



فصل پنجم

نظریه میکروسکوپی دی الکتریک ها

هدف:

- ✦ می خواهیم ماهیت مولکولی دی الکتریک را بررسی کنیم
- ✦ میدان الکتریکی که مولکول را قطبیده می کند چگونه به میدان الکتریکی ماکروسکوپی مربوط می شود.
- ✦ درک رفتار خطی مشخصه رده بزرگی از اجسام دی الکتریک

۱.۵ میدان مولکولی در دی الکتریک

میدان مولکولی E_m

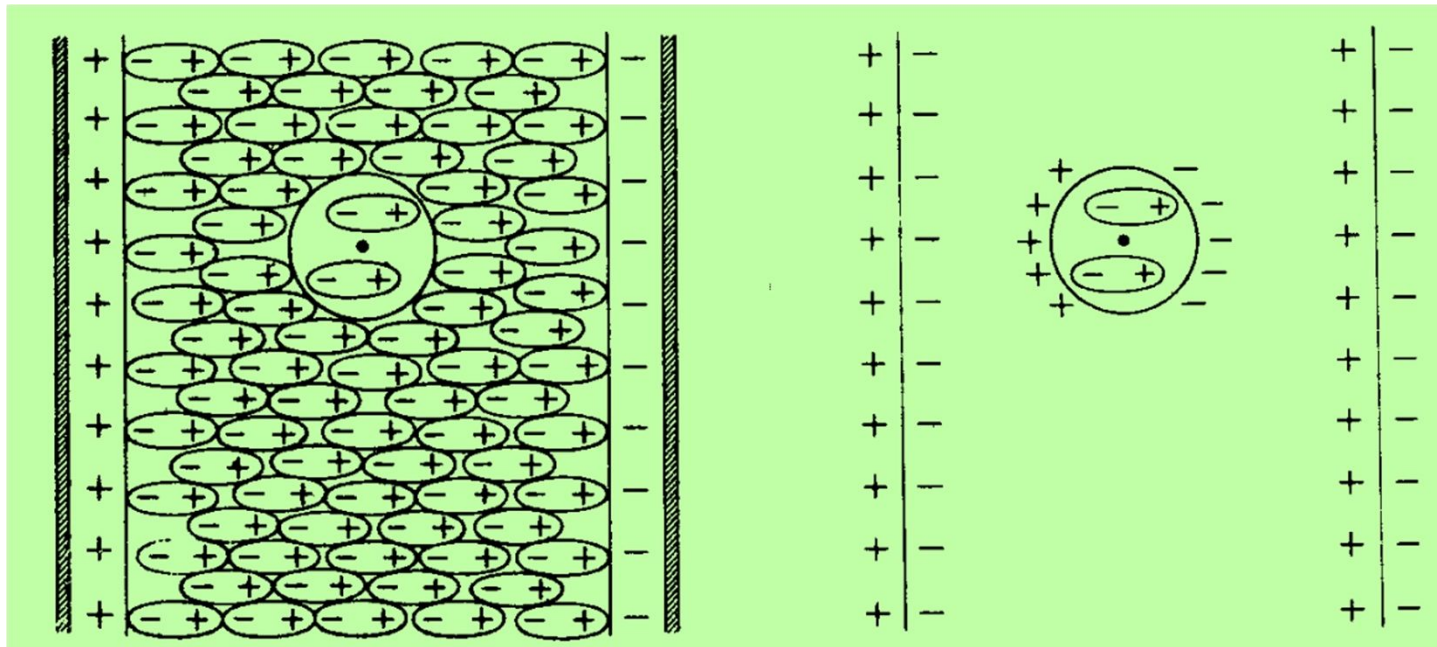
- ★ میدان الکتریکی که یک مولکول دی الکتریک را قطبیده می کند
- ★ میدان الکتریکی در محل هر یک از مولکولها در دی الکتریک
- ★ میدان از همه چشمه های خارجی و همه مولکولهای قطبیده در دی الکتریک
- ★ به استثنای میدان مولکولی که در نقطه مورد مطالعه قرار دارد،
- ★ لزومی ندارد E_m همان میدان الکتریکی ما کروسکوپی باشد

روش محاسبه میدان مولکولی

میدان مولکولی را می توان به روش زیر محاسبه کرد. قطعه کوچکی از جسم دی الکتریک را می بریم و حفره ای کروی در اطراف نقطه ای که میدان مولکولی را می خواهیم در آنجا محاسبه کنیم ایجاد می کنیم. آنچه را که از جسم دی الکتریک به جا می ماند به منزله محیطی پیوسته در نظر خواهیم گرفت، یعنی آن را از دید ما کروسکوپی بررسی می کنیم. حال دی الکتریک را مولکول به مولکول دوباره در حفره سر جایش قرار می دهیم، بجز مولکول مرکز حفره که در آنجا می خواهیم میدان مولکولی را پیدا کنیم. مولکولهایی را که بدین ترتیب سر جایشان می گذاریم نه به منزله یک محیط پیوسته، بلکه به صورت دو قطبیهای مجزا در نظر خواهیم گرفت. روشی که مختصراً به آن اشاره شد فقط در صورتی قابل توجیه است که نتیجه محاسبات آن به اندازه حفره بستگی نداشته باشد؛ خواهیم دید که تحت شرایط خاصی این امر در واقع صحت دارد.

فرض کنید قطعه نازکی از یک دی الکتریک را با قرار دادن آن در میدان الکتریکی یکنواخت موجود میان دو صفحه موازی با بارهای مخالف، نظیر شکل ۱.۵ الف، قطبیده می کنیم. همچنین فرض کنید قطبش در مقیاس ماکروسکوپی یکنواخت باشد (یعنی $\nabla \cdot \mathbf{P} = 0$) و موازی میدانی باشد که مولد آن است. آن قسمت از دی الکتریک را که در خارج حفره قرار دارد می توان بادستگاهی از بارهای قطبشی نظیر شکل ۱.۵ ب تعویض کرد،

(الف)



(ب)

میدان الکتریکی در مرکز حفره

$$\mathbf{E}_m = \mathbf{E}_x + \mathbf{E}_d + \mathbf{E}_s + \mathbf{E}'$$

\mathbf{E}_x میدان الکتریکی اصلی مربوط به صفحات موازی باردار،

\mathbf{E}_d میدان واقطنبندۀ مربوط به بار قطبشی واقع بر سطوح خارجی دی الکتریک،

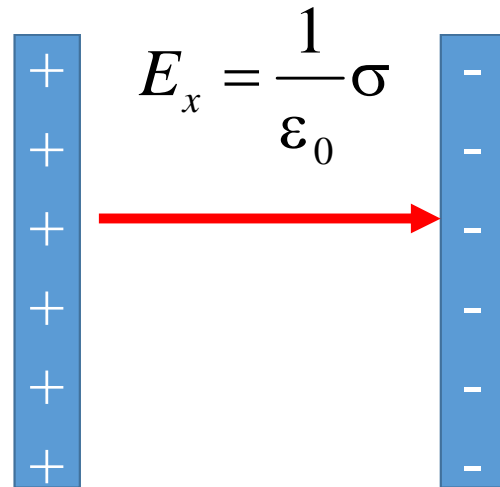
\mathbf{E}_s مربوط به بار قطبشی واقع بر سطح S حفره،

\mathbf{E}' مربوط به تمامی دو قطبیهای داخل حفره است.

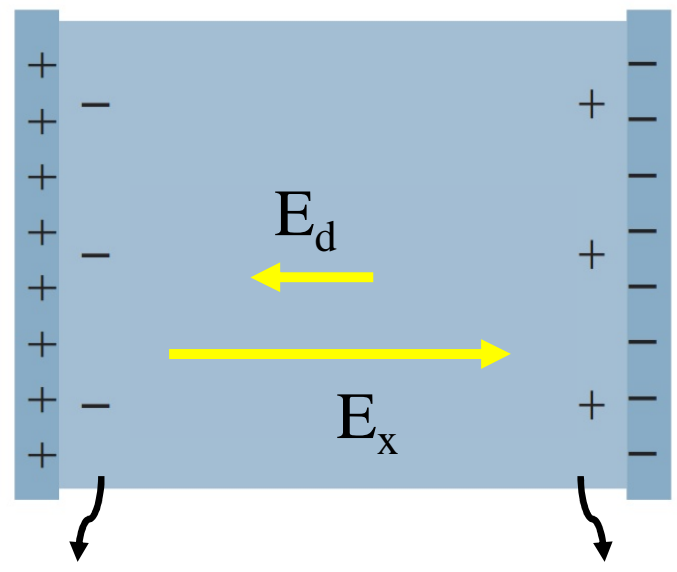
E_x

1

اگر ابعاد صفحات در مقایسه با فاصلهٔ میان آنها بزرگ باشد،



میدان واقطنده \mathbf{E}_d



بار سطحی قطبشی + بار سطحی قطبشی -

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

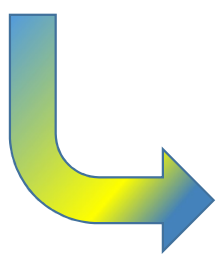
$$\sigma_p = P_n = \pm P$$

$$\mathbf{E}_d = -\frac{1}{\epsilon_0} \mathbf{P}$$

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$$

در خلأ و درست نزدیک به قطعه دی الکتریک

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E}_x$$

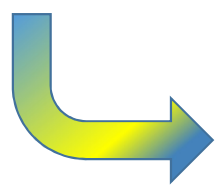


$$\epsilon_0 \mathbf{E}_x = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$$



$$\vec{E} = \vec{E}_x - \frac{\vec{P}}{\epsilon_0}$$

$$\mathbf{E}_m = \underbrace{\mathbf{E}_x + \mathbf{E}_d + \mathbf{E}_s}_{\mathbf{E}} + \mathbf{E}'$$



$$\mathbf{E}_m = \mathbf{E} + \mathbf{E}_s + \mathbf{E}'$$

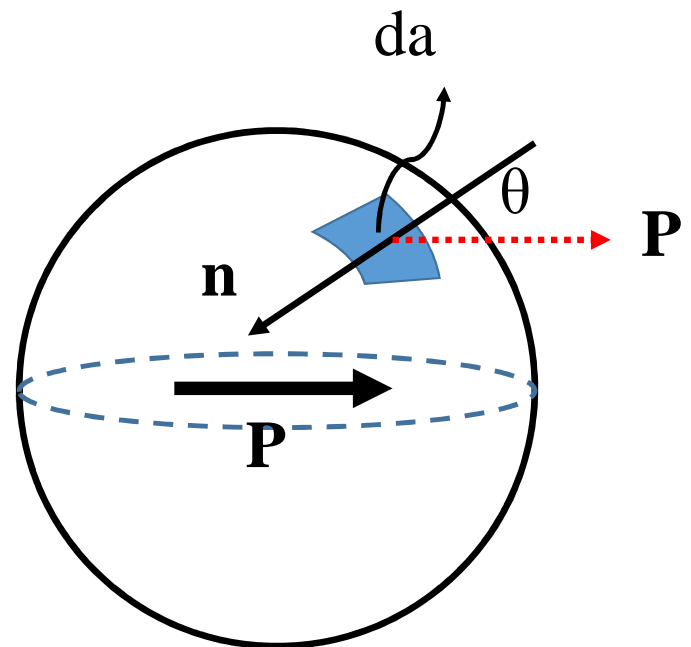
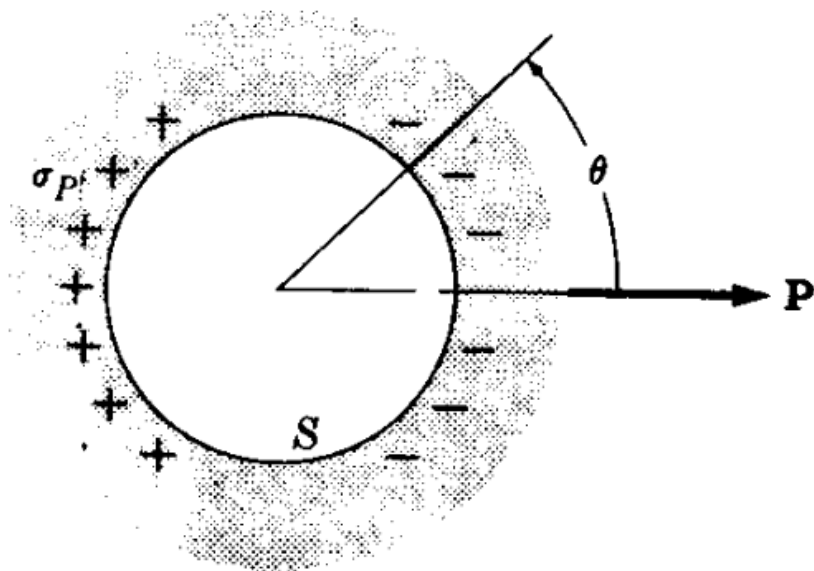
میدان ماکروسکوپیک
درون دی الکتریک



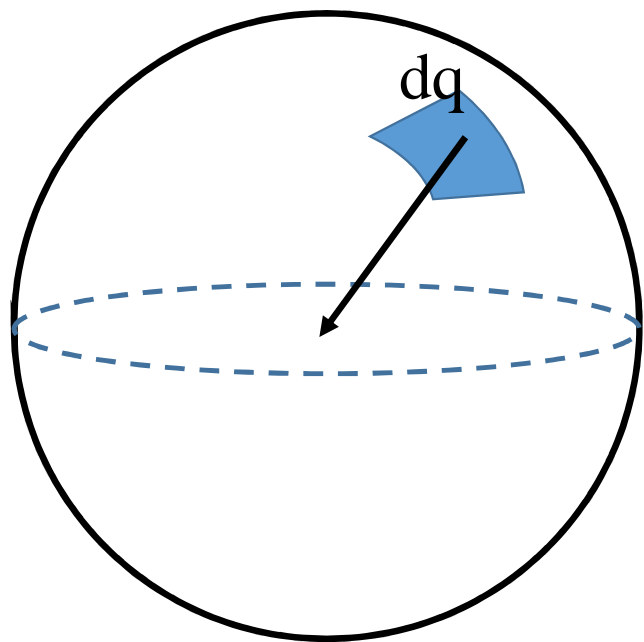
میدان \mathbf{E}_p از چگالی بار قطبشی

میدان الکتریکی ناشی از یک کره قطبیده با قطبش \mathbf{P} در مرکز آن

$$\sigma_D = P_n$$



$$dq = \sigma da, \quad \sigma = -P \cos\theta$$



$$dE = \frac{\sigma da \vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$

$$d\mathbf{E}_s = \frac{(-P \cos \theta)}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{r} da$$

$$da = r^2 \sin \theta d\theta d\phi$$

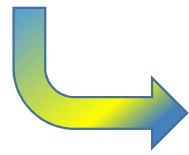
از روی تقارن به وضوح نتیجه می شود که در انتگرال بر روی تمامی سطح فقط آن مؤلفه از $d\mathbf{E}_s$ که در امتداد \mathbf{P} قرار دارد سهم خواهد بود.

$$\mathbf{E}_s = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \mathbf{P} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \cos^2 \theta \sin \theta d\theta \quad \rightarrow \quad \mathbf{E}_s = \frac{1}{3\epsilon_0} \mathbf{P}$$

بالاخره به جمله آخر معادله (۴.۵) می‌رسیم که به دو قطبیه‌های الکتریکی داخل سطح S مربوط می‌شود. چند مورد مهم وجود دارد که در آنها این جمله صفر می‌شود. اگر تعداد دو قطبیه‌ها در حفره زیاد، و سمتگیری آنها موازی با یکدیگر و لی توزیع آنها در فضا کتره‌ای باشد، و هیچ همبستگی میان مکان دو قطبیه‌ها وجود نداشته باشد، در آن صورت $\mathbf{E}' = 0$ خواهد بود. این وضعی است که در گازها و مایعات ممکن است حکمفرما باشد. همین‌طور اگر دو قطبیه‌های داخل حفره در مکانهای منظم اتمی یک بلور مکعبی^۱ قرار گرفته باشند، باز هم $\mathbf{E}' = 0$ خواهد بود. برای بحث بیشتر به مسئله ۲.۵ رجوع کنید.

$$\mathbf{E}' = 0$$

$$\mathbf{E}_m = \mathbf{E}_x + \mathbf{E}_d + \mathbf{E}_s + \mathbf{E}'$$



$$\mathbf{E}_m = \mathbf{E} + \frac{1}{3\epsilon_0} \mathbf{P}$$

میدان الکتريکی که يك مولکول دی الکتريک را قطبيده می کند

قطبش پذیری، α

گشتاور دو قطبی يك مولکول در واحد میدان قطبنده

$$p_m = \alpha E_m$$

اگر N مولکول در واحد حجم موجود باشد، در آن صورت قطبش $P = N p_m$ است

$$E_m = E + \frac{1}{3\epsilon_0} P$$



$$P = N\alpha \left(E + \frac{1}{3\epsilon_0} P \right)$$

$$P = (K - 1)\epsilon_0 E$$



$$\alpha = \frac{3\epsilon_0 (K - 1)}{N (K + 2)}$$

که به معادله کلاؤسیوس - موساتی معروف است. واضح است که معادله (۱۰.۵) يك خاصیت مولکولی، یعنی قطبش پذیری مولکولی را بر حسب مقادیری بیان می کند که می توان آنها را بر مبنایی میکروسکوپی تعیین کرد.

۲.۵ دو قطبیه‌های القایی. یک مدل ساده

مولکول‌های دی‌الکتریک

قطبی:

دارای گشتاور دو قطبی حتی در غیاب میدان مولکولی

دارای گشتاور دو قطبی دائمی

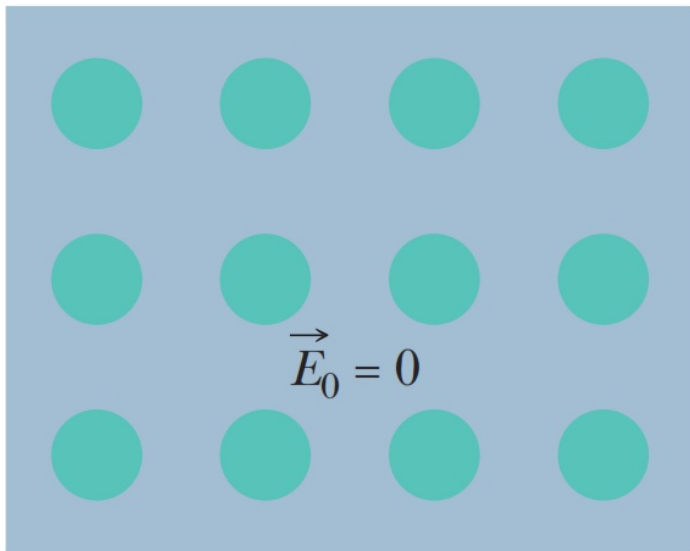
غیر قطبی:

گرانیگاه توطیع بارهای + و - در حالت عادی برهم منطبق هستند

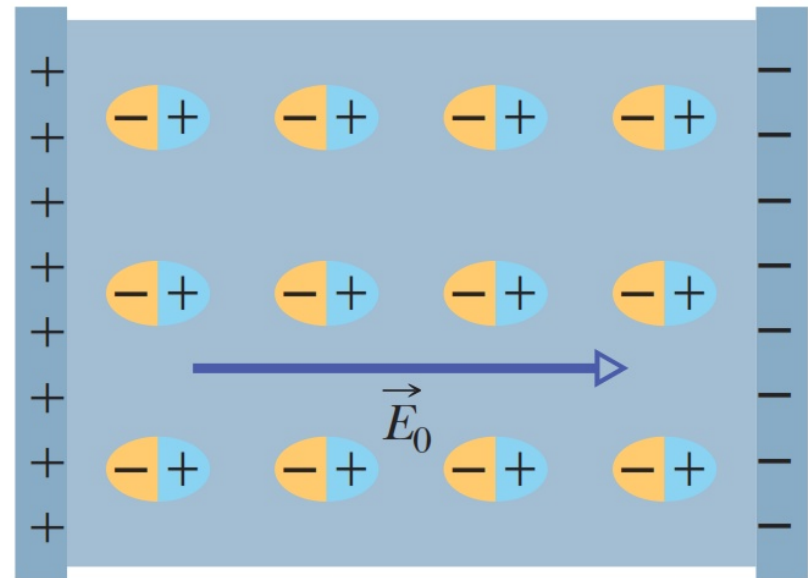
مولکول‌های متقارن H_2 ، N_2 ، و O_2 ، یا مولکول‌های تک‌اتمی He،

Ne، و Ar، جزو این گروه‌اند.

The initial electric field inside this nonpolar dielectric slab is zero.



The applied field aligns the atomic dipole moments.

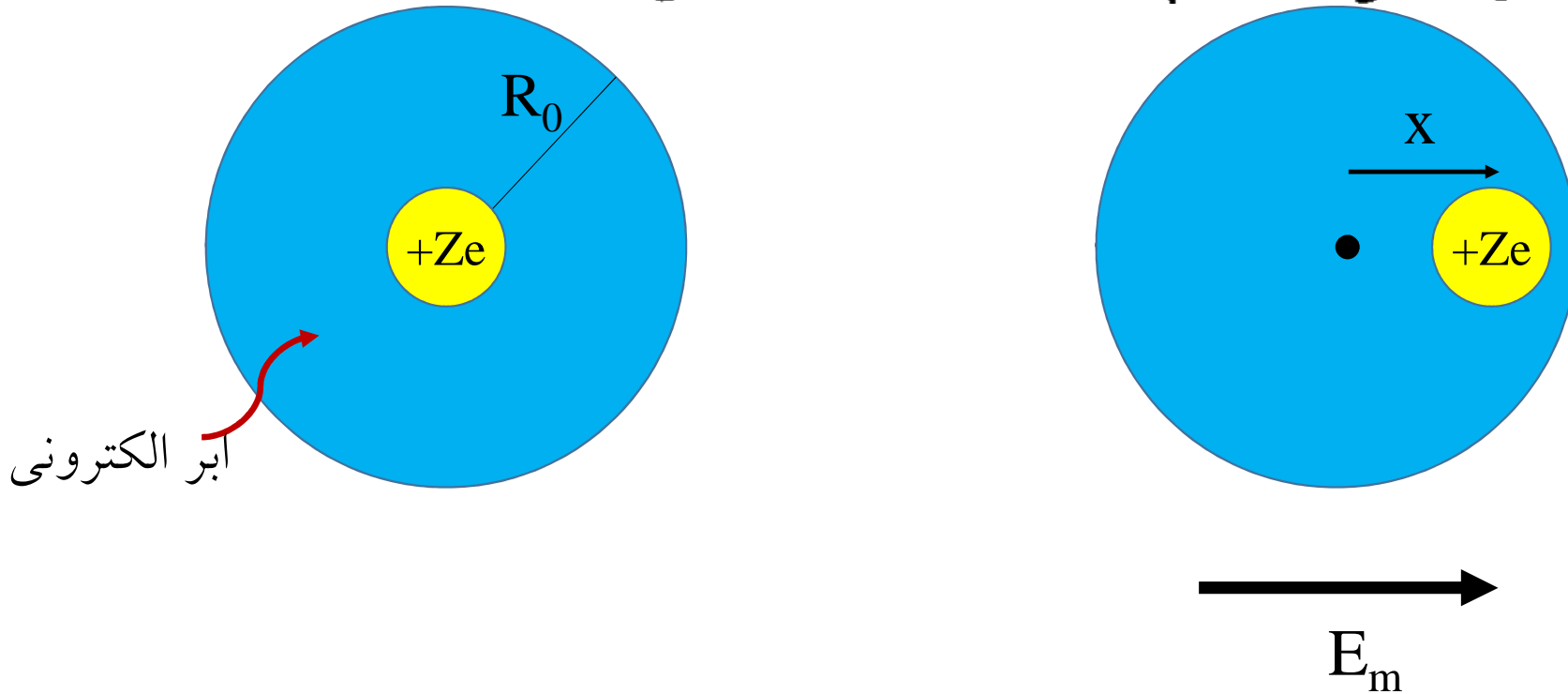


تأثیر میدان الکتریکی بر مولکول های غیر قطبی

اعمال میدان الکتریکی بر دی الکتریک سبب جا به جایی نسبی بارهای مثبت و منفی در مولکولهای غیر قطبی می شود، و دو قطبیهای مولکولی که بدین نحو پدید می آیند به دو قطبیهای القایی موسوم اند. ساده ترین نوع مولکولی که می توان تصور کرد مولکولی است که از یک اتم خنثی تشکیل شده باشد. می توان یک مدل کلاسیک ساده برای اتم ساخت و از این مدل عبارتی برای گشتاور دو قطبی القایی و بنا بر این عبارتی برای قطبش پذیری آن به دست آورد. اگر چه این مدل مخصوص بررسی مولکولهای تک اتمی است، ولی می توان آن را برای مولکولهای دو اتمی متقارن نیز، با به کار بردن آن به طور جداگانه برای هر یک از اتمهای مولکول و به دست آوردن قطبش پذیریهای اتمی، به کار برد. در این صورت قطبش-پذیری مولکولی عبارت است از حاصل جمع آنها، یا دو برابر قطبش پذیری اتمی.

اتم = هسته با بار مثبت + ابر الکترونی با بار منفی

اتم در میدان قطبیده E_m قرار داده شود، هسته نسبت به مرکز ابر بار جا به جا می شود؛ مقدار این جا به جایی را x می نامیم. این جا به جایی در امتداد E_m خواهد بود. فرض کنید در اثنای این جا به جایی ابر بار مثل یک جسم صلب حرکت کند. یعنی در اثر میدان قطبیده ابر تغییر شکل ندهد.



جابه‌جایی x رامی‌توان از روی تعادل نیروهای وارد بر هسته محاسبه کرد؛

نیروهای وارد بر هسته اتم در حضور میدان:

۱- نیروی ناشی از میدان مولکولی

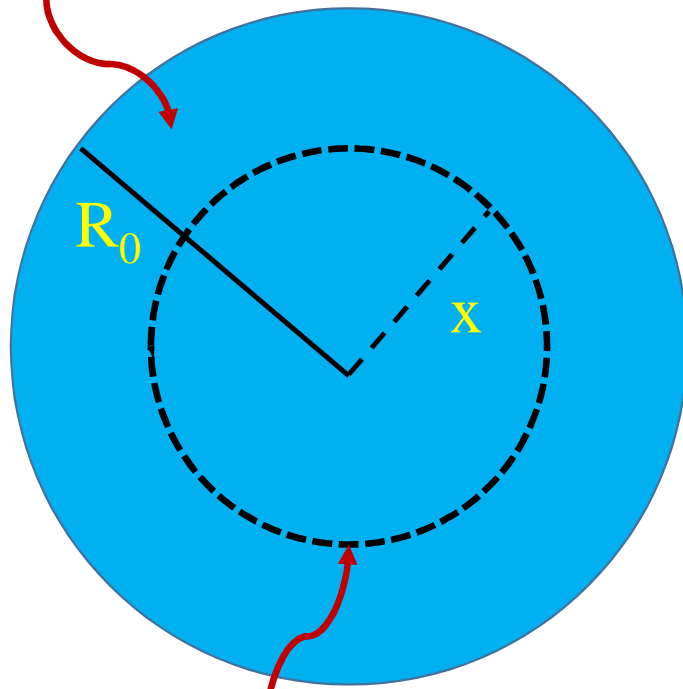
$$F_m = ZeE_m$$

۲- نیروی اعمالی توسط ابر الکترونی

$$F_e = ZeE_e$$

میدان ناشی از ابر الکترونی در فاصله x از مرکز آن

ابر الکترونی



سطح گاوسی

$$E_e = ?$$

$$\oint \vec{E} \cdot \hat{n} da = \frac{q}{\epsilon_0}$$

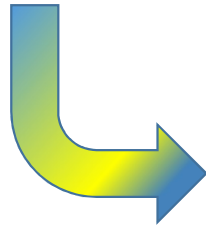
$$E(4\pi x^2) = \frac{1}{\epsilon_0} \left(\frac{4}{3} \pi x^3 \rho \right)$$

$$\rho = \frac{Ze}{\frac{4}{3} \pi R_0^3}$$

$$E_e = \frac{Zex^3}{4\pi\epsilon_0 R_0^3 x^2}$$

$$F_m = F_e$$

$$ZeE_m = ZeE_e$$



$$\frac{(Ze) (Zex^r / R_o^r)}{\Psi \pi \epsilon_o x^r} = ZeE_m$$

$$Zex = \Psi \pi \epsilon_o R_o^r E_m$$

$$\left\{ \begin{array}{l} ZeX = \Psi \pi \epsilon_0 R_0^2 E_m \\ \mathbf{p}_m = ZeX \\ \mathbf{p}_m = \alpha \mathbf{E}_m \end{array} \right. \Rightarrow \alpha = \Psi \pi \epsilon_0 R_0^2$$

قطبش پذیری که در معادله (۱۳.۵) به دست آمد ثابت، و مستقل از میدان قطبنده است. بنابراین، معادله (۱۳.۵) به مقدار ثابتی برای K منجر می شود، و دی الکتریکی که بدین گونه توصیف شود خطی است.

$$\alpha = \frac{\Psi \epsilon_0 (K - 1)}{N (K + 2)}$$

مدل اتمی بالا را می‌توانیم از طریق مقایسه نتایج حاصل از آن با نتایج حاصل از منابع دیگر بیازماییم. مثلاً از ترکیب معادله (۱۳.۵)، با معادله کلاؤسیوس-موساتی (۱۵.۵) می‌توان α را حذف کرد؛ معادله حاصل شعاع اتمی R_0 را بر حسب کمیت‌های معلوم تجربی پیشگویی می‌کند. R_0 ی که به این طریق به دست می‌آید با نتایج حاصل از آزمایش‌های دیگر، در مواردی که مدل بالا برای آنها مخصوصاً مناسب است، به نحوی معقول توافق دارد؛ مرتبه بزرگی R_0 در حدود یک آنگستروم یعنی 10^{-10} m است (مسئله ۱۰.۵).

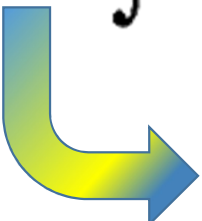
$$\alpha = \frac{3\epsilon_0 (K-1)}{N(K+2)} \quad \rightarrow \quad \frac{3\epsilon_0 (K-1)}{N(K+2)} = 4\pi\epsilon_0 R_0^3$$

$$\alpha = 4\pi\epsilon_0 R_0^3$$

Example 5.2 Polarizability of Hydrogen

A more realistic model of the electronic charge—e.g., in the hydrogen atom—is a spherically symmetric, exponential charge distribution of the form $\rho = -(e/\pi a_0^3)e^{-2r/a_0}$, where a_0 is a constant (Bohr radius $\approx 10^{-10}$ m) and e is the magnitude of the charge of an electron. This distribution extends over all space compared to the above model, where the charge is uniformly distributed over a sphere.

To calculate the polarization of the hydrogen atom in the E_m field, we follow the same procedure we used above with regard to the simple model. We calculate the field produced by the charge distribution at a distance δs from the center of the distribution, by applying Gauss' law, to a Gaussian spherical surface with center at the origin and radius δs . The field is expected to be radial. Therefore,

$$4\pi(\delta s)^2 E = \int \rho \, dv = \frac{-e}{\pi a_0^3 \epsilon_0} 4\pi \int_0^{\delta s} r^2 e^{-2r/a_0} \, dr$$

$$E = \frac{-e}{\pi a_0^3 \epsilon_0 (\delta s)^2} G \quad G = \int_0^{\delta s} r^2 e^{-2r/a_0} \, dr$$

For $\delta s \ll a_0$, G can be expanded in a Taylor series; keeping the lowest order terms in δs gives $G = \delta s^3/3$ and hence

$$E = \frac{-e}{3\pi\epsilon_0 a_0^3} \delta s \quad (5.12)$$

The balance condition requires $E = -E_m$; therefore

$$\mathbf{p}_m = e\delta s = 3\pi a_0^3 \epsilon_0 \mathbf{E}_m = \alpha' \mathbf{E}_m \quad (5.13)$$

If the total charge was distributed over a sphere of radius a_0 , then Eq. (5.8) gives $\mathbf{p}_m = 4\pi\epsilon_0 a_0^3 \mathbf{E}_m$. Therefore the polarizability constant $\alpha' = \frac{3}{4}\alpha$. This example shows that the model is very approximate and yields an order of magnitude only. In fact, accurate quantum mechanical derivations yield $18\epsilon_0 a_0^3$ for the polarizability of hydrogen.