بسم الله الرحمن الرحيم

فصل ششم

انرژی الکتروستاتیک

بخش اول

انرژی دستگاه بار الکتریکی

انرژی جنبشی

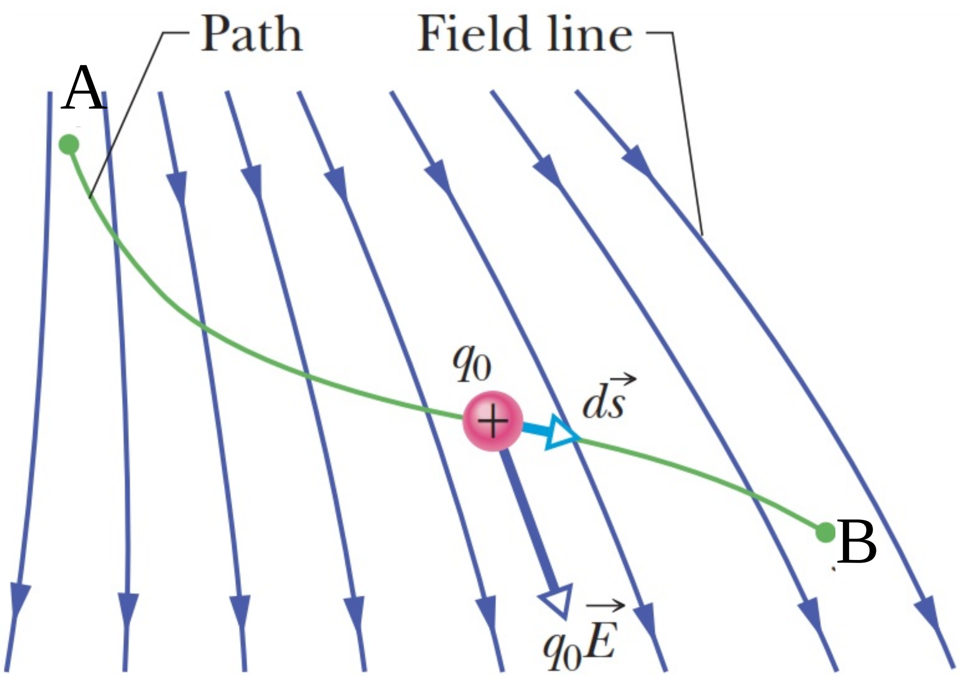
انرژی پتانسیل

در حــالت سکون، همهٔ انرژی دستگاه بار به‌صورت انرژی پتانسیل است

انرژی ناشی از برهم کنش بارها

انرژی الکتروستاتیکی

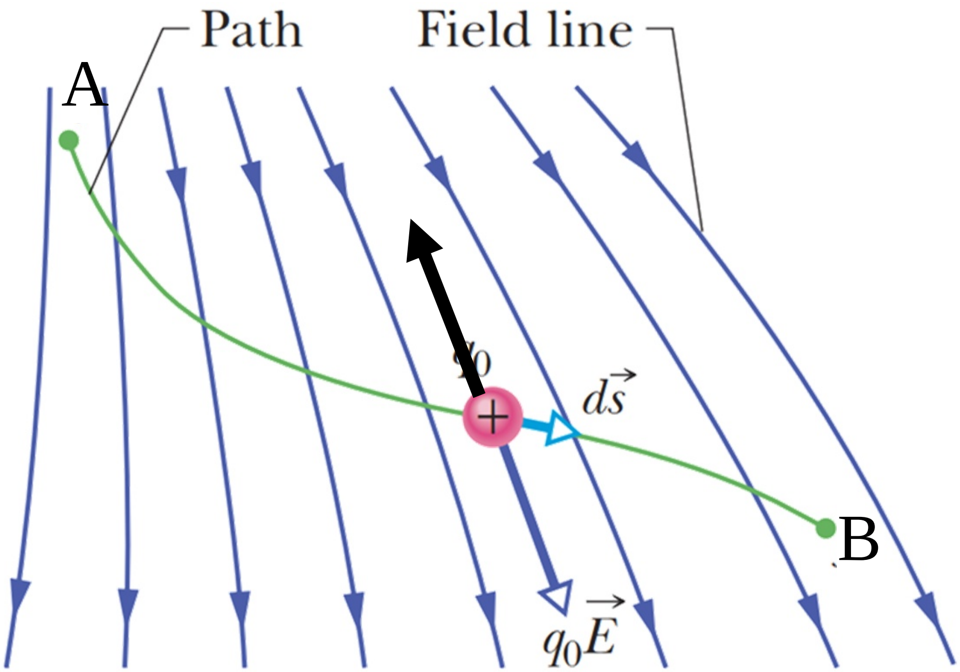
کار انجام شده توسط نیروی وارد بر بار موقعی که بار از مکان A به مکان B می‌رود



$$\text{کار} = \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = q \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$$

$$= -q \int_A^B \nabla\varphi \cdot d\mathbf{l} = -q(\varphi_B - \varphi_A)$$

دراینجا فرض شده‌است که درهرنقطه درطول مسیرنیروی $\mathbf{F}$ تنهـا نیروی الکتریکی $q\mathbf{E}$ است. تحت این شرایط ذرهٔ باردار شتاب می‌گیرد. برای اینکه شتاب نگیرد، باید نیروی الکتریکی درهرنقطه بانیرویی مساوی و مخالف کـه توسط عامل دیگری اعمـال می‌شود خنثی شود. بنابراین‌کارکل صفراست وانرژی جنبشی تغییرنمی کند.کاری که این نیرویدیگر انجام می‌دهد

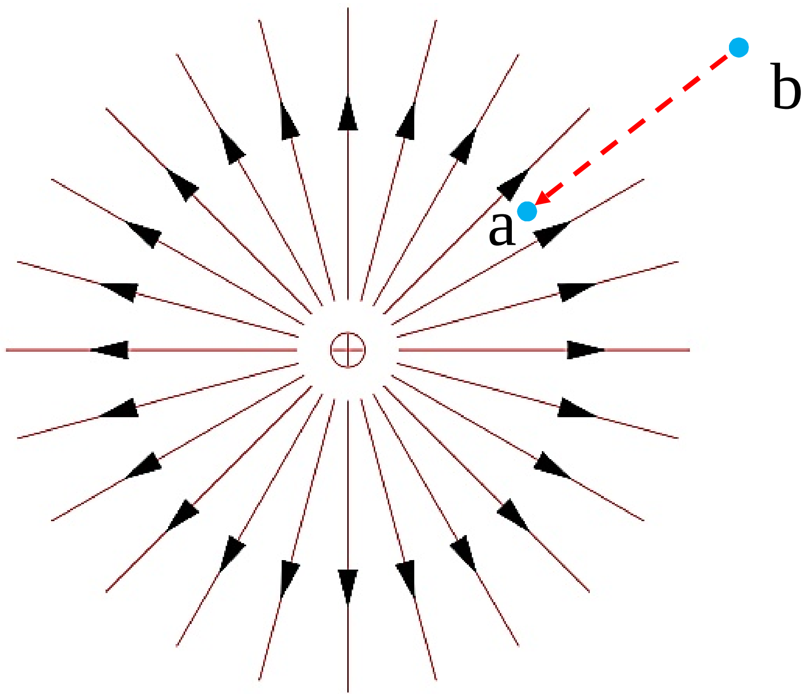


$$W = q(\varphi_B - \varphi_A)$$

برابر باافزایش انرژی الکتروستاتیکی باردرطول مسیر A به B

$$\Delta U = q(\varphi_B - \varphi_A)$$

محاسبه اختلاف پتانسیل الکتریکی میان دو نقطه در میدان بار q



$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\hat{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^3}\vec{r}$$

$$d\vec{s} = dr\ \hat{r}$$

$$\varphi_B - \varphi_A = -\int_a^b \vec{E}.\,d\vec{s} = -\int_a^b \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\hat{r}.\,dr\ \hat{r}$$

$$\varphi_B - \varphi_A = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int_{r_a}^{r_b}\frac{dr}{r^2} = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{-1}{r}\right)\Big|_{r_a}^{r_b}$$

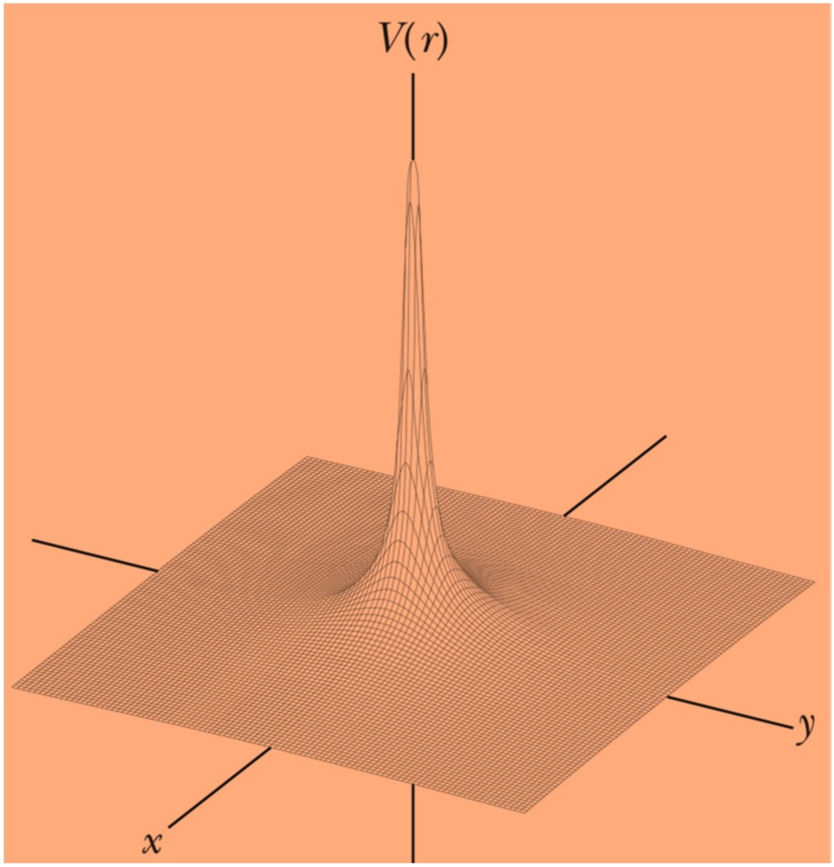
$$\varphi_B - \varphi_A = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_b} - \frac{1}{r_a}\right)$$

اگر نقطه a مرجع پتانسیل باشد

$$\varphi_B - \varphi_A = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_b} - \frac{1}{r_a}\right)$$

$$\varphi_B - 0 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_b} - \frac{1}{\infty}\right)$$

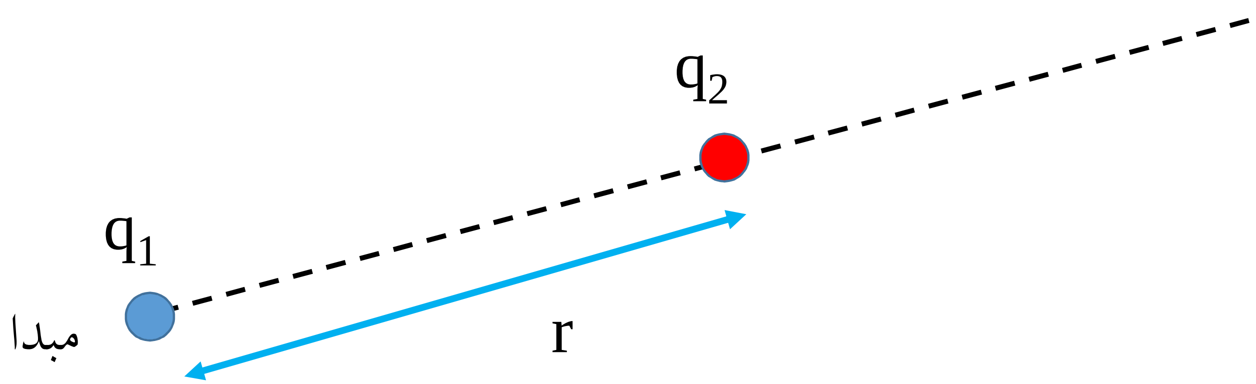
$$\boxed{\varphi(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\, r}}$$



محاسبه انرژی پتانسیل الکتروستاتیک ذخیره شده در سیستم دو ذره ای q_1 و q_2:

$$\boxed{U(r) = q_2\varphi(r) = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}}$$

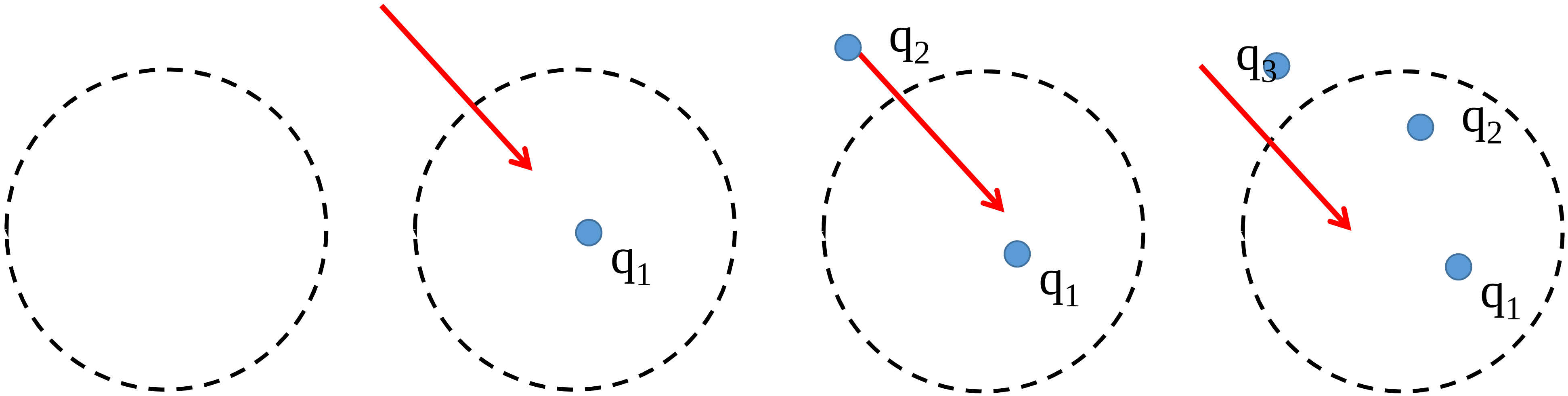
پتانسیل از بار q_1 در محل بار q_2



۱.۶ انرژی پتانسیل گروهی از بارهای نقطه‌ای

منظور از انرژی الکتروستاتیکی گروهی مرکب از m بار نقطه‌ای، انرژی پتانسیل آن دستگاه نسبت به‌حالتی است که در آن همهٔ بارهای نقطه‌ای بی‌نهایت از یکدیگر دورند. این انرژی‌را می‌توان به‌آسانی بامحاسبهٔ مقدارکارلازم برای گردهم آوردن بارها به‌دست‌آورد:

تعبیر فیزیکی از رابطه انرژی پتانسیل الکتریکی سیستم ذرات باردار



فضای خالی

$W_0 = 0$

انتقال بار q_1

$W_1 = 0$

انتقال بار q_2 در حضور بار q_1

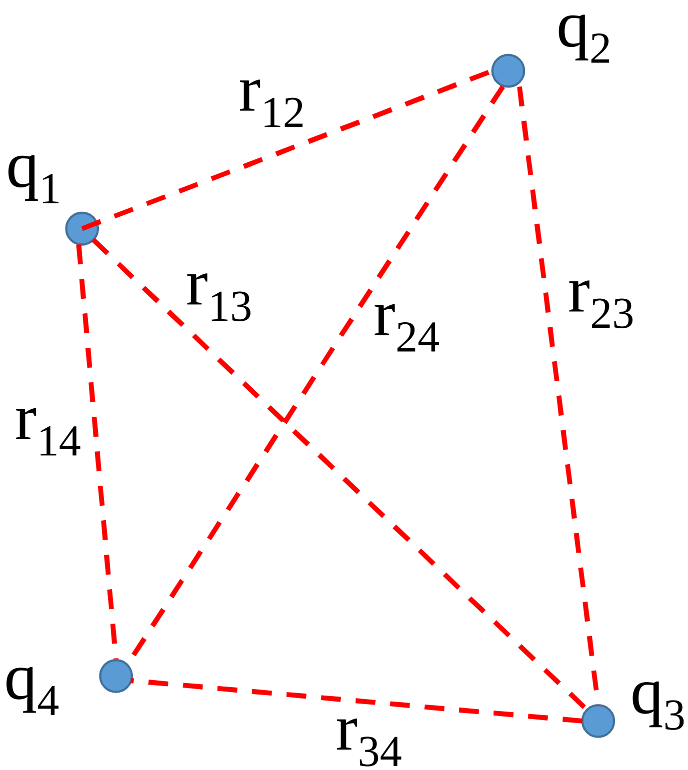
$$W_2 = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_{12}}$$

انتقال بار q_3 در حضور بار q_1 و q_2

$$W_3 = \frac{q_1 q_3}{4\pi\varepsilon_0 r_{13}} + \frac{q_2 q_3}{4\pi\varepsilon_0 r_{23}}$$

$$U_t = \sum W_i$$

انرژی پتانسیل الکتریکی سیستم ذرات باردار



انرژی پتانسیل کل سیستم ذرات برابر با حاصلجمع جبری انرژی پتانسیل ذخیره شده بین دو به دوی ذرات باردار است

$$U_{total} = U_{12} + U_{13} + U_{14} + U_{23} + U_{24} + U_{34}$$

$$U_{total} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{q_1q_2}{r_{12}} + \frac{q_1q_3}{r_{13}} + \frac{q_1q_4}{r_{14}} + \frac{q_2q_3}{r_{23}} + \frac{q_2q_4}{r_{24}} + \frac{q_3q_4}{r_{34}}\right\}$$

انرژی الکتروستاتیکی کل دستگاه مرکب از m بار مجموع Wهاست،

$$U=\sum_{j=1}^{m} W_j=\sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{k=1}^{j-1}\frac{q_j q_k}{4\pi\varepsilon_0 r_{jk}}\right)$$

$$U=\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{j-1} W_{jk}$$

حال اگر W_{jk}ها را به‌شکل یك ماتریس مرتب کنیم و توجه داشته باشیم که $W_{jk}=W_{kj}$ و $W_{jj}=0$، آنگاه می‌توانیم U را به‌صورت زیر نیز بنویسیم

$$U=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{m} W_{jk}, \quad (W_{jj}=0)$$

$$U = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{m} W_{jk}, \quad (W_{jj} = 0)$$

دراین شکل جمع‌بندی، که متقارن‌تر است، ضریب ۱/۲ را به‌این دلیل می‌آوریم که برهم کنش میان هرزوج ازبارها دوبارحساب نشود. ازاین‌رو، شکل دیگرومناسبترمعادلهٔ (۳.۶) چنین است

$$U = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{m}{}' \frac{q_j q_k}{4\pi\varepsilon_0 r_{jk}}$$

که علامت پریم برروی جمع‌بندی‌دوم به‌معنی آن است که درآن جملهٔ $j = k$ عمداً حذف می‌شود.

نوشتن برحسب پتانسیل الکتریکی

$$U=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m} q_j\varphi_j$$

$$\varphi_j=\sum_{k=1}^{m}{}' \frac{q_k}{4\pi\varepsilon_0 r_{jk}}$$

مقدار نهایی پتانسیل φ درمحل j زامین بار نقطه‌ای نـاشی از سایر بارهای دستگاه

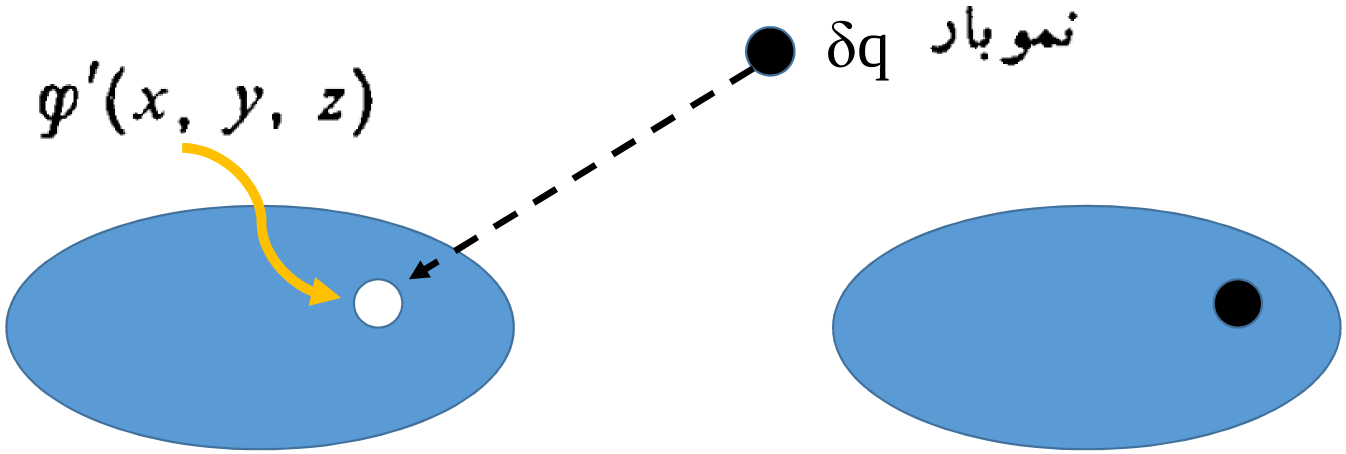
هر گاه بارهای نقطه‌ای به‌جای خلاء دریك محیط دی‌الکتریك خطی نامتناهی گردهم آورده شوند، آنگاه در معادله‌های (۴.۶) و (۵.۶) گذردهی ε جانشین ε_0 می‌شود لیکن معـادلهٔ

تنها محدودیت در اعتبار معادلهٔ (۶.۶) این است که تمام دی‌الکتریکهـا در دستگـاه الکتریکی باید خطی باشند.

۲.۶ انرژی الکتروستاتیکی یک توزیع بار

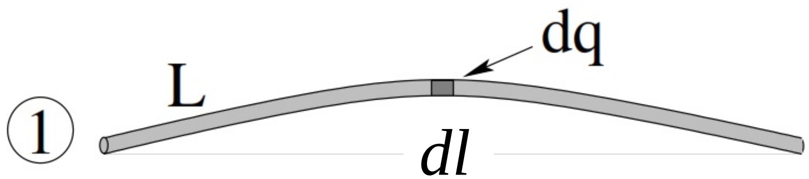
روش محاسبه: محاسبه انرژی در جمع آوردن بار

عناصر بار δq را از جایی که درآن پتانسیل مرجع $\varphi_A = 0$ است به مکان نهایی آنها بیاوریم



کار لازم برای قراردادن δq دراین نقطه $\delta W = \varphi'(x, y, z)\,\delta q$

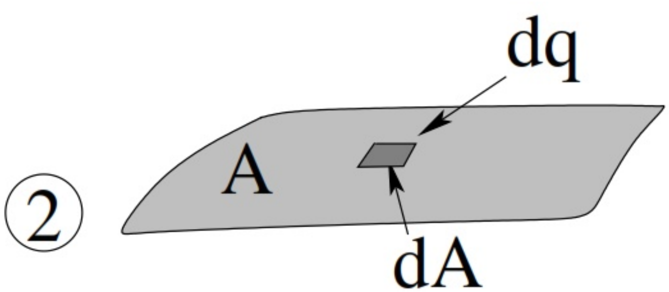
انواع توزیع بار پیوسته



توزیع بار خطی

$$dq = \lambda dl$$

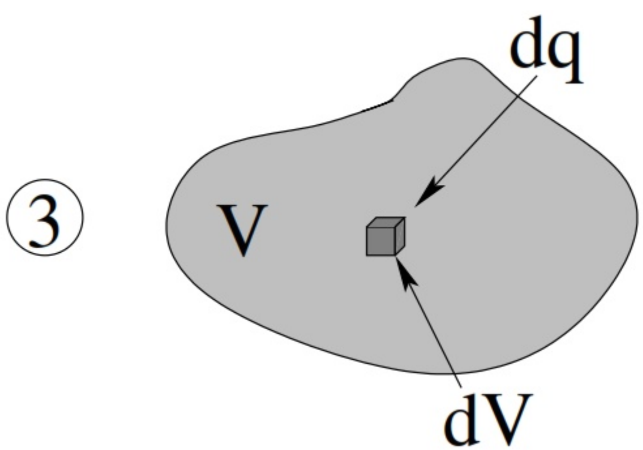
چگالی بار خطی



توزیع بار سطحی

$$dq = \sigma dA$$

چگالی بار سطحی



توزیع بار حجمی

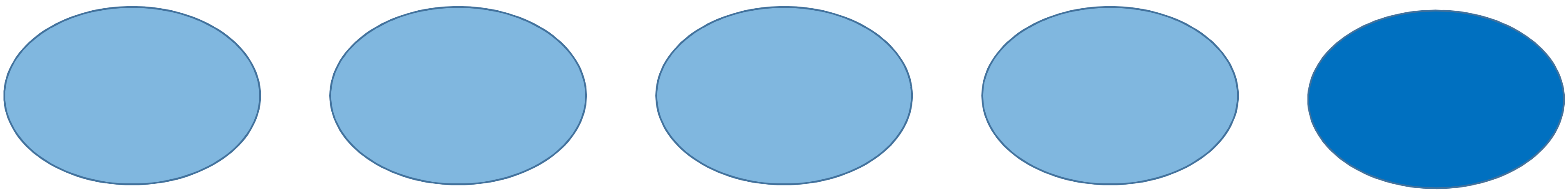
$$dq = \rho dV$$

چگالی بار حجمی

چون کار لازم برای گردهم آوردن بارها به‌ترتیب گرد هم آوری آنها بستگی ندارد، می‌توان روش گردهم آوری خاصی را به‌کار برد که با آن حاصل‌جمع δWها به‌سهولت قابل محاسبه باشد. دراین روش همهٔ قسمتهای دستگاه باهم به‌حالت باردار نهایی خود آورده می‌شوند، یعنی درهرمرحله ازفرایند باردار کردن مقادیرهمهٔ چگالیهای بار کسریکسانی از مقادیرنهایی آنهاست. این کسررا با α نشان می‌دهیم. هرگاه مقادیر نهایی چگالیهای بار باتابعهای $\rho(x, y, z)$ و $\sigma(x, y, z)$ داده‌شده باشند، آنگاه چگالیهای باردرمرحله‌ای دلخواه عبارت خواهند بود از $\alpha\rho(x, y, z)$ و $\alpha\sigma(x, y, z)$. به‌علاوه نمونه‌های این چگالیها عبارت‌اند از $\delta\rho = \rho(x, y, z)\,\delta\alpha$ و $\delta\sigma = \sigma(x, y, z)\,\delta\alpha$. مقدار کل انرژی الکتروستاتیکی که ازجمع‌بندی (۷.۶) به‌دست می‌آید برابر است با

$$U = \int_0^1 \delta\alpha \int_V \rho(x, y, z)\,\varphi'(\alpha; x, y, z)\,dv$$

$$+ \int_0^1 \delta\alpha \int_S \sigma(x, y, z)\,\varphi'(\alpha; x, y, z)\,da$$



20 %	40 %	60 %	80 %	100 %
$\frac{1}{5}\rho$	$\frac{2}{5}\rho$	$\frac{3}{5}\rho$	$\frac{4}{5}\rho$	$\frac{5}{5}\rho$

اما چون مقدار تمام بارها کسر یکسانی، α، از مقدار بار نهایی آنهاست، پتانسیل برابر است با $\varphi'(\alpha; x, y, z)=\alpha\varphi(x, y, z)$، که در آن φ مقدار نهایی پتانسیل در نقطهٔ (x, y, z)

$$U=\frac{1}{2}\int_V \rho(\mathbf{r})\varphi(\mathbf{r})\,dv+\frac{1}{2}\int_S \sigma(\mathbf{r})\varphi(\mathbf{r})\,da$$

که نتیجهٔ مطلوب برای انرژی یك توزیع بار است. توجه داشته باشید که اولا حجم انتگرال گیری V باید به حد کافی بزرگ باشد تا همهٔ چگالی بار موجود در مسئله را در بر بگیرد، و ثانیاً پتانسیل φ همان پتانسیل ناشی از چگالی بار ρ (و σ) است.

$$\varphi(\mathbf{r})=\frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_V \frac{\rho(\mathbf{r}')\,dv'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}+\frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_S \frac{\sigma(\mathbf{r}')\,da'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}$$

بررسی کاربرد رابطه برای بارهای نقطه ای

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{۱}{۴\pi\varepsilon}\int_V \frac{\rho(\mathbf{r}')\,dv'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} + \frac{۱}{۴\pi\varepsilon}\int_S \frac{\sigma(\mathbf{r}')\,da'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}$$

$$U = \frac{۱}{۲}\int_V \rho(\mathbf{r})\,\varphi(\mathbf{r})\,dv + \frac{۱}{۲}\int_S \sigma(\mathbf{r})\,\varphi(\mathbf{r})\,da$$

$$\rho(\mathbf{r}') = \sum_{k=۱}^{m}{}' q_k\,\delta(\mathbf{r}'-\mathbf{r}_k)$$

$$\rho(\mathbf{r}) = \sum_{j=۱}^{m} q_j\,\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_j)$$

$$\varphi_j = \sum_{k=۱}^{m}{}' \frac{q_k}{۴\pi\varepsilon_\circ\, r_{jk}}$$

$$U = \frac{۱}{۲}\sum_{j=۱}^{m} q_j\varphi_j$$

دستگاه شامل رسانا‌ها

سهم مربوط به‌رسانا‌ها را در آن صریحاً جدا

انتگرال گیری برروی سطح این رسانا‌ها

هررسانا یك ناحیهٔ هم پتانسیل

$$\frac{1}{2}\int_{j\text{رسانای}}\sigma\varphi\, da = \frac{1}{2}Q_j\varphi_j$$

، درآن Q_j بار رسانای jام است

رابطه کلی

$$U = \frac{1}{2}\int_V \rho\varphi\, dv + \frac{1}{2}\int_{S'} \sigma\varphi\, da + \frac{1}{2}\sum_j Q_j\varphi_j$$

انتگرال روی حجم اجسام نارسانا

انتگرال سطحی منحصر است به‌سطوح نارسانا

جمعبندی آخر بر روی تمام رسانا‌ها

مقایسه دو رابطه

برای دستگـاهی مرکب از بارهای نقطه‌ای

$$U = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m} q_j \varphi_j$$

هریك از بارهای نقطه‌ای را به‌صورت یك واحد درنظر گرفتیم؛ پس دراین معادله انرژی لازم برای تشکیل بارهای نقطه‌ای از نموهای کوچکتر بـار، یعنی به‌اصلاح خود- انرژی بارهای نقطه‌ای، منظورنشده است

همهٔ بارها برروی سطوح رساناها

$$U = \frac{1}{2}\sum_{j} Q_j \varphi_j$$

هم‌شامل انرژی برهم‌کنش میان رساناهای مختلف است

وهم‌شامل خود ـ انرژیهای بارهررسانای جداگانه.

اگرتنها یك رسانا وجود داشته باشد، خود ـ انرژی آن، $U = 1/2\ Q_1\varphi_1$ ناشی از برهم‌کنش بارهای گردهم آمده برروی آن رسانا خواهد بود

برای دستگاهی شامل رسانا‌های مختلف

پتانسیل j امین رسانا

$$\varphi_j = \varphi_{j1} + \varphi_{j2}$$

φ_{j1} پتانسیل ناشی از بار موجود برروی خود j امین رسانا،

φ_{j2} پتانسیل ناشی از بار موجود برروی سایر رسانا‌ها

$$U = \frac{1}{2} \sum_j Q_j \varphi_j$$

$$U = \frac{1}{2} \sum_j Q_j \varphi_{j1} + \frac{1}{2} \sum_j Q_j \varphi_{j2}$$

$$U=\frac{1}{2}\sum_{j} Q_j\varphi_{j1}+\frac{1}{2}\sum_{j} Q_j\varphi_{j2}$$

خود ـ انرژیهـای مختلف رسا ناها

خود ـ انرژی هر رسانا، $1/2\, Q_j\varphi_{j1}$، به‌محیط اطراف آن رسانـا بستگی دارد
(زیرا توزیع بار بر روی هر رسانا، خودرا با محیط اطراف تطبیق می‌دهد)

تنها پتانسیل مربوط به‌رسانای j که از لحاظ فیزیکی مفهوم‌دارد همان پتانسیل کل φ_j است

Example 6.1 Uniformly Charged Sphere

Consider a uniformly charged sphere of charge Q. Referring to Example 2.12b we see that the potential inside a uniformly charged sphere of radius R is given by

$$\Phi(r < R) = \frac{\rho_0}{3\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{2}(3R^2 - r^2) \tag{2.52}$$

where ρ_0 is the uniform charge density. Therefore integrating Eq. (6.5) over the volume of the sphere gives

$$U = \frac{1}{2}\int \Phi\rho\, dv = \rho_0 \frac{4\pi}{2}\int_{r=0}^{R} r^2\, dr\left[\frac{\rho_0}{6\varepsilon_0}(3R^2 - r^2)\right] = \frac{3}{5}\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 R} \tag{6.7}$$

where $Q \equiv (4/3)\pi R^3 \rho_0$ is the total charge in the sphere.

Second method

We may also calculate this energy directly [analogous to the process yielding Eq. (6.1)] by assuming that the sphere is built up by placing uniformly charged infinitesimal layers on its outer spherical surface. When the sphere has a radius r, its charge is $q = (4/3)\pi r^3 \rho_0$, and the potential at its surface will be $q/4\pi\varepsilon_0 r$ [see Eq. (2.51) in Example 2.12*b*]. To add a spherical shell of charge $dq = 4\pi r^2\, dr\, \rho_0$ to its surface will take an amount of work equal to the potential at shell $\times$ charge in shell, or

$$dU = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} \times (4\pi r^2 \rho_0\, dr) = \frac{4\pi\rho_0^2 r^4}{3\varepsilon_0}\, dr$$

To build up the sphere to radius R, will therefore require the work

$$U = \int_{r=0}^{R} dU = \int_{r=0}^{R} \frac{\rho_0^2}{4\pi\varepsilon_0} \frac{(4\pi)^2}{3} r^4\, dr = \frac{3}{5} \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

just as calculated above in Eq. (6.7).