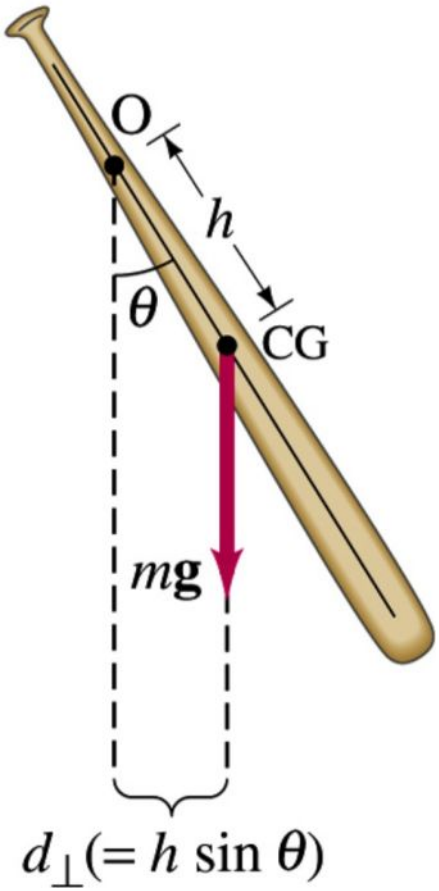
بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَٰنِ الرَّحِيمِ

آزمایش آونگ کاتر

آونگ فیزیکی (Physical Pendulum)



- جسم می تواند حول محور گذرنده از نقطه آویز (نقطه O) نوسان می کند.
- محور بدون اصطکاک می باشد.
- در حالت تعادل سکون؛ خط واصل بین نقطه آویز و مرکز جرم در راستای قائم قرار می گیرد.
- با خروج از نقطه تعادل؛ خط واصل بین نقطه آویز و مرکز جرم با خط قائم زاویه θ می سازد.
- نیروها: نیروی وزن جسم و نیروی تکیه گاه.

$$\begin{cases} \tau_O = 0 \\ \tau_{mg} = mgh\sin\theta \end{cases}$$

$$\sum \tau = I\alpha \quad \rightarrow \quad mgh\sin\theta = -I\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{mgh}{I}\sin\theta = 0$$

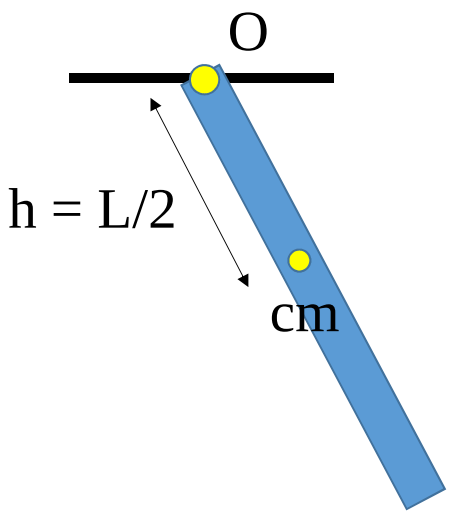
$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \underbrace{\frac{mgh}{I}}_{\omega^2}\theta = 0$$

$$\omega^2 = \frac{mgh}{I_O} \quad \rightarrow \quad \omega = \sqrt{\frac{mgh}{I_O}} = \frac{2\pi}{T} \quad \rightarrow \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{I_O}{mgh}}$$

h = فاصله بین نقطه آویز و مرکز جرم

I_O = لختی دورانی حول نقطه دوران

مثال) میله ای به جرم m و طول L از یک انتها آویزان شده است. اگر با نوسان درآوردن میله حول نقطه آویز، دوره تناوب آن اندازه گیری شده باشد شتاب گرانش زمین را بدست آورید.



$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I_O}{mgh}}$$

$$I_{cm} = \frac{1}{12}mL^2 \quad \Rightarrow \quad I_O = \frac{1}{12}mL^2 + m(\frac{L}{2})^2 = \frac{1}{3}mL^2$$

$$I_O = I_{cm} + mh^2$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I_O}{mgh}} = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{1}{3}mL^2}{mg\frac{L}{2}}} = 2\pi\sqrt{\frac{2L}{3g}} \quad \Rightarrow \quad g = \frac{8\pi^2 L}{3T^2}$$

آونگ ساده معادل:

اگر یک نوسانگر فیزیکی داشته باشیم با مشخصات m (جرم آونگ)، I_O (لختی دورانی حول نقطه آویز) و h (فاصله نقطه آویز تا مرکز جرم آن)

$$T_{physical} = 2\pi\sqrt{\frac{I_O}{mgh}}$$

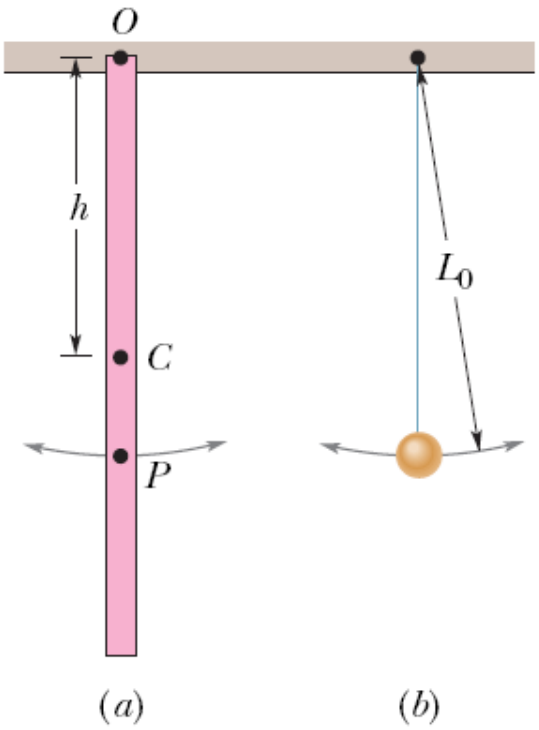
آونگ ساده معادل: با یک آونگ فیزیکی دارای جرمی برابر با جرم کل آونگ فیزیکی، طول L_0 می باشد. طول L_0 به عنوان طول آونگ ساده بگونه ای انتخاب می شود که دوره تناوب آونگ ساده معادل با دوره تناوب آونگ فیزیکی برابر باشد.

Physical	Simple pendulum
m	m
h	L_0
T	T

$$T_{physical} = T_{Simple}$$

$$2\pi\sqrt{\frac{I_0}{mgh}} = 2\pi\sqrt{\frac{L_0}{g}} \rightarrow L_0 = \frac{I_0}{mh}$$

مثال) خط کش به طول L از یک انتها آویزان شده است بگونه ای که به آسانی می تواند حول نقطه آویز نوسان نماید. طول آونگ ساده معادل با آن را بدست آورید

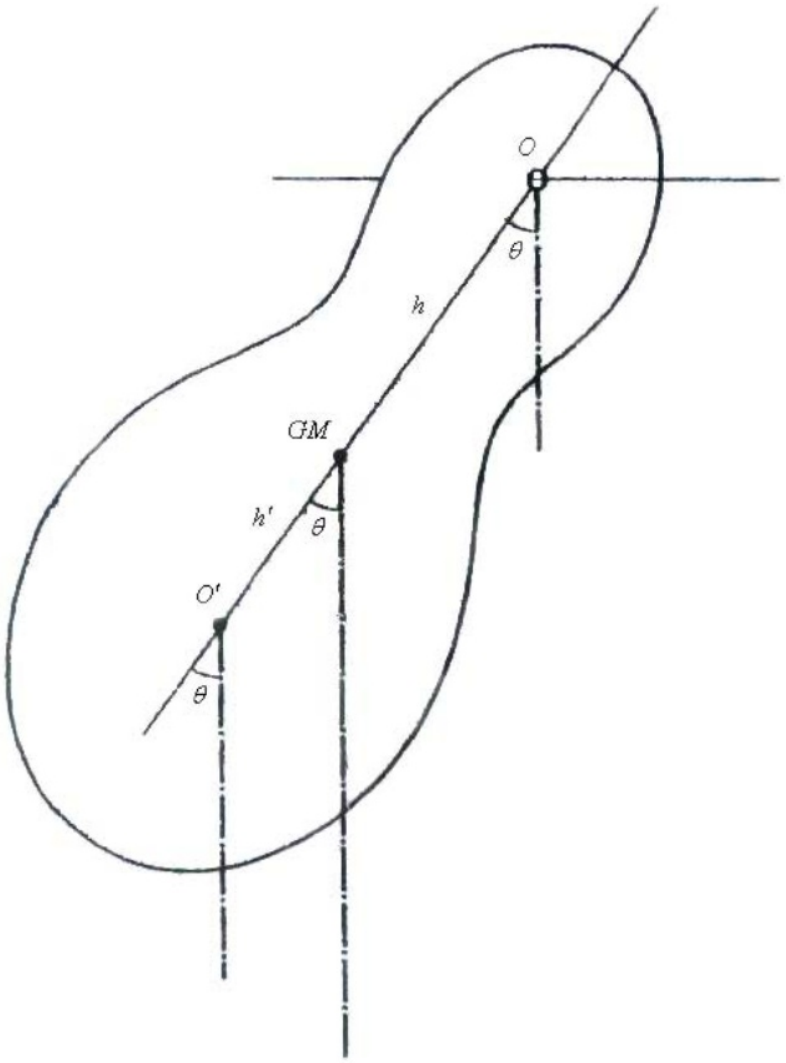


$$L_0 = \frac{I_O}{mh} = \frac{\frac{1}{3}mL^2}{m(\frac{L}{2})} \qquad \rightarrow \qquad L_0 = \frac{2}{3}L$$

Film 5

هدف: آشنایی با آونگ کاتر و تعیین شتاب ثقل زمین با اندازه‌گیری دوره‌ی تناوب نوسانات آونگ کاتر.

در این آزمایش می‌خواهیم با اندازه‌گیری دوره‌ی نوسانات یک آونگ مرکب به نام آونگ کاتر شتاب ثقل زمین را به دست آوریم. هر جسمی که بتواند حول یک محور ثابت افقی تحت اثر نیروی جاذبه‌ی زمین نوسان کند، آونگ مرکب نامیده می‌شود.



مراکز o، GM و o' در یک صفحه قرار دارند.

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{Mgh}}$$

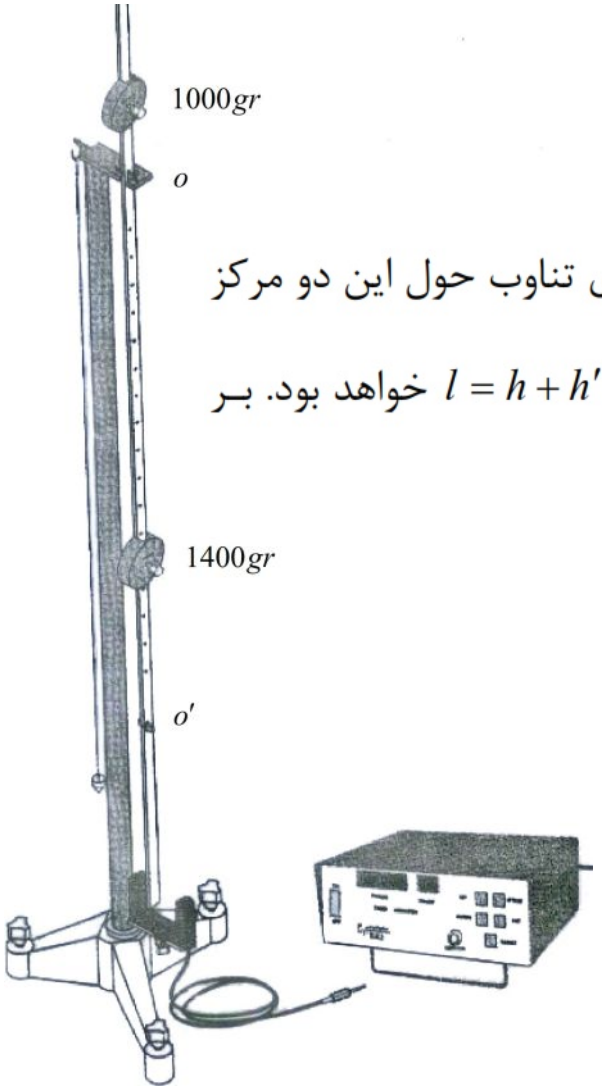
هویگنس نشان داد که در صفحه‌ای که از محور نوسان o و مرکز گرانش (GM) می‌گذرد، محور دیگـری (o') به موازات محور نوسانی که از o عبور می‌کند وجود دارد که دوره‌ی تناوب آونگ مرکب حول این محور با دوره‌ی تناوب آونگ مرکب حول محور o برابر است.

$$T_o = T_{o'}$$

$$2\pi\sqrt{\frac{I_o}{Mgh}} = 2\pi\sqrt{\frac{I_{o'}}{Mgh'}}$$

$$\frac{I_o}{h} = \frac{I_{o'}}{h'}$$

کاتر در سال ۱۸۱۸ بر اساس نظر هویگنس یک آونگ مرکب تولید کرد. همان‌طور که در شکل صفحه‌ی بعد دیده می‌شود، این آونگ از یک میله و دو جرم متفاوت ۱۰۰۰ و ۱۴۰۰ گرمی تشکیل می‌شود. این مجموعه را می‌توان حول دو تیغه‌ی فلزی ثابت بر روی میله (همان مرکزهای o و o') به نوسان در آورد. در این آونگ که به آونگ کاتر معروف است، مرکزهای o و o' ثابت در نظر گرفته می‌شوند و یکی از دو جرم متفاوت (۱۰۰۰ گرمی) در یک مکان ثابتی قرار دارد و جرم دیگر می‌تواند جابجا شود. که در این صورت مرکز جرم جابجا شده و دوره‌ی تناوب حول مرکزهای o و o' تغییر می‌کند.



با استفاده از قضیه‌ی محورهای موازی و رابطه‌ی (۳) می‌توان نشان داد که وقتی دوره‌ی تناوب حول این دو مرکز با هم برابر باشد، این دوره تناوب مشترک معادل دوره‌ی تناوب آونگ ساده‌ای به طول $l = h + h'$ خواهد بود. بـر

$$T_{physical} = T_{Simple}$$

$$2\pi\sqrt{\frac{I}{mgh}} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{h+h'}{g}}$$

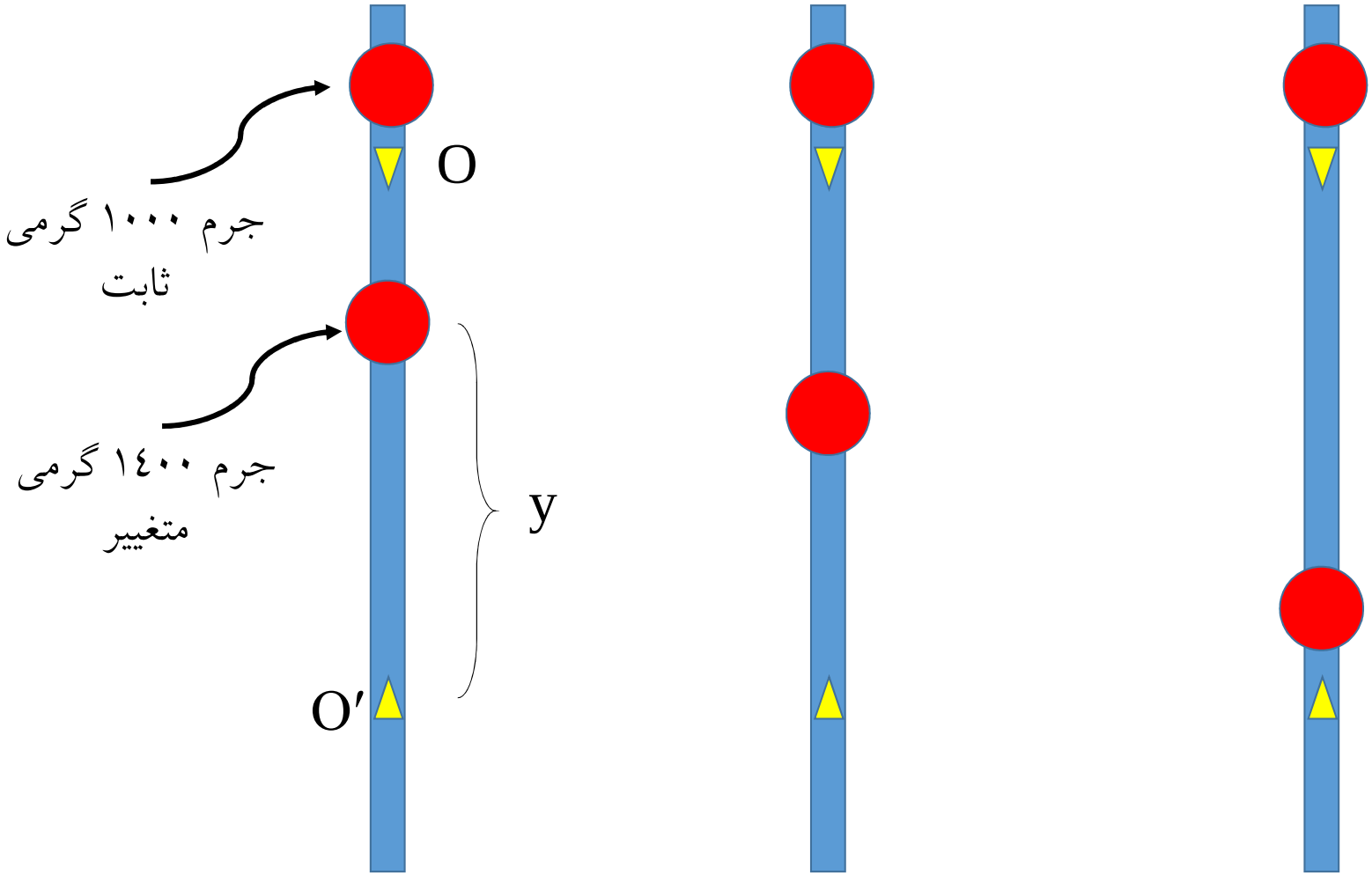
روش انجام آزمایش:

۱- آونگ کاتر را روی یکی از تیغه‌ها سوار کنید.

۲- وزنه‌ها را با استفاده از مهره‌ی روی آنها روی میله محکم کنید. برای این کار وزنه‌ی ۱۰۰۰ گرمی را در فاصله‌ی ۷ تا ۱۲ سانتی‌متری بالای تیغه‌ی فوقانی (مرکز o) و وزنه‌ی ۱۴۰۰ گرمی را بالای تیغه‌ی تحتانی (مرکز o') قرار دهید.

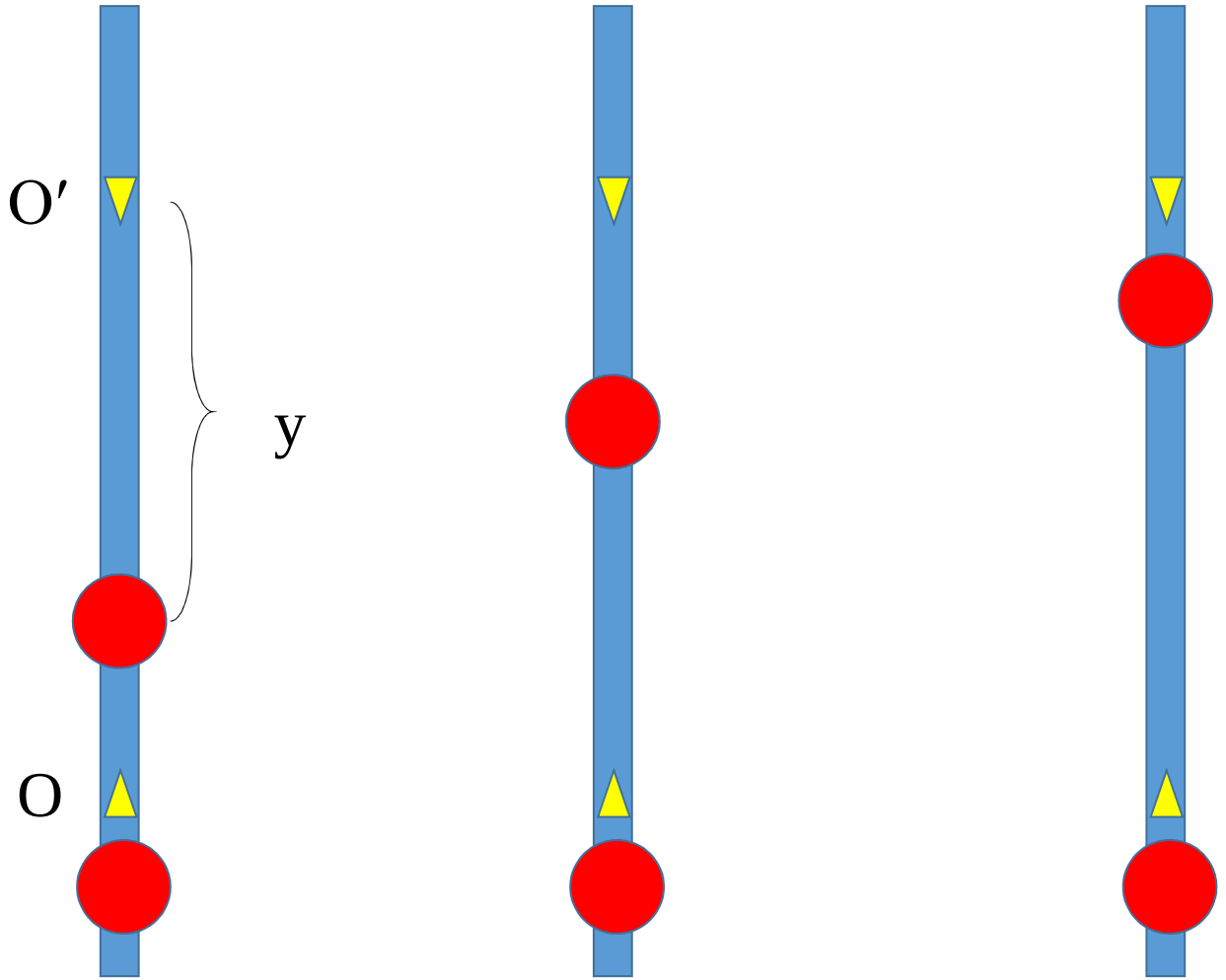
۳- با داشتن فواصل مشخص ۵ سانتی‌متری می‌توانید وزنه‌ی ۱۴۰۰ گرمی را در فواصل مختلف (y) از مرکز o' قرار دهید.

۴- با استفاده از شاقول دستگاه را در حالت تراز قرار دهید.


O
جرم ١٠٠٠ گرمی
ثابت
جرم ١٤٠٠ گرمی
متغییر
y
O′

۵- با قرار دادن وزنه‌ی ۱۴۰۰ گرمی در فواصل ۱۰، ۱۵، ۲۰، ۲۵، ۳۰، ۳۵ و ۴۰ سانتی‌متری از مرکز o' ابتدا دوره‌ی تناوب حول مرکز o را به دست آورید. سپس به ازای همان حالت‌ها و با عوض کردن جای دو تیغه، دوره‌ی تناوب حول مرکز o' را اندازه‌گیری کنید.

۶- برای اندازه‌گیری دوره‌ی تناوب آونگ کاتر همان‌طور که در شکل نیز دیده می‌شود از سنسور و دستگاه شمارنده استفاده می‌شود. با تنظیم دستگاه، مدت زمان ۲۰ نوسان را اندازه‌گیری کنید و از روی آن دوره‌ی تناوب را در هر حالت به دست آورید.


O′
y
O

$y(cm)$	$t(s)$ مدت زمان ۲۰ نوسان حول مرکز o	$T(s)$ دوره تناوب	$y'(cm)$	$t'(s)$ مدت زمان ۲۰ نوسان حول مرکز o'	$T'(s)$ دوره تناوب
10			10		
15			15		
20			20		
25			25		
30			30		
35			35		
40			40		

۷- با رسم نمودار دوره‌ی تناوب برحسب y برای مرکزهای o و o' در یک نمودار، محل تلاقی T و T' را به دست آورید.

۸- با اندازه‌گیری فاصله‌ی بین مرکزهای o و o' و با داشتن دوره‌ی تناوب مشترک برای دو مرکز، طبق رابطه‌ی (۴) پارامتر g را به دست آورید.

۹- درصد اختلاف g به دست آمده را با مقدار واقعی آن $9.8 m/s^2$ تعیین کنید.

درصد اختلاف (٪) نسبت به $9.8(m/s^2)$	$g(m/s^2)$ شتاب جاذبه زمین	$l(m)$ یا فاصله‌ی بین o تا o'	$T(s)$ دوره تناوب مشترک

Y=40	Y=35	Y=30	Y=25	Y=20	Y=15	Y=10	شماره داده
T=35.67 T'=37.70	T=36.10 T'=37.79	T=37.06 T'=37.89	T=37.64 T'=38.21	T=38.24 T'=38.56	T=38.86 T'=39.04	T=39.61 T'=39.53	۱
T=35.66 T'=37.70	T=36.10 T'=37.79	T=37.08 T'=37.89	T=37.66 T'=38.23	T=38.22 T'=38.54	T=38.89 T'=39.07	T=39.60 T'=39.58	۲
T=35.67 T'=37.70	T=36.11 T'=37.79	T=37.06 T'=37.89	T=37.64 T'=38.21	T=38.23 T'=38.55	T=38.86 T'=39.03	T=39.55 T'=39.49	۳
T=35.68 T'=37.72	T=36.11 T'=37.81	T=37.07 T'=37.92	T=37.64 T'=38.21	T=38.26 T'=38.56	T=38.90 T'=39.14	T=39.57 T'=39.53	۴
T=35.17 T'=37.70	T=36.10 T'=38.25	T=37.06 T'=38.77	T=38.64 T'=39.01	T=39.13 T'=39.33	T=39.76 T'=39.65	T=40.51 T'=39.99	۵
T=35.07 T'=37.60	T=36.01 T'=38.15	T=37.06 T'=38.67	T=38.54 T'=39.01	T=39.03 T'=39.23	T=39.66 T'=39.55	T=40.41 T'=39.89	۶