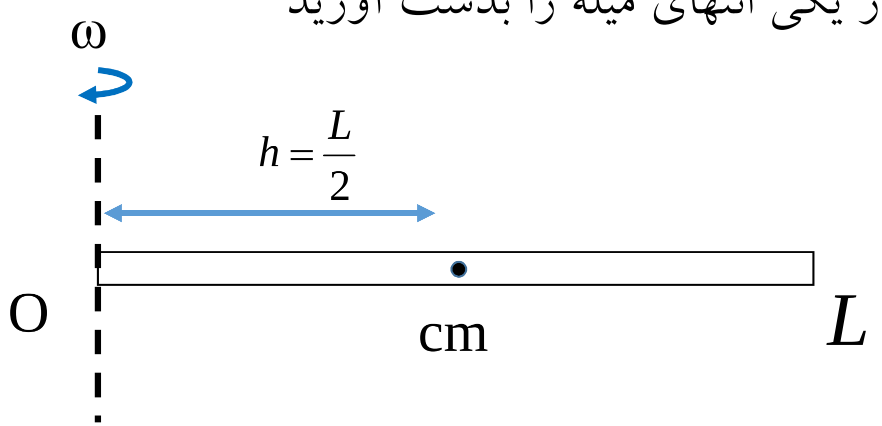
I_{cm} لختی دورانی حول محور گذرنده از مرکز جرم

I_b لختی دورانی حول محور گذرنده از نقطه b

m جرم کل جسم

h فاصله بین مرکز جرم تا نقطه b

مثال: برای میله ای به طول L و جرم یکنواخت m لختی دورانی حول محور گذرنده از مرکز جرم به صورت $\frac{1}{12}mL^2$ است. لختی دورانی حول محور گذرنده از یکی انتهای میله را بدست آورید

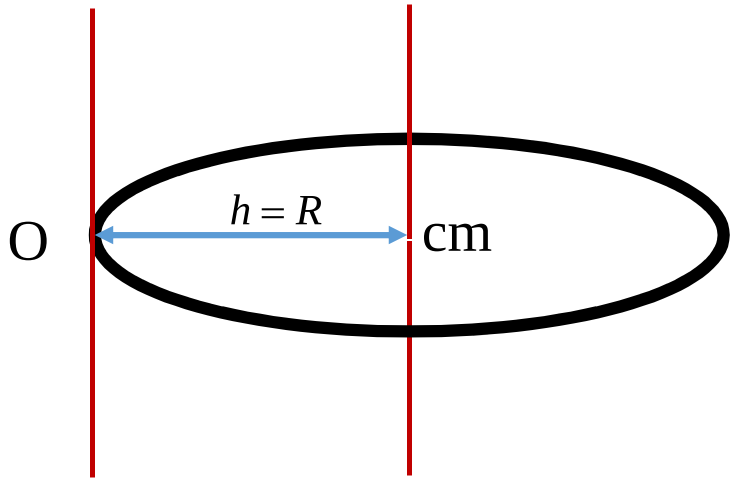


$$I_O = I_{cm} + mh^2$$

$$I_O = \frac{1}{12}mL^2 + m(\frac{L}{2})^2$$

$$I_O = \frac{1}{3}mL^2$$

مثال: برای حلقه ای به جرم m و شعاع R لختی دورانی حول محور گذرنده از مرکز جرم و عمود بر سطح حلقه به صورت mR^2 است. لختی دورانی را حول محور گذرنده از روی محیط حلقه و عمود بر سطح حلقه بدست آورید

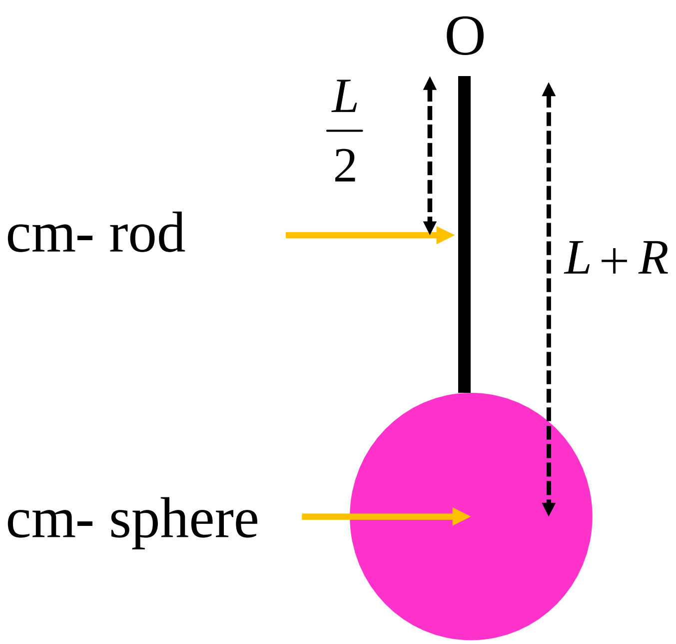


$$I_O = I_{cm} + mh^2$$

$$I_O = mR^2 + mR^2$$

$$I_O = 2mR^2$$

مثال: کره ای توپر به جرم m و شعاع R به میله ای با همان جرم و به طول L متصل شده است بگونه ای که می توانند حول محور گذرنده از انتهای میله دوران نماید. لختی دورانی را حول این نقطه بدست آورید



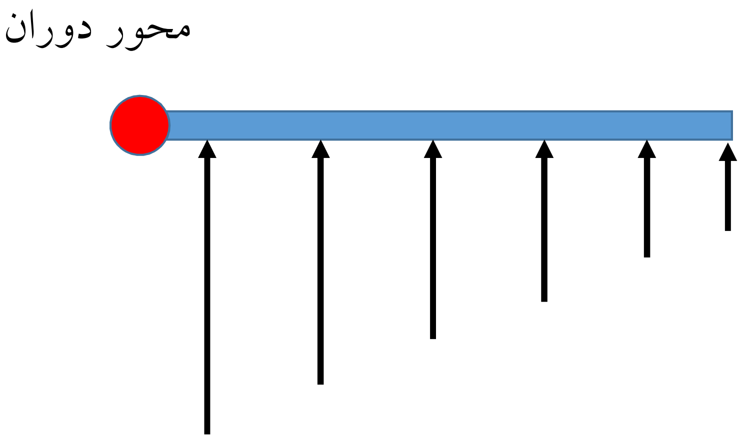
$$I_O = I_{\text{sphere}} + I_{rod}$$

$$I_O = [I_{\text{cm-sphere}} + m(L+R)^2] + [I_{\text{cm-}rod} + m(\frac{L}{2})^2]$$

$$I_O = [\frac{2}{5}mR^2 + m(L+R)^2] + [\frac{1}{12}mL^2 + m(\frac{L}{2})^2]$$

دینامیک دورانی جسم صلب (آشنایی با گشتاور نیرو)

بررسی دوران یک میله حول محور گذرنده از انتهای آن)

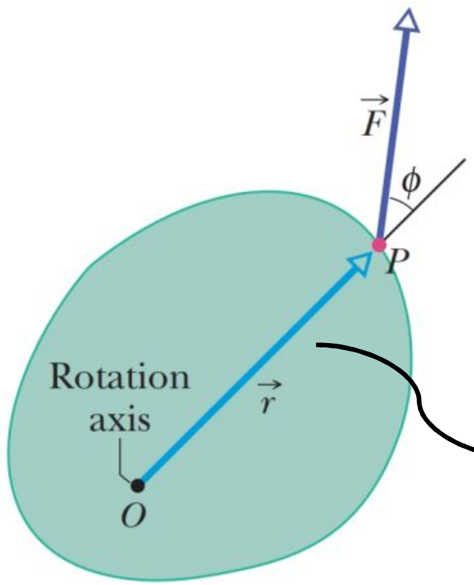


عامل دوران متناسب با **نیرو**

بدون اعمال نیرو هیچ چرخشی نداریم

عامل دوران متناسب با **بازوی گشتاور نیرو**

عامل دوران متناسب با **سینوس زاویه** ای که نیرو با امتداد بازوی گشتاور نیرو می سازد



بازوی گشتاور نیرو

$$\tau = rF\sin\phi$$

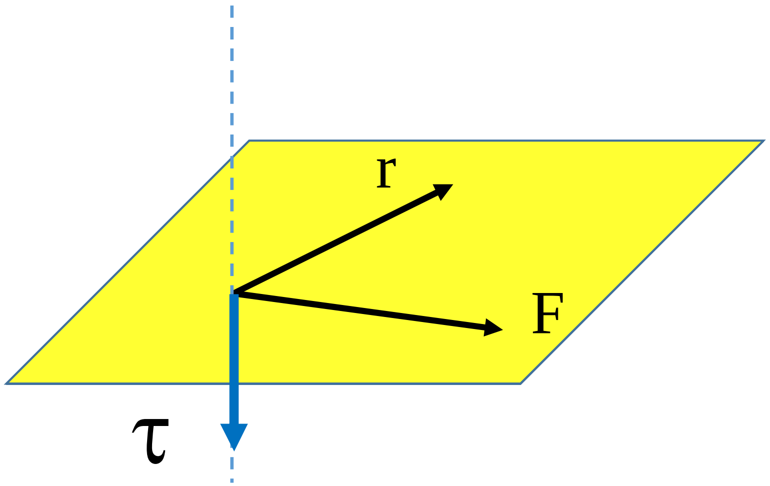
عامل دوران

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$$

برداری که محور دوران را به نقطه اثر نیرو وصل می نماید

نکات:

۱- بردار گشتاور نیرو



اندازه: $\tau = rF\sin\phi$

راستا: عمود بر صفحه متشکل از دو بردار r و F

جهت: قاعده دست راست

۲- اگر گشتاور نیروی وارد بر جسم مشخص باشد می توان جهت چرخش جسم را به صورت زیر مشخص نمود:

اگر جهت انگشت شست دست راست در جهت بردار گشتاور باشد جهت بسته شدن جهت چرخش را نشان می دهد

چرخش پادساعتگرد: $\tau > 0$

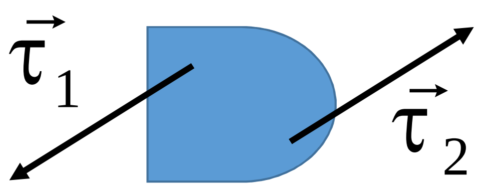
چرخش ساعتگرد: $\tau < 0$

۳- اگر نیروهای مختلفی به جسمی وارد می گردد. گشتاور کل حول یک محور دوران برابر با جمع برداری گشتاور آن نیروها می باشد

$$\sum \vec{\tau} = \vec{\tau}_1 + \vec{\tau}_2 + \cdots$$

٤- در حالت تعادل جسم نمی چرخد (شرط تعادل):

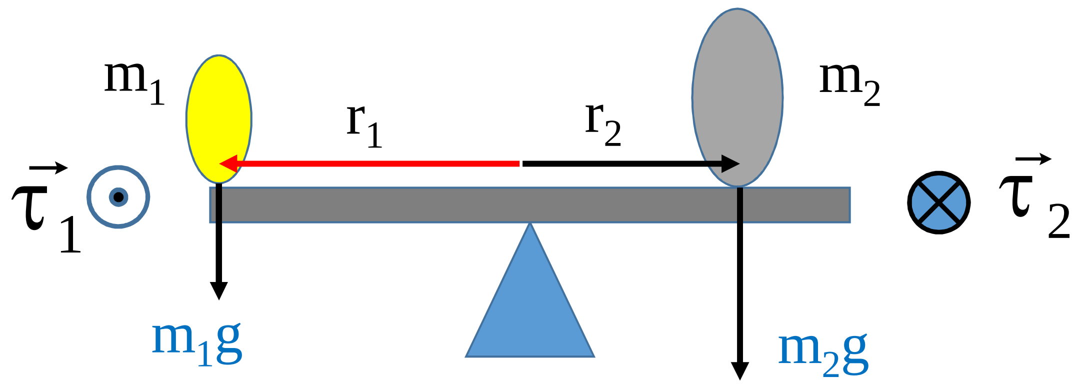
برآیند گشتاور نیروهای وارد بر جسم صفر می باشد



$$\sum \vec{\tau} = \vec{\tau}_2 + \vec{\tau}_1 = 0$$

مثال: الاکلنگ

کودکی به جرم 35 kg در انتهای الاکلنگی با بازوهای 1.5 m نشسته است. کودک دیگری به جرم 45 kg در کجای بازوی مقابل بنشیند تا الاکلنگ در تعادل باشد



در حالت تعادل $\vec{\tau}_1 = \vec{\tau}_2$

$$\tau_1 = \tau_2 \quad \rightarrow \quad r_1 m_1 g = r_2 m_2 g \quad \rightarrow \quad r_2 = \frac{m_2}{m_1} r_1$$

بازنویسی قانون دوم نیوتن برای حرکت دورانی

<u>عامل حرکت دورانی</u>

$$\sum \tau = I\alpha$$

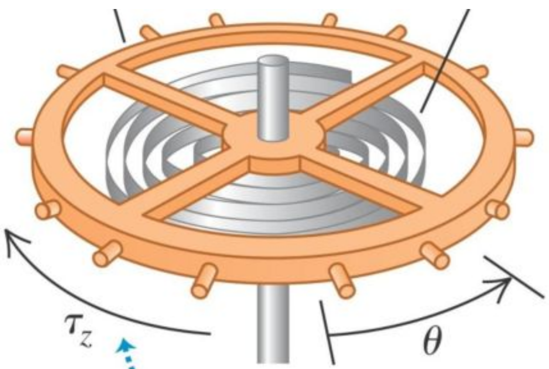
<u>عامل حرکت خطی</u>

$$\sum F = ma$$

اگر برآیند گشتاور نیروهای وارد بر جسمی مخالف صفر باشد آنگاه آن جسم یک حرکت دورانی شتاب دار را انجام خواهد داد

نوسانگر هماهنگ ساده زاویه ای

نوسانگر حول یک وضعیت تعادلی می چرخد



The spring torque τ_z opposes the angular displacement θ.

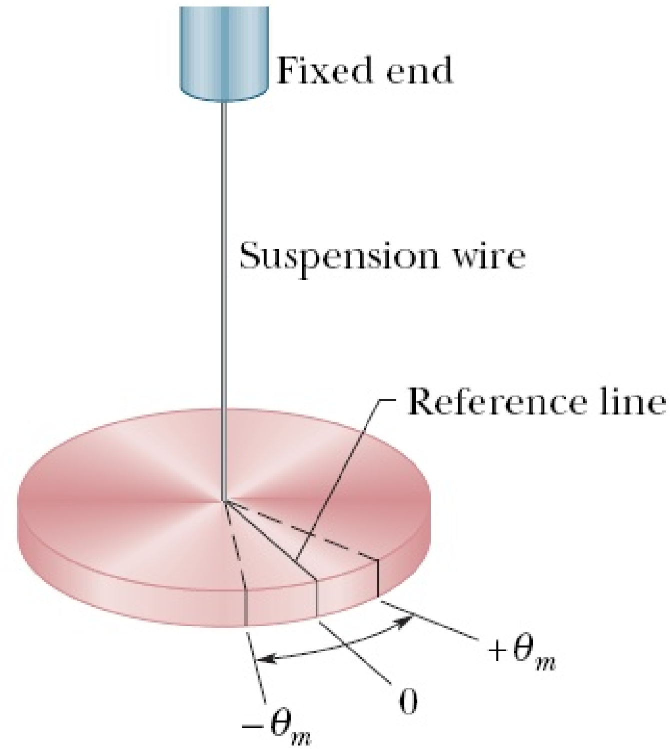
گشتاور (عامل دوران یا حرکت نوسانی)

ثابت پیچش

$$\tau = -D\theta$$

زاویه انحراف

Film 1



$$\left.\begin{aligned} \tau &= -D\theta \\ \tau &= I\alpha \\ \alpha &= \frac{d^2\theta}{dt^2} \end{aligned}\right\} \quad I\frac{d^2\theta}{dt^2} = -D\theta \quad \rightarrow \quad I\frac{d^2\theta}{dt^2} + D\theta = 0$$

$$\boxed{\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{D}{I}\theta = 0}$$

معادله دیفرانسیلی حاکم بر حرکت
نوسانی جسم در حال دوران

جواب پیشنهادی برای معادله: $\theta = \theta_m \cos(\omega t + \phi)$

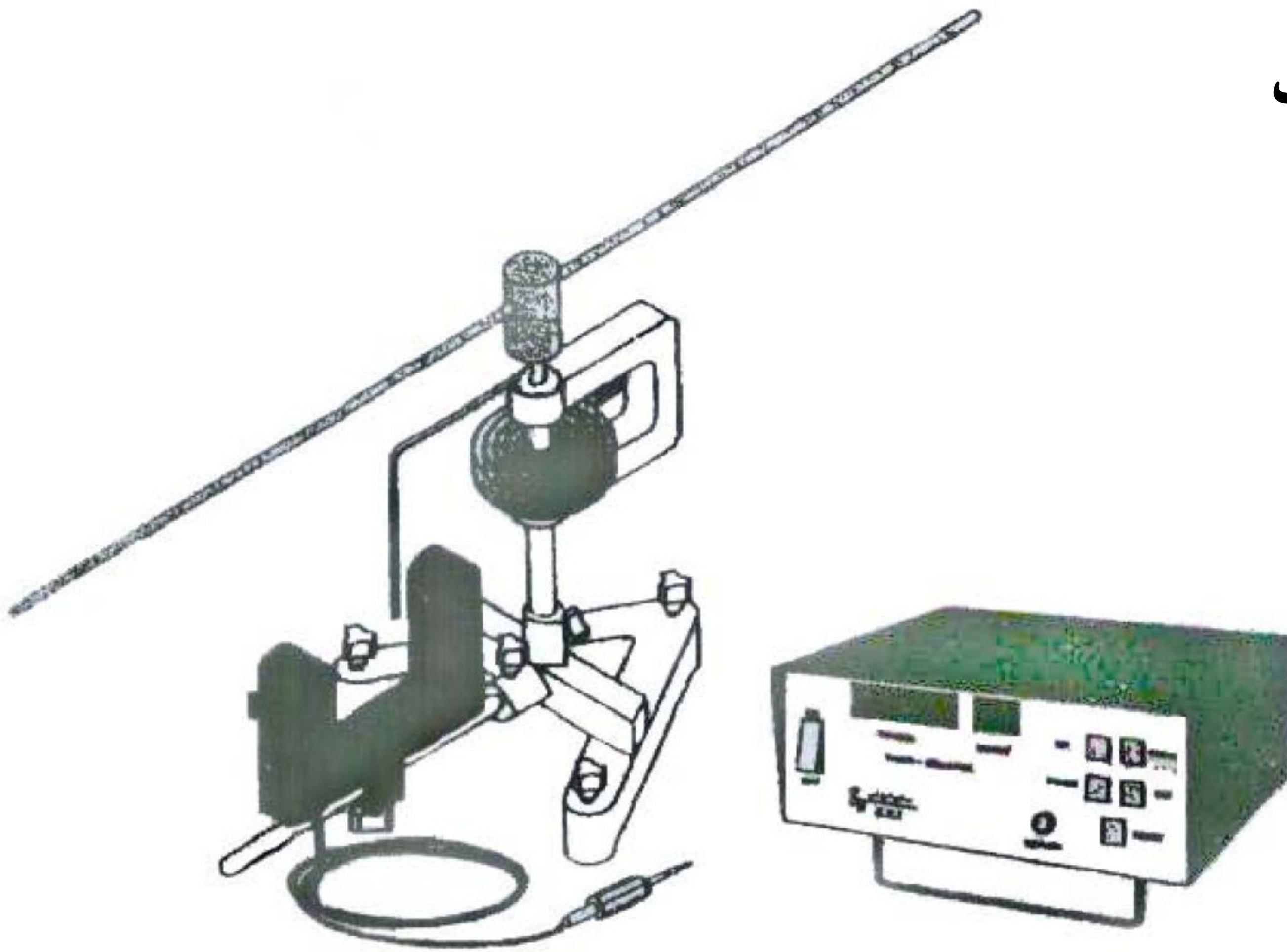
جواب در صورتی در معادله صدق می کند که

$$\omega^2 = \frac{D}{I} \quad \rightarrow \quad \omega = \sqrt{\frac{D}{I}}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{D}}$$

دستگاه آزمایش



بدست آوردن ثابت فنر پیچشی

۱- میله را از وسط روی دستگاه سوار کنید.

۲- میله را به اندازه‌ی زاویه‌ی مشخصی بچرخانید و به نقطه‌ی مشخصی از آن (مثلاً فاصله‌ی ۲۰ سانتی‌متر از مرکز میله) نیروسنج را متصل کنید و آن را در راستای عمود بر میله و به صورت افقی نگه دارید.

۳- نیروی نگه دارنده‌ی میله و همچنین فاصله‌ی محل اثر نیروسنج تا مرکز میله را به ازای آن زاویه اندازه‌گیری کنید.

۴- این کار را برای زوایای π و $\frac{\pi}{2}$ انجام دهید و با استفاده از روابط (۱) و (۲) مقدار ثابت فنر پیچشی را در هر حالت تعیین کرده و میانگین آنها را به عنوان ثابت فنر پیچشی در نظر بگیرید. توجه کنید که زوایا را برحسب رادیان در رابطه قرار دهید.

$$\begin{aligned} \tau &= rF \\ \tau &= D\theta \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad rF = D\theta \quad \to \quad D = \frac{rF}{\theta}$$

θ میزان چرخش فنر	$r(m)$ بازوی گشتاور	$F(N)$ نیرو	D ثابت فنر پیچشی	$\overline{D}$
π	0.2			
$\pi / 2$	0.2			

۵- با استفاده از سنسور و دستگاه شمارنده زمان ۴ نوسان آونگ پیچشی را به ازای حالت‌هایی که میله، کره، و یا دیسک بر روی دستگاه قرار داده می‌شود، اندازه‌گیری کنید. توجه کنید که در هر حالت ۳ بار زمان را اندازه‌گیری کرده و میانگین آن را به عنوان زمان ۴ نوسان در نظر بگیرید. با تقسیم این زمان بر تعداد نوسانات، دوره‌ی تناوب را به دست آورید.

۶- با توجه به دوره‌ی تناوب فنر پیچشی و مقداری که برای ثابت فنر پیچشی به دست آوردید، طبق رابطه‌ی (۶) لختی دورانی کره و دیسک را به دست آورید.

۷- با اندازه‌گیری جرم و شعاع کره و همچنین جرم و شعاع دیسک طبق روابط لختی دورانی مربوط به هر کدام از آنها که بر اساس رابطه‌ی (۴) به دست آمده است، لختی دورانی را در هر حالت به دست آورید و با مقداری که از طریق آزمایش (طبق رابطه‌ی (۶)) به دست می‌آورید مقایسه کنید.

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{D}} \quad \rightarrow \quad I_{\exp eriment} = \frac{D}{4\pi^2}T^2$$

جسم	$T(s)$ دوره تناوب	$I_{\exp}$	$R(m)$ یا $L(m)$	$M(kg)$	I_{Theory}	$\frac{\left\|I_{Theory} - I_{\exp}\right\|}{I_{Theory}} \times 100$
دیسک						
کره						

R = شعاع جسم ، L = طول جسم ، M = جرم جسم

۸- با استفاده از دیسک بزرگ قضیه‌ی محورهای موازی را تحقیق کنید. برای این منظور ابتدا لختی دورانی دیسک حول محور عبوری از مرکز جرم و دو محور دیگر را اندازه‌گیری کنید و سپس با تعیین فاصله‌ی محورها قضیه‌ی محورهای موازی را تحقیق کنید.

شماره داده	D	میله L=0.600m M=0.133Kgr	کره R=0.065m M=1.070Kgr	دیسک R=0.100m M=0.372Kgr
۱	$\theta1=\pi$ R1=0.100mm F1=2.6N $\theta2=\pi/2$ R1=0.100mm F1=1.1N	t=5.936s	t=4.021s	t=4.054s
۲	$\theta1=\pi$ R1=0.100mm F1=2.6N $\theta2=\pi/2$ R1=0.100mm F1=1.2N	t=5.932s	t=4.015s	t=4.045s
۳	$\theta1=\pi$ R1=0.100mm F1=2.5N $\theta2=\pi/2$ R1=0.100mm F1=1.1N	t=5.933s	t=4.018s	t=4.041s

شماره داده	D	میله L=0.600m M=0.133Kgr	کره R=0.065m M=1.070Kgr	دیسک R=0.100m M=0.372Kgr
۴	$\theta1=\pi$ R1=0.100mm F1=2.5N $\theta2=\pi/2$ R1=0.100mm F1=1.2N	t=5.935s	t=4.020s	t=4.043s
۵	$\theta1=\pi$ R1=0.100mm F1=2.6N $\theta2=\pi/2$ R1=0.100mm F1=1.1N	t=5.931s	t=4.016s	t=4.050s
۶	$\theta1=\pi$ R1=0.100mm F1=2.6N $\theta2=\pi/2$ R1=0.100mm F1=1.2N	t=5.934s	t=4.017s	t=4.049s