بسم الله الرحمن الرحيم

فصل ششم

انرژی الکتروستاتیک

بخش سوم

۴.۶ انرژی دستگاه رساناهای باردار . ضرایب پتانسیل

یك رابطهٔ خطی میان پتانسیلها و بارهای مجموعه‌ای از رساناها وجود دارد.

دردستگاهی مرکب از N رسانا، پتانسیل هریك ازرساناها

$$\varphi_i = \sum_{j=1}^{N} p_{ij} Q_j$$

پتانسیل روی رسانای i ام

ضرایب پتانسیل

ضریب p_{ij}، آن قسمت ازپتانسیل i امین رساناست که ازوجود بار واحد برروی رسانای jام

انرژی الکتروستاتیکی مجموعه‌ای از N رسانـــای باردار

$$U = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} Q_i \varphi_i$$

انرژی پتانسیل الکتریکی ناشی از برهمکنش رسانای i ام با پتانسیل ایجاد شده در محل این بار

$$\varphi_i = \sum_{j=1}^{N} p_{ij} Q_j$$

پتانسیل ایجاد شده در محل بار i ام توسط رساناهای باردار دیگر

$$U = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} p_{ij} Q_i Q_j$$

چند حکم کلی درمورد ضرایب p_{ij}

(۱) $p_{ij} = p_{ji}$

(۲) همهٔ p_{ij} ها مثبت اند،

(۳) j هرچه باشد $p_{ii} - p_{ij} \geqslant 0$.

اثبات حکم اول)

معادله U برحسب $U(Q_1 \cdots Q_N)$

$$U=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} p_{ij}Q_iQ_j$$

$$dU=\left(\frac{\partial U}{\partial Q_1}\right)dQ_1+\cdots+\left(\frac{\partial U}{\partial Q_N}\right)dQ_N$$

تغییرات انرژی به ازاء تغییرات همه بارها

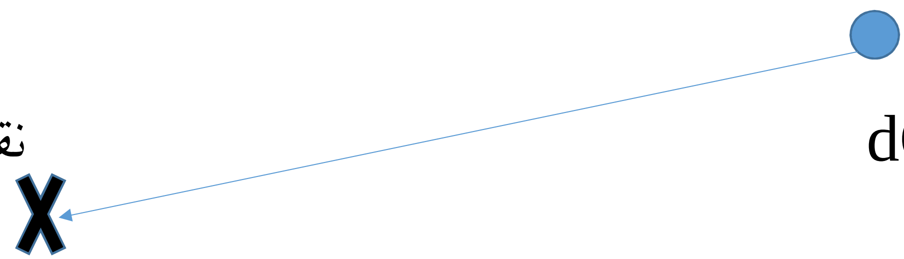
هرگاه فقط dQ_1 تغییر کند،

$$dU=\left(\frac{\partial U}{\partial Q_1}\right)dQ_1=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N}(p_{1j}+p_{j1})Q_j\,dQ_1 \qquad 1$$

سهم برهمکنشی ذره ۱ با پتانسیل ذرات دیگر + سهم پتانسیل ذره ۱ در برهمکنش با ذرات دیگر

از طرف دیگر کار انجام شده بر روی نموبار dQ_1 ام در انتقال از بی نهایت به نقطه مود نظر به صورت انرژی پتانسیل در سیستم ذخیره می گردد

$$dU = dW = \varphi_1 \, dQ_1 = \sum_{j=1}^{N} p_{1j} Q_j \, dQ_1 \qquad (2)$$



1 $$dU = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N}(p_{1j}+p_{j1})Q_j\,dQ_1$$

به‌ازای تمام مقادیرممکن Q_j باید معادل باشند،

2 $$dU = \sum_{j=1}^{N} p_{1j}Q_j\,dQ_1$$

$$\frac{1}{2}(p_{1j}+p_{j1}) = p_{1j}$$

$$p_{j1} = p_{1j}$$

اثبات حکم سوم)

فرضها و نکات

- رسانای i بـــار مثبت Q_i دارد
- بقیهٔ رسا ناها بی‌بـــارند.
- چون رسانای j $(j \neq i)$ بی‌باراست، پس تعداد خالص خطوط جا به‌جایی که این رسانا را ترك می‌کنند صفرخواهد بود.
- بررسی دو حـــالت

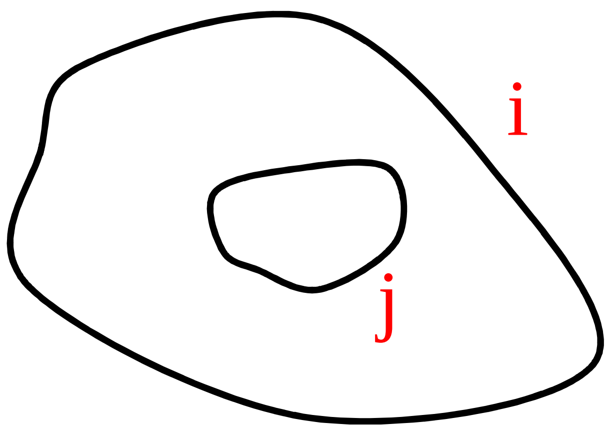
(الف) هیچ خط جابه‌جایی به‌رسانای j وارد یا ازآن خارج نمی‌شود؛

(ب) تعداد خطوط‌شار جابه‌جایی که وارد رسانای j می‌شوند با تعداد خطوط خروجی ازآن برابرند.

(الف) هیچ خط جابه‌جایی به‌رسانای j وارد یا ازآن خارج نمی‌شود؛

این رسانا دریك ناحیهٔ هم‌پتانسیل قراردارد، یعنی بایك رسانای دیگرحفاظت شده است.

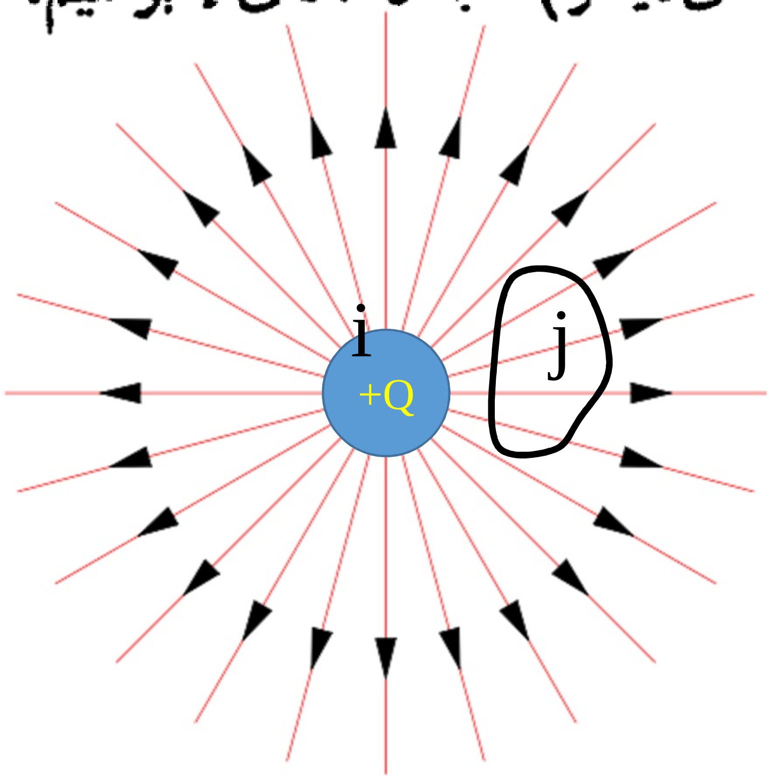
این رسانا ممکن است درون رسانـای i قرار گرفته وپتانسیل آن برابر φ_i باشد.



$$p_{ij} = p_{ii}$$

(ب) تعداد خطوط شار جابه‌جایی که وارد رسانای j می‌شوند با تعداد خطوط خروجی از آن برابرند.

منشأ شار جابه‌جایی بار، رسانای i است؛ پس باید بتوان یك خط‌شار را که به‌رسانای j وارد می‌شود به‌طرف عقب‌دنبال کنیم (شایدازطریق‌رساناهای‌دیگر) تا به رسانای i برسیم.
بنابراین، i درپتانسیل بالاتری از j قراردارد، یعنی



$$\varphi_i > \varphi_j \qquad (\text{مثبت است } Q_i)$$

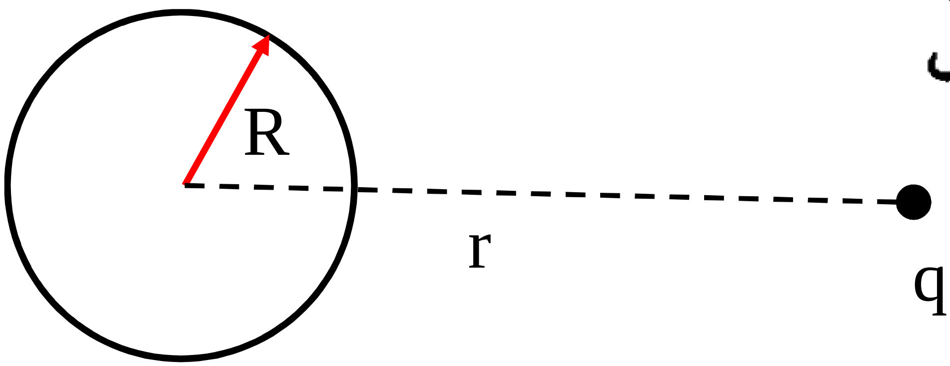
خطوط میدان از پتانسیل بیشتر به سمت پتانسیل کمتر است

$$p_{ii} > p_{ij}$$

مفید بودن ضرایب p_{ij}

ذکر یك مثال

یك رسانای کروی بی‌بار راکه یك بارنقطه‌ای q به‌فاصلهٔ r ازمرکز آن قراردارد



بارنقطه‌ای و کرهٔ رسانا را به‌عنوان دستگاهی مرکب ازدو رسانا درنظرمی گیریم

$$p_{12} = p_{21} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

اگر کره بار Q داشته باشد و «نقطه» بی‌بار باشد، پتانسیل « نقطه » برابر $Q/4\pi\varepsilon_0 r$ خواهد بود؛

وقتی «نقطه» بار q داشته باشد و کره بی‌بار باشد، پتانسیل کره برابر $q/4\pi\varepsilon_0 r$ خواهد بود.

۵.۶ ضرایب ظرفیت و ضرایب القا

$$\varphi_i = \sum_{j=1}^{N} p_{ij} Q_j$$

دستگاهی از N معادلهٔ خطی است که پتانسیل رساناها را برحسب بارهایشان بیان می‌کند.

این دستگاه معادلات را می‌توان برای تعیین بارهای Q_i حل کرد

$$Q_i = \sum_{j=1}^{N} c_{ij} \varphi_j$$

c_{ii} ضریب ظرفیت و c_{ij} $(i \neq j)$ ضریب القا نامیده می‌شود.

حل واقعی معــادلهٔ که ضرایب c را برحسب p_{ij}ها بیان‌می‌کند،

با وارونه‌کردن ماتریس (بااستفاده از دترمینانها) انجام شود.

خواص c ها مشابه p ها

$(1)\ c_{ij} = c_{ji}$،

$(2)\ c_{ii} > 0$،

(۳) ضرایب القاصفرویامنفی‌اند

بازنویسی رابطه انرژی الکتروستاتیک

$$U=\frac{1}{2}\sum_{j} Q_j\varphi_j$$

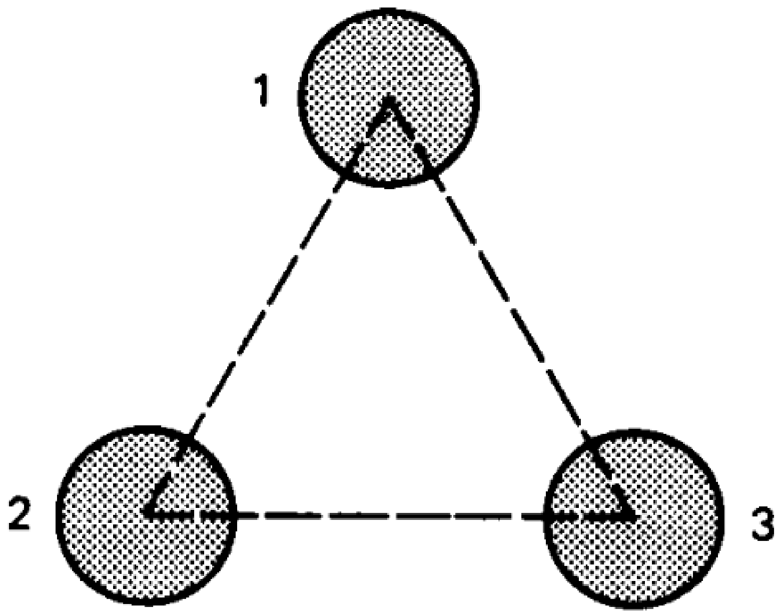
$$Q_i=\sum_{j=1}^{N} c_{ij}\,\varphi_j$$

$$U=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} c_{ij}\varphi_i\varphi_j$$

انرژی الکتروستاتیکی دستگاهی مرکب از N رسانا

Example 6.3 The Coefficients of Potential-Three Identical Spheres

This example shows how the method of coefficients of potential can be used to solve some electrostatic problems. Consider three initially isolated and uncharged equal conducting spheres placed with their centers at the vertices of an equilateral triangle as shown in Fig. 6.1.



Conductor 1 is now charged to potential V and isolated, and it is found to have a charge Q_1, on it. Conductor 2 is then charged to potential V and isolated, and it is found to have a charge Q_2, on it. Conductor 3 is finally charged to potential V and isolated.

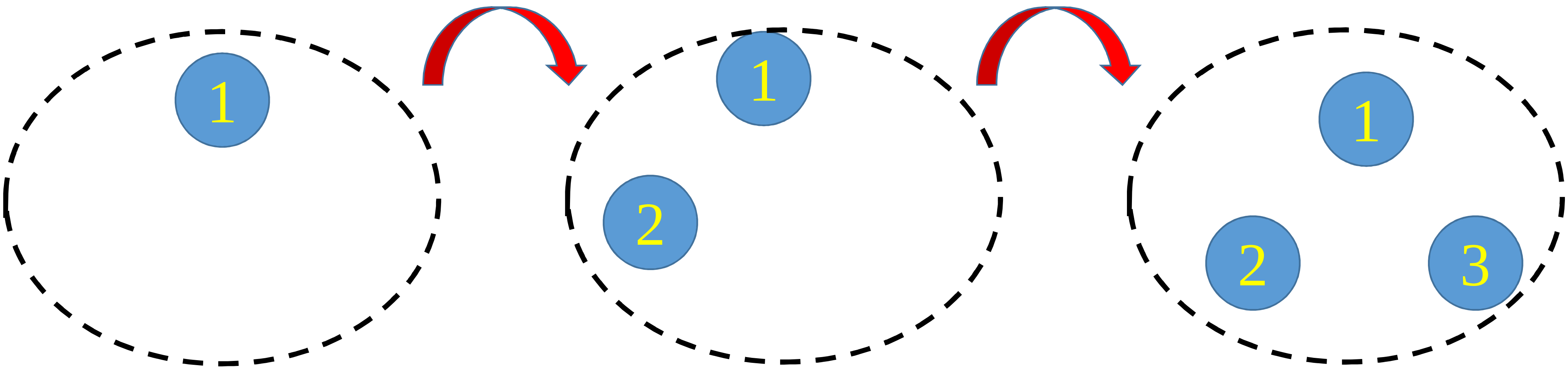
The coefficients of potential P_{ij} where i, j = 1 to 3 are not all distinct.

- Since the spheres are identical, then $P_{11} = P_{22} = P_{33}$
- because of the symmetrical positioning of the spheres, then $P_{12} = P_{13} = P_{23}$.
- using the property $P_{ij} = P_{ji}$,

then there are only two distinct coefficients: P_{11}, and P_{12}.

$$\Phi_j = \sum_{k=1}^{N} P_{jk} Q_k$$

In the first step, the charges on conductors 2 and 3 are zeros



$$V = P_{11}Q_1$$

$$V = P_{11}Q_2 + P_{12}Q_1$$

$$V = P_{11}Q_3 + P_{12}(Q_1 + Q_2)$$

$$\begin{cases} V = P_{11}Q_1 \\ V = P_{11}Q_2 + P_{12}Q_1 \\ V = P_{11}Q_3 + P_{12}(Q_1 + Q_2) \end{cases}$$

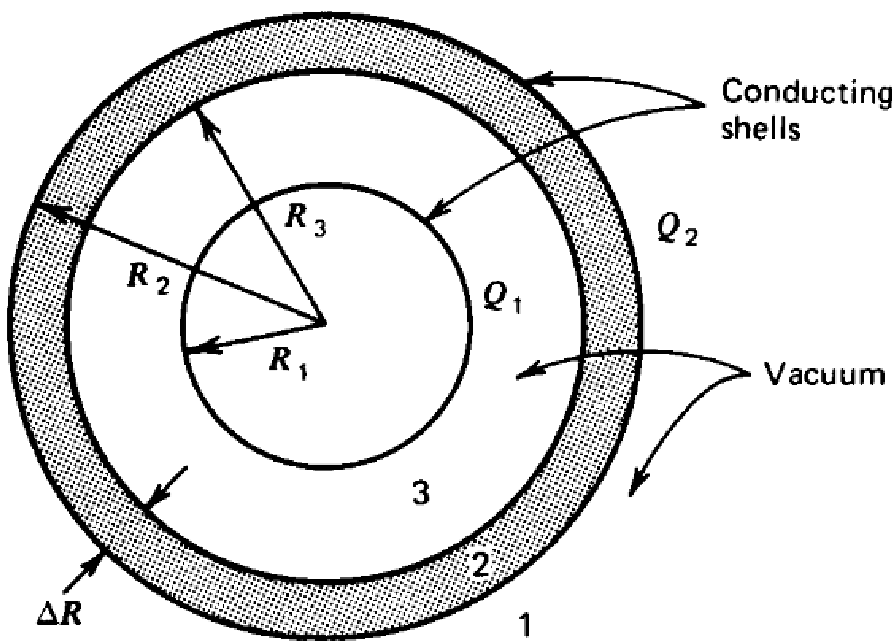
$$P_{11} = V/Q_1,$$

$$P_{12} = \frac{V}{Q_1}\left(1 - \frac{Q_2}{Q_1}\right)$$

$$Q_3 = Q_2^2/Q_1$$

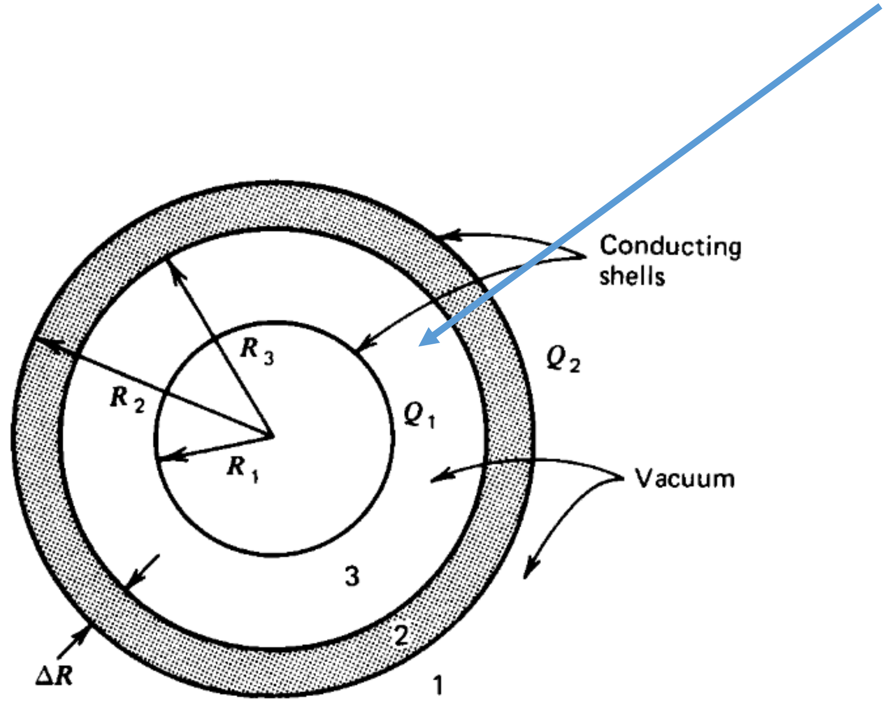
Example: Coefficients of Potential of Concentric Spheres

Let us assume we have two conducting, concentric, spherical shells of outer radii R_1 and R_2. Suppose charges Q_1 and Q_2 are placed upon these shells, respectively, and we wish to find the potential function at all points due to the resultant charge distribution.



$$\mathbf{E}_1 = \frac{Q_1 + Q_2}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2} \qquad r > R_2$$

$$\mathbf{E}_3 = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2} \qquad R_1 < r < R_3$$



$$\Phi = -\int_{\infty}^{r} \vec{E} \, . \, d\vec{r}$$

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{Q_1}{r} + \frac{Q_1 + Q_2}{R_2} - \frac{Q_1}{R_3}\right) \qquad R_1 < r < R$$

The potential of the inner sphere ($r = R_1$)

$$\Phi_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_3}\right)Q_1 + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_2}{R_2}$$

The potential at the outer sphere ($r = R_3$)

$$\Phi_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1}{R_2} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_2}{R_2}$$

$$P_{11} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_3}\right)$$

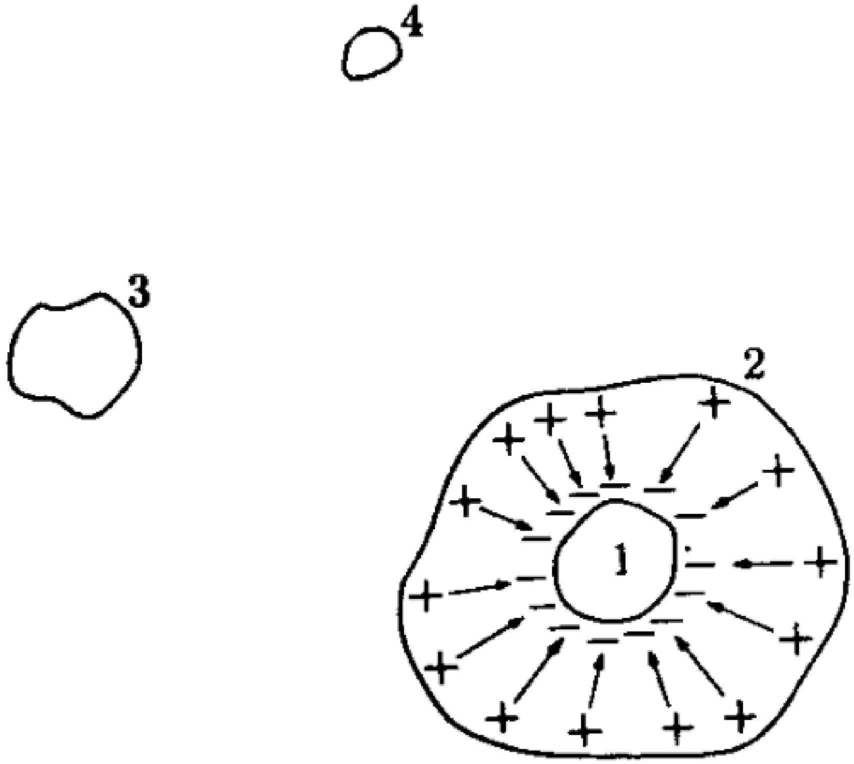
$$P_{12} = P_{21} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{R_2}$$

$$P_{22} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{R_2}$$

۶.۶ خازنها

دو رسانا که بتوانند بارهای مساوی و مختلف العلامه ($\pm Q$) را در خود ذخیره کنند، و اختلاف پتانسیل میان آنها به باردار بودن سایر رساناهای دستگاه بستگی نداشته باشد، تشکیل خازن می‌دهند. این بستگی نداشتن به بارهای دیگر به معنی آن است که یکی از این دو رسانا مانند سپری رسانای دیگر را حفاظت می‌کند. به عبارت دیگر، پتانسیلی که بارهای دیگر در هر یک از رساناهای این زوج رسانا ایجاد می‌کنند باید یکسان باشد. چنین وضعی در شکل ۱.۶ نشان داده شده است و در آن رساناهای ۱ و ۲ خازنی از این نوع را تشکیل می‌دهند.

اگر دو رسانای ۱ و ۲ خازنی تشکیل بدهند،



$$\varphi_{۱} = p_{۱۱} Q + p_{۱۲}(-Q) + \varphi_x$$

$$\varphi_{۲} = p_{۱۲} Q + p_{۲۲}(-Q) + \varphi_x$$

$\pm Q$ بارهای ذخیره شده.

φ_x پتانسیل مشترکی است که سایر بارها ایجـاد می کنند.

$$\varphi_1 = p_{11} Q + p_{12}(-Q) + \varphi_x$$

$$\varphi_2 = p_{12} Q + p_{22}(-Q) + \varphi_x$$

$$\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 = (p_{11} + p_{22} - 2p_{12})Q$$

اختلاف پتانسیل میان دو رسانای یك خازن متناسب است با بار ذخیره شده، Q.

وارونه سازی معادله

$$Q = C\,\Delta\varphi$$

$$C = (p_{11} + p_{22} - 2p_{12})^{-1}$$

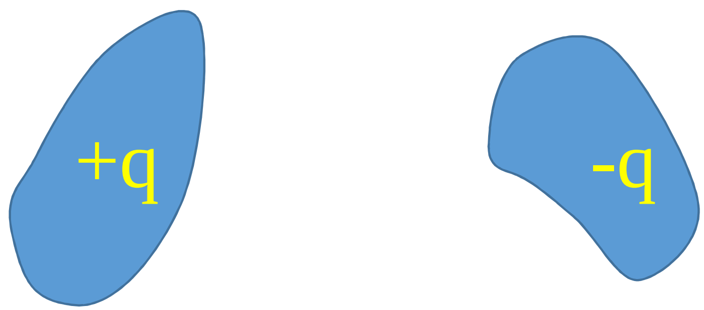
ظرفیت خازن

انرژی خازن باردار

$$U = \frac{۱}{۲} C(\Delta\varphi)^{۲} = \frac{۱}{۲} Q\,\Delta\varphi = \frac{۱}{۲} \frac{Q^{۲}}{C}$$

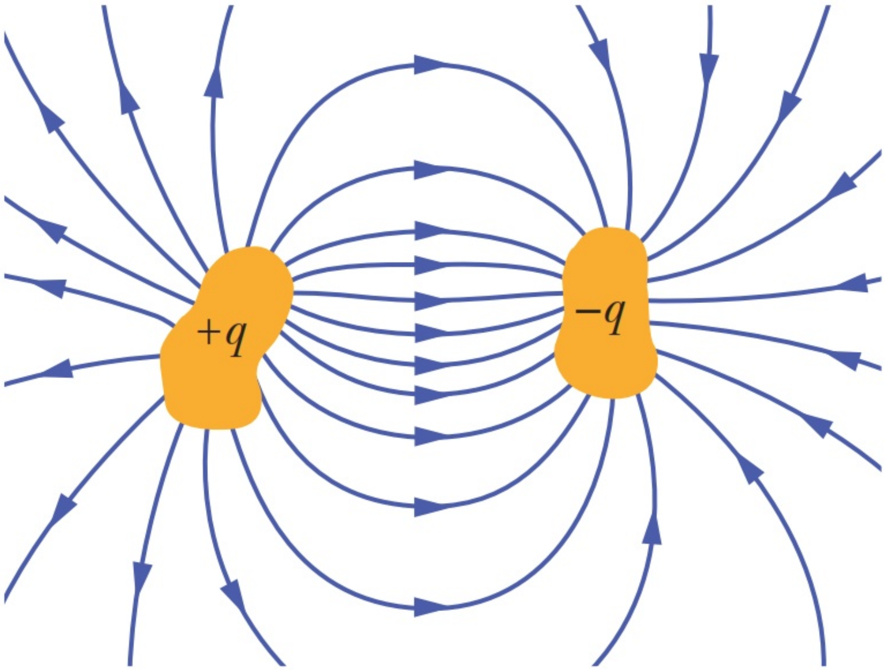
دستور العمل محاسبه ظرفیت خازن ها:

۱- فرض می شود که خازن دارای بار ذخیره شده q می باشد. بنابراین یک صفحه رسانا دارای بار q+ و صفحه دیگر بار q– است.



دستور العمل محاسبه ظرفیت خازن ها:

۲- میدان ایجاد شده بین دو رسانای باردار محاسبه می شود (به کمک قانون گاوس)

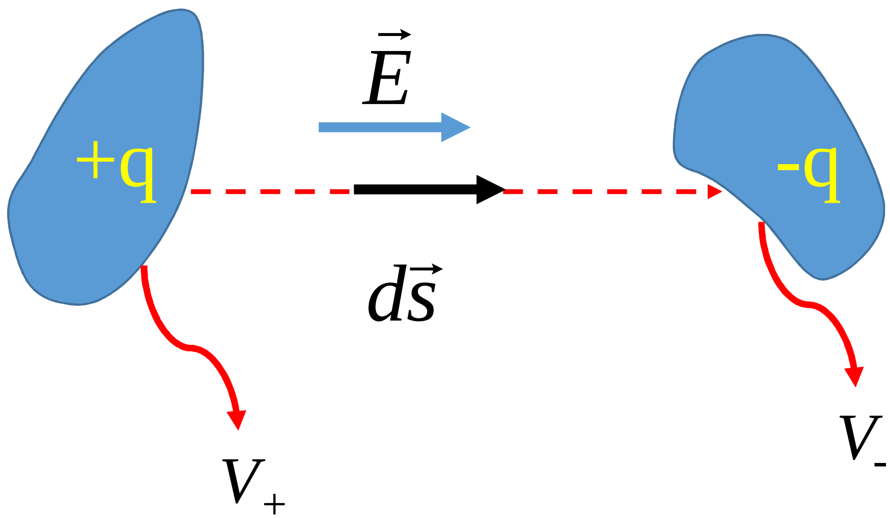


$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

دستور العمل محاسبه ظرفیت خازن ها:

۳- محاسبه اختلاف پتانسیل بین دو رسانا:

به ازاء بار $+q$ و $-q$ ، دو صفحه رسانا دارای اختلاف پتانسیل مشخصی می باشند. بنابراین اختلاف پتانسیل بین دو رسانا را حساب نمود.

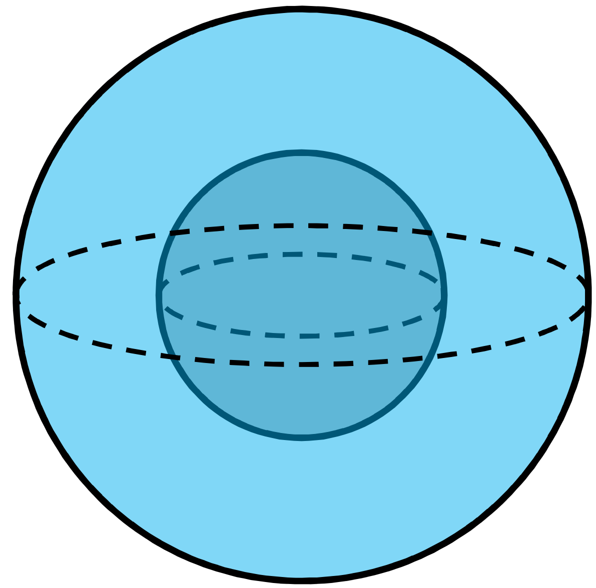


$$V = V_+ - V_- = -\int_{-}^{+} \vec{E} \cdot d\vec{s} = \int_{+}^{-} \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

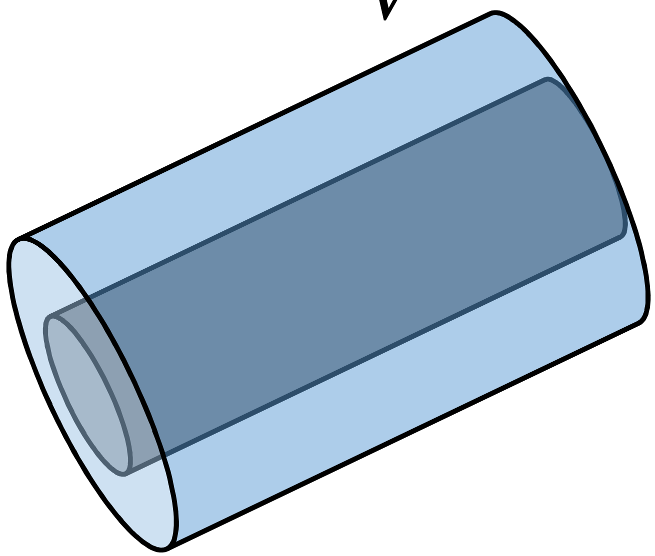
دستور العمل محاسبه ظرفیت خازن ها:

٤- محاسبه ظرفیت خازن:

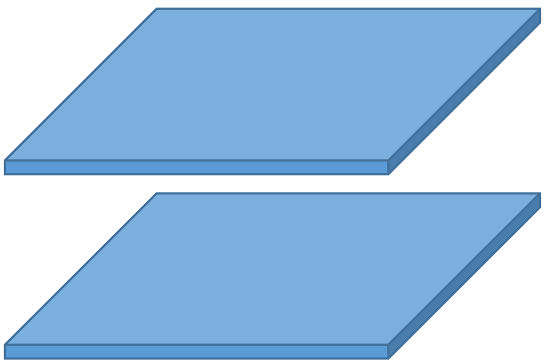
$$C = \frac{q}{V}$$



خازن کروی



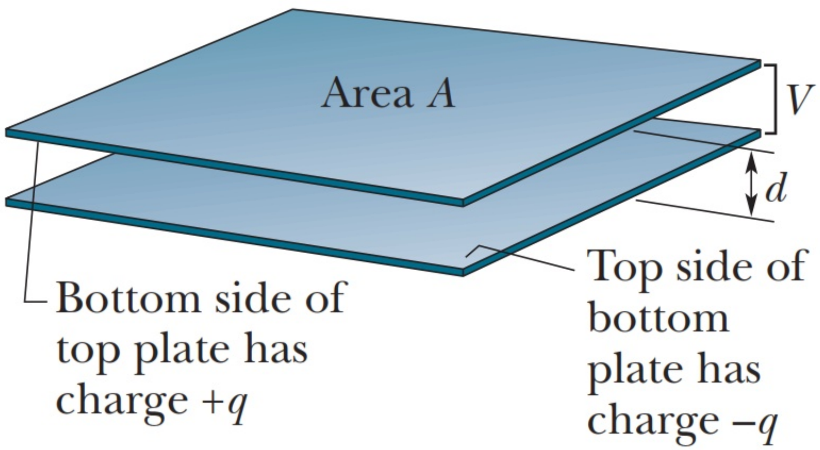
خازن استوانه ای

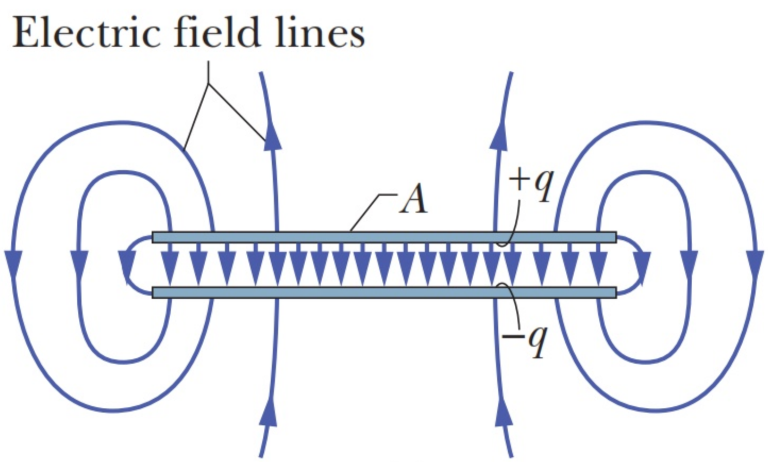


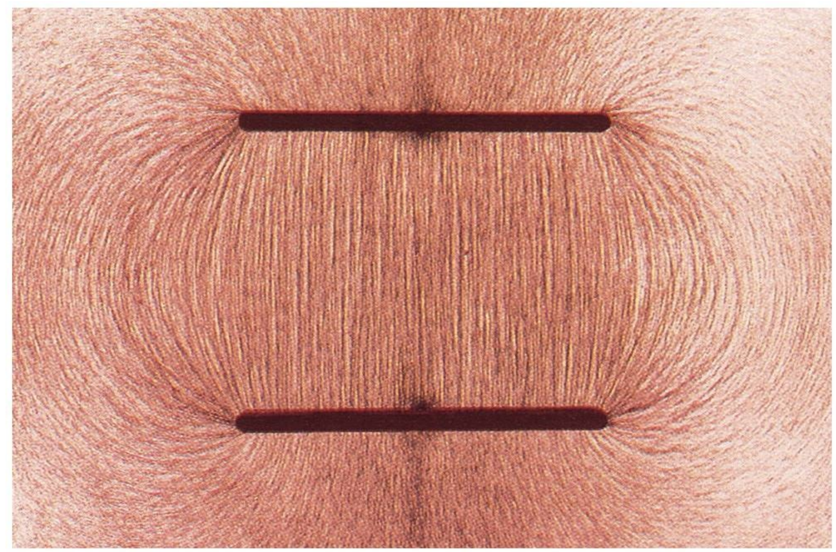
خازن تخت

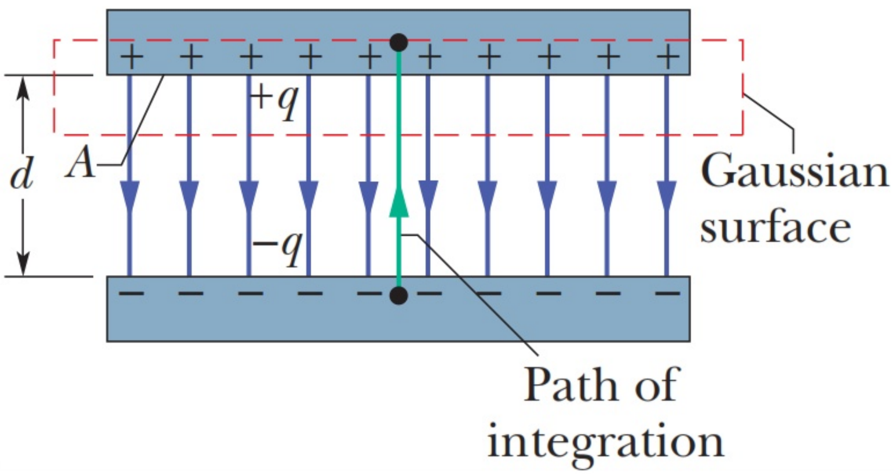
محاسبه ظرفیت خازن تخت

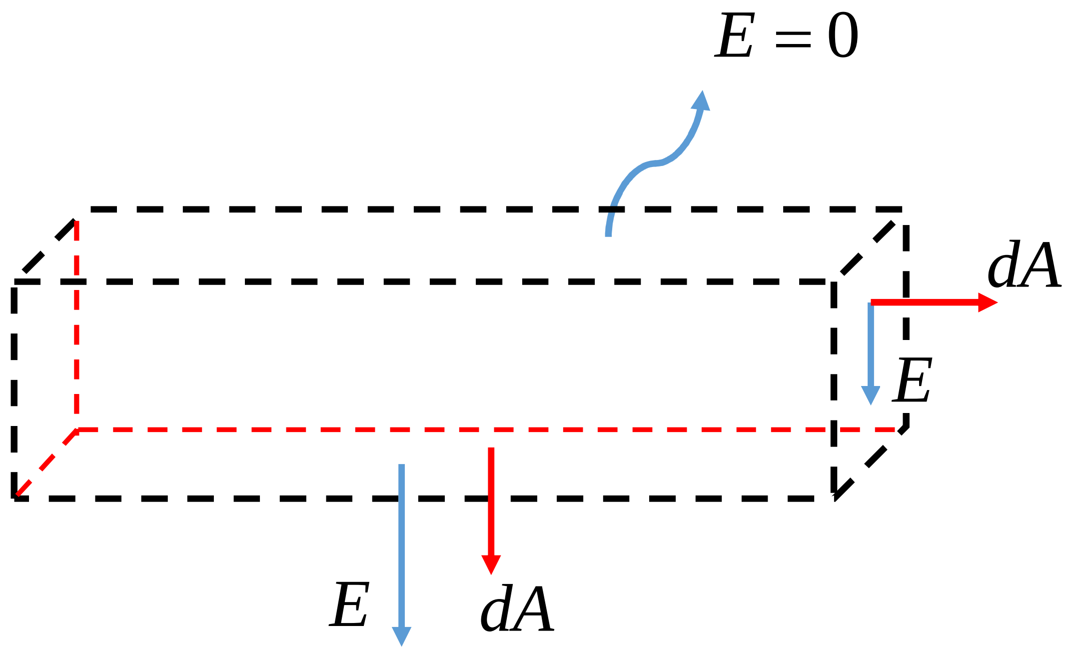
خازن تخت شامل دو صفحه رسانا به مساحت های A و فاصله d از همدیگر که در بین آنها دی الکتریک هوا وجود دارد.











$$\oint \vec{E}\,.\,d\vec{A} = \frac{q}{\varepsilon_0} \quad \rightarrow \quad \int \vec{E}\,.\,d\vec{A} + \int \vec{E}\,.\,d\vec{A} + \int \vec{E}\,.\,d\vec{A} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

قاعده بالا	قاعده پایین	سطح جانبی
$E = 0$	$E \neq 0$	$E \neq 0$
	$\vec{E} \parallel d\vec{A}$	$\vec{E} \perp d\vec{A}$

$$\oint \vec{E}\,.\,d\vec{A} = \frac{q}{\varepsilon} \quad \rightarrow \quad EA = \frac{q}{\varepsilon}$$

$$\rightarrow \quad E = \frac{q}{\varepsilon A} = \frac{\sigma}{\varepsilon}$$

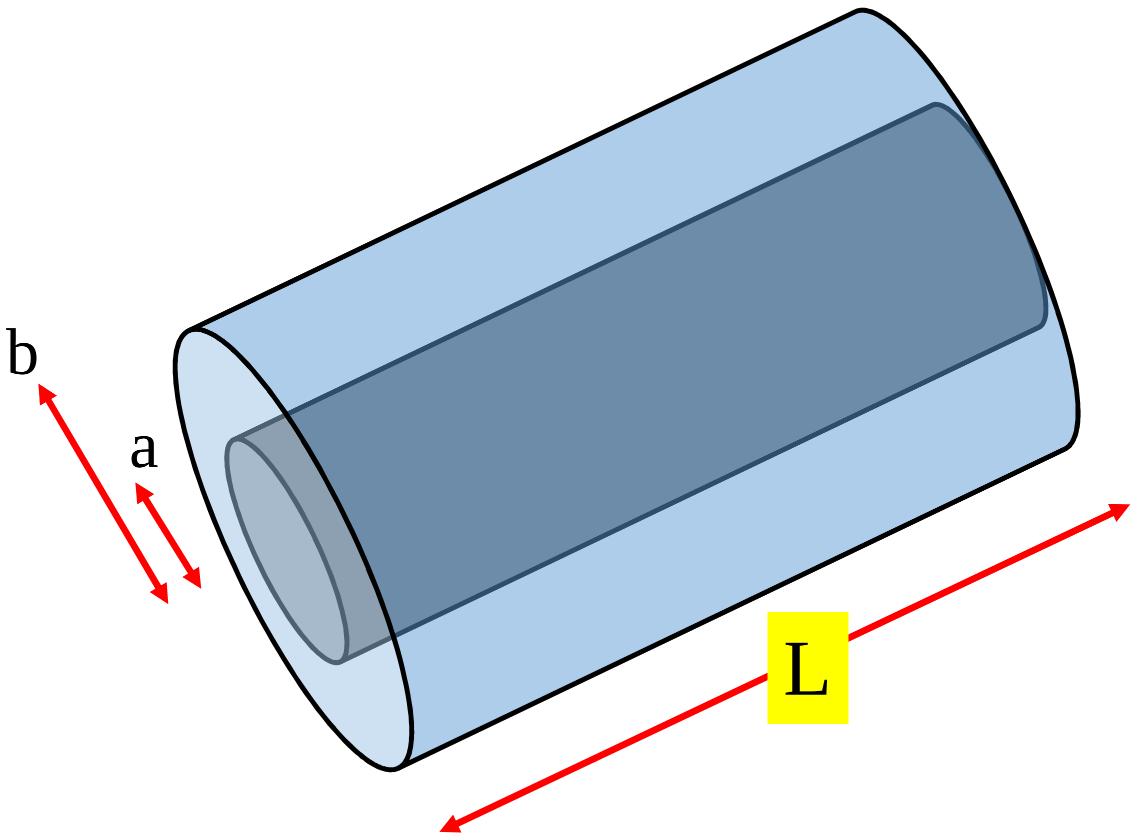
$$\Delta\varphi = \int_{+}^{-} \vec{E}\,.\,d\vec{s} = \int_{+}^{-} E ds = E \int_{+}^{-} ds$$

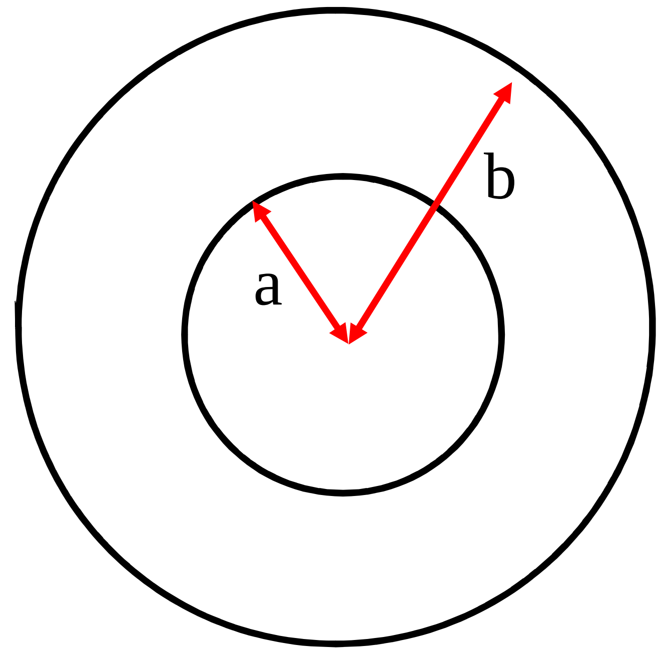
$$\rightarrow \quad \Delta\varphi = Ed = \frac{q}{\varepsilon A} d$$

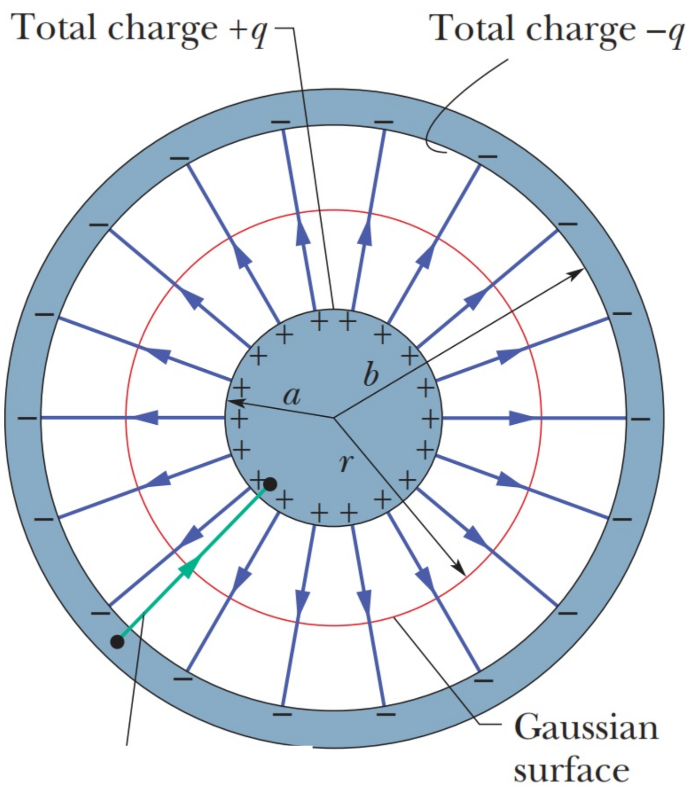
$$C = \frac{q}{\Delta\varphi} = \frac{q}{\frac{q}{\varepsilon A} d} \quad \rightarrow \quad \boxed{C = \frac{\varepsilon\ A}{d}}$$

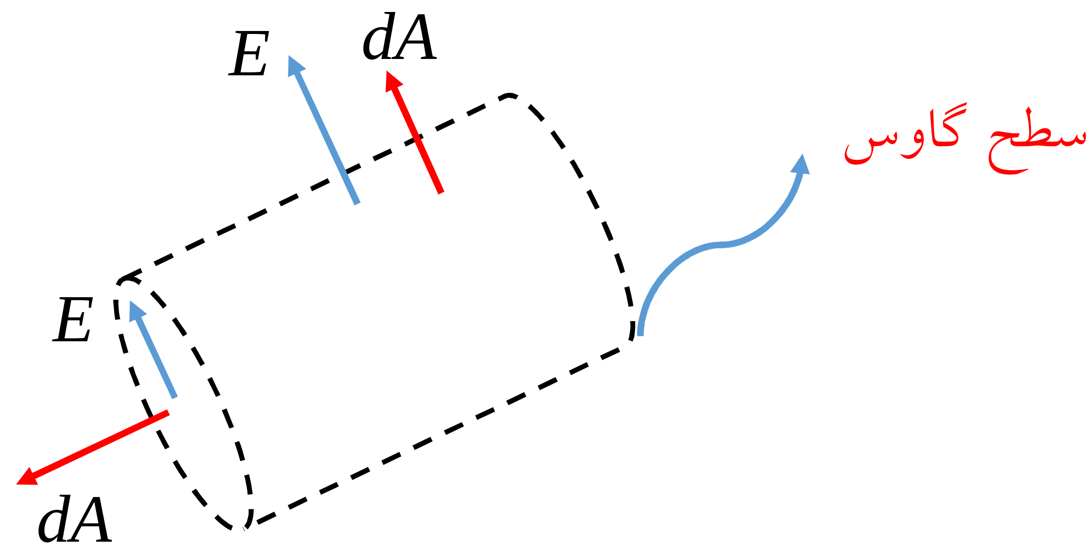
محاسبه ظرفیت خازن استوانه ای

خازن استوانه ای شامل دو صفحه استوانه ای شکل رسانای هم محور با شعاع داخلی a و خارجی b و به طول L که فضای بین استوانه های رسانا، دی الکتریک هوا وجود دارد.






Total charge +q
Total charge −q
a
b
r
Gaussian surface


E
dA
E
dA
سطح گاوس

$$\oint \vec{E}\,.\,d\vec{A} = \frac{q}{\varepsilon} \quad \rightarrow \quad \int \vec{E}\,.\,d\vec{A} + \int \vec{E}\,.\,d\vec{A} + \int \vec{E}\,.\,d\vec{A} = \frac{q}{\varepsilon}$$

قاعده جلو	قاعده عقب	سطح جانبی
$E \neq 0$	$E \neq 0$	$E \neq 0$
$\vec{E} \perp d\vec{A}$	$\vec{E} \perp d\vec{A}$	$\vec{E} \parallel d\vec{A}$

$$\oint \vec{E}\,.\,d\vec{A} = \frac{q}{\varepsilon} \quad \rightarrow \quad \int \vec{E}\,.\,d\vec{A} = E\int dA = \frac{q}{\varepsilon}$$

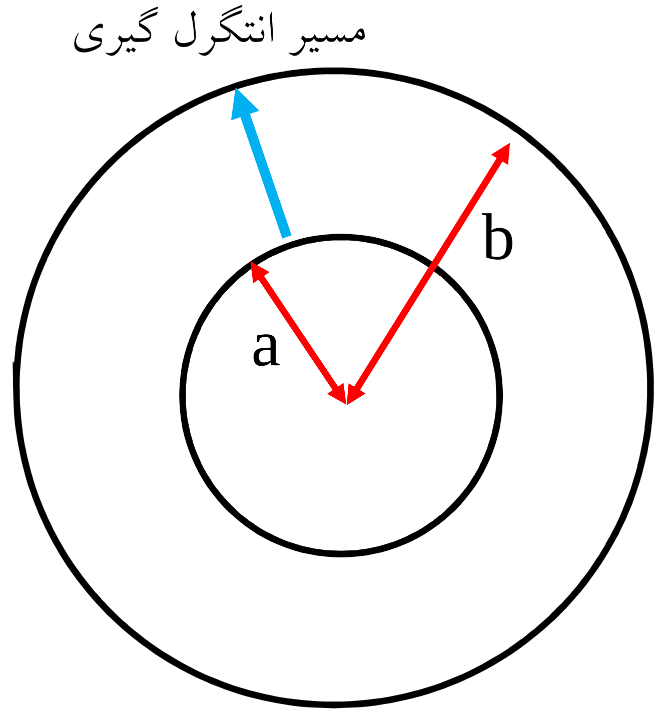
$$\rightarrow \quad E(2\pi r L) = \frac{q}{\varepsilon} \quad \rightarrow \quad E = \frac{q}{2\pi\varepsilon\ L\ r}$$

$$\Delta\varphi = \int_{+}^{-} \vec{E} \, . \, d\vec{s} = \int_{+}^{-} E dr = \int_{a}^{b} \frac{q}{2\pi\varepsilon \, L \, r} dr$$

$$\Delta\varphi = \frac{q}{2\pi\varepsilon \, L} \int_{a}^{b} \frac{dr}{r} = \frac{q}{2\pi\varepsilon \, L} \ln \frac{b}{a}$$

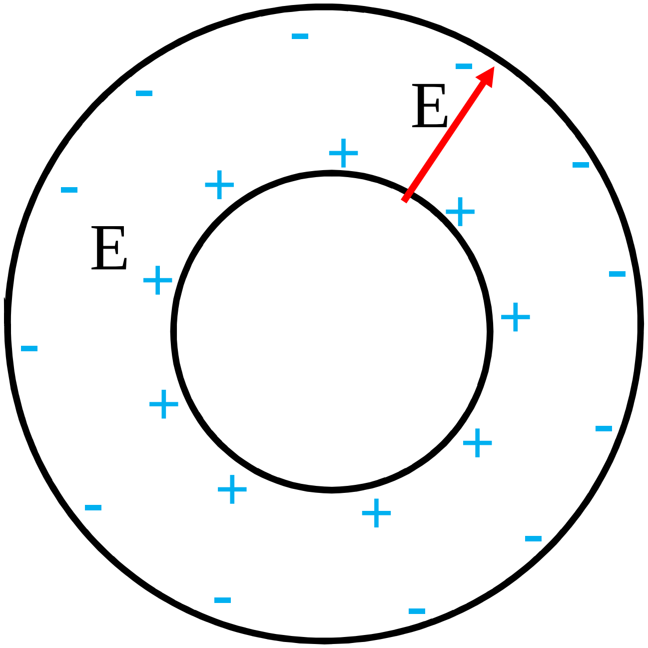
$$C = \frac{q}{\Delta\varphi} = \frac{q}{\dfrac{q}{2\pi\varepsilon \, L} \ln \dfrac{b}{a}}$$

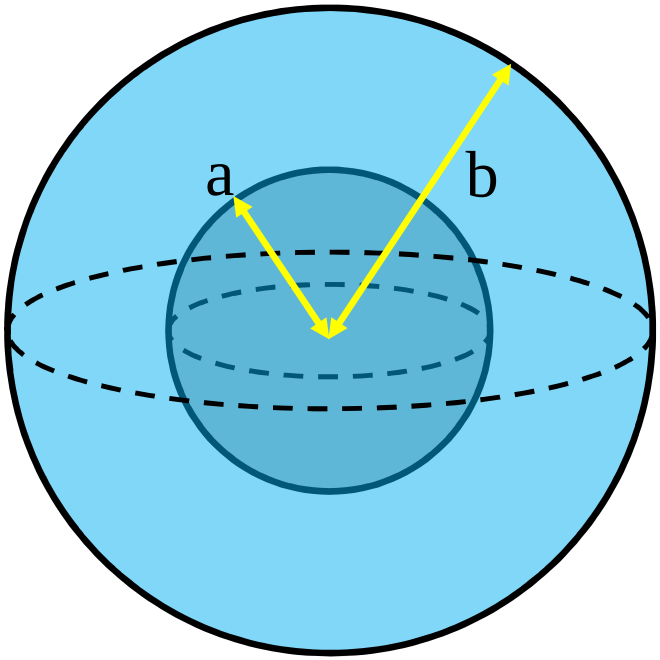
$$\boxed{C = \frac{2\pi\varepsilon \, L}{\ln \dfrac{b}{a}}}$$



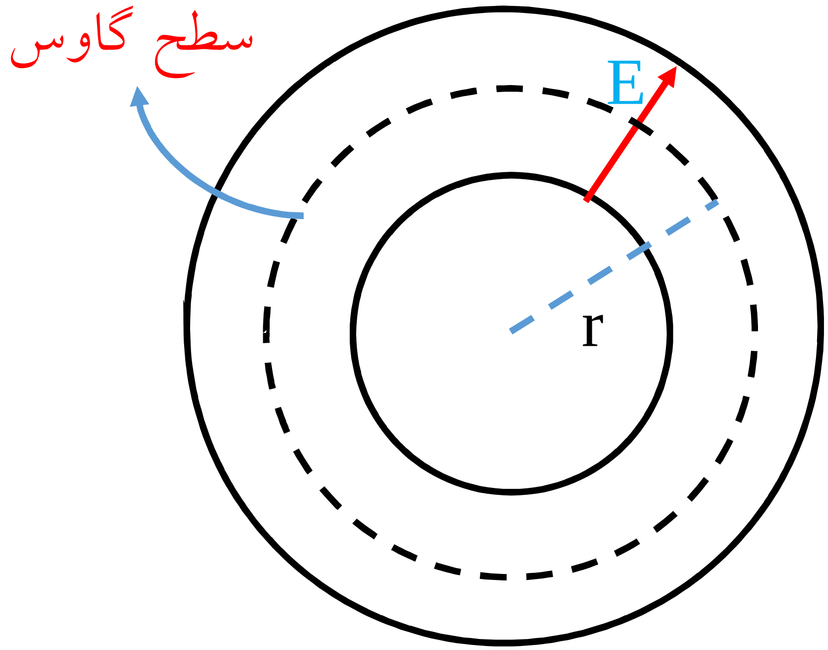
محاسبه ظرفیت خازن کروی

خازن کروی شامل دو صفحه کروی شکل رسانای هم مرکز با شعاع داخلی a و خارجی b که فضای بین کره های رسانا، دی الکتریک هوا وجود دارد.



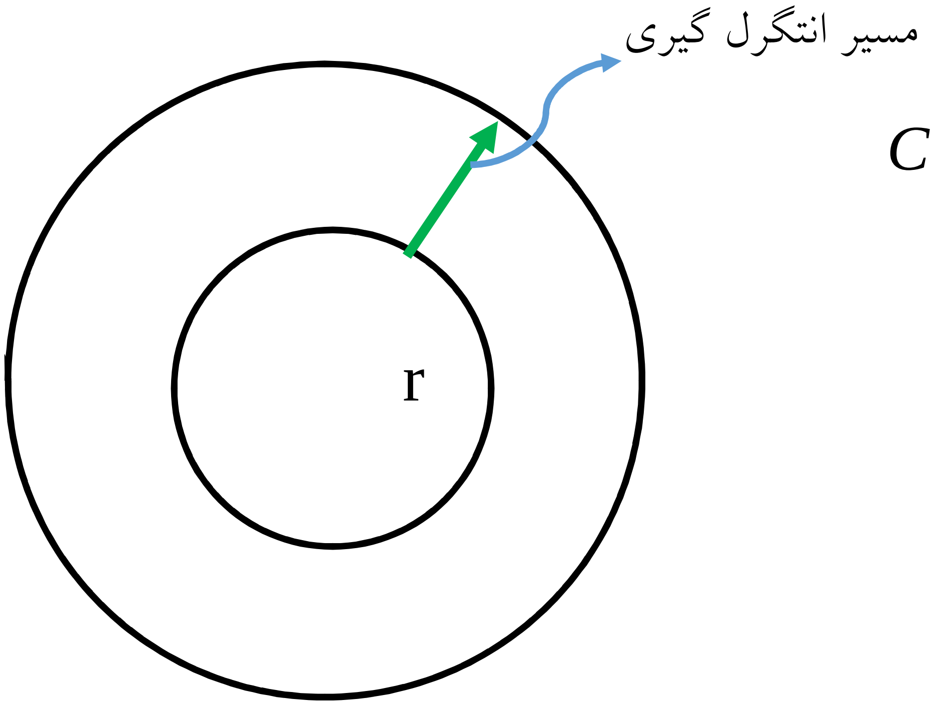


$$\oint \vec{E}\,.\,d\vec{A} = \frac{q}{\varepsilon} \quad \rightarrow \quad E(4\pi r^2) = \frac{q}{\varepsilon} \quad \rightarrow \quad E = \frac{q}{4\pi\varepsilon\, r^2}$$



$$\Delta\varphi = \int_{+}^{-} \vec{E}\,.\,d\vec{s} = \int_{+}^{-} E dr = \int_{a}^{b} \frac{q}{4\pi\varepsilon\, r^{2}}\, dr$$

$$\Delta\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon}\int_{a}^{b}\frac{dr}{r^{2}} = \frac{q}{4\pi\varepsilon}\left(-\frac{1}{r}\right)_{a}^{b} = \frac{q}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{b-a}{ab}\right)$$

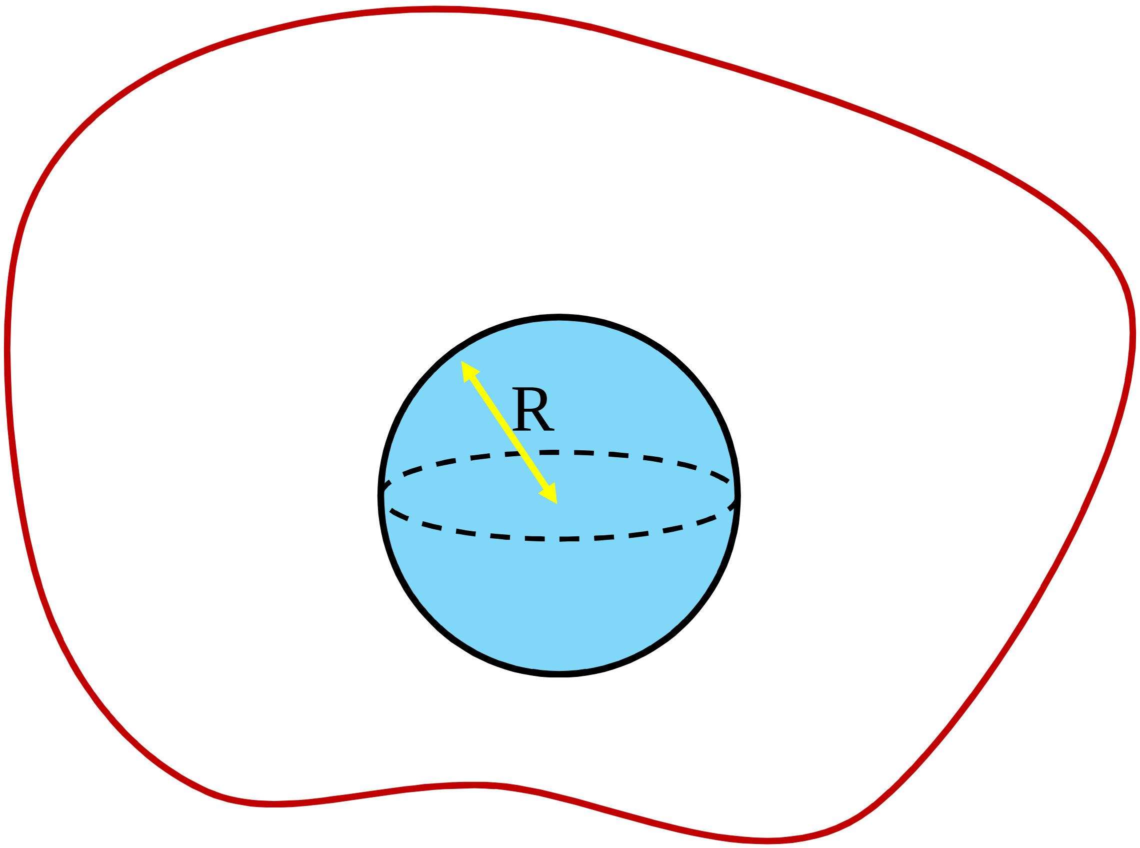


$$C = \frac{q}{\Delta\varphi} = \frac{q}{\dfrac{q}{4\pi\varepsilon}\left(\dfrac{b-a}{ab}\right)}$$

$$\boxed{C = 4\pi\varepsilon\left(\frac{ab}{b-a}\right)}$$

ظرفیت کره منزوی

یک کره باردار و فضای اطراف آن را می توان به عنوان یک خازن در نظر گرفت.



$$C = 4\pi\varepsilon\left(\frac{ab}{b-a}\right)$$

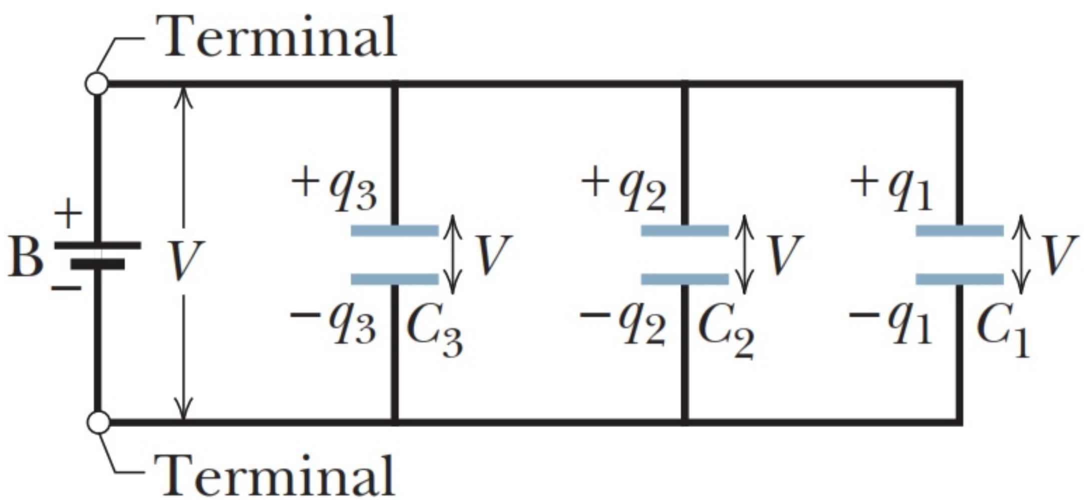
$$a \to R$$

$$b \to \infty$$

$$\boxed{C = 4\pi\varepsilon\, R}$$

ترکیب خازنها

اتصال موازی خازن ها



۱- شرط موازی بودن خازن ها:

❖ در رفتن از یک پایانه به پایانه دیگر در هر مسیرفقط از یک خازن بگذریم

❖ همه خازن ها در دو سر مشترک می باشند

همه صفحات با بار مثبت به همدیگر و همه صفحات با بار منفی به همدیگر متصل شده باشند

اختلاف پتانسیل دو سر همه خازنها یکسان

$$V_1 = V_2 = V_3 = V$$

❖ کل بار تحویل داده شده به خازن ها وابسته به ظرفیت شان بین شان تقسیم می گردد.

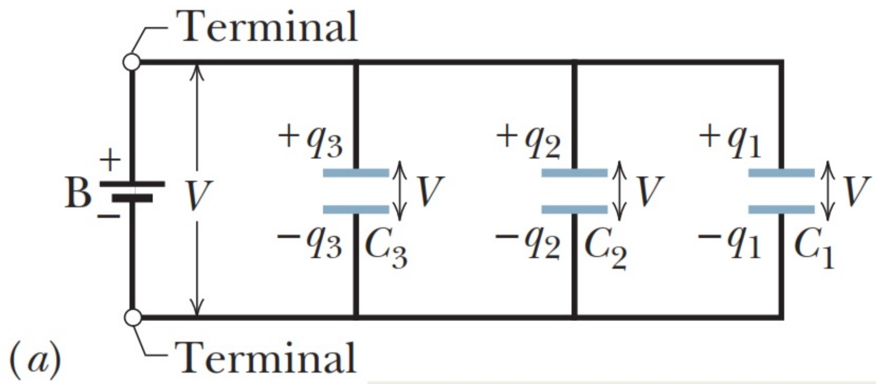
$$q_t = q_1 + q_2 + q_3$$

۲- بار ذخیره شده روی خازن ها

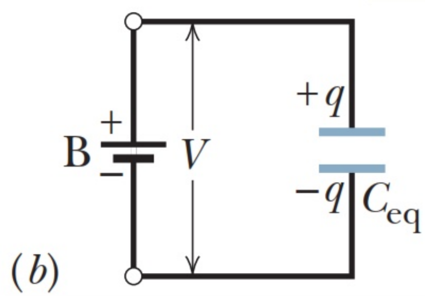
$$q_1 = C_1 V$$
$$q_2 = C_2 V$$
$$q_3 = C_3 V$$

$$q_t = q_1 + q_2 + q_3$$
$$q_t = C_1 V + C_2 V + C_3 V$$
$$q_t = (C_1 + C_2 + C_3) V$$

۳- خازن معادل:



Parallel capacitors and their equivalent have the same V ("par-V").



خازن معادل با یک مجموعه از خازنهای موازی، خازنی است که اگر به همان پتانسیل که به مجموعه خازنها وصل شده وصل شود باری برابر با بار کل ذخیره شده روی صفحات مجموعه خازن ها در آن ذخیره می گردد

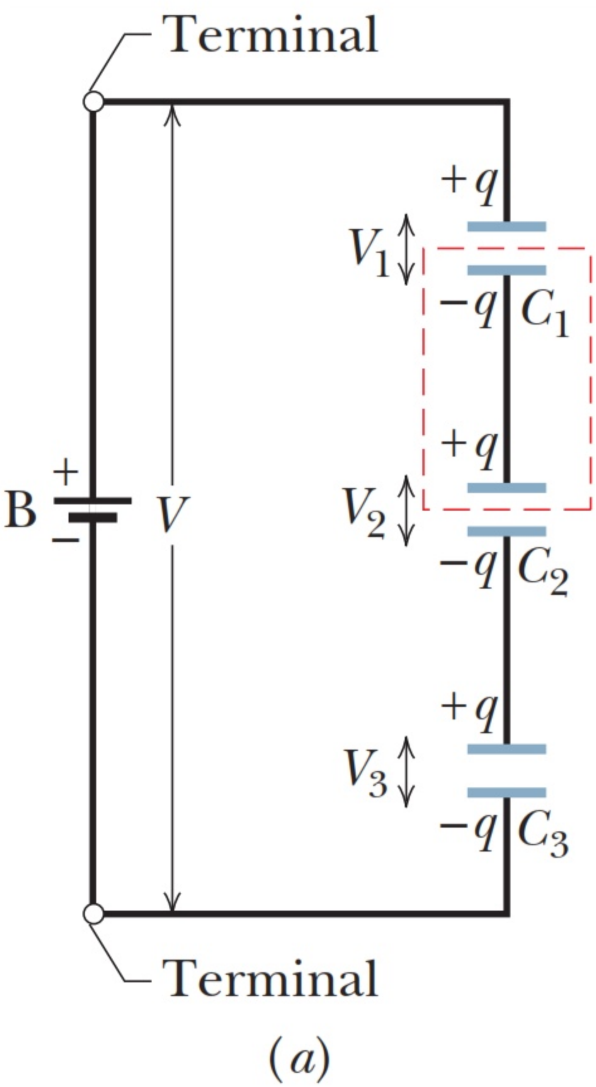
$$q_t = \sum_i C_i V$$

$$q_t = C_{eq} V$$

$$C_{eq} = \sum_i C_i$$

ترکیب خازنها

اتصال سری یا متوالی خازن ها



۱- شرط سری بودن خازن ها:

❖ در رفتن از یک پایانه به پایانه دیگر در هر مسیر از همه خازن ها بگذریم

❖ صفحه مثبت یک خازن به صفحه منفی خازن مجاور وصل می باشد

$$V_t = V_1 + V_2 + V_3$$

❖ بار ذخیره شده روی همه خازن ها یکسان است

$$q_t = q_1 = q_2 = q_3$$

۲- پتانسیل خازن ها

$$V_1 = \frac{q}{C_1}$$

$$V_2 = \frac{q}{C_2}$$

$$V_3 = \frac{q}{C_3}$$

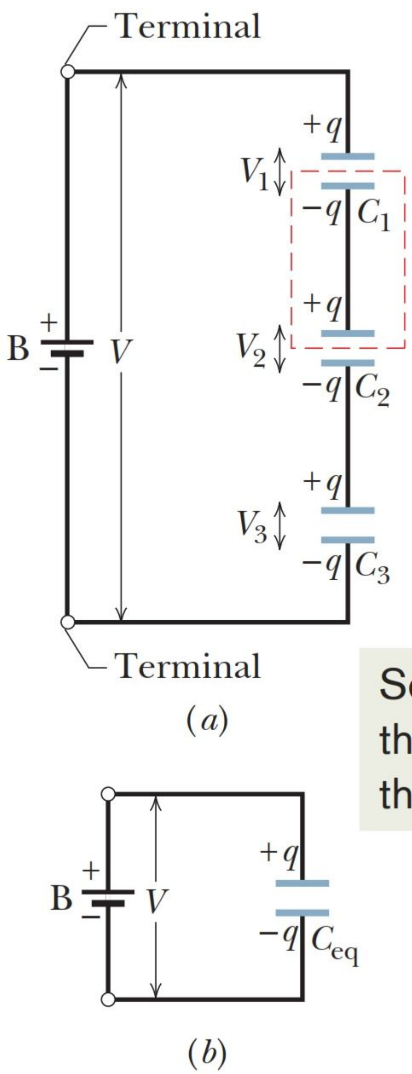
$$V_t = V_1 + V_2 + V_3$$

$$V_t = \frac{q}{C_1} + \frac{q}{C_2} + \frac{q}{C_3}$$

$$V_t = q(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3})$$

۳- خازن معادل:

خازن معادل با یک مجموعه از خازنهای سری، خازنی است که اگر به پتانسیل کلی که به مجموعه خازنها وصل شده وصل شود باری برابر با بار کل روی صفحات آن ذخیره می گردد



Series capacitors and their equivalent have the same *q* (“seri-q”).

$$V_t = q\sum_i \frac{1}{C_i}$$

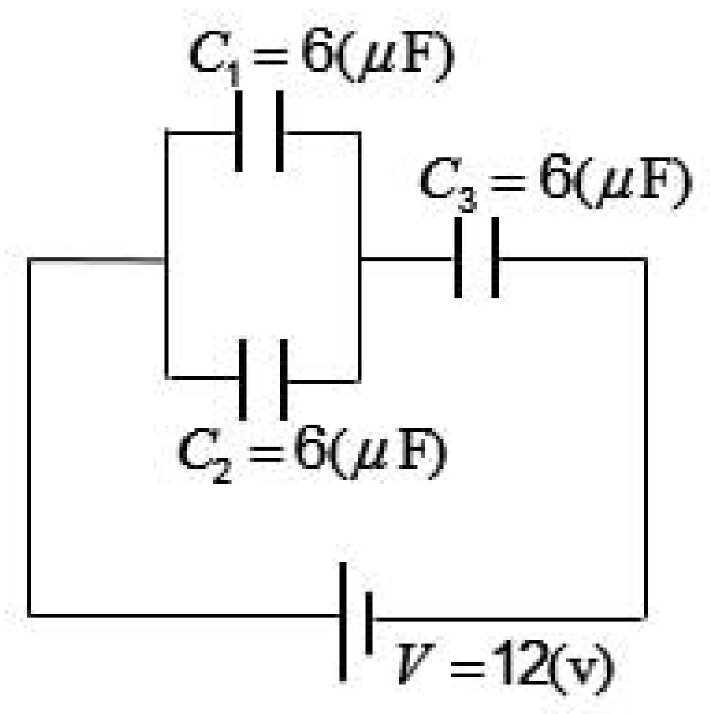
$$V_t = \frac{q_t}{C_{eq}}$$

$$\boxed{\frac{1}{C_{eq}} = \sum_i \frac{1}{C_i}}$$

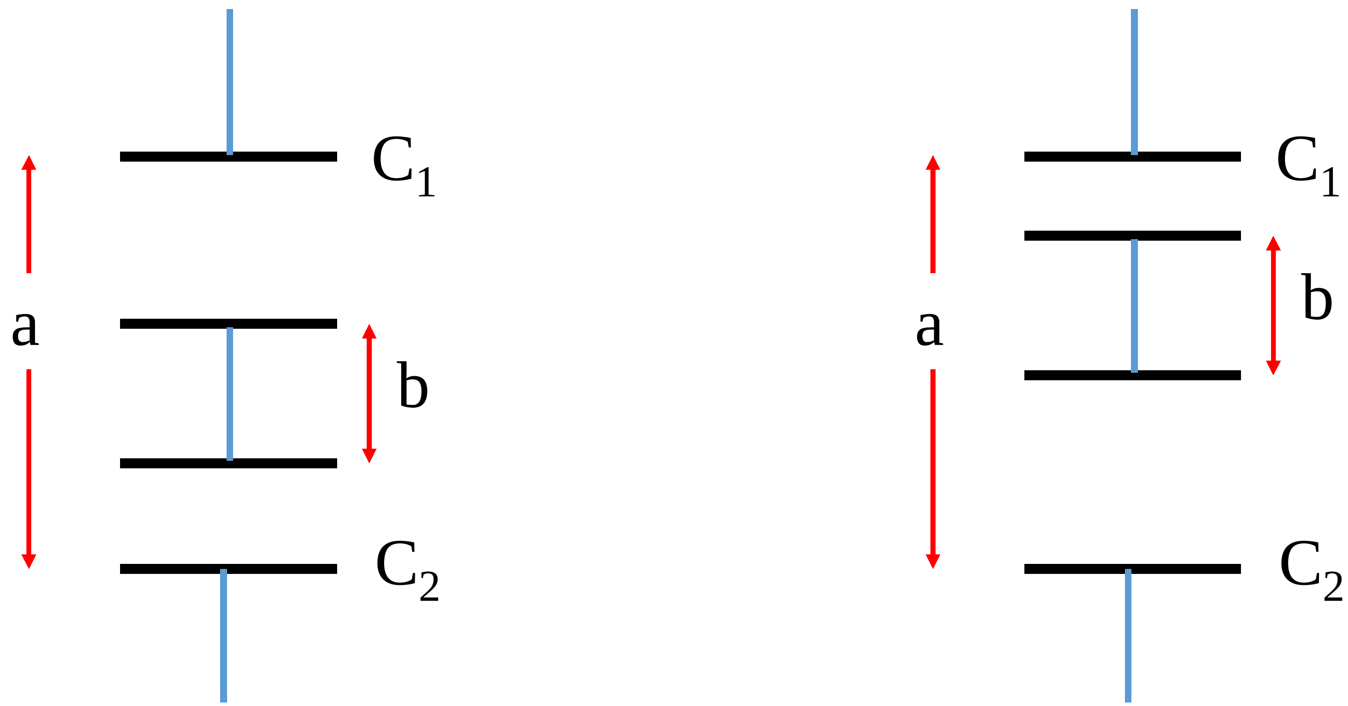
ترکیب خازنها

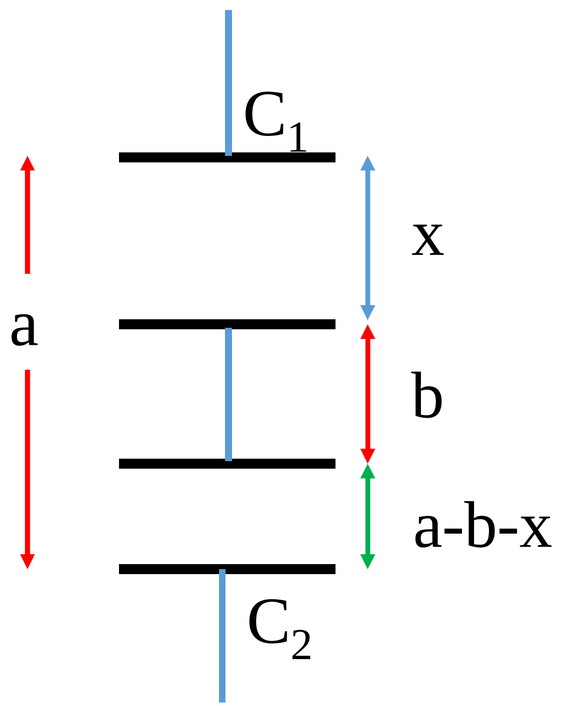
اتصال مرکب خازن ها

ترکیبی از حالت های سری و موازی



مثال) دو خازن تخت C_1 و C_2 با صفحات A با همدیگر سری شده اند و بخش میانی این دو خازن به طول b در جایی بین صفحه بالایی و پایینی قرار دارد. ظرفیت معادل را بدست آورید





$$C_1 = \varepsilon_0 \frac{A}{x}$$

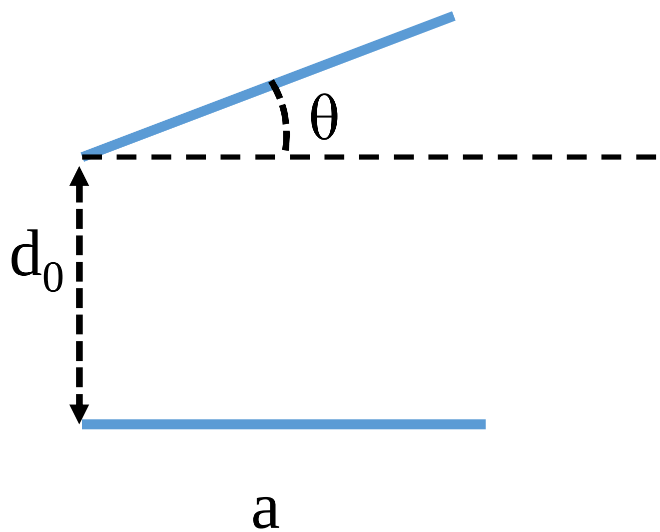
$$C_2 = \varepsilon_0 \frac{A}{a-b-x}$$

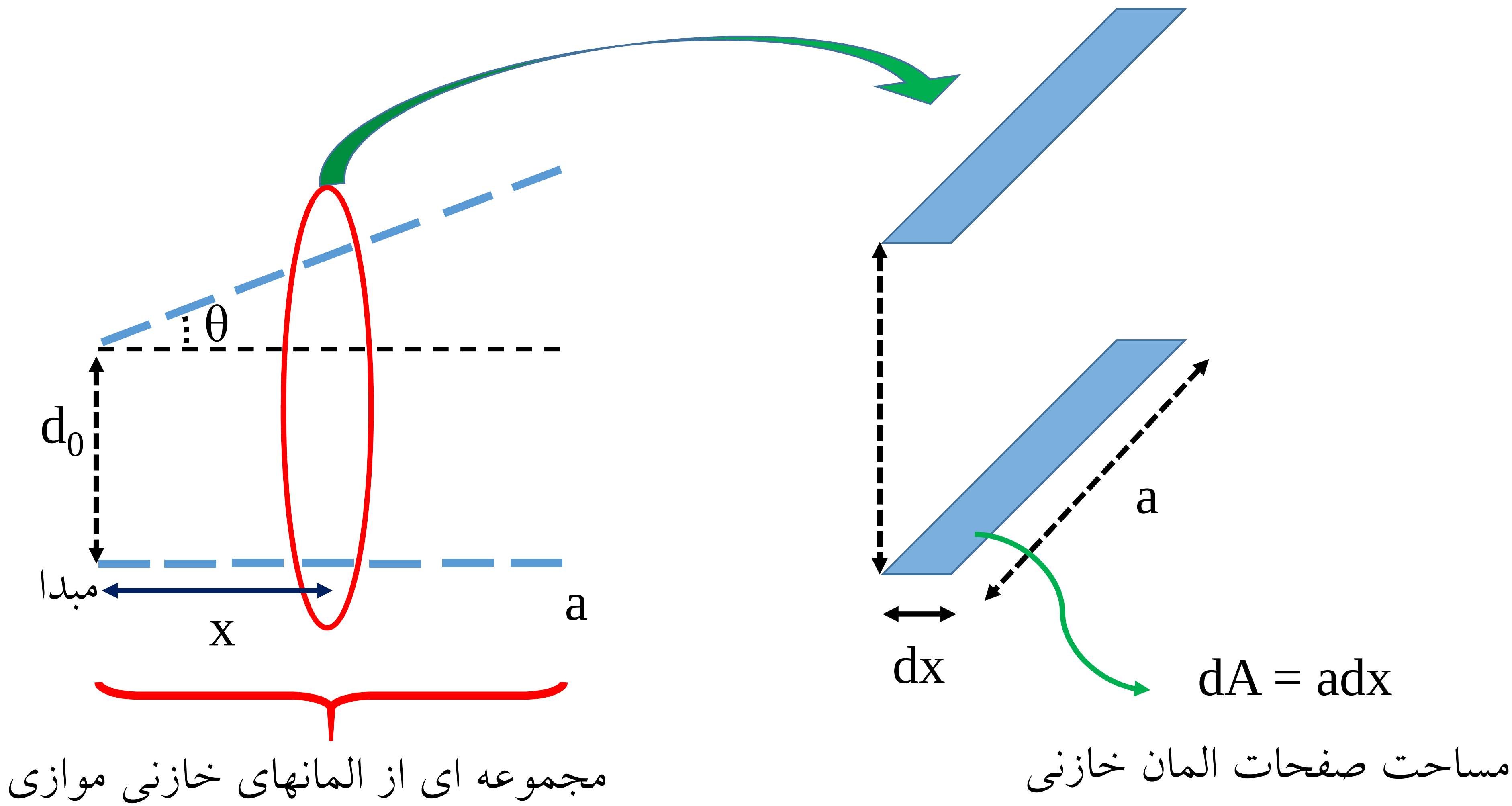
$$\frac{1}{C_t} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{1}{\varepsilon_0 \frac{A}{x}} + \frac{1}{\varepsilon_0 \frac{A}{a-b-x}}$$

$$\frac{1}{C_t} = \frac{1}{\varepsilon_0 A}(x + a - b - x) = \frac{1}{\varepsilon_0 A}(a-b)$$

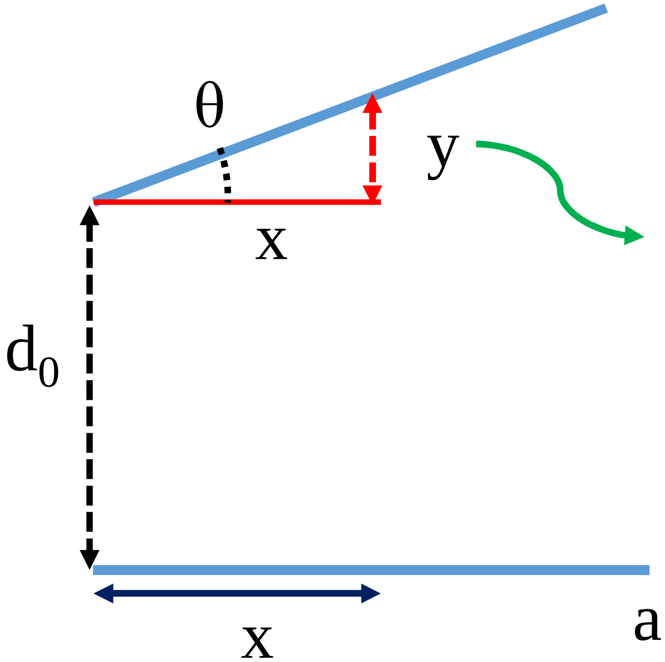
$$C_t = \frac{\varepsilon_0 A}{a-b}$$

مثال) خازن تختی با صفحاتی به شکل مربع و به ضلع a داریم. صفحات خازن با همدیگر زاویه بسیار کوچک θ می سازند. ظرفیت خازن را بدست آورید.





θ
d0
مبدا
x
a
مجموعه ای از المانهای خازنی موازی
a
dx
dA = adx
مساحت صفحات المان خازنی



$$y = x\tan\theta$$

فاصله بین صفحات المان خازنی

$$d_0 + x\tan\theta$$

$$dC = \varepsilon_0 \frac{a\,dx}{d_0 + x\tan\theta}$$

ظرفیت المان خازنی

$$dC = \varepsilon_0 \frac{a dx}{d_0 + x \tan\theta}$$

$$C = \int dC = \varepsilon_0 a \int_{x=0}^{x=a} \frac{dx}{d_0 + x\tan\theta} = \frac{\varepsilon_0 a}{\tan\theta} \ln(d_0 + x\tan\theta)\Big|_{x=0}^{x=a}$$

$$C = \frac{\varepsilon_0 a}{\tan\theta} \ln\left(\frac{d_0 + a\tan\theta}{d_0}\right) = \frac{\varepsilon_0 a}{\tan\theta} \ln\left(1 + \frac{a}{d_0}\tan\theta\right)$$

به ازاء زوایای کوچک

$$\tan\theta = \theta$$

$$z = \frac{a}{d_0}\theta$$

$$\ln(1+z) = z - \frac{1}{2}z^2$$

$$C = \frac{\varepsilon_0 a}{\theta}\left(z - \frac{1}{2}z^2\right) = \frac{\varepsilon_0 a}{\theta}\left(\frac{a}{d_0}\theta - \frac{1}{2}\frac{a^2}{d_0^2}\theta^2\right)$$

$$C = \frac{\varepsilon_0 a^2}{d_0}\left(1 - \frac{1}{2}\frac{a}{d_0}\theta\right)$$

مثال) خازن تختی با صفحاتی به شکل مربع و به ضلع a داریم. صفحات خازن با همدیگر موازی بوده و فضای بین آنها توسط دو گوه از جنس دی الکتریک با ضرایب ε_1 و ε_2 پرشده است. ظرفیت خازن را بدست آورید.