

الحمد لله

فصل ۵

معادلات بقاء جرم و انرژی و معادله برنولی

Wind turbine “farms” are being constructed all over the world to extract kinetic energy from the wind and convert it to electrical energy. The mass, energy, momentum, and angular momentum balances are utilized in the design of a wind turbine. The Bernoulli equation is also useful in the preliminary design stage.



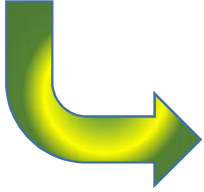
Many fluid flow devices such as this Pelton wheel hydraulic turbine are analyzed by applying the conservation of mass and energy principles, along with the linear momentum equation.



قانون بقاء جرم

در یک سیستم بسته جرم ذرات تشکیل دهنده آن ثابت است

$$m_{\text{sys}} = \text{constant or } dm_{\text{sys}}/dt = 0$$


$$\dot{m}_{\text{in}} - \dot{m}_{\text{out}} = \frac{dm_{\text{CV}}}{dt} \quad \text{(Conservation of mass = continuity equation)}$$

نرخ جریان جرم ورودی به حجم کنترل

نرخ جریان جرم خروجی از حجم کنترل

نرخ تغییر جرم درون حجم کنترل

قانون بقاء انرژی

انتقال انرژی از یا به سیستم بسته به صورت انتقال گرما یا کار است.

برای یک سیستم بسته؛ انرژی خالص انتقالی از یا به سیستم سرتاسر یک فرآیند، معادل با تغییر در مقدار انرژی درونی سیستم است

$$\dot{E}_{\text{in}} - \dot{E}_{\text{out}} = \frac{dE_{\text{CV}}}{dt} \quad (\text{Conservation of energy})$$

نرخ انتقال انرژی ورودی به حجم کنترل

نرخ انتقال انرژی خروجی از حجم کنترل

نرخ تغییر انتقال انرژی درون حجم کنترل

قانون بقاء جرم

در یک سیستم بسته جرم ذرات تشکیل دهنده آن ثابت است

$$E = mc^2$$

تبدیل جرم و انرژی به همدیگر

در سیالات می توان بقای جرم را کامل در نظر گرفت

قضیه رینولدز برای حجم کنترل
RTT

$$\frac{dN_{sys}}{dt} = \int_{CV} \frac{\partial}{\partial t} (\rho) dV + \int_{CS} \rho \vec{v} \cdot \hat{n} dA$$

$$\frac{dm_{sys.}}{dt} = 0$$

در سیستم ذرات: جرم = ثابت
در حجم معیار = جرم متغیر

نرخ تغییر جرم در حجم کنترل متناسب است با

نرخ ورود ذرات به آن

نرخ خروج ذرات از آن

انتخاب $N = m$ در RTT $\longrightarrow h = 1$

$$\frac{dN_{\text{sys}}}{dt} = \int_{CV} \frac{\partial}{\partial t} (h \, r) \, dV + \int_{CS} h \, r \, \vec{v} \cdot \hat{n} \, dA$$

$$\longrightarrow \frac{dm_{\text{sys}}}{dt} = \int_{CV} \frac{\partial}{\partial t} (r \, dV) + \int_{CS} r \, \vec{v} \cdot \hat{n} \, dA$$

انتگرال روی سطوح ورودی و
سطوح خروجی از حجم کنترل

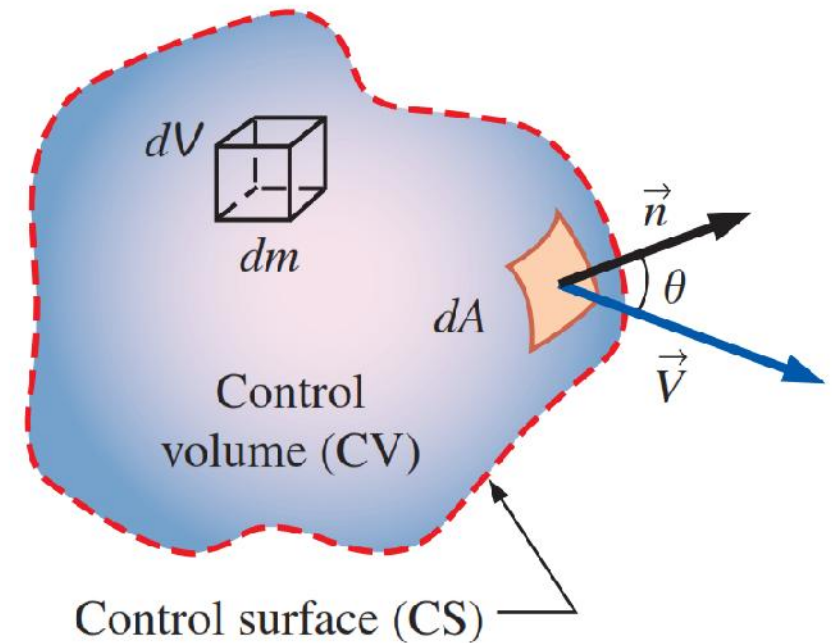
$$\frac{dm_{\text{sys.}}}{dt} = 0 \quad \longrightarrow \quad 0 = \int_{CV} \frac{\partial}{\partial t} (r \, dV) + \int_{CS} r \, \vec{v} \cdot \hat{n} \, dA$$

$$0 = \frac{d}{dt} \int_{CV} \mathbf{r} \, dV + \int_{CS} \mathbf{r} \, \vec{v} \cdot \hat{n} \, dA$$

$$\frac{d}{dt} \int_{CV} \mathbf{r} \, dV = - \int_{CS} \mathbf{r} \, \vec{v} \cdot \hat{n} \, dA$$

$$\frac{d}{dt} m_{CV} = - \sum_{out} \int_{CS} \mathbf{r} \, v_n \, dA + \sum_{in} \int_{CS} \mathbf{r} \, v_n \, dA$$

$$\frac{d}{dt} m_{CV} = - \sum_{out} \dot{m} + \sum_{in} \dot{m}$$



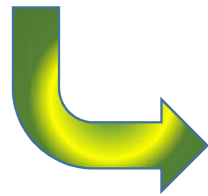
$\vec{v} \cdot \hat{n} = +v_n$ برای ذرات خروجی

$\vec{v} \cdot \hat{n} = -v_n$ برای ذرات ورودی

۱- موازنه جرم برای فرآیندهای جریان دائم

در یک فرآیند جریان دائم، جرم داخل حجم کنترل با زمان تغییر نمی کند

$$m_{CV} = \text{const} \rightarrow \frac{d}{dt} m_{CV} = 0$$



$$\sum_{out} \dot{m} = \sum_{in} \dot{m}$$

دبی جرم ورودی = دبی جرم خروجی

۲- دبی یا شارش جرم و حجم

شار یا دبی برابر است با نرخ شارش یک کمیت از سطوح ورودی یا خروجی

نرخ شارش جرم از
سطح dA

$$\delta \dot{m} = \rho V_n dA_c$$

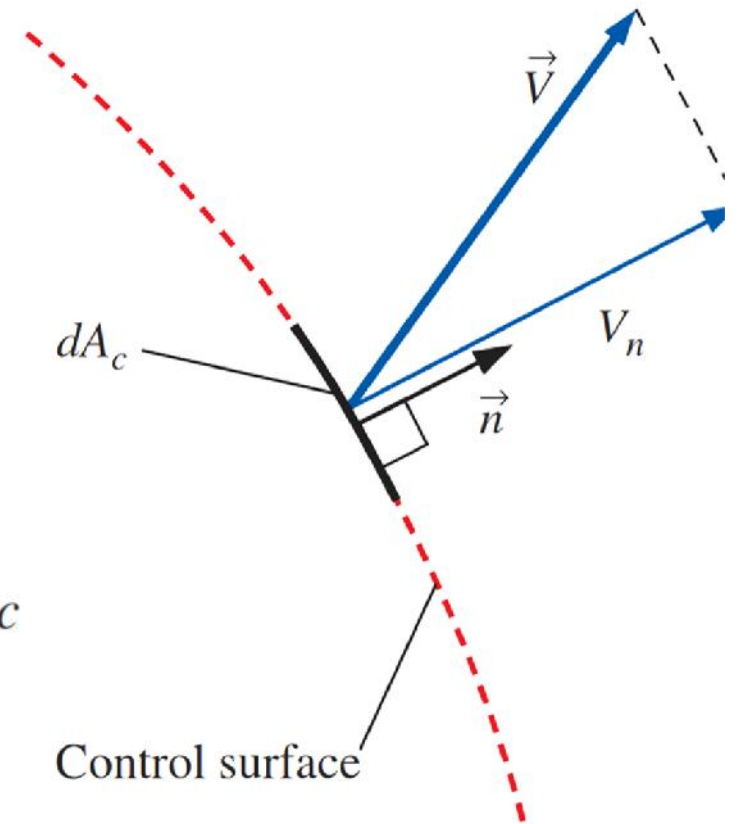
دبی جرمی

$$\dot{m} = \int_{A_c} \delta \dot{m} = \int_{A_c} \rho V_n dA_c$$

دبی حجمی

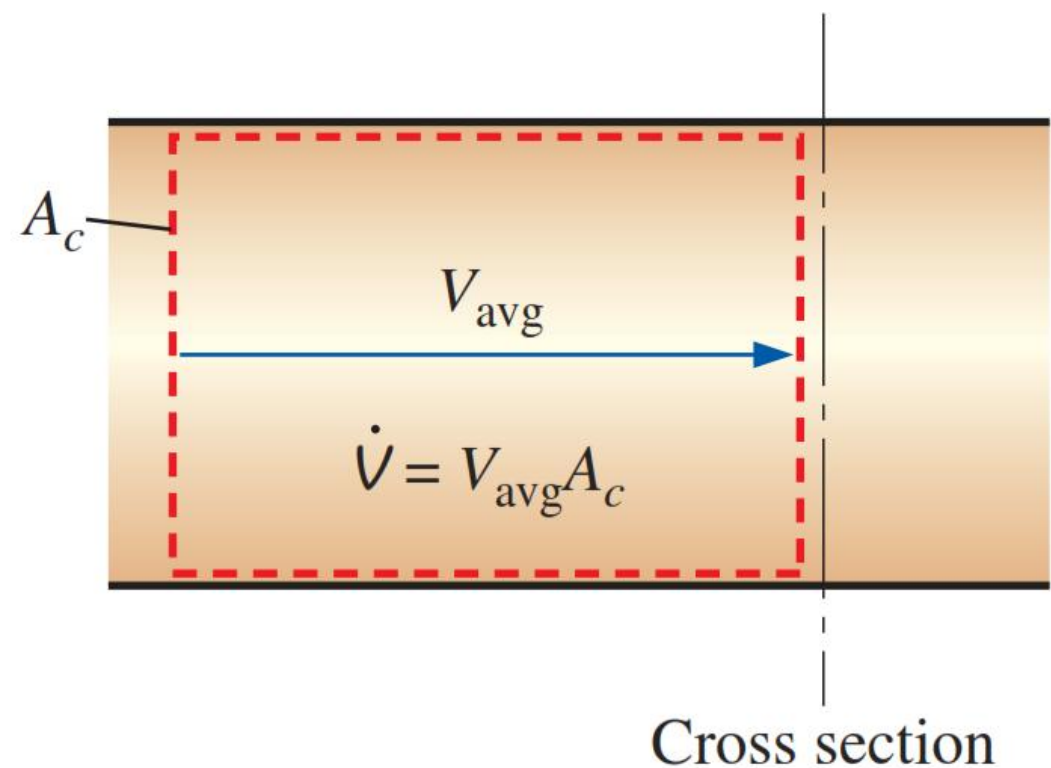
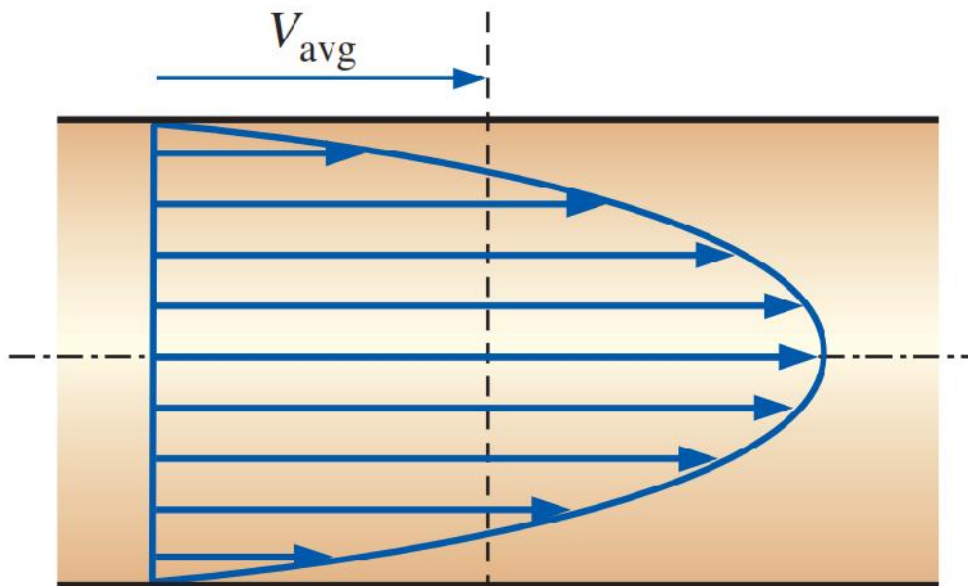
$$Q = \int_{A_c} V_n dA_c = V_{avg} A_c = V A_c$$

$$\dot{m} = \rho Q$$



٣- سرعت متوسط

$$V_{\text{avg}} = \frac{1}{A_c} \int_{A_c} V_n dA_c$$



۴- جریان سیال تراکم ناپذیر

$$\sum_{out} \dot{m} = \sum_{in} \dot{m} \quad \rightarrow \quad r_{in} v_{in} A_{in} = r_{out} v_{out} A_{out}$$

$$r_{in} = r_{out} \quad \rightarrow \quad v_{in} A_{in} = v_{out} A_{out}$$

EXAMPLE: Water Flow through a Garden Hose Nozzle

A garden hose attached with a nozzle is used to fill a 10-gal bucket. The inner diameter of the hose is 2 cm, and it reduces to 0.8 cm at the nozzle exit. If it takes 50 s to fill the bucket with water, determine: (a) the volume and mass flow rates of water through the hose, and (b) the average velocity of water at the nozzle exit.



$$Q = \frac{V}{\Delta t} = \frac{10}{50} = 0.2 \text{ gal/s} = 0.2 \times 3.7854 = 0.757 \text{ L/s}$$

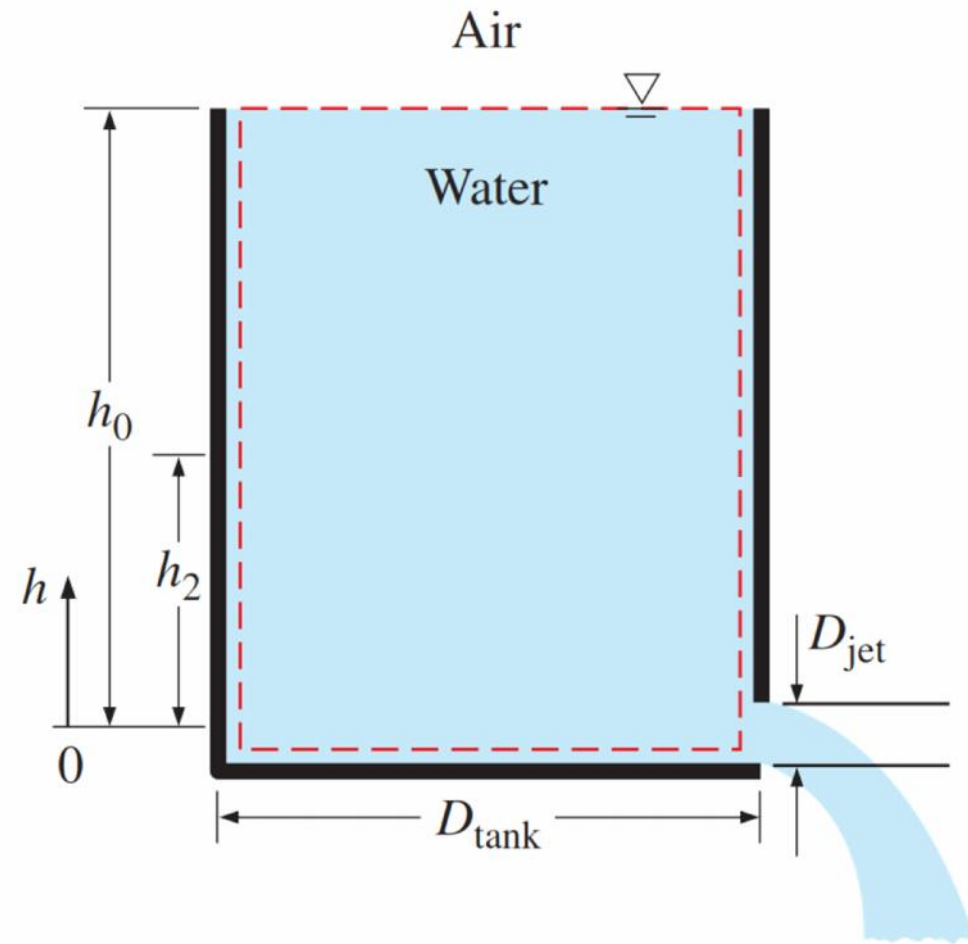
$$m = rQ = 1 \text{ kg/L} \times 0.757 \text{ L/s} = 0.757 \text{ kg/s}$$

$$A_e = \pi r_e^2 = \pi (0.4 \text{ cm})^2 = 0.5027 \text{ cm}^2 = 0.5027 \times 10^{-4} \text{ m}^2$$

$$Q = Av \quad \rightarrow \quad v = \frac{Q}{A} = \frac{0.757 \text{ L/s} \times 1 \text{ m}^3 / 1000 \text{ L}}{0.5027 \times 10^{-4} \text{ m}^2}$$

Example: Discharge of Water from a Tank

A 4-ft-high, 3-ft-diameter cylindrical water tank whose top is open to the atmosphere is initially filled with water. Now the discharge plug near the bottom of the tank is pulled out, and a water jet whose diameter is 0.5 in streams out. The average velocity of the jet is approximated as $v = \sqrt{2gh}$, where h is the height of water in the tank measured from the center of the hole (a variable) and g is the gravitational acceleration. Determine how long it takes for the water level in the tank to drop to 2 ft from the bottom.



$$\dot{m}_{\text{in}} - \dot{m}_{\text{out}} = \frac{dm_{\text{CV}}}{dt} \quad \dot{m}_{\text{in}} = 0$$



$$\dot{m}_{\text{out}} = (\rho VA)_{\text{out}} = \rho \sqrt{2gh} A_{\text{jet}} \quad A_{\text{jet}} = \pi D_{\text{jet}}^2 / 4$$

$$m_{\text{CV}} = \rho V = \rho A_{\text{tank}} h \quad A_{\text{tank}} = \pi D_{\text{tank}}^2 / 4$$



$$-\rho \sqrt{2gh} A_{\text{jet}} = \frac{d(\rho A_{\text{tank}} h)}{dt} \rightarrow$$

$$-\rho \sqrt{2gh} (\pi D_{\text{jet}}^2 / 4) = \frac{\rho (\pi D_{\text{tank}}^2 / 4) dh}{dt}$$

$$-\rho \sqrt{2gh} (\pi D_{\text{jet}}^2 / 4) = \frac{\rho (\pi D_{\text{tank}}^2 / 4) dh}{dt}$$



$$dt = -\frac{D_{\text{tank}}^2}{D_{\text{jet}}^2} \frac{dh}{\sqrt{2gh}}$$



$$\int_0^t dt = -\frac{D_{\text{tank}}^2}{D_{\text{jet}}^2 \sqrt{2g}} \int_{h_0}^{h_2} \frac{dh}{\sqrt{h}} \rightarrow$$

$$t = \frac{\sqrt{h_0} - \sqrt{h_2}}{\sqrt{g/2}} \left(\frac{D_{\text{tank}}}{D_{\text{jet}}} \right)^2$$

$$t = \frac{\sqrt{4 \text{ ft}} - \sqrt{2 \text{ ft}}}{\sqrt{32.2/2 \text{ ft/s}^2}} \left(\frac{3 \times 12 \text{ in}}{0.5 \text{ in}} \right)^2 = 757 \text{ s} = \mathbf{12.6 \text{ min}}$$

{ At $t = 0$ $h = h_0$
 { At $t = t$ $h = h_2$

5–15 Air enters a nozzle steadily at 2.21 kg/m^3 and 20 m/s and leaves at 0.762 kg/m^3 and 150 m/s . If the inlet area of the nozzle is 60 cm^2 , determine (a) the mass flow rate through the nozzle, and (b) the exit area of the nozzle. *Answers:*

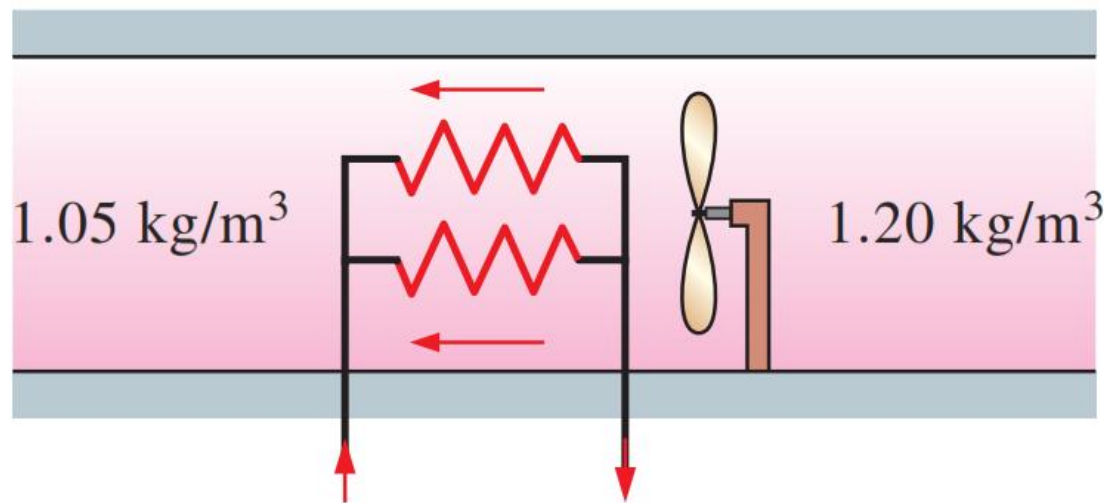
$$\dot{m}_1 = \rho_1 v_1 A_1 \rightarrow \dot{m}_1 = 2.21 \times 20 \times 60 \times 10^{-4}$$

$$\dot{m}_2 = \rho_2 v_2 A_2 \rightarrow \dot{m}_2 = 0.762 \times 150 \times A_2$$

$$\dot{m}_1 = \dot{m}_2 \rightarrow 2.21 \times 20 \times 60 \times 10^{-4} = 0.762 \times 150 \times A_2$$

$$A_2 =$$

5–17 A hair dryer is basically a duct of constant diameter in which a few layers of electric resistors are placed. A small fan pulls the air in and forces it through the resistors where it is heated. If the density of air is 1.20 kg/m^3 at the inlet and 1.05 kg/m^3 at the exit, determine the percent increase in the velocity of air as it flows through the hair dryer.



$$\dot{m}_1 = \dot{m}_2 \rightarrow$$

$$r_1 v_1 A_1 = r_2 v_2 A_2 \quad , \quad A_1 = A_2$$

$$r_1 v_1 = r_2 v_2$$

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{r_1}{r_2} \rightarrow \frac{v_2 - v_1}{v_1} = \frac{r_1 - r_2}{r_2}$$

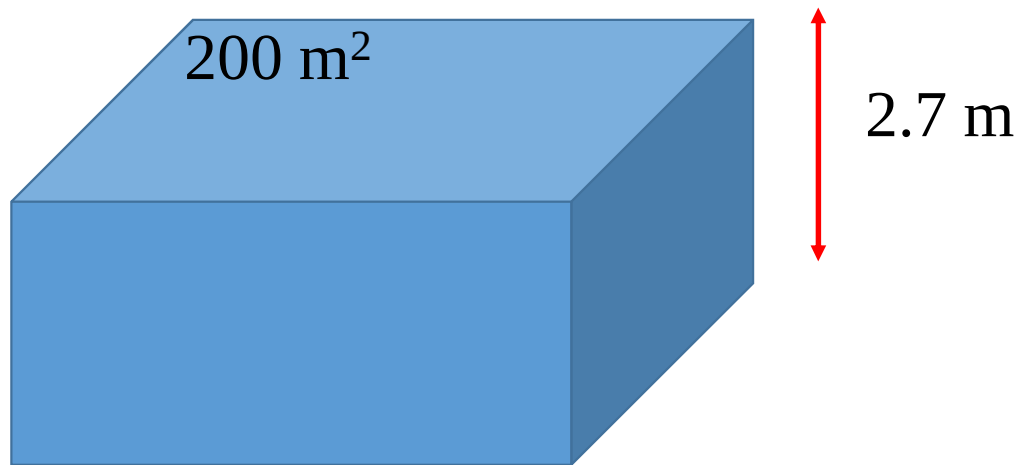
$$\rightarrow \frac{\Delta v}{v_1} \% = \frac{r_1 - r_2}{r_2} \times 100 = \frac{1.2 - 1.05}{1.2} \times 100$$

5–12 A desktop computer is to be cooled by a fan whose flow rate is $0.40 \text{ m}^3/\text{min}$. Determine the mass flow rate of air through the fan at an elevation of 3400 m where the air density is 0.7 kg/m^3 . Also, if the average velocity of air is not to exceed 110 m/min , determine the minimum diameter of the casing of the fan. *Answers: 0.00467 kg/s , 0.0569 m*

$$Q = vA = 0.4 \frac{\text{m}^3}{\text{min}}$$

$$\dot{m} = \rho Q = 0.7 \times 0.4 = 0.28 \frac{\text{kg}}{\text{min}} = 0.00467 \frac{\text{kg}}{\text{s}}$$

5–14 The minimum fresh air requirement of a residential Building is specified to be 0.35 air changes per hour (ASHRAE, Standard 62, 1989). That is, 35 percent of the entire air contained in a residence should be replaced by fresh outdoor air every hour. If the ventilation requirement of a 2.7-m-high, 200-m² residence is to be met entirely by a fan, determine the flow capacity in L/min of the fan that needs to be installed. Also determine the minimum diameter of the duct if the average air velocity is not to exceed 5 m/s.



حجم هوای جایگزین
شده در یک ساعت

$$Q = 0.35 \times (200 \times 2.7) = 189 \frac{m^3}{h} = 189 \times 10^3 \frac{L}{h}$$

$$Q = 3.15 \times 10^3 \frac{L}{\text{min}}$$

$$Q = 189 \frac{m^3}{h} = 189 \frac{m^3}{3600s} = 0.0525 \frac{m^3}{s}$$

$$Q = vA = v \frac{\pi}{4} R^2$$

$$\rightarrow R \approx 0.1 \text{ m} \quad \text{or} \quad D \approx 20 \text{ cm}$$

انرژی مکانیکی سیستم های سیالاتی

سیستم سیال:

سیستم های مکانیکی که در طی فرآیند انتقال سیال از یک نقطه به نقطه دیگر تولید کار

مکانیکی (مانند توربین) و مصرف کار مکانیکی (مانند پمپ و فن) است



نکات:

۱- فرآیند انتقال: فرآیند دما ثابت و بدون انتقال حرارت

۲- سازو کار افت انرژی مکانیکی سیال: اصطکاک

۳- ارتباط فشار و انرژی مکانیکی:

در پمپ؛ با بالا بردن فشار در سیال به آن انرژی مکانیکی داده می شود

در توربین؛ کاهش فشار با کاهش انرژی سیال همراه است

۴- کار جریان: نیروی فشار وارد بر یک سیال که در یک فاصله مشخصی عمل می کند و لذا کار انجام می دهد (انرژی جریان).

$$\frac{P}{r}$$

۵- انرژی مکانیکی یک سیال در حال جریان

$$e_{\text{mech}} = \frac{P}{\rho} + \frac{V^2}{2} + gz$$

انرژی مکانیکی سیال در واحد جرم

انرژی جریان سیال در واحد جرم

انرژی جنبشی سیال در واحد جرم

انرژی پتانسیل سیال در واحد جرم

۶- تغییر انرژی مکانیکی سیال در طول جریان تراکم ناپذیر

$$\Delta e_{\text{mech}} = \frac{P_2 - P_1}{\rho} + \frac{V_2^2 - V_1^2}{2} + g(z_2 - z_1) \quad (\text{kJ/kg})$$

۷- اگر در طول جریان سیال، فشار، چگالی، سرعت و ارتفاع ثابت بماند تغییر انرژی در این فرآیند

صفر خواهد بود $\Delta e_{\text{mech}} = 0$

۸- $\Delta e_{\text{mech}} > 0 \longrightarrow$ انرژی مکانیکی به سیال افزوده می شود

$\Delta e_{\text{mech}} < 0 \longrightarrow$ انرژی مکانیکی از سیال گرفته می شود

۹- توان ایده آل تولید شده توسط یک توربین هیدرولیکی ایده آل

$$\dot{W}_{\max} = \dot{m} \Delta e_{\text{mech}}$$

= انرژی در واحد زمان

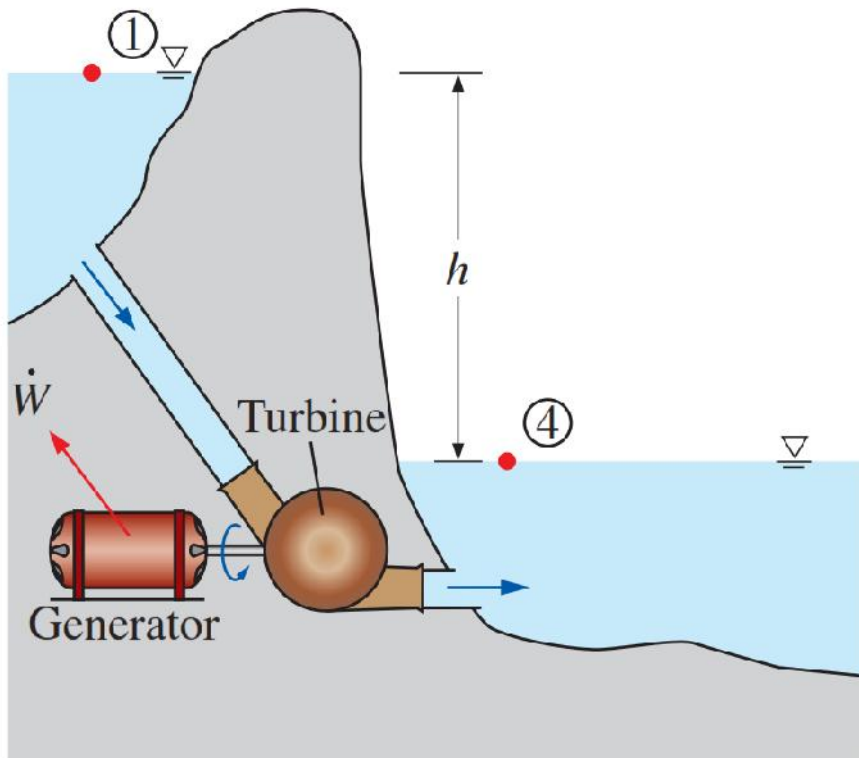
انرژی در واحد جرم $\times$ جرم در واحد زمان

$$\Delta e_{\text{mech}} = \frac{P_2 - P_1}{\rho} + \frac{V_2^2 - V_1^2}{2} + g(z_2 - z_1)$$



مثال) توربین جفت شده با یک ژنراتور - در غیاب اتلاف مکانیکی

الف) محاسبه توان بیشینه با اختلاف سطح آب بین دو نقطه



$$\begin{cases} \dot{W}_{\max} = \dot{m} \Delta e_{\text{mech}} \\ \Delta e_{\text{mech}} = \frac{P_2 - P_1}{\rho} + \frac{V_2^2 - V_1^2}{2} + g(z_2 - z_1) \end{cases}$$

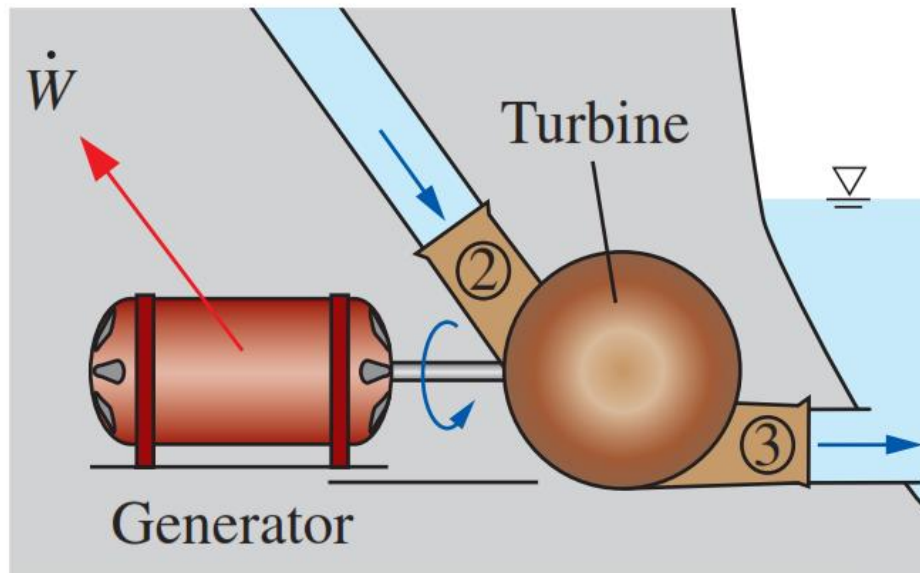
$$P_1 \approx P_4 = P_{\text{atm}} \text{ and } V_1 = V_4 \approx 0$$

$$\dot{W}_{\max} = \dot{m} \Delta e_{\text{mech}} = \dot{m} g(z_1 - z_4) = \dot{m} g h$$

ب) محاسبه توان بیشینه بر اساس اختلاف فشار دقیقاً در دو طرف توربین

$$\dot{W}_{\max} = \dot{m} \Delta e_{\text{mech}}$$

$$\Delta e_{\text{mech}} = \frac{P_2 - P_1}{\rho} + \frac{V_2^2 - V_1^2}{2} + g(z_2 - z_1)$$



$$V_2 \approx V_3 \text{ and } z_2 \approx z_3$$

$$\dot{W}_{\max} = \dot{m} \Delta e_{\text{mech}} = \dot{m} \frac{P_2 - P_3}{\rho} = \dot{m} \frac{\Delta P}{\rho}$$

با کاهش فشار در توربین، کار تحویل داده می شود.

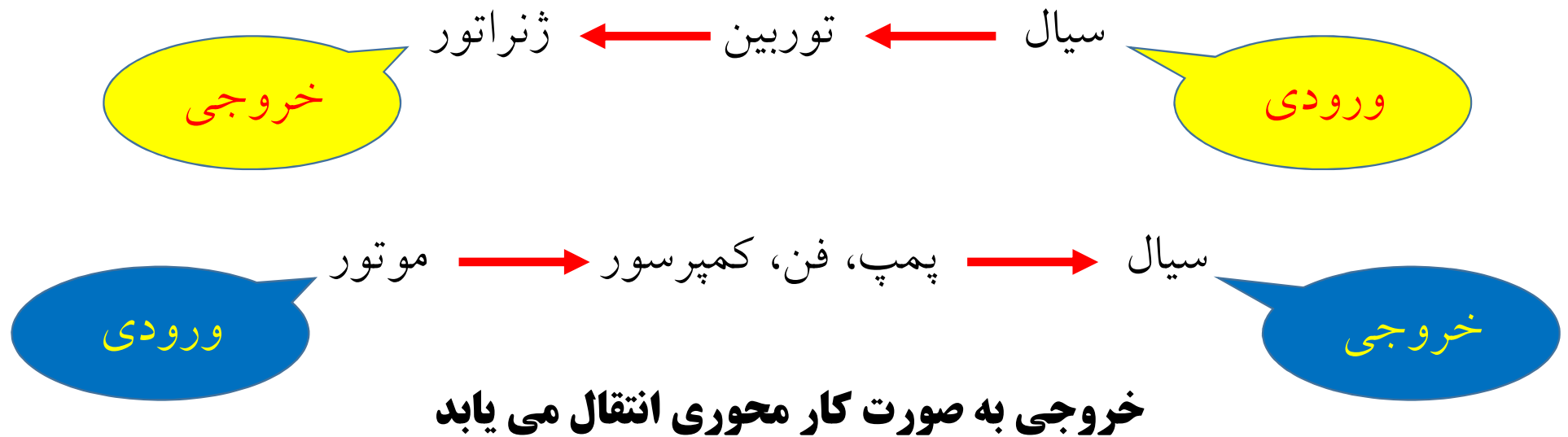
تبدیل انرژی مکانیکی سیال به کار



۱۰- انتقال انرژی مکانیکی توسط یک محور دوار انجام می شود

به انرژی منتقل شده از طریق محور، کار محوری (W_{shaft}) می گویند

سیستم سیال ↔ ابزار



۱۱- بازده

$$\eta_{\text{mech}} = \frac{\text{Mechanical energy output}}{\text{Mechanical energy input}} = \frac{E_{\text{mech, out}}}{E_{\text{mech, in}}} = 1 - \frac{E_{\text{mech, loss}}}{E_{\text{mech, in}}}$$

❖ η_{mch} بازده یک دستگاه مکانیکی

❖ $E_{\text{mech, out}}$ انرژی مکانیکی خروجی

❖ $E_{\text{mech, in}}$ انرژی مکانیکی ورودی

$$E_{\text{mech, out}} = E_{\text{mech, in}} - E_{\text{mech, loss}}$$

❖ $E_{\text{mech, loss}}$ افت انرژی مکانیکی

۱۲- بازده مکانیکی کمتر از ۱۰۰ درصد

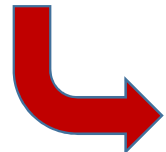
تبدیل و انتقال انرژی از سیال (یا به سیال) به دستگاه به صورت کامل انجام نمی شود و بخشی از آن به صورت اتلاف به گرما تبدیل می شود

۱۳- توربین انرژی مکانیکی را از سیال گرفته و به ژنراتور می دهد

$$\eta_{\text{mech}} = \frac{\text{Mechanical energy output}}{\text{Mechanical energy input}}$$

$$\eta_{\text{turbine}} = \frac{\text{Mechanical power output}}{\text{Mechanical power decrease of the fluid}} =$$

توان انرژی مکانیکی
خروجی از توربین


$$\eta_{\text{turbine}} = \frac{\dot{W}_{\text{shaft, out}}}{|\Delta \dot{E}_{\text{mech, fluid}}|} = \frac{\dot{W}_{\text{turbine}}}{\dot{W}_{\text{turbine, e}}}$$

نرخ کاهش انرژی
مکانیکی سیال

توان انرژی مکانیکی
ورودی به توربین

۱۴- بازده ژنراتور

سیال ← توربین ← ژنراتور

توان انرژی الکتریکی
خروجی از توربین

$$\eta_{\text{generator}} = \frac{\text{Electric power output}}{\text{Mechanical power input}} = \frac{\dot{W}_{\text{elect, out}}}{\dot{W}_{\text{shaft, in}}}$$

توان انرژی مکانیکی منتقل
شده از توربین به ژنراتور

$$\dot{W}_{\text{shaft, out-turbin}} = \dot{W}_{\text{shaft, in-generator}}$$

بازده سیستم
توربین-ژنراتور

$$\eta_{\text{turbine-gen}} = \eta_{\text{turbine}} \eta_{\text{generator}} = \frac{\dot{W}_{\text{elect, out}}}{\dot{W}_{\text{turbine, e}}} = \frac{\dot{W}_{\text{elect, out}}}{|\Delta \dot{E}_{\text{mech, fluid}}|}$$

۱۵- پمپ یا فن انرژی مکانیکی را از موتور گرفته و به سیال منتقل می نماید

$$\eta_{\text{pump}} = \frac{\text{Mechanical power increase of the fluid}}{\text{Mechanical power input}}$$

نرخ افزایش انرژی
مکانیکی سیال

توان انرژی مکانیکی
خروجی از پمپ

$$\eta_{\text{pump}} = \frac{\dot{\Delta E}_{\text{mech, fluid}}}{\dot{W}_{\text{shaft, in}}} = \frac{\dot{W}_{\text{pump, u}}}{\dot{W}_{\text{pump}}}$$

توان انرژی مکانیکی منتقل
شده از موتور به پمپ

۱۵- بازده موتور

سیال $\longrightarrow$ پمپ، فن، کمپرسور $\longrightarrow$ موتور

توان انرژی مکانیکی
خروجی از موتور

$$\eta_{\text{motor}} = \frac{\text{Mechanical power output}}{\text{Electric power input}} = \frac{\dot{W}_{\text{shaft, out}}}{\dot{W}_{\text{elect, in}}}$$

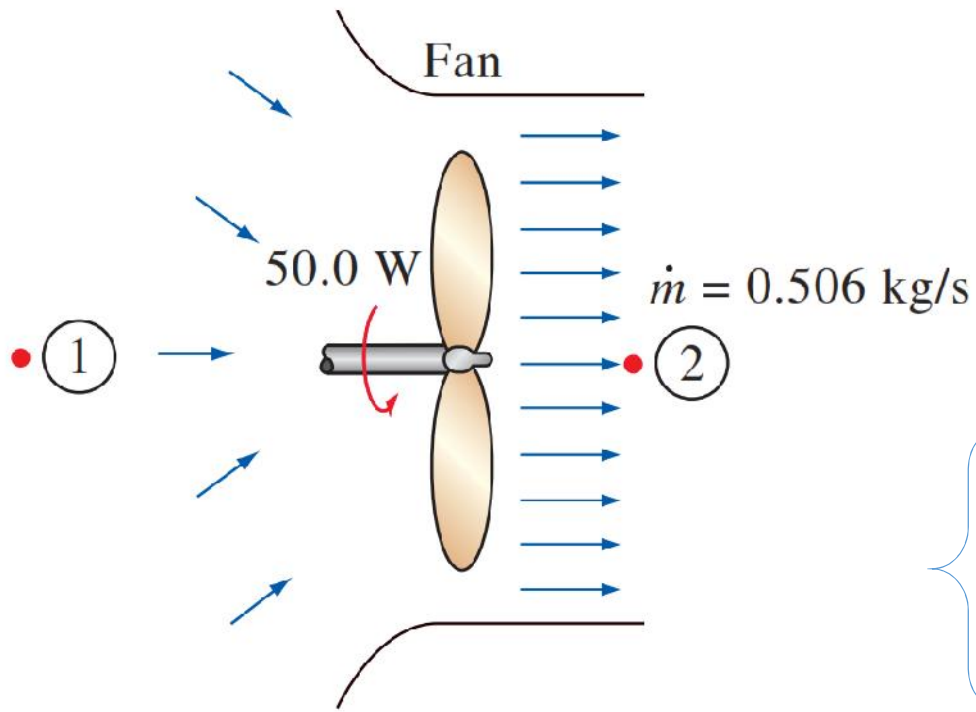
$$\dot{W}_{\text{shaft, out-motor}} = \dot{W}_{\text{shaft, in-pump}}$$

توان انرژی الکتریکی داده
شده به موتور

بازده سیستم
موتور-پمپ

$$\eta_{\text{pump-motor}} = \eta_{\text{pump}} \eta_{\text{motor}} = \frac{\dot{W}_{\text{pump, u}}}{\dot{W}_{\text{elect, in}}} = \frac{\Delta \dot{E}_{\text{mech, fluid}}}{\dot{W}_{\text{elect, in}}}$$

مثال) بازده فن نشان داده شده در شکل زیر را بدست آورید



$$V_1 \approx 0, V_2 = 12.1 \text{ m/s}$$

$$z_1 = z_2$$

$$P_1 \approx P_{\text{atm}} \text{ and } P_2 \approx P_{\text{atm}}$$

$$\dot{W}_{\text{max}} = \dot{m} \Delta e_{\text{mech}}$$

$$\Delta e_{\text{mech}} = \frac{P_2 - P_1}{\rho} + \frac{V_2^2 - V_1^2}{2} + g(z_2 - z_1)$$

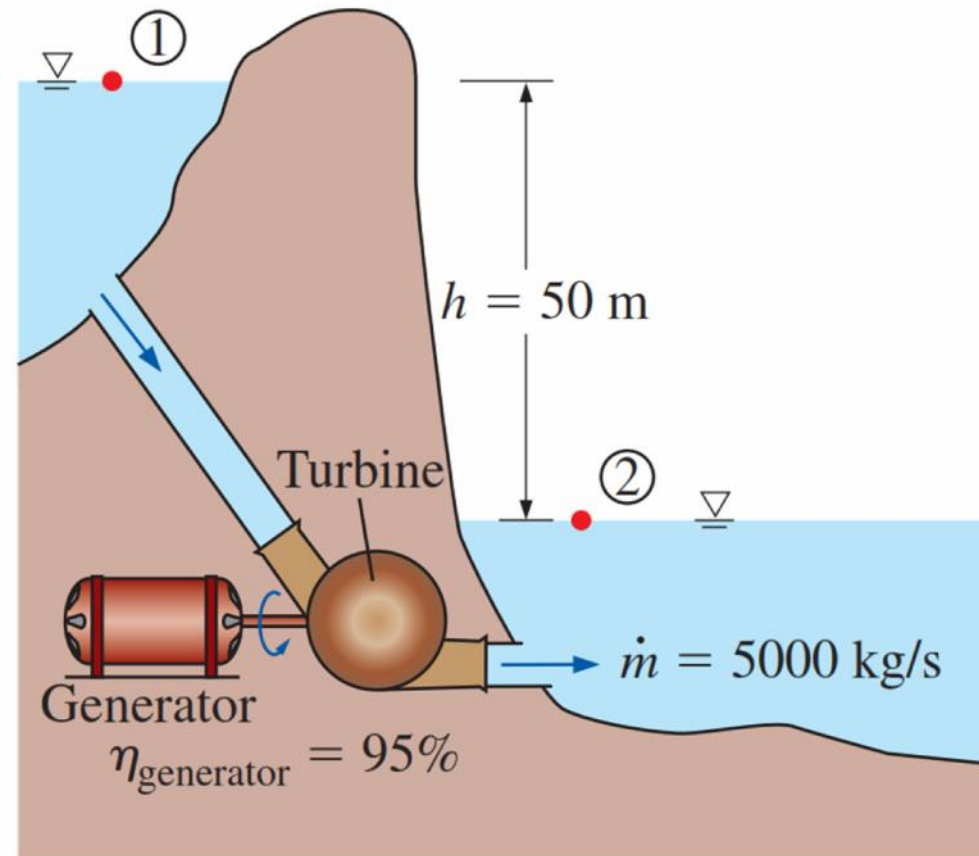
$$\Delta \dot{E}_{\text{mech, fluid}} = \dot{W} = \dot{m} \frac{V_2^2}{2}$$

$$\eta_{\text{mech, fan}} = \frac{\Delta \dot{E}_{\text{mech, fluid}}}{\dot{W}_{\text{shaft, in}}} = \frac{\dot{m} V_2^2 / 2}{\dot{W}_{\text{shaft, in}}} = \frac{(0.506 \text{ kg/s})(12.1 \text{ m/s})^2 / 2}{50.0 \text{ W}}$$

Performance of a Hydraulic Turbine-generator

The water in a large lake is to be used to generate electricity by the installation of a hydraulic turbine-generator. The elevation difference between the free surfaces upstream and downstream of the dam is 50 m. Water is to be supplied at a rate of 5000 kg/s.

If the electric power generated is measured to be 1862 kW and the generator efficiency is 95 percent, determine (a) the overall efficiency of the turbine-generator, (b) the mechanical efficiency of the turbine, and (c) the shaft power supplied by the turbine to the generator.



(a)

$$\begin{aligned} e_{\text{mech, in}} - e_{\text{mech, out}} &= \underbrace{\frac{P_{\text{in}} - \cancel{P_{\text{out}}}}{\rho}}_0 + \underbrace{\frac{V_{\text{in}}^2 - \cancel{V_{\text{out}}^2}}{2}}_0 + g(z_{\text{in}} - z_{\text{out}}) \\ &= gh \\ &= (9.81 \text{ m/s}^2)(50 \text{ m}) \left(\frac{1 \text{ kJ/kg}}{1000 \text{ m}^2/\text{s}^2} \right) = 0.491 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}} \end{aligned}$$

$$|\Delta \dot{E}_{\text{mech, fluid}}| = \dot{m}(e_{\text{mech, in}} - e_{\text{mech, out}}) = (5000 \text{ kg/s})(0.491 \text{ kJ/kg}) = 2455 \text{ kW}$$

$$\eta_{\text{overall}} = \eta_{\text{turbine-gen}} = \frac{\dot{W}_{\text{elect, out}}}{|\Delta \dot{E}_{\text{mech, fluid}}|} = \frac{1862 \text{ kW}}{2455 \text{ kW}} = \mathbf{0.760}$$

(b)

$$\eta_{\text{turbine-gen}} = \eta_{\text{turbine}} \eta_{\text{generator}} \rightarrow \eta_{\text{turbine}} = \frac{\eta_{\text{turbine-gen}}}{\eta_{\text{generator}}} = \frac{0.76}{0.95} = \mathbf{0.800}$$

(c)

$$\dot{W}_{\text{shaft, out}} = \eta_{\text{turbine}} |\Delta \dot{E}_{\text{mech, fluid}}| = (0.800)(2455 \text{ kW}) = 1964 \text{ kW} \approx \mathbf{1960 \text{ kW}}$$

The bernoulli equation

معادله برنولی

رابطه تقریبی بین فشار، سرعت و ارتفاع بین نواحی مختلف سیال

شرط برقراری معادله برنولی:

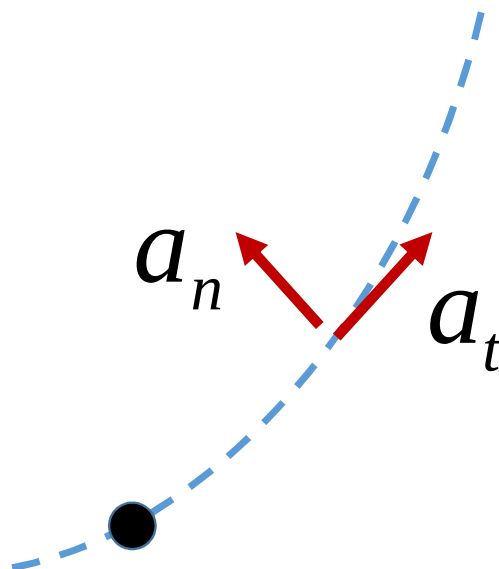
سیال تراکم ناپذیر،
 $r = \text{constant} \quad (r(\vec{r}_1) = r(\vec{r}_2))$

دارای جریان دائم
 $\text{at a point: } \frac{\partial V}{\partial t} = 0$

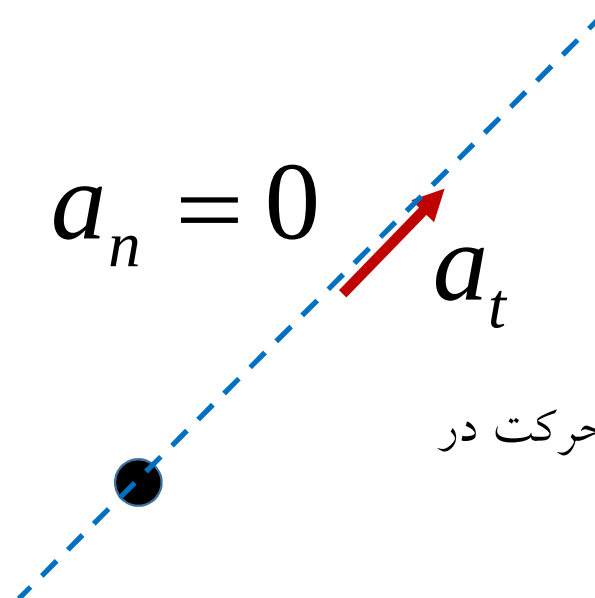
سیال غیر لزج و بدون نیروی اصطکاک
 $m = 0$

(یا نیروی لزجت در برابر نیروهای دیگر قابل صرفه نظر کردن است)

شتاب ذره سیال



ذره در حال حرکت در
مسیر منحنی شکل



ذره در حال حرکت در
مسیر مستقیم

a_t = شتاب ناشی از تغییر سرعت در امتداد مسیر جریان
 a_n = شتاب ناشی از تغییر سرعت در امتداد عمود بر مسیر جریان

به طور کلی سرعت ذرات سیال تابع مکان و زمان است

$$V = V(s, t)$$

$$dV = \frac{\partial V}{\partial s} ds + \frac{\partial V}{\partial t} dt$$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial s} \frac{ds}{dt} + \frac{\partial V}{\partial t}$$

در جریان دائم، سرعت سیال در یک نقطه از مسیر عبور جریان ثابت است.

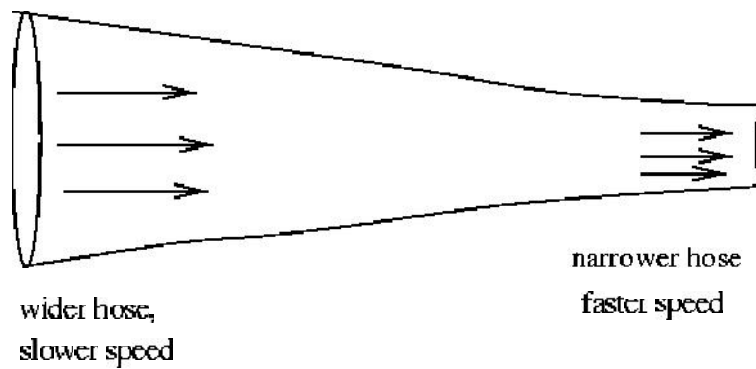
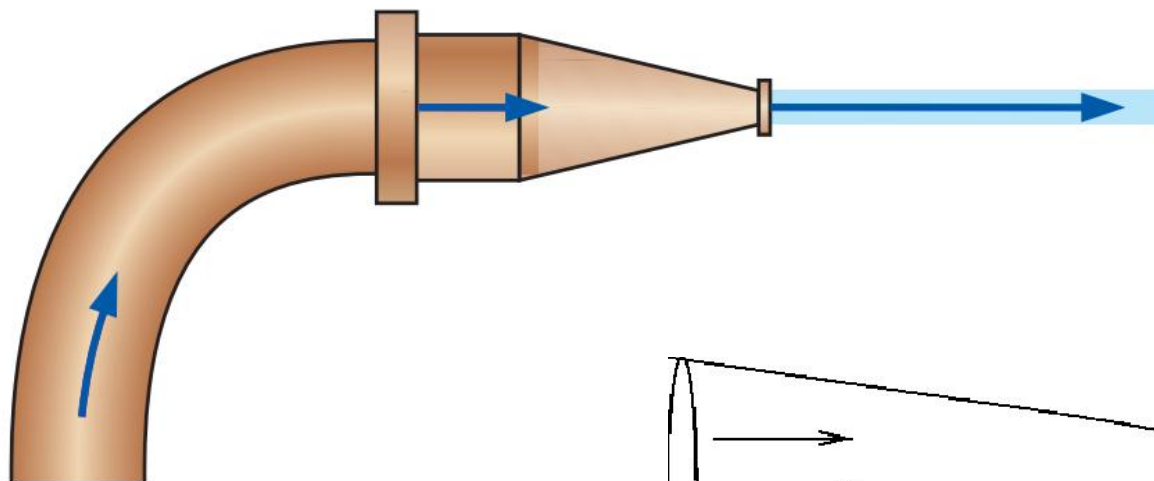
$$\frac{\partial V}{\partial t} = 0 \rightarrow V = V(s)$$



$$a_s = \frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial s} \frac{ds}{dt} = \frac{\partial V}{\partial s} V = V \frac{dV}{ds}$$

شتاب در راستای S

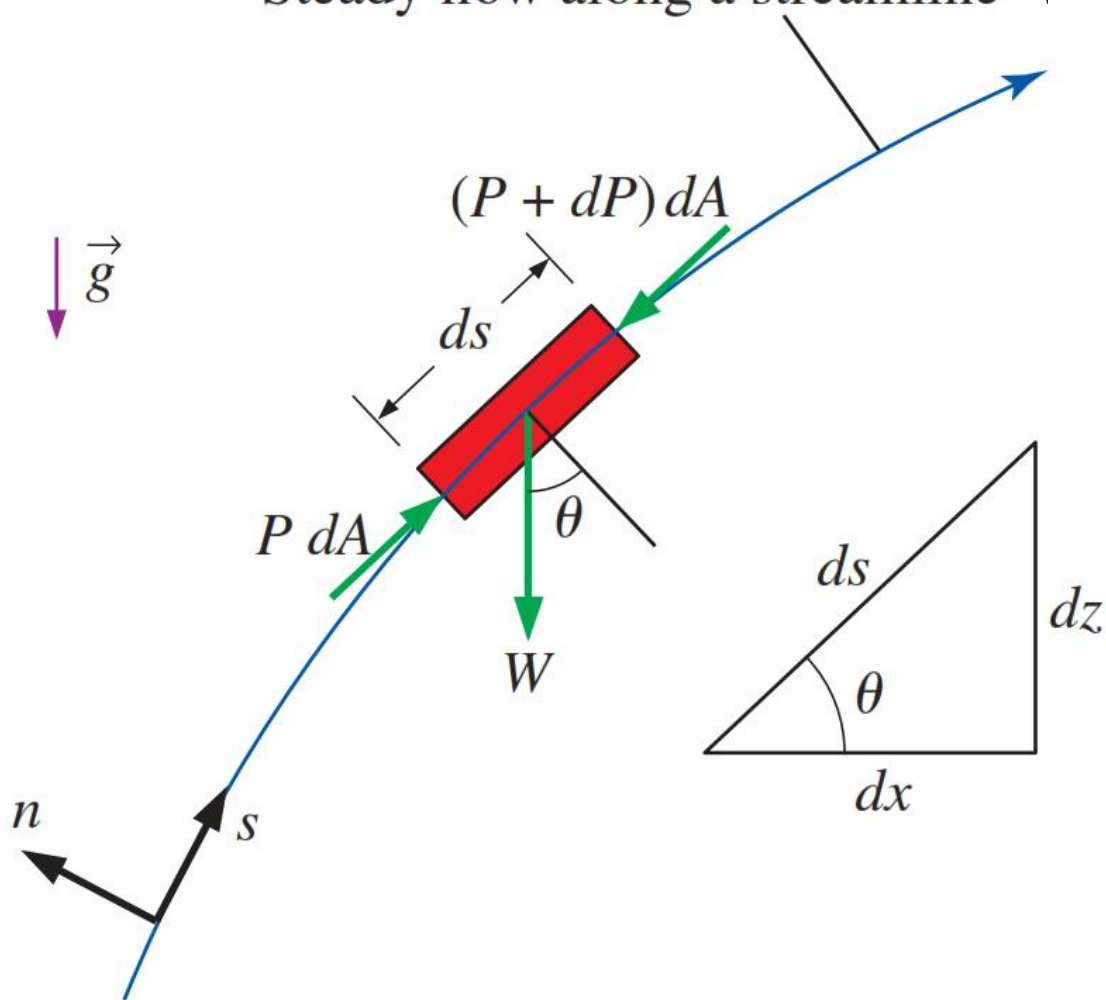
در جریان دائم شتاب ناشی از تغییر سرعت با مکان است



حرکت شتابدار

استخراج معادله برنولی

بررسی حرکت یک ذره از سیال در جریان دائم Steady flow along a streamline

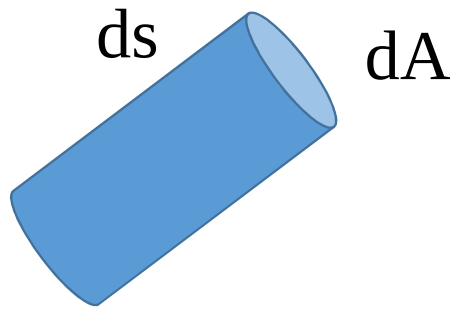


$$\sum F_s = ma_s$$

$$\sum F_s = ma_s$$

$$\hookrightarrow P dA - (P + dP) dA - W \sin \theta = m V \frac{dV}{ds}$$

مولفه وزن المان سیال
در امتداد جریان



$$dV = dA ds$$

$$m = \rho dV = \rho dA ds$$

$$\hookrightarrow -dP dA - \rho g dA ds \frac{dz}{ds} = \rho dA ds V \frac{dV}{ds}$$

$$-dP dA - \rho g dA ds \frac{dz}{ds} = \rho dA ds V \frac{dV}{ds}$$



$$-dP - \rho g dz = \rho V dV$$

$$V dV = \frac{1}{2} d(V^2) \quad \text{ } \img alt="Green arrow pointing right" data-bbox="280 385 350 480"/> \quad \frac{dP}{\rho} + \frac{1}{2} d(V^2) + g dz = 0$$



$$\int \frac{dP}{\rho} + \frac{V^2}{2} + gz = \text{constant (along a streamline)}$$

Steady, incompressible flow:

$$\frac{P}{\rho} + \frac{V^2}{2} + gz = \text{constant (along a streamline)}$$

نکات

۱- معادله برنولی برای سیال با شرایط زیر صادق است:

0 سیال با جریان دائمی

0 تراکم ناپذیر

0 غیر لزج

0 در امتداد خط جریان

۲- برای دو نقطه روی یک خط جریان داریم:

$$\frac{P_1}{\rho} + \frac{V_1^2}{2} + gz_1 = \frac{P_2}{\rho} + \frac{V_2^2}{2} + gz_2$$

Steady, incompressible flow:

۳- معادله برنولی = معادله موازنه انرژی:

«مجموع انرژی های جنبشی، پتانسیل و جریان یک ذره سیال در امتداد یک خط جریان در جریان دائم هنگامی که اثرات تراکم پذیری و اصطکاک قابل صرفنظر کردن هستند ثابت است»

۴- عدم حضور اصطکاک = عدم تبدیل انرژی مکانیکی به گرمایی

۵- معادله برنولی = قانون بقاء انرژی

در غیاب اصطکاک در سیال؛ صورت های مختلف انرژی مکانیکی به همدیگر تبدیل می شوند اما مجموع آنها ثابت است

۶- بیان کار از معادله برنولی:

در جابه جایی سیال در یک فاصله و اعمال نیروی فشاری و گرانشی، بر روی سیال کار انجام می شود و سبب تغییر انرژی جنبشی آن می شود.

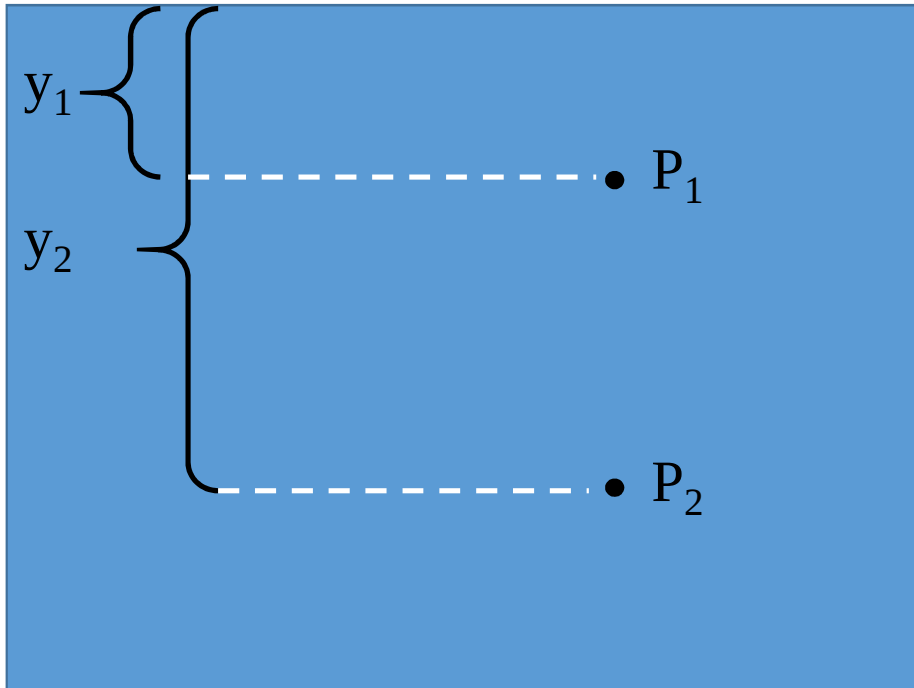
$$W_{pressure} + W_{gravity} = \Delta k = \frac{1}{2}(v_2^2 - v_1^2)$$

۷- سیال ساکن:

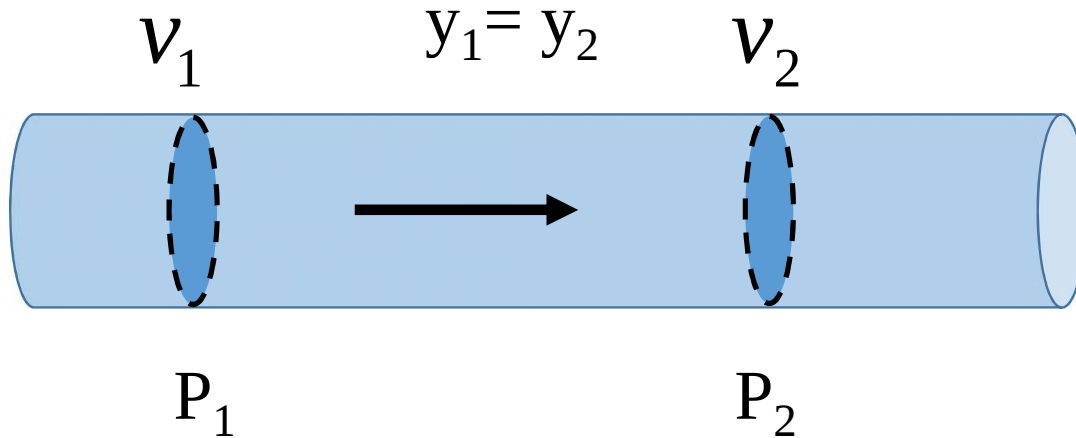
$$P_1 + \underbrace{\frac{1}{2} \rho v_1^2}_0 + \rho g y_1 = P_2 + \underbrace{\frac{1}{2} \rho v_2^2}_0 + \rho g y_2$$

$$P_1 + \rho g y_1 = P_2 + \rho g y_2$$

$$\rightarrow P_2 - P_1 = \rho g (y_1 - y_2)$$



۸- سیال جاری در ارتفاع ثابت:



- حرکت شتابدار سیال بین دو نقطه ناشی از اختلاف فشار بین آن دو نقطه می تواند باشد.

- اختلاف فشار منجر به تغییر انرژی جنبشی

بین آن دو نقطه می شود

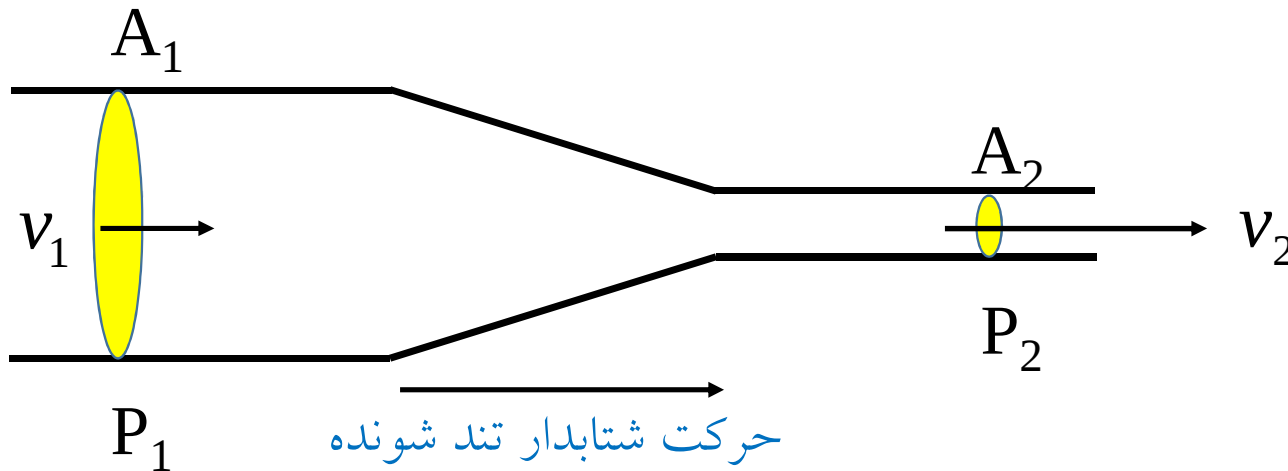
- اگر $P_1 > P_2$ باشد $V_1 < V_2$

$$P_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 + \rho g y_1 = P_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 + \rho g y_2$$

$$P_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 = P_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2$$

$$\rightarrow P_2 - P_1 = \frac{1}{2} \rho (v_2^2 - v_1^2)$$

۹- سیال جاری در عبور از مقاطع مختلف:

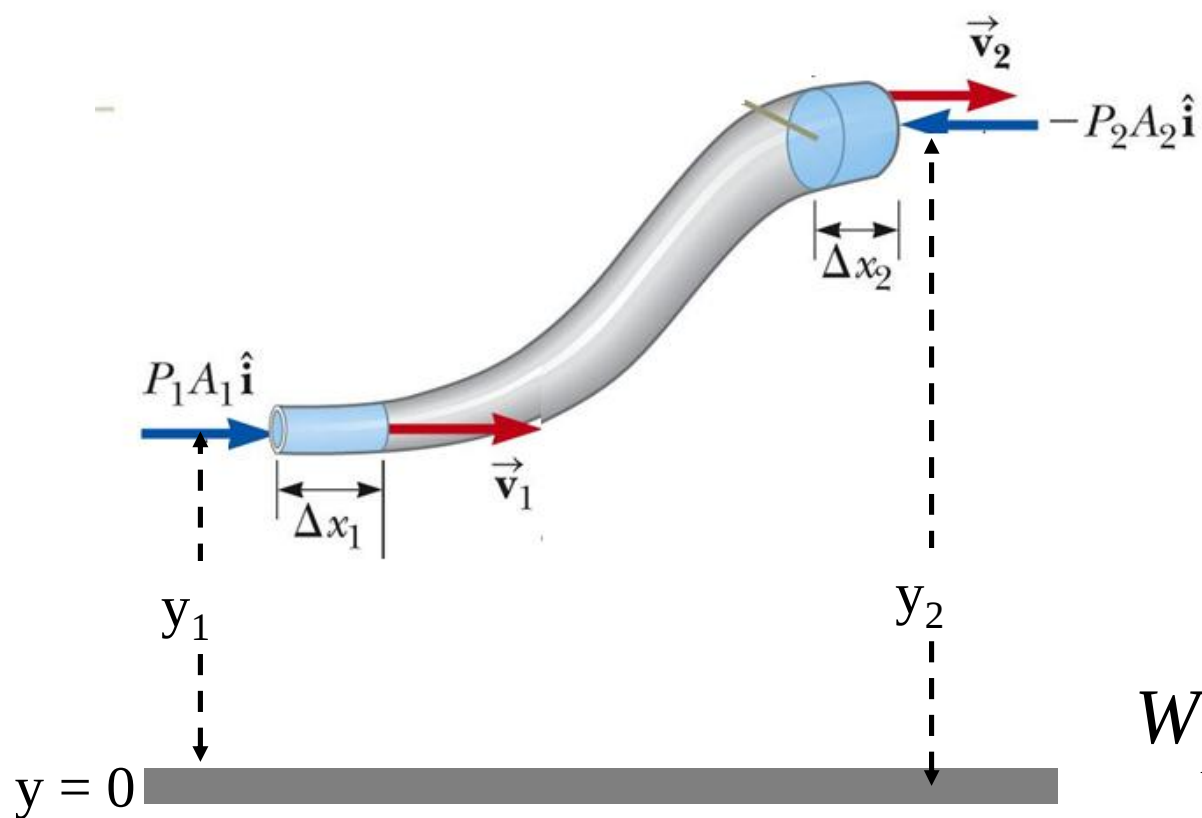


معادله پیوستگی $A_1 v_1 = A_2 v_2 \rightarrow v_1 < v_2$

معادله برنولی $P_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 = P_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 \rightarrow P_1 > P_2$

فشار در مقطع کوچکتر کمتر از فشار در مقطع بزرگتر است. بنابراین یک نیروی خالصی به سیال به سمت مقطع کوچکتر اعمال می شود که سبب افزایش سرعت سیال در ناحیه با تغییر مقطع می گردد

۱۰- سیال جاری در عبور از مقاطعی در ارتفاع های مختلف:



$$+\frac{1}{2} \rho v_1^2 + \rho g y_1 = P_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 + \rho g y_2$$



$$P_1 > P_2$$

$$W_{pressure} + W_{gravity} = \Delta k = \frac{1}{2} (v_2^2 - v_1^2)$$

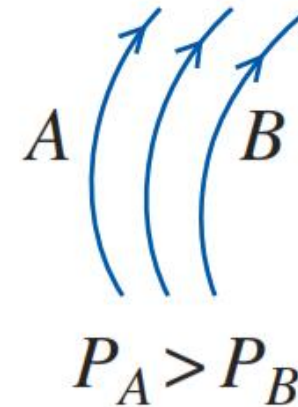
۱۱- موازنه نیروی در عرض خطوط جریان:

$$\frac{P}{\rho} + \int \frac{V^2}{R} dn + gz = \text{constant} \quad (\text{across streamlines})$$

شعاع انحناء خط جریان

$$R_A > R_B \rightarrow \frac{V^2}{R_A} < \frac{V^2}{R_B} \rightarrow P_A > P_B$$

ایجاد یک نیرو و لذا شتاب جانب مرکز



۱۲- معادله برنولی برای جریان تراکم پذیر و غیر دائم:

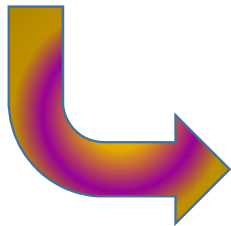
Unsteady, compressible flow:
$$\int \frac{dP}{\rho} + \int \frac{\partial V}{\partial t} ds + \frac{V^2}{2} + gz = \text{constant}$$

۱۲- فشار استاتیک، دینامیک و سکون

$$\frac{P}{\rho} + \frac{V^2}{2} + gz = \text{constant (along a streamline)}$$

معادله پایستگی انرژی در امتداد خط جریان

ضرب در ρ



$$P + \rho \frac{V^2}{2} + \rho gz = \text{constant (along a streamline)}$$

فشار استاتیک

فشار دینامیک

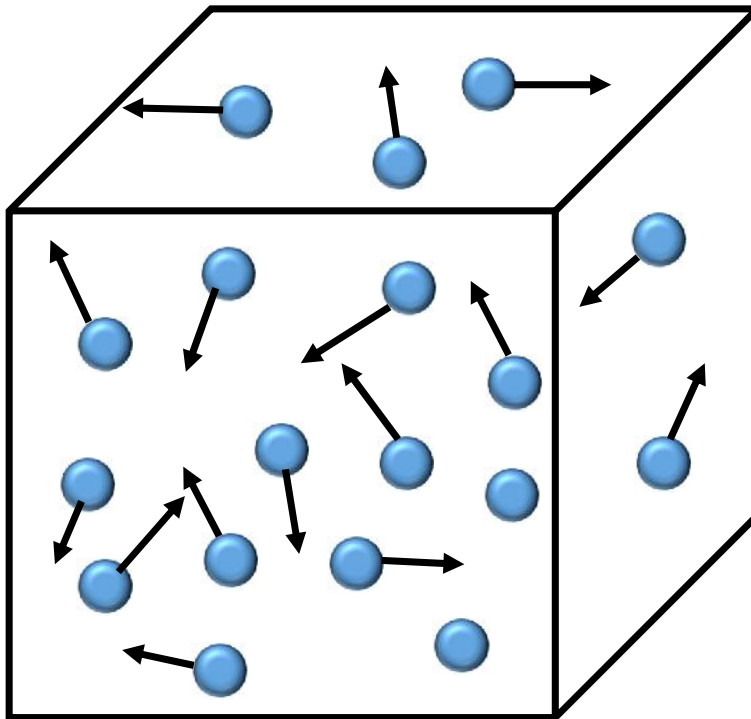
فشار هیدروستاتیک

رابطه ای بین فشارهای مختلف در سیال

static pressure

فشار استاتیک P

فشار ترمودینامیکی



فشار دینامیک $\frac{1}{2} \rho v^2$ dynamic pressure

فشار در سیال جاری

اگر سیال جریان بدون تغییر آنتروپی به حالت سکون برود فشار افزایش می یابد

فشار هیدروستاتیک $\rho g z$ hydrostatic pressure

فشار ناشی از اختلاف ارتفاع سیال نسبت به یک مبدا مشخص

❖ **فشار هیدروستاتیک + فشار دینامیک + فشار استاتیک = فشار کل**

❖ **معادله برنولی = فشار کل در امتداد خط جریان ثابت است**

فشار سکون

Stagnation pressure

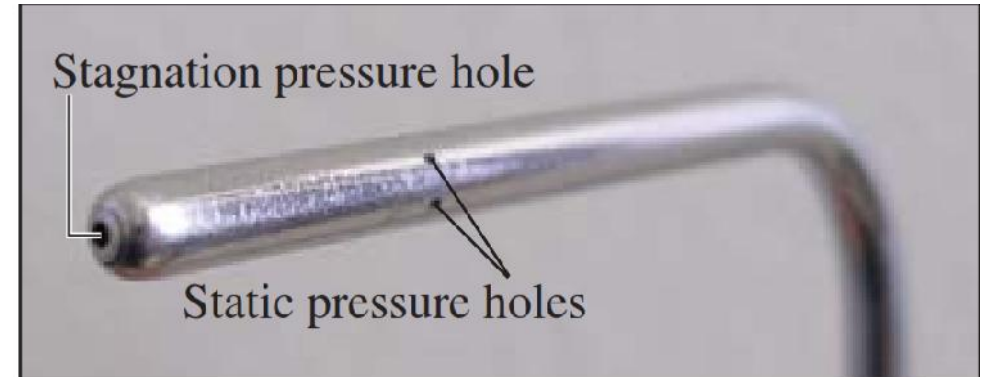
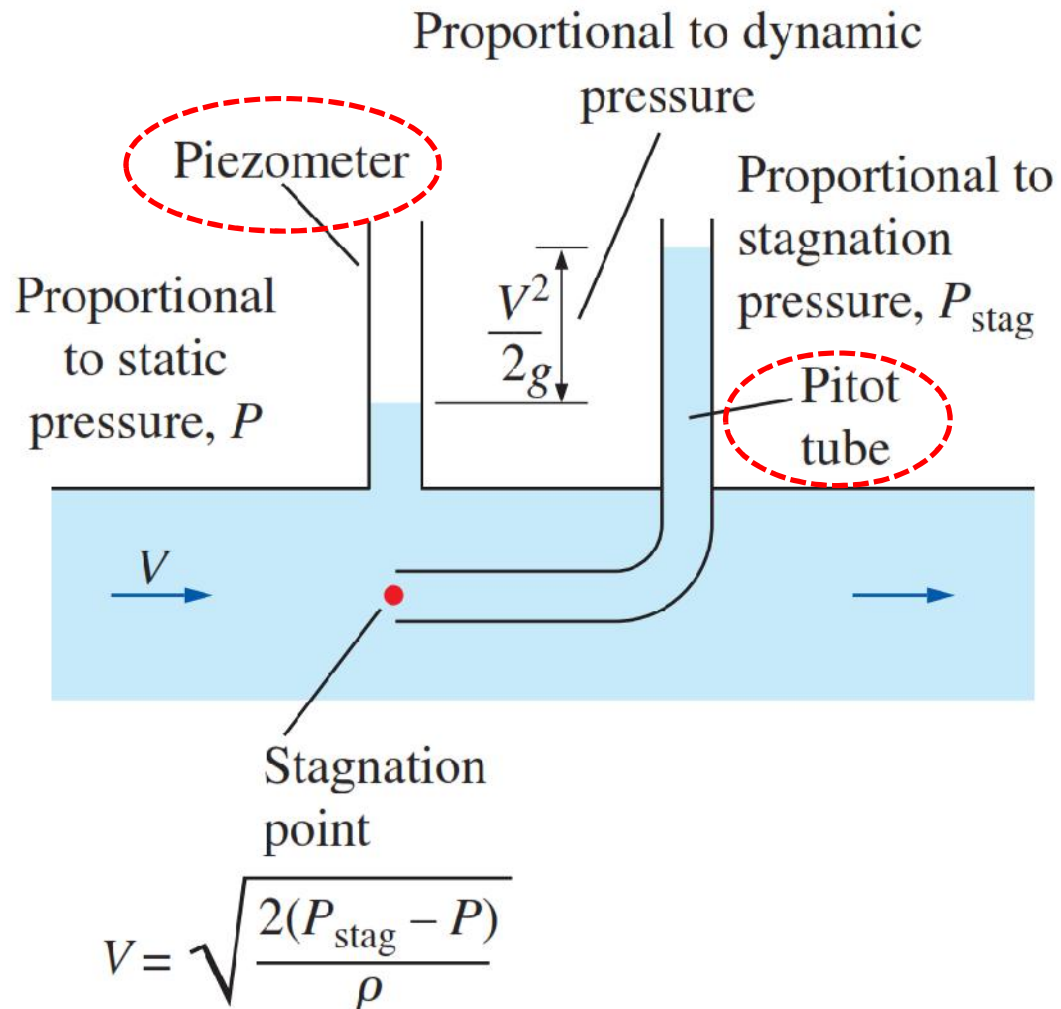
فشار دینامیک + فشار استاتیک = فشار سکون

$$P_{\text{stag}} = P + \rho \frac{V^2}{2} \quad (\text{kPa})$$

فشار سکون = فشار در نقطه ای که در آن فشار بدون تغییر آنترپی به سکون کامل برود

با مشخص بودن فشار سکون و استاتیک در یک نقطه، سرعت در آن نقطه بدست می آید:

$$V = \sqrt{\frac{2(P_{\text{stag}} - P)}{\rho}}$$

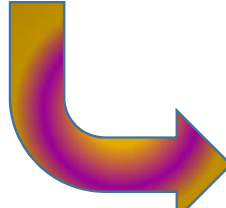


a Pitot-static probe for showing the stagnation pressure

۱۳- خط درجه

$$\frac{P}{\rho} + \frac{V^2}{2} + gz = \text{constant (along a streamline)}$$

تقسیم بر ρg


$$\frac{P}{\rho g} + \frac{V^2}{2g} + z = H = \text{constant (along a streamline)}$$

هد فشار

هد سرعت

هد ارتفاع

هد کل جریان

هد فشار P

ارتفاع ستون سیالی که فشار استاتیک را ایجاد می کند

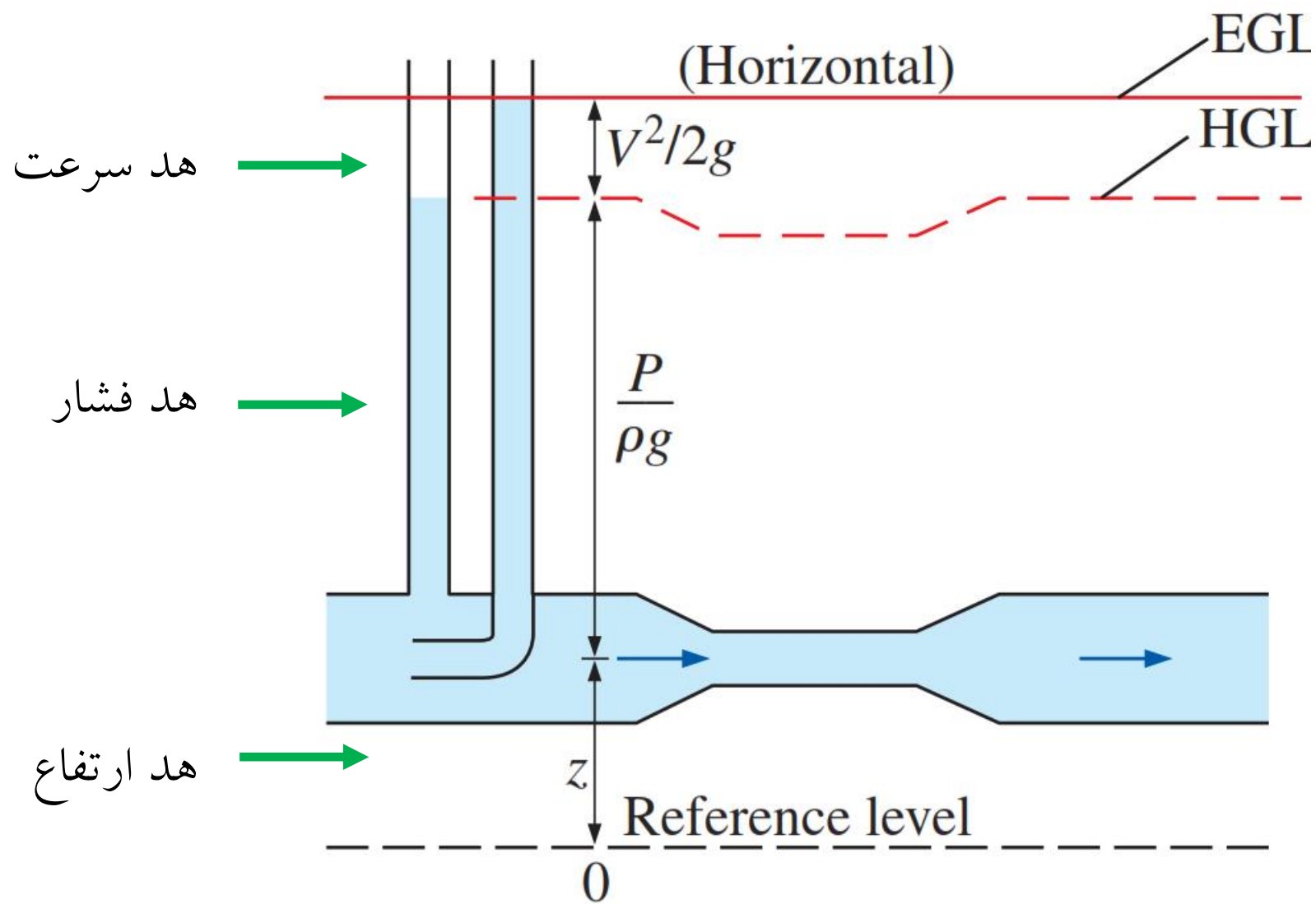
$$\frac{v^2}{2g} \quad \text{هد سرعت}$$

ارتفاع مورد نیاز از ستون سیال برای رسیدن به سرعت V در سقوط آزاد

هد ارتفاع

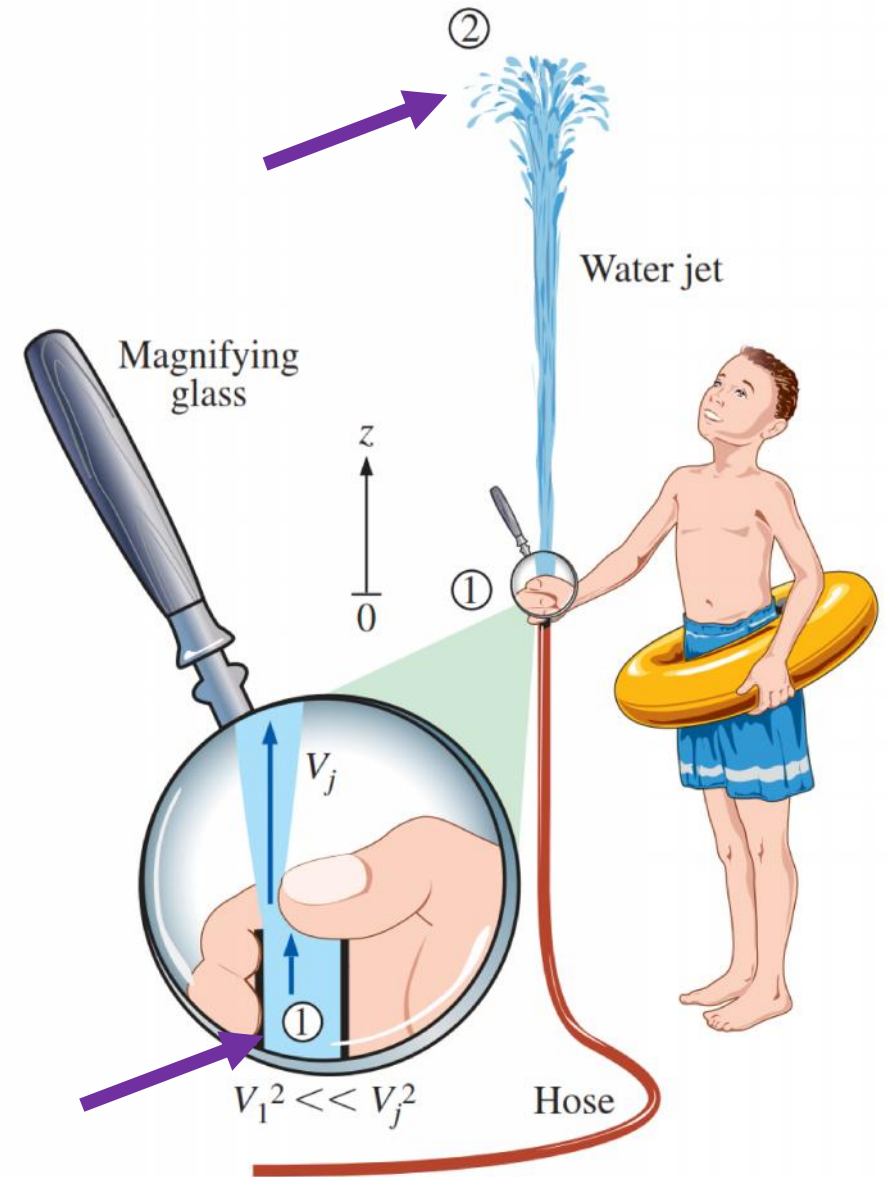
ارتفاع سیال معادل با پتانسیل سیال

معادله برنولی = مجموع هدهای سیال در امتداد خط جریان برای یک جریان دائمی و بدون اصطکاک و تراکم ناپذیر ثابت است



Example: Spraying Water into the Air

Water is flowing from a garden hose. A child places his thumb to cover most of the hose outlet, causing a thin jet of high-speed water to emerge. The pressure in the hose just upstream of his thumb is 400 kPa. If the hose is held upward, what is the maximum height that the jet could achieve?



$$\textcircled{1} \begin{cases} P_1 \\ V_1 \approx 0 \\ z_1 = 0 \end{cases} \quad \textcircled{2} \begin{cases} P_2 = P_{atm} \\ V_2 = 0 \\ z_2 = 0 \end{cases}$$

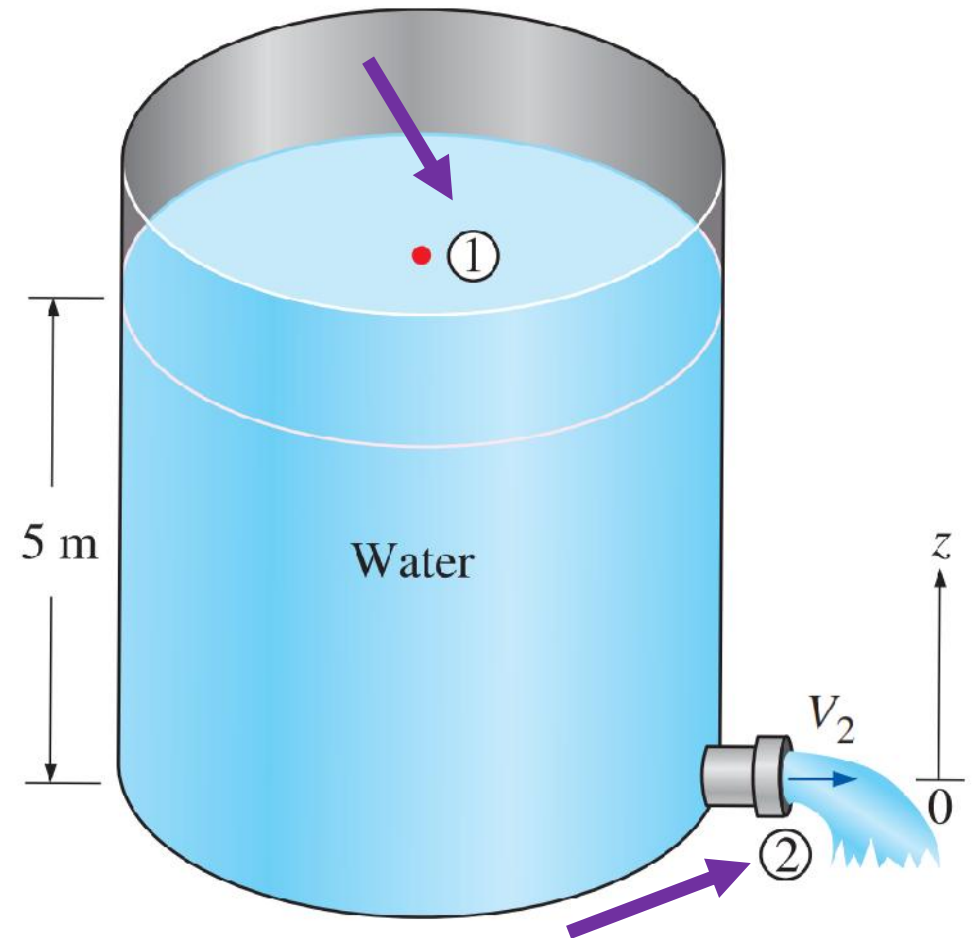
$$\frac{P_1}{\rho g} + \cancel{\frac{V_1^2}{2g}}^{\approx 0} + \cancel{z_1}^0 = \frac{P_2}{\rho g} + \cancel{\frac{V_2^2}{2g}}^0 + z_2 \rightarrow$$

$$z_2 = \frac{P_1 - P_{atm}}{\rho g} = \frac{P_{1, \text{gage}}}{\rho g} = \frac{400 \text{ kPa}}{(1000 \text{ kg/m}^3)(9.81 \text{ m/s}^2)} \left(\frac{1000 \text{ N/m}^2}{1 \text{ kPa}} \right) \left(\frac{1 \text{ kg} \cdot \text{m/s}^2}{1 \text{ N}} \right)$$

$$= 40.8 \text{ m}$$

EXAMPLE: Water Discharge from a Large Tank

A large tank open to the atmosphere is filled with water to a height of 5 m from the outlet tap. A tap near the bottom of the tank is now opened, and water flows out from the smooth and rounded outlet. Determine the maximum water velocity at the outlet.



$$\textcircled{1} \begin{cases} P_1 = P_{atm} \\ V_1 \approx 0 \\ z_1 \end{cases}$$

$$\textcircled{2} \begin{cases} P_2 = P_{atm} \\ V_2 = ? \\ z_2 = 0 \end{cases}$$

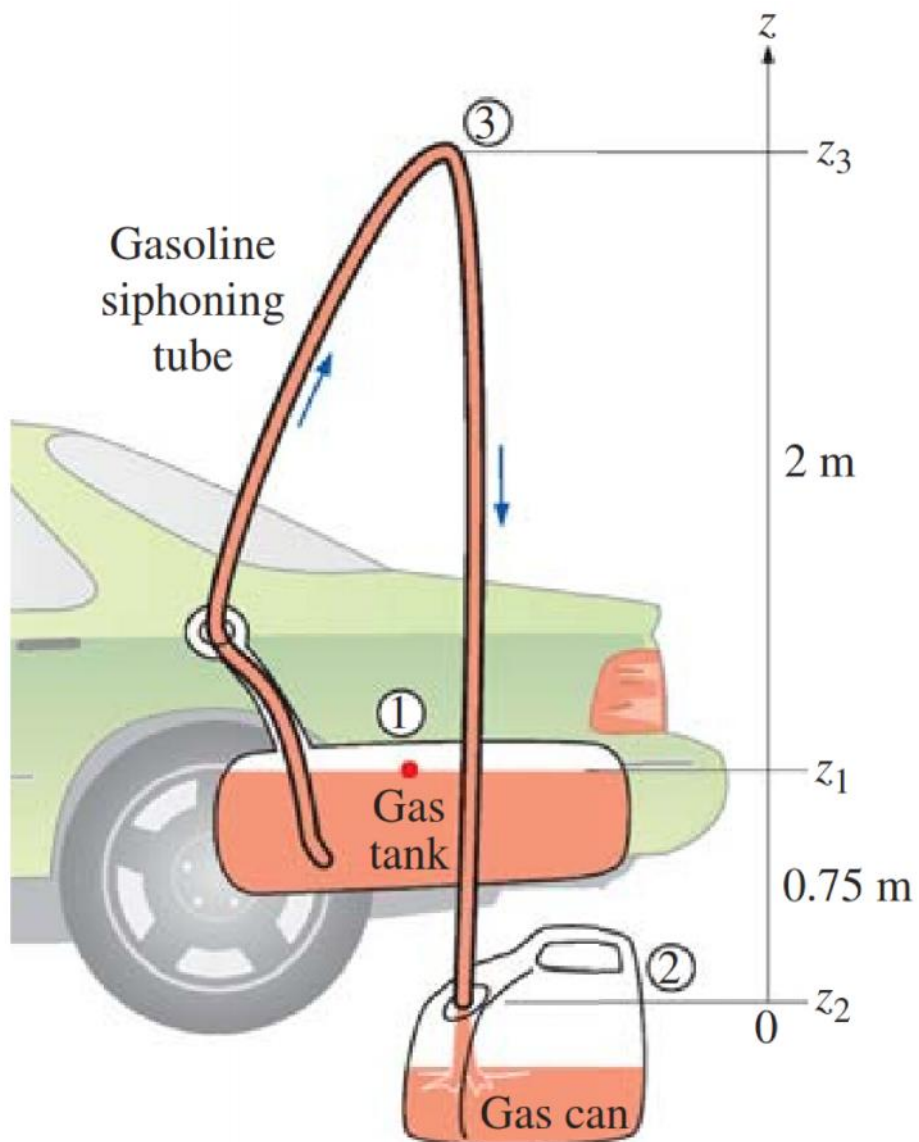
معادله پیوستگی $Av = \text{constant} \rightarrow A_1 \gg A_2 \rightarrow v_1 \ll v_2$

$$\cancel{\frac{P_1}{\rho g}} + \frac{V_1^2}{2g} \overset{\approx 0}{+} z_1 = \cancel{\frac{P_2}{\rho g}} + \frac{V_2^2}{2g} + \cancel{z_2} \rightarrow z_1 = \frac{V_2^2}{2g}$$

$$V_2 = \sqrt{2gz_1} = \sqrt{2(9.81 \text{ m/s}^2)(5 \text{ m})} = \mathbf{9.9 \text{ m/s}}$$

EXAMPLE: Siphoning Out Gasoline from a Fuel Tank

During a trip to the beach ($P = 1 \text{ atm} = 101.3 \text{ kPa}$), a car runs out of gasoline, and it becomes necessary to siphon gas out of the car of a Good Samaritan. The siphon is a small-diameter hose, and to start the siphon it is necessary to insert one siphon end in the full gas tank, fill the hose with gasoline via suction, and then place the other end in a gas can below the level of the gas tank. The difference in pressure between point 1 (at the free surface of the gasoline in the tank) and point 2 (at the outlet of the tube) causes the liquid to flow from the higher to the lower elevation. Point 2 is located 0.75 m below point 1 in this case, and point 3 is located 2 m above point 1. The siphon diameter is 5 mm, and frictional losses in the siphon are to be disregarded. Determine (a) the minimum time to withdraw 4 L of gasoline from the tank to the can and (b) the pressure at point 3. The density of gasoline is 750 kg/m^3



$$\textcircled{3} \begin{cases} P_3 = ? \\ V_3 \approx V_2 \\ z_3 \end{cases}$$

$$\textcircled{1} \begin{cases} P_1 = P_{atm} \\ V_1 \approx 0 \\ z_1 \end{cases}$$

$$\textcircled{2} \begin{cases} P_2 = P_{atm} \\ V_2 = ? \\ z_2 = 0 \end{cases}$$

1

2

$$\cancel{\frac{P_1}{\rho g}} + \frac{V_1^2}{2g} \xrightarrow{\approx 0} + z_1 = \cancel{\frac{P_2}{\rho g}} + \frac{V_2^2}{2g} + z_2 \xrightarrow{0} \rightarrow z_1 = \frac{V_2^2}{2g}$$



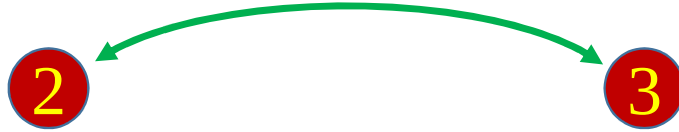
$$V_2 = \sqrt{2gz_1} = \sqrt{2(9.81 \text{ m/s}^2)(0.75 \text{ m})} = 3.84 \text{ m/s}$$

$$A = \pi D^2/4 = \pi(5 \times 10^{-3} \text{ m})^2/4 = 1.96 \times 10^{-5} \text{ m}^2$$

$$\dot{V} = V_2 A = (3.84 \text{ m/s})(1.96 \times 10^{-5} \text{ m}^2) = 7.53 \times 10^{-5} \text{ m}^3/\text{s} = 0.0753 \text{ L/s}$$



$$\Delta t = \frac{V}{\dot{V}} = \frac{4 \text{ L}}{0.0753 \text{ L/s}} = \mathbf{53.1 \text{ s}}$$



$$\frac{P_2}{\rho g} + \frac{V_2^2}{2g} + \cancel{z_2}^0 = \frac{P_3}{\rho g} + \frac{V_3^2}{2g} + z_3 \rightarrow \frac{P_{\text{atm}}}{\rho g} = \frac{P_3}{\rho g} + z_3$$

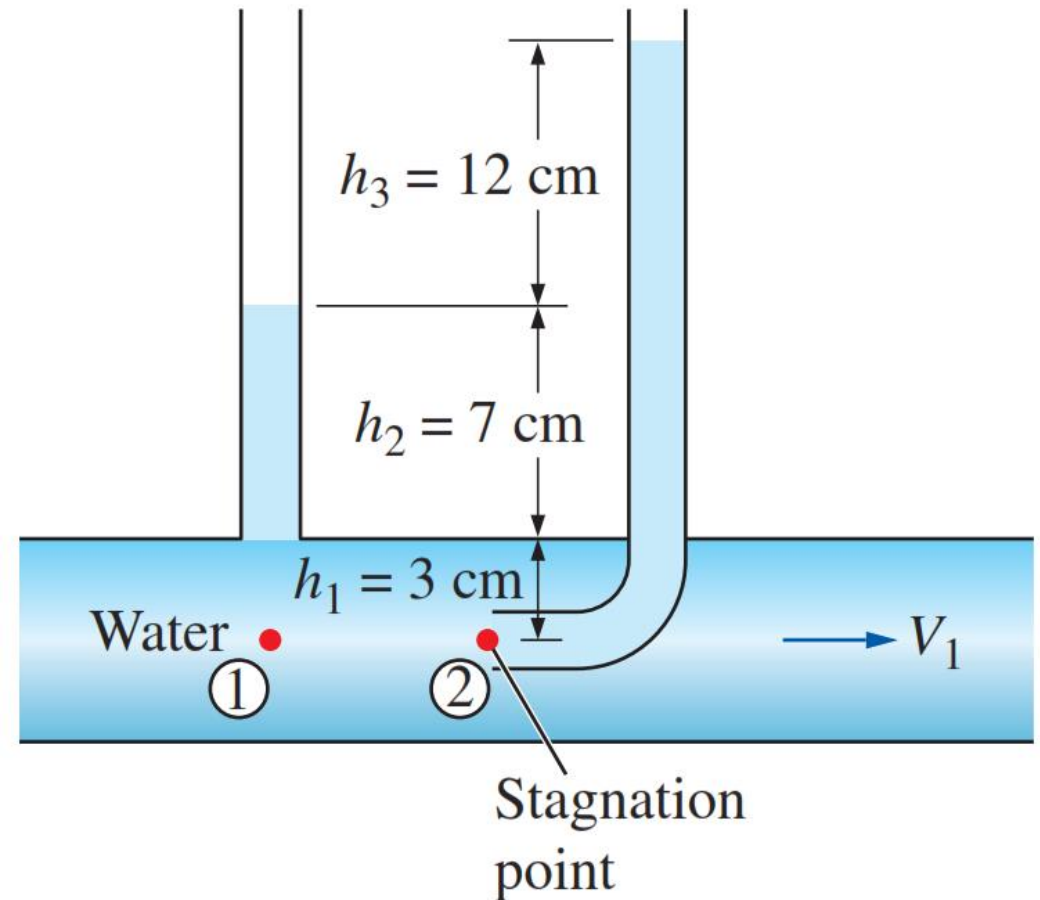
$$P_3 = P_{\text{atm}} - \rho g z_3$$

$$= 101.3 \text{ kPa} - (750 \text{ kg/m}^3)(9.81 \text{ m/s}^2)(2.75 \text{ m}) \left(\frac{1 \text{ N}}{1 \text{ kg} \cdot \text{m/s}^2} \right) \left(\frac{1 \text{ kPa}}{1000 \text{ N/m}^2} \right)$$

$$= \mathbf{81.1 \text{ kPa}}$$

EXAMPLE: Velocity Measurement by a Pitot Tube

A piezometer and a Pitot tube are tapped into a horizontal water pipe, as shown in Fig., to measure static and stagnation (static + dynamic) pressures. For the indicated water column heights, determine the velocity at the center of the pipe.



$$P_1 = \rho g(h_1 + h_2)$$

$$P_2 = \rho g(h_1 + h_2 + h_3)$$

Noting that $z_1 = z_2$, and point 2 is a stagnation point and thus $V_2 = 0$,

$$\frac{P_1}{\rho g} + \frac{V_1^2}{2g} + \cancel{z_1} = \frac{P_2}{\rho g} + \frac{\cancel{V_2^2}^0}{2g} + \cancel{z_2} \rightarrow \frac{V_1^2}{2g} = \frac{P_2 - P_1}{\rho g}$$

$$\frac{V_1^2}{2g} = \frac{P_2 - P_1}{\rho g} = \frac{\rho g(h_1 + h_2 + h_3) - \rho g(h_1 + h_2)}{\rho g} = h_3$$

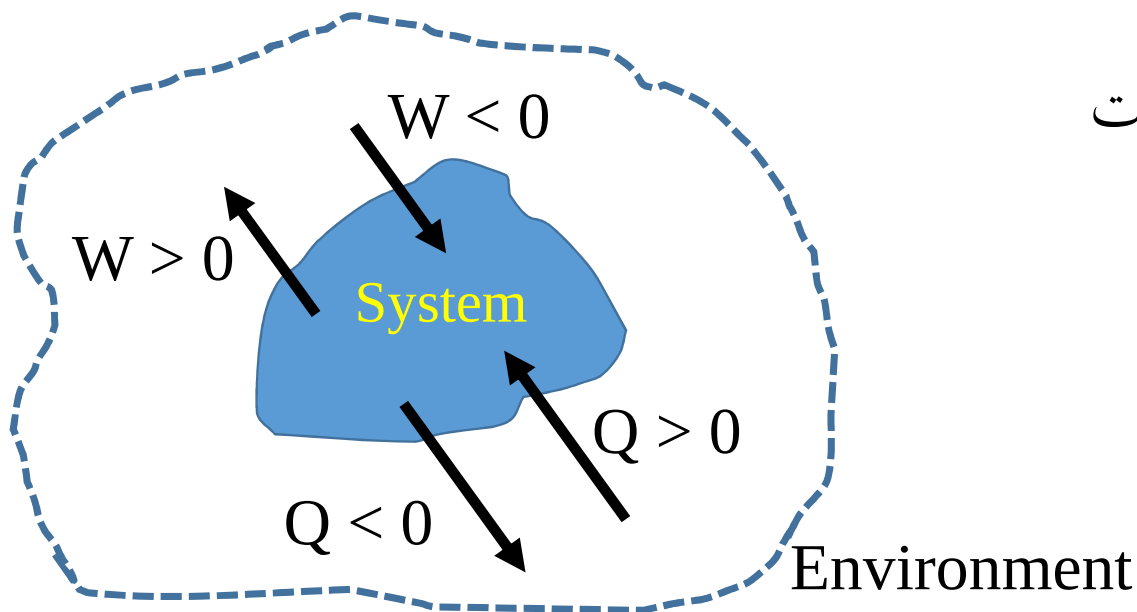
$$V_1 = \sqrt{2gh_3} = \sqrt{2(9.81 \text{ m/s}^2)(0.12 \text{ m})} = \mathbf{1.53 \text{ m/s}}$$

معادله عمومی انرژی

قانون اول ترمودینامیک = قانون بقای انرژی

= در طی یک فرآیند انرژی نه تولید و نه از بین می رود بلکه از شکلی به شکل دیگر در می آید

سیستم ذرات = یک سیستم بست با جرم ثابت
تغییر انرژی سیستم = تبادل کار و گرما



$$\dot{Q}_{\text{net in}} + \dot{W}_{\text{net in}} = \frac{dE_{\text{sys}}}{dt}$$

$$\dot{Q}_{\text{net in}} + \dot{W}_{\text{net in}} = \frac{d}{dt} \int_{\text{sys}} \rho e dV$$

نرخ خالص انتقال حرارت به/از سیستم $\dot{Q}_{\text{net in}} = \dot{Q}_{\text{in}} - \dot{Q}_{\text{out}}$

نرخ خالص انتقال کار به/از سیستم $\dot{W}_{\text{net in}} = \dot{W}_{\text{in}} - \dot{W}_{\text{out}}$

انرژی کل سیستم ذرات در واحد جرم $e = u + ke + pe = u + \frac{V^2}{2} + gz$

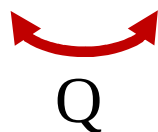
انرژی پتانسیل
 انرژی جنبشی
 انرژی درونی

انتقال گرما

انتقال گرما بین سیستم و محیط ناشی از اختلاف دماست



$$T_A > T_B$$



$$T_A = T_B$$

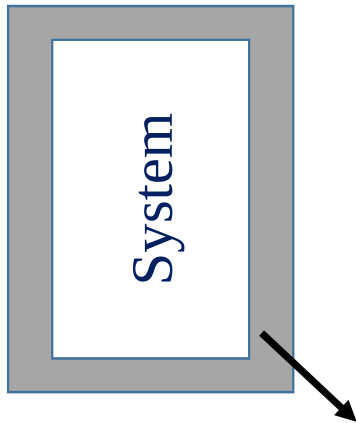
تعداد گرمایی

فرآیند بی درو:

فرآیندی که در آن گرمای رد و بدل شده بین سیستم و محیط صفر باشد

شرط رخ دادن فرآیند بی درو: $\left. \begin{array}{l} \text{سیستم کاملاً عایق باشد} \\ \text{فرآیند آنقدر سریع باشد که فرصت رد و بدل شدن گرما وجود نداشته باشد} \end{array} \right\}$

$$Q = 0 \quad \rightarrow \quad \Delta E = -W$$



Insulator

اگر سیستم روی محیط کار انجام دهد $W > 0 \rightarrow \Delta E < 0$

اگر محیط روی سیستم کار انجام دهد $W < 0 \rightarrow \Delta E > 0$

انتقال کار

$$W_{\text{total}} = W_{\text{shaft}} + W_{\text{pressure}} + W_{\text{viscous}} + W_{\text{other}}$$

کار محوری

کار فشاری انجام شده روی سطح معیار

کار نیروی برشی لزجت سیال روی سطح معیار

کار نیروهای دیگر شامل نیروی الکتریکی، مغناطیسی، کشش سطحی و غیره

۱- کار محوری

$$W_{\text{total}} = \dot{W}_{\text{shaft}} + W_{\text{pressure}} + W_{\text{viscous}} + W_{\text{other}}$$

کار منتقل شده بین سیال یک وسیله سیالاتی مانند توربین، پمپ، فن کمپرسور

$$\dot{W}_{\text{shaft}} = \omega T_{\text{shaft}} = 2\pi \dot{n} T_{\text{shaft}}$$

توان انتقال کار

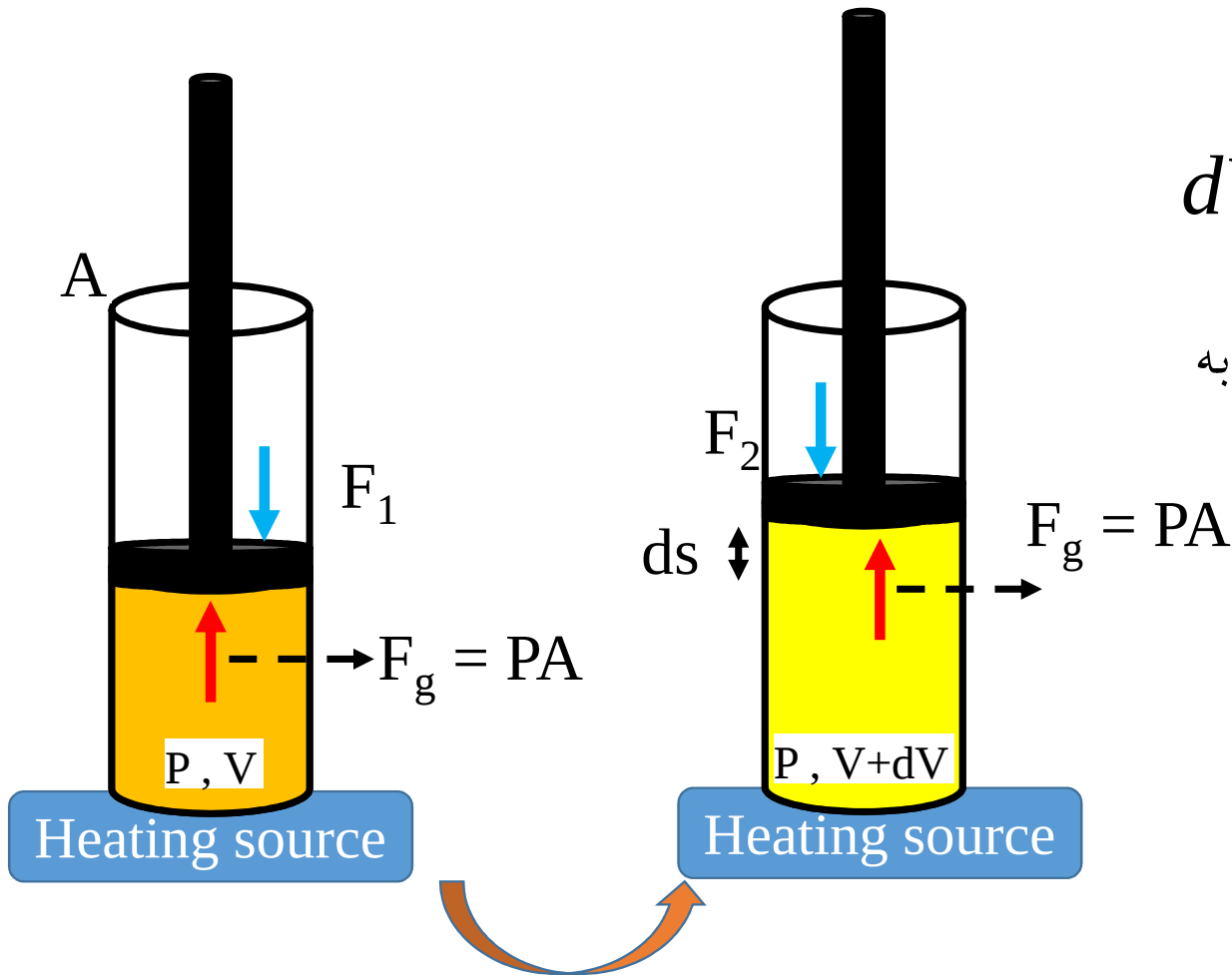
سرعت زاویه ای

گشتاور محور

تعداد دورها در واحد زمان

۲- کار فشاری

$$W_{\text{total}} = W_{\text{shaft}} + W_{\text{pressure}} + W_{\text{viscous}} + W_{\text{other}}$$



$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{s} = PAds = PdV$$

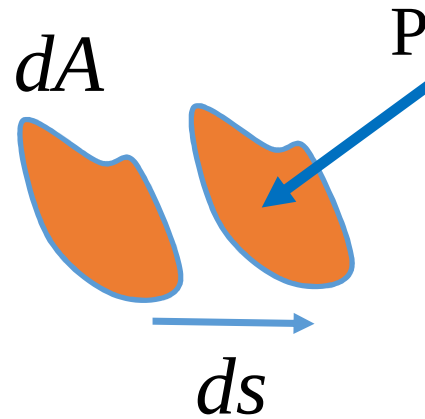
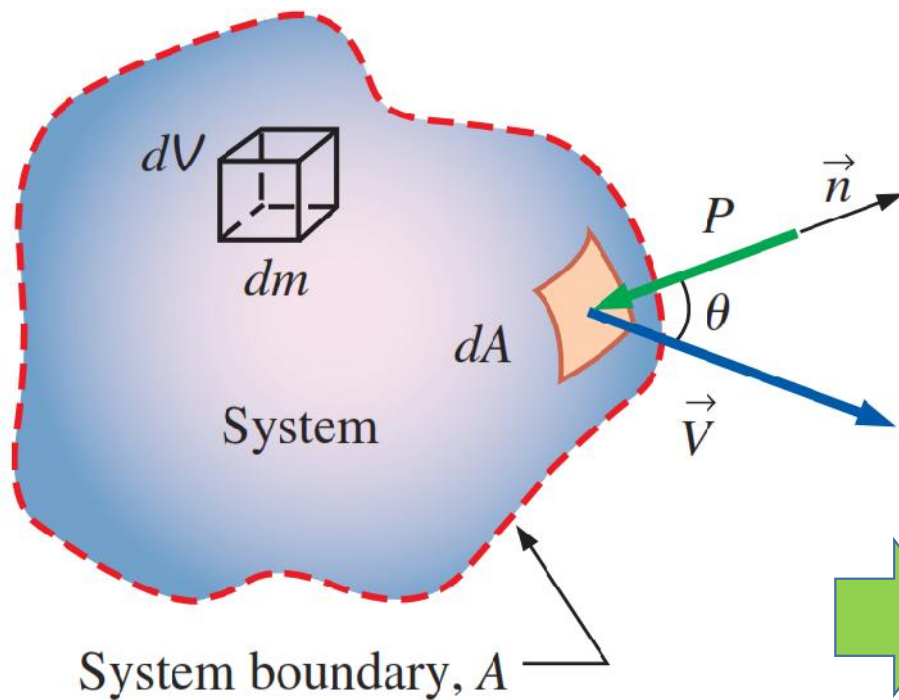
کار انجام شده توسط گاز هنگامی که حجم آن به اندازه dV تغییر می کند

$$\frac{dW}{dt} = PA \frac{ds}{dt} = PA v$$

سرعت پیستون

در انتقال سیال آن می تواند دچار تغییر شکل شود فشار در انتقال سیال کار انجام می دهد

$$\delta \dot{W}_{\text{pressure}} = -P dA V_n = -P dA (\vec{V} \cdot \vec{n})$$



$$V = \frac{ds}{dt}$$

$$\dot{W}_{\text{pressure, net in}} = - \int_A P (\vec{V} \cdot \vec{n}) dA$$

$$W_{\text{total}} = W_{\text{shaft}} + W_{\text{pressure}} + \underbrace{W_{\text{viscous}} + W_{\text{other}}}_{\text{صفر}}$$



$$\dot{W}_{\text{net in}} = \dot{W}_{\text{shaft, net in}} + \dot{W}_{\text{pressure, net in}} = \dot{W}_{\text{shaft, net in}} - \int_A P(\vec{V} \cdot \vec{n}) dA$$

$$\dot{Q}_{\text{net in}} + \dot{W}_{\text{net in}} = \frac{dE_{\text{sys}}}{dt}$$



$$\dot{Q}_{\text{net in}} + \dot{W}_{\text{shaft, net in}} + \dot{W}_{\text{pressure, net in}} = \frac{dE_{\text{sys}}}{dt}$$

توان انتقال کار

توان کار محوری

توان کار فشاری

توان انتقال انرژی به سیستم

بقای انرژی در حجم کنترل

قضیه رینولدز برای حجم کنترل
RTT

$$\frac{dN_{\text{sys}}}{dt} = \int_{\text{CV}} \frac{\partial}{\partial t} (h \rho) dV + \int_{\text{CS}} h \rho \vec{v} \cdot \hat{n} dA$$

$$N = E, \quad h = \frac{E}{m} = e$$

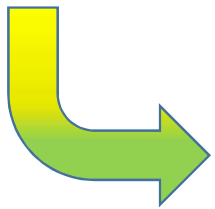


$$\frac{dE_{\text{sys}}}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{\text{CV}} e \rho dV + \int_{\text{CS}} e \rho (\vec{V}_r \cdot \vec{n}) A$$

$$\vec{V}_r = \vec{V} - \vec{V}_{\text{CS}}$$

$$e = u + \text{ke} + \text{pe} = u + V^2/2 + gz$$

$$\left\{ \begin{aligned} \dot{Q}_{\text{net in}} + \dot{W}_{\text{shaft, net in}} + \dot{W}_{\text{pressure, net in}} &= \frac{dE_{\text{sys}}}{dt} \\ \frac{dE_{\text{sys}}}{dt} &= \frac{d}{dt} \int_{\text{CV}} e\rho dV + \int_{\text{CS}} e\rho (\vec{V}_r \cdot \vec{n}) A \end{aligned} \right.$$



$$\underbrace{\dot{Q}_{\text{net in}} + \dot{W}_{\text{shaft, net in}} + \dot{W}_{\text{pressure, net in}}}_{\text{توان انتقال انرژی به صورت کار و گرما به حجم کنترل}} = \frac{d}{dt} \int_{\text{CV}} e\rho dV + \underbrace{\int_{\text{CS}} e\rho (\vec{V}_r \cdot \vec{n}) dA}_{\text{نرخ خالص انرژی خروجی از سطح کنترل بوسیله شارش جرم}}$$

توان انتقال انرژی به صورت
کار و گرما به حجم کنترل

توان تغییر انرژی
در حجم کنترل

نرخ خالص انرژی خروجی از
سطح کنترل بوسیله شارش جرم

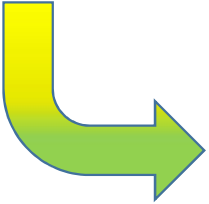
انرژی درالمان dV در حجم کنترل $e r dV = e dm$

انرژی در واحد جرم

دبی جرمی گذرنده از مقطع dA از سطح کنترل $\rho(\vec{V}_r \cdot \vec{n}) dA$

نرخ انتقال انرژی از سطح کنترل $e \rho(\vec{V}_r \cdot \vec{n}) dA$

$$\left\{ \begin{aligned} \dot{Q}_{\text{net in}} + \dot{W}_{\text{shaft, net in}} + \dot{W}_{\text{pressure, net in}} &= \frac{d}{dt} \int_{\text{CV}} e \rho dV + \int_{\text{CS}} e \rho (\vec{V}_r \cdot \vec{n}) dA \\ \dot{W}_{\text{pressure, net in}} &= - \int_A P (\vec{V} \cdot \vec{n}) dA = - \int_A \frac{P}{\rho} \rho (\vec{V} \cdot \vec{n}) dA \end{aligned} \right.$$



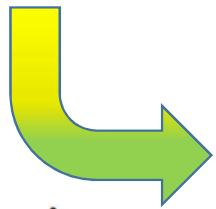
$$\dot{Q}_{\text{net in}} + \dot{W}_{\text{shaft, net in}} = \frac{d}{dt} \int_{\text{CV}} e \rho dV + \int_{\text{CS}} \left(\frac{P}{\rho} + e \right) \rho (\vec{V}_r \cdot \vec{n}) dA$$

انتگرال روی بخش های ورودی و خروجی از سطح کنترل گرفته می شود

اگر $P/\rho + e$ در ورودی و خروجی ها یکنواخت باشد

$$\int_{CS} \left(\frac{P}{\rho} + e \right) \rho (\vec{V} \cdot \vec{n}) dA = \left(\frac{P}{\rho} + e \right) \int_{CS} \rho (\vec{V} \cdot \vec{n}) dA$$

$$\dot{m} = \int_A \rho (\vec{V} \cdot \vec{n}) dA_c$$



$$\dot{Q}_{\text{net in}} + \dot{W}_{\text{shaft, net in}} = \frac{d}{dt} \int_{CV} e \rho dV + \sum_{\text{out}} \dot{m} \left(\frac{P}{\rho} + e \right) - \sum_{\text{in}} \dot{m} \left(\frac{P}{\rho} + e \right)$$

$$\begin{aligned} \dot{Q}_{\text{net in}} + \dot{W}_{\text{shaft, net in}} = \frac{d}{dt} \int_{CV} e \rho dV + \sum_{\text{out}} \dot{m} \left(\frac{P}{\rho} + u + \frac{V^2}{2} + gz \right) \\ - \sum_{\text{in}} \dot{m} \left(\frac{P}{\rho} + u + \frac{V^2}{2} + gz \right) \end{aligned}$$

