فصل ششم

انرژی الکتروستاتیک

بخش دوم

۳.۶ چگالی انرژی میدان الکتروستاتیکی

هدف:

بیان انرژی الکتروستاتیک برحسب بردارهای میدانی E و D

$$U = \frac{1}{2}\int_V \rho(\mathbf{r})\,\varphi(\mathbf{r})\,dv + \frac{1}{2}\int_S \sigma(\mathbf{r})\,\varphi(\mathbf{r})\,da$$

شامل انتگرال گیری صریح بردوی توزیع بار

فرض ها

توزیع باردلخواهی باچگالیهای ρ و σ

دستگاه بـــارکراندار

یعنی می‌توانیم سطح بسته‌ای باابعاد متناهی رسم کنیم که همهٔ بارهای آزاد را دربر بگیرد.

همهٔ چگالیهای سطحی بار، σ، برروی سطوح رساناها

چگالیهای ρ و σ به‌جابه‌جایی الکتریکی وابسته‌اند؛

در تمامی نواحی دی‌الکتریك $\rho = \nabla \cdot \mathbf{D}$

وبرروی سطوح رساناها $\sigma = \mathbf{D} \cdot \mathbf{n}$

$$U = \frac{1}{2}\int_v \rho(\mathbf{r})\,\varphi(\mathbf{r})\,dv + \frac{1}{2}\int_s \sigma(\mathbf{r})\,\varphi(\mathbf{r})\,da$$

$$\rho = \nabla \cdot \mathbf{D} \qquad \sigma = \mathbf{D} \cdot \mathbf{n}$$

$$U = \frac{1}{2}\int_v \varphi\,\nabla \cdot \mathbf{D}\,dv + \frac{1}{2}\int_s \varphi\,\mathbf{D} \cdot \mathbf{n}\,da$$

انتگرال حجمی خـارج از رساناها

انتگرال سطحی بر روی سطوح رساناهـا

$$U = \frac{1}{2}\int_v \varphi \nabla \cdot \mathbf{D}\, dv + \frac{1}{2}\int_s \varphi\, \mathbf{D} \cdot \mathbf{n}\, da$$

$$\varphi \nabla \cdot \mathbf{D} = \nabla \cdot \varphi \mathbf{D} - \mathbf{D} \cdot \nabla \varphi$$

$$U = \frac{1}{2}\int_v (\nabla \cdot \varphi \mathbf{D} - \mathbf{D} \cdot \overbrace{\nabla \varphi}^{-\mathbf{E}})\, dv + \frac{1}{2}\int_s \varphi\, \mathbf{D} \cdot \mathbf{n}\, da$$

اولی‌را با به‌کاربردن قضیهٔ واگرایی به‌یك انتگرال سطحی تبدیل‌می کنیم

$$U = \frac{1}{2}\int_{s+s'} \varphi\, \mathbf{D} \cdot \mathbf{n}'\, da + \frac{1}{2}\int_v \mathbf{D} \cdot \mathbf{E}\, dv + \frac{1}{2}\int_s \varphi\, \mathbf{D} \cdot \mathbf{n}\, da$$

سطح $S+S'$

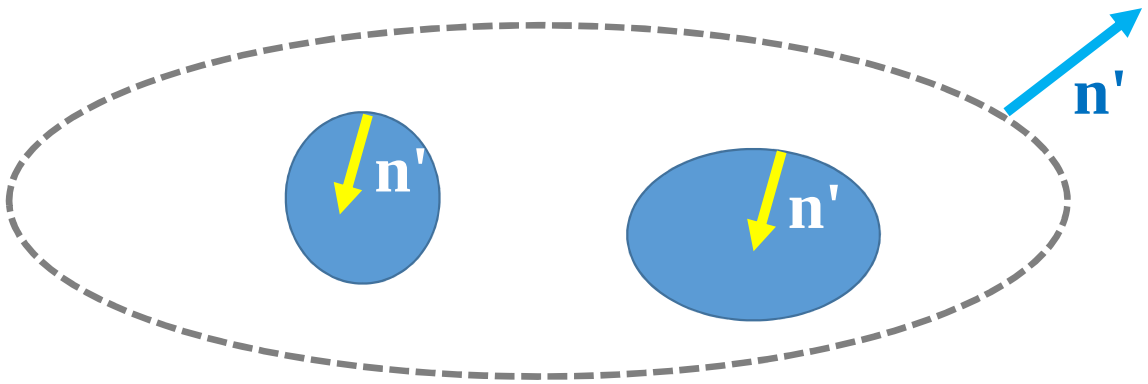
$\frac{1}{2}\int_{s+s'} \varphi \mathbf{D} \cdot \mathbf{n}' \, da$ تمـــامی سطحی است که حجم V را محصور کرده

S (سطوح تمام رساناهای موجود دردستگاه)

S' (سطحی که دستگاه‌را ازسمت خارج محصور کرده‌است

ومی‌توان آن‌را دربینهایت‌فرض کرد)

درهردوی‌این سطوح‌بردارعمود $\mathbf{n}'$ به سمت خارج ازحجم V خواهدبود.



$$\frac{1}{2}\int_s \varphi \mathbf{D}\cdot\mathbf{n}\,da$$

بردارعمود $\mathbf{n}$ به‌سمت خارج رسانـــا، یعنی به‌سمت داخل حجم V است.

$$\hat{n} = -\hat{n}'$$

$$\frac{1}{2}\int_s \varphi \mathbf{D}\cdot\mathbf{n}'\,da + \frac{1}{2}\int_{s'} \varphi \mathbf{D}\cdot\mathbf{n}'\,da + \frac{1}{2}\int_s \varphi \mathbf{D}\cdot\mathbf{n}\,da$$

$$U = \frac{1}{2}\int_{s'} \varphi \mathbf{D}\cdot\mathbf{n}'\,da + \frac{1}{2}\int_v \mathbf{D}\cdot\mathbf{E}\,dv.$$

در فواصل زیاد

$$\varphi \propto \frac{1}{r}$$

$$E \propto \frac{1}{r^2}$$

$$\text{مساحت یک سطح بسته} \propto \frac{1}{r^2}$$

هنگامی که S' به بینهایت برده شود مقدار این انتگرال صفر می‌شود.

$$\frac{1}{2}\int_{s'} \varphi \mathbf{D} \cdot \mathbf{n}' \, da = 0$$

$$U = \frac{1}{2}\int_{v} \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} \, dv$$

$$U = \frac{1}{2} \int_v \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} \, dv$$

انتگرال برروی حجمی ازدستگاه گرفته می‌شود که خارج ازرساناها واقع است،

برروی دی‌الکتریکهای مختلف موجود در دستگـــاه انتگرال گرفته می‌شود

انرژی الکتروستاتیکی دستگاه الکتریکی درکجا قرار دارد؟

انرژی درمیدان الکتریکی ذخیره‌شده است

چگالی انرژی درمیدان الکتروستاتیکی

$$u = \frac{1}{2}\mathbf{D} \cdot \mathbf{E}$$

برای دی‌الکتریکهای خطی

$$D = \varepsilon E \quad \Rightarrow \quad u = \frac{1}{2}\varepsilon E^2 = \frac{1}{2}\frac{D^2}{\varepsilon}$$