بسم الله الرحمن الرحیم

Chapter 9

Magnetic Fields Due to Currents

Magnetic calculatingmethods:

law of Biot and Savart

Ampere's Law

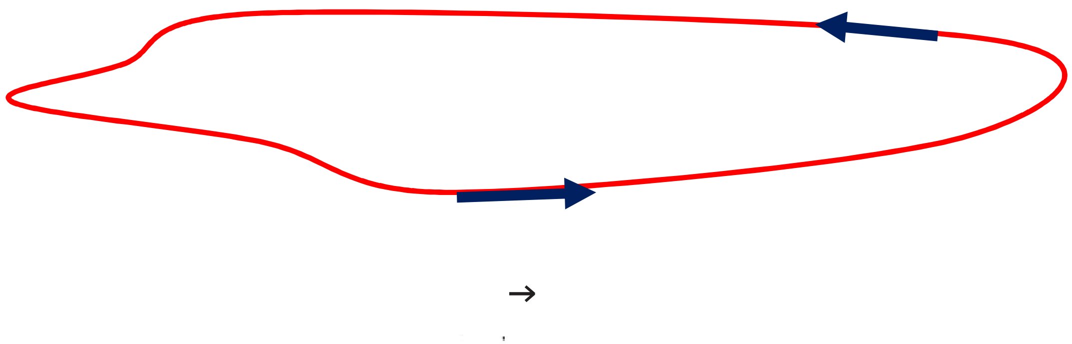
Ampere's Law

if the distribution has some symmetry, we may be able to apply **Ampere's law to find the magnetic** field with considerably less effort.

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 i_{\text{enc}} \qquad \text{(Ampere's law).}$$

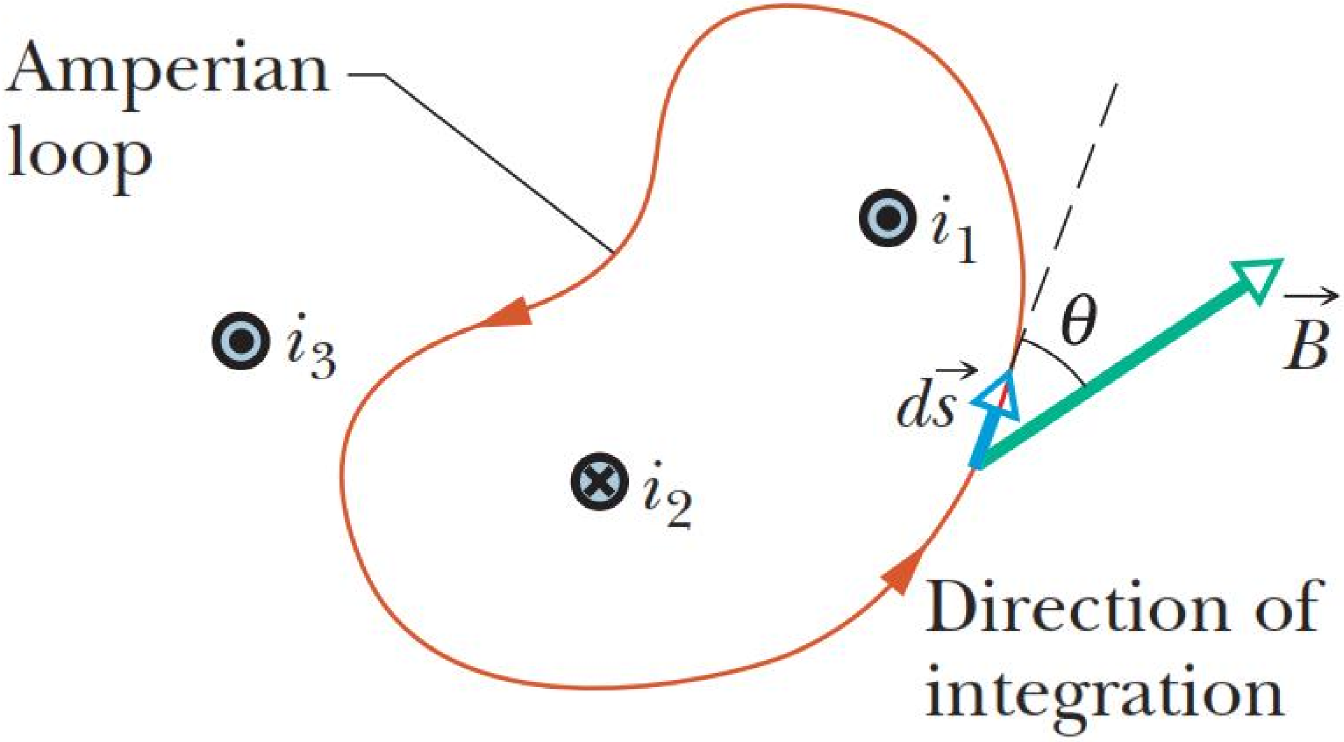
1- The loop on the integral sign means that the scalar (dot) product $\vec{\ } . \vec{\ }$ is to be integrated around a closed loop, called an Amperian loop.

2- To apply Ampere's law, we mentally divide the loop into differential vector elements $\vec{\ }$ that are everywhere directed along the tangent to the loop in the direction of integration.



3-

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \oint B \cos\theta \, ds = \mu_0 i_{\text{enc}}.$$



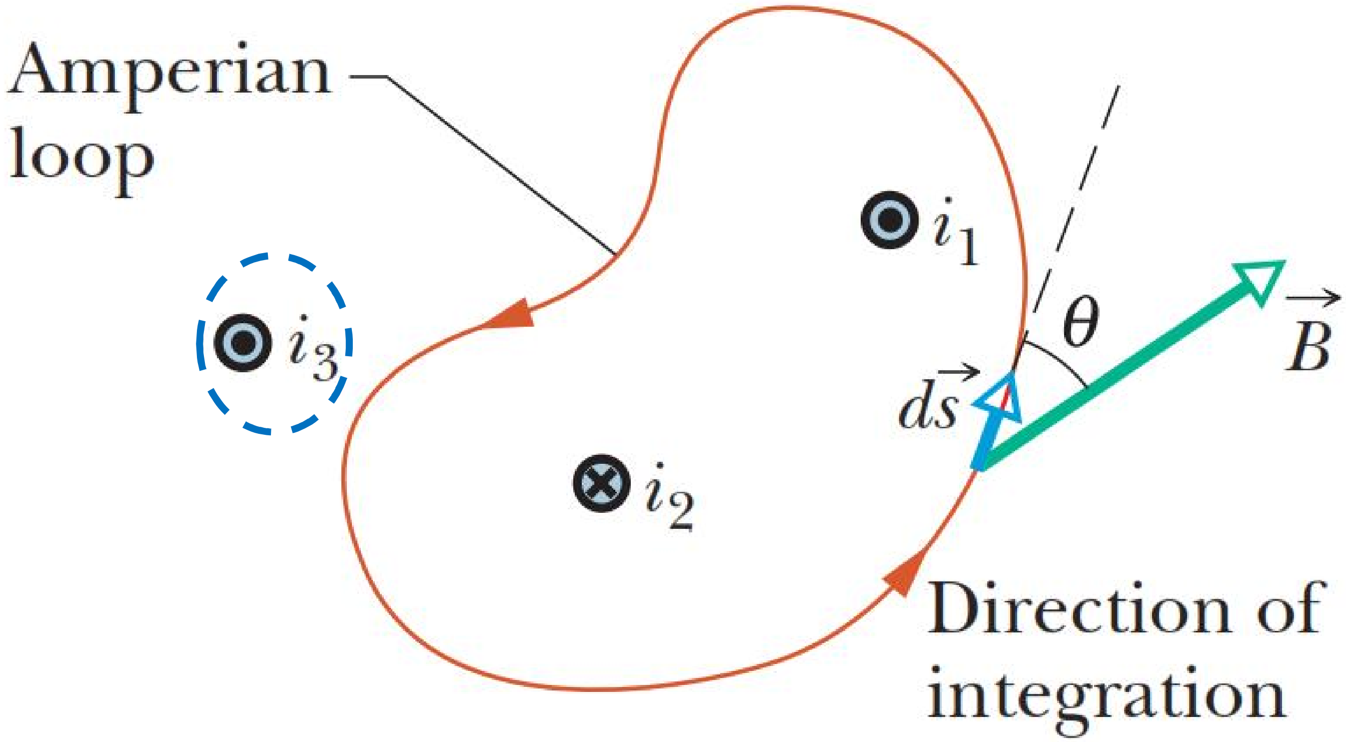
4- Proposed Amperian loop

$$\vec{B} = constant$$

$$\oint \vec{B} \,.\, d\vec{s} = \vec{B} \,.\, \oint d\vec{s}$$

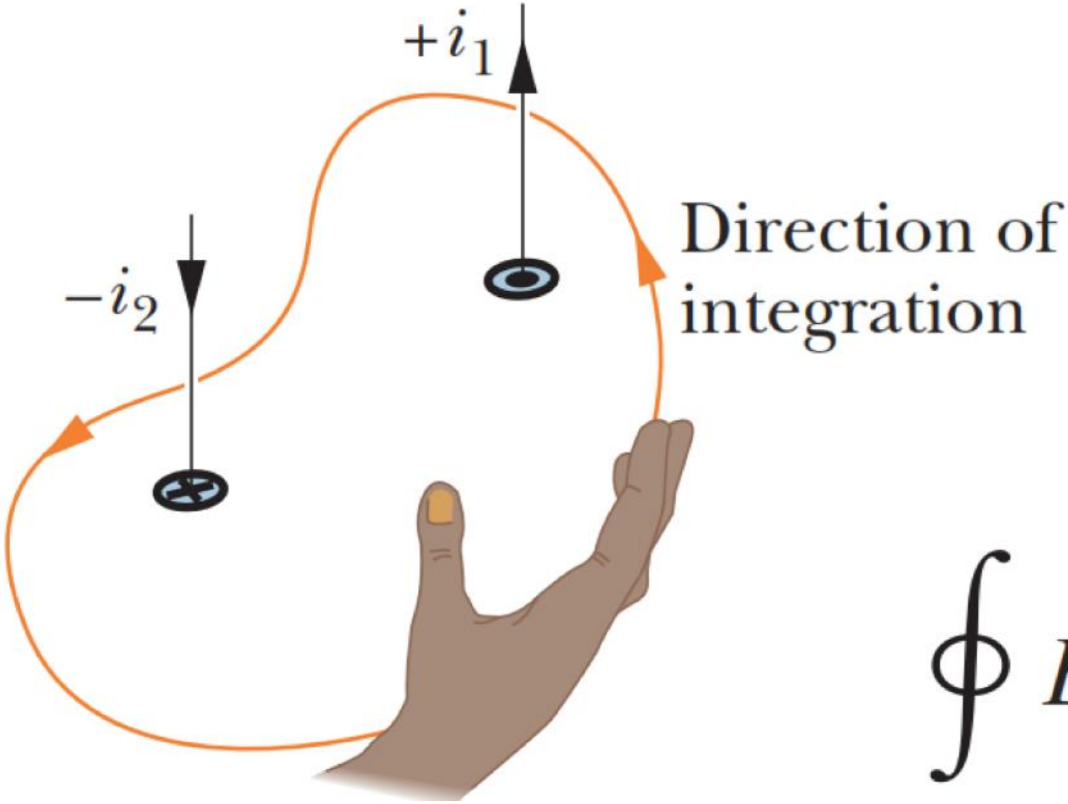
$$\oint \vec{B} \,.\, d\vec{s} = \oint Bds = B\oint ds = BS$$

5- The current *I net current encircled by that closed loop.*



$$i_{enc} = i_1 - i_2.$$

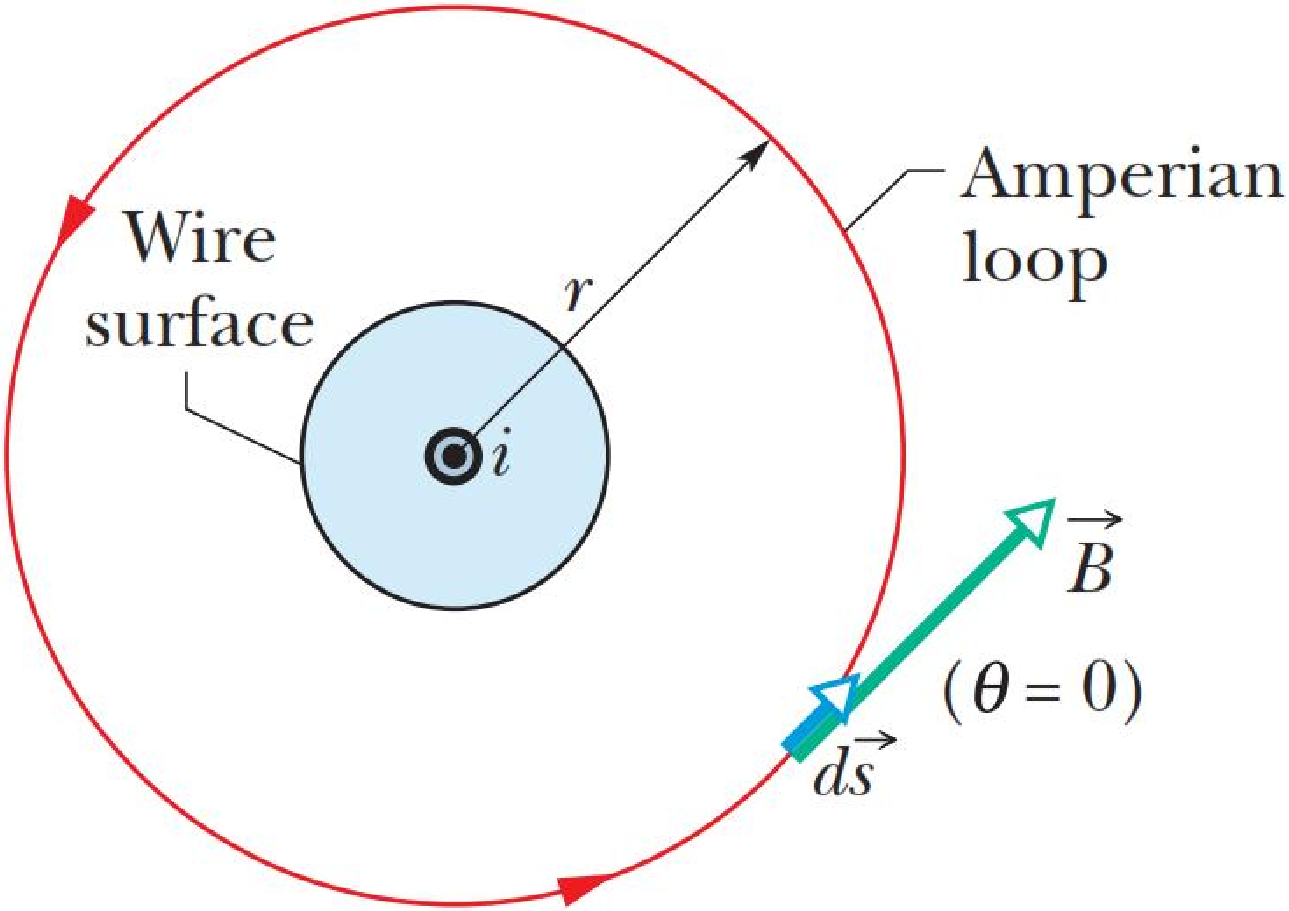
6- *Current* Sign



$$i_{\text{enc}} = i_1 - i_2.$$

$$\oint B \cos\theta \, ds = \mu_0(i_1 - i_2).$$

Magnetic Field Outside a Long Straight Wire with Current

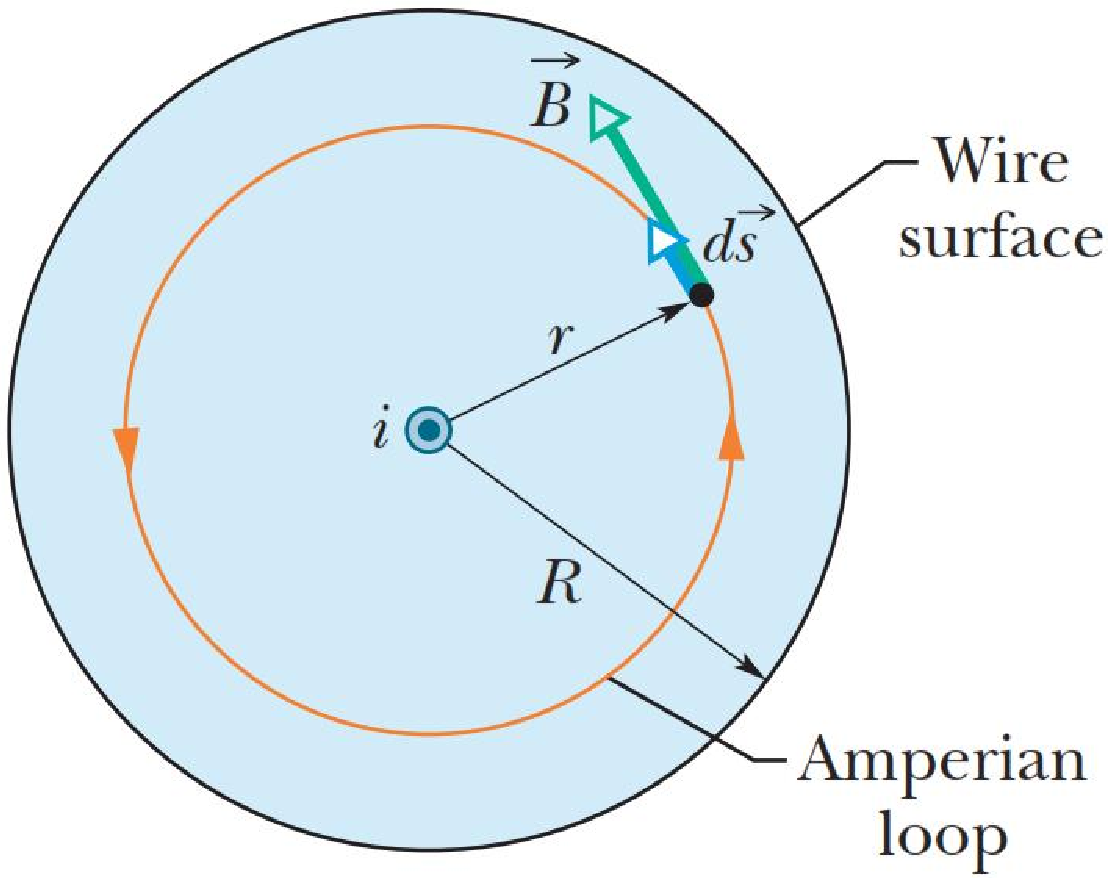


$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \oint B \cos\theta \, ds = B \oint ds = B(2\pi r).$$

$$B(2\pi r) = \mu_0 i$$

$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi r} \qquad \text{(outside straight wire).}$$

Magnetic Field Inside a Long Straight Wire with Current



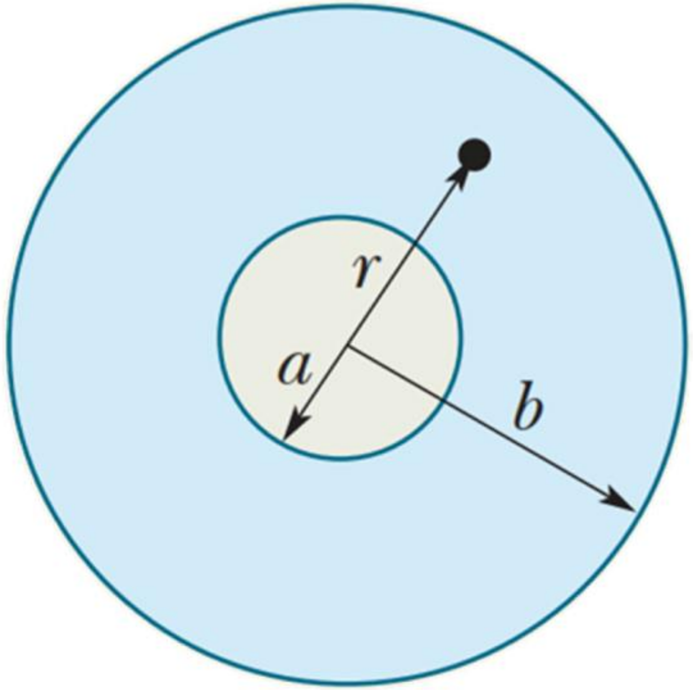
$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = B \oint ds = B(2\pi r).$$

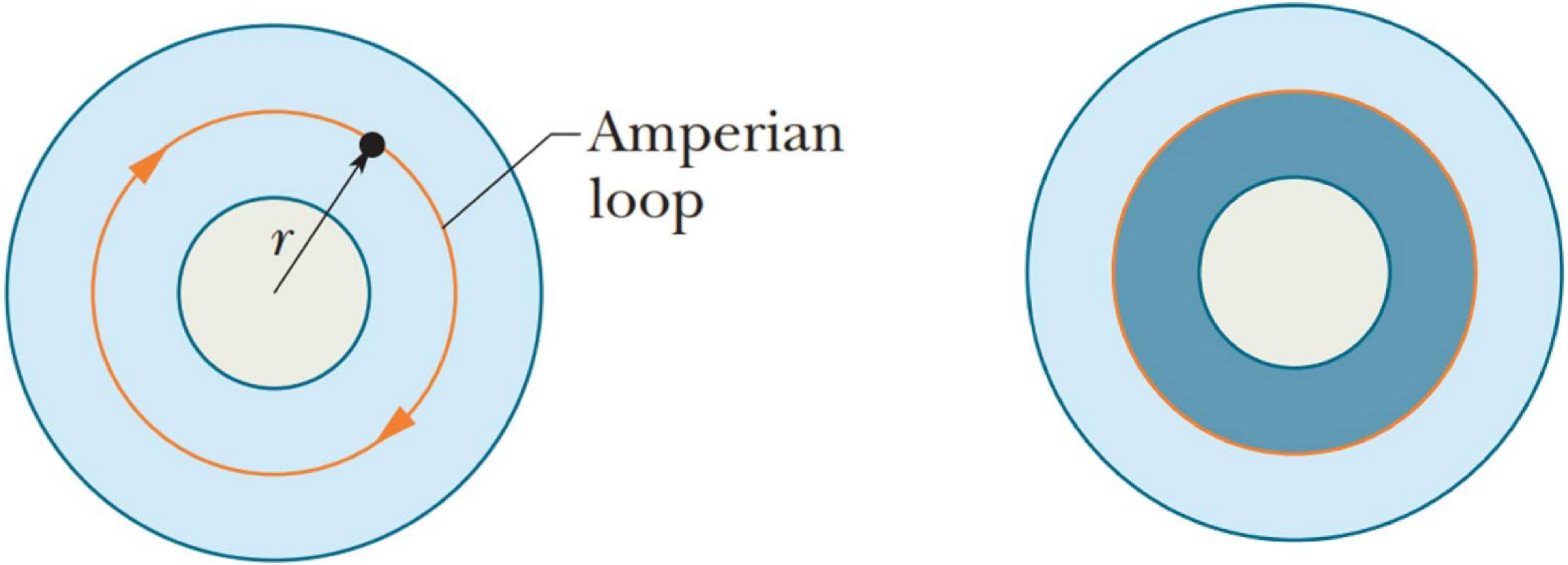
$$i_{\text{enc}} = i \frac{\pi r^2}{\pi R^2}.$$

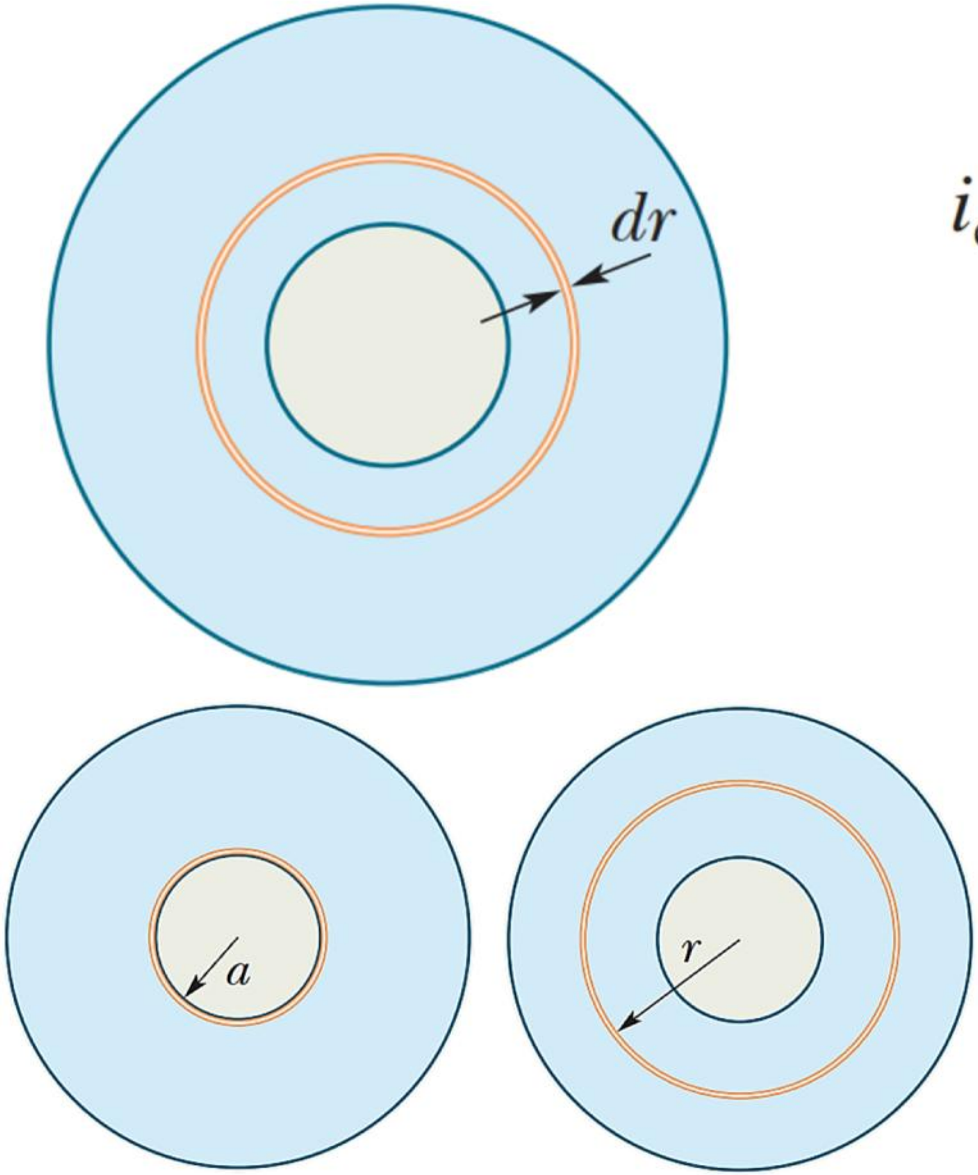
$$B(2\pi r) = \mu_0 i \frac{\pi r^2}{\pi R^2}$$

$$B = \left(\frac{\mu_0 i}{2\pi R^2}\right) r \qquad \text{(inside straight wire).}$$

Figure 29-16*a* shows the cross section of a long conducting cylinder with inner radius $a = 2.0\text{ cm}$ and outer radius $b = 4.0\text{ cm}$. The cylinder carries a current out of the page, and the magnitude of the current density in the cross section is given by $J = cr^2$, with $c = 3.0 \times 10^6\text{ A/m}^4$ and r in meters. What is the magnetic field $\vec{B}$ at the dot in Fig. 29-16*a*, which is at radius $r = 3.0\text{ cm}$ from the central axis of the cylinder?




r
Amperian
loop



$$i_{\text{enc}} = \int J\,dA = \int_a^r cr^2(2\pi r\,dr)$$

$$= 2\pi c \int_a^r r^3\,dr = 2\pi c\left[\frac{r^4}{4}\right]_a^r$$

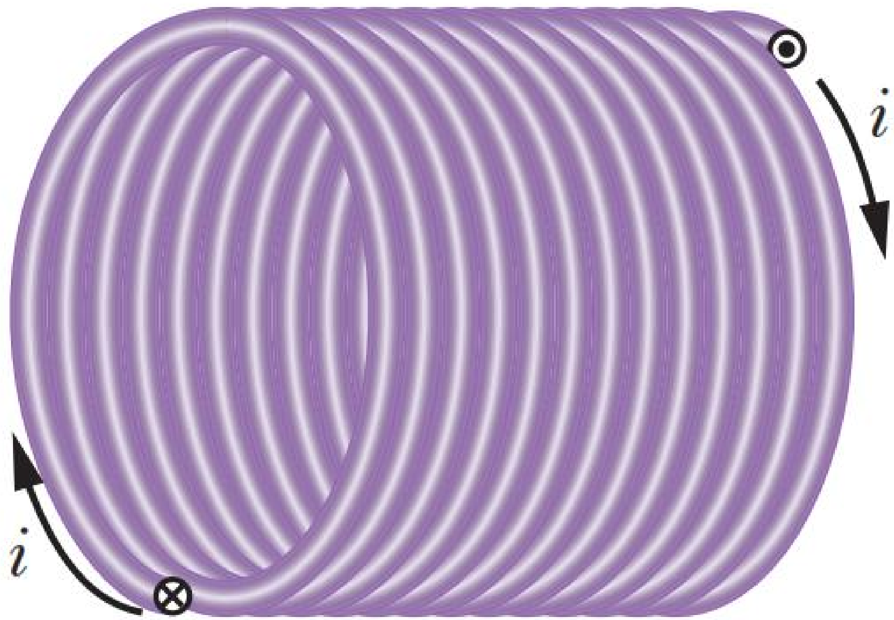
$$= \frac{\pi c(r^4 - a^4)}{2}.$$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 i_{\text{enc}},$$

$$B(2\pi r) = -\frac{\mu_0 \pi c}{2}(r^4 - a^4).$$

$$B = -\frac{\mu_0 c}{4r}(r^4 - a^4)$$

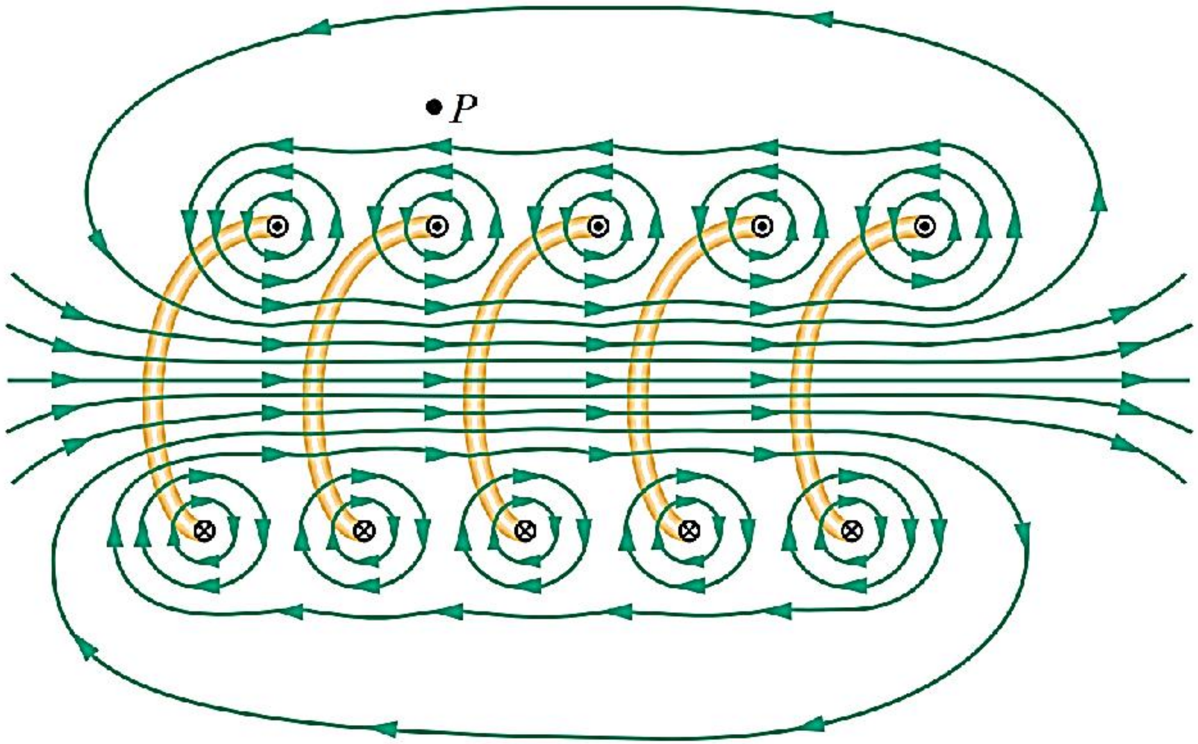
Magnetic Field of a Solenoid



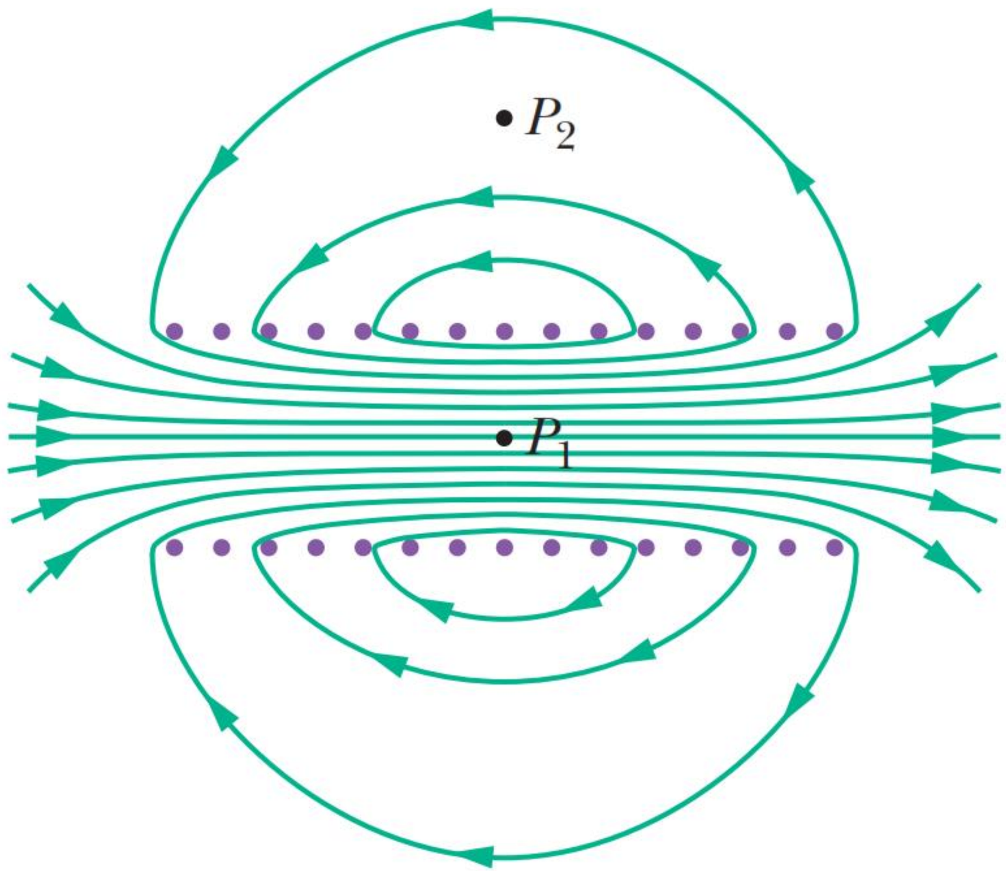
A vertical cross section through the central axis of a “stretched-out” solenoid.

❖ Near the solenoid’s axis, the field lines combine into a net magnetic field that is directed along the axis. The closely spaced field lines there indicate a strong magnetic field.

❖ Outside the solenoid the field lines are widely spaced; the field there is very weak.

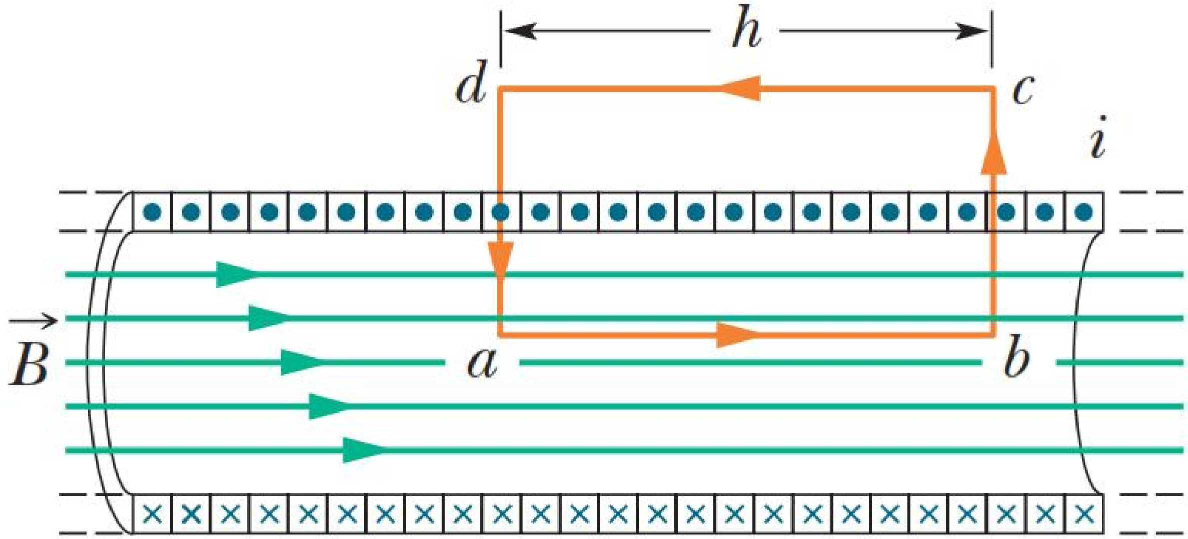


Magnetic field lines for a real solenoid of finite length. The field is strong and uniform at interior points such as P_1 but relatively weak at external points such as P_2



$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 i_{\text{enc}},$$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \underbrace{\int_a^b \vec{B} \cdot d\vec{s}}_{Bh} + \underbrace{\int_b^c \vec{B} \cdot d\vec{s}}_{0} + \underbrace{\int_c^d \vec{B} \cdot d\vec{s}}_{0} + \underbrace{\int_d^a \vec{B} \cdot d\vec{s}}_{0}.$$

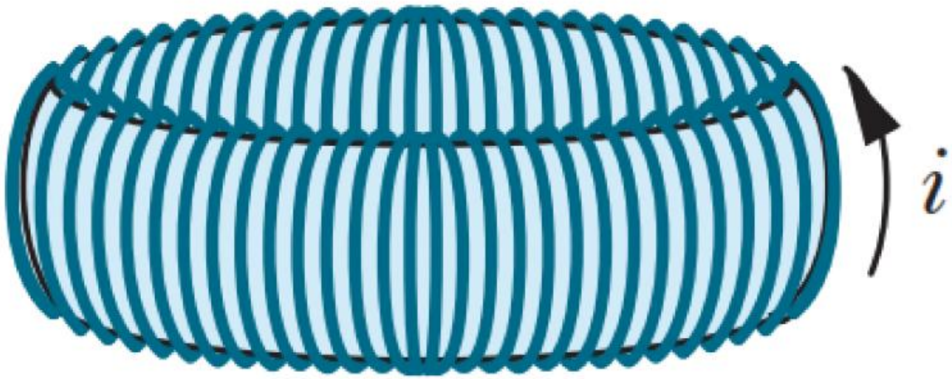


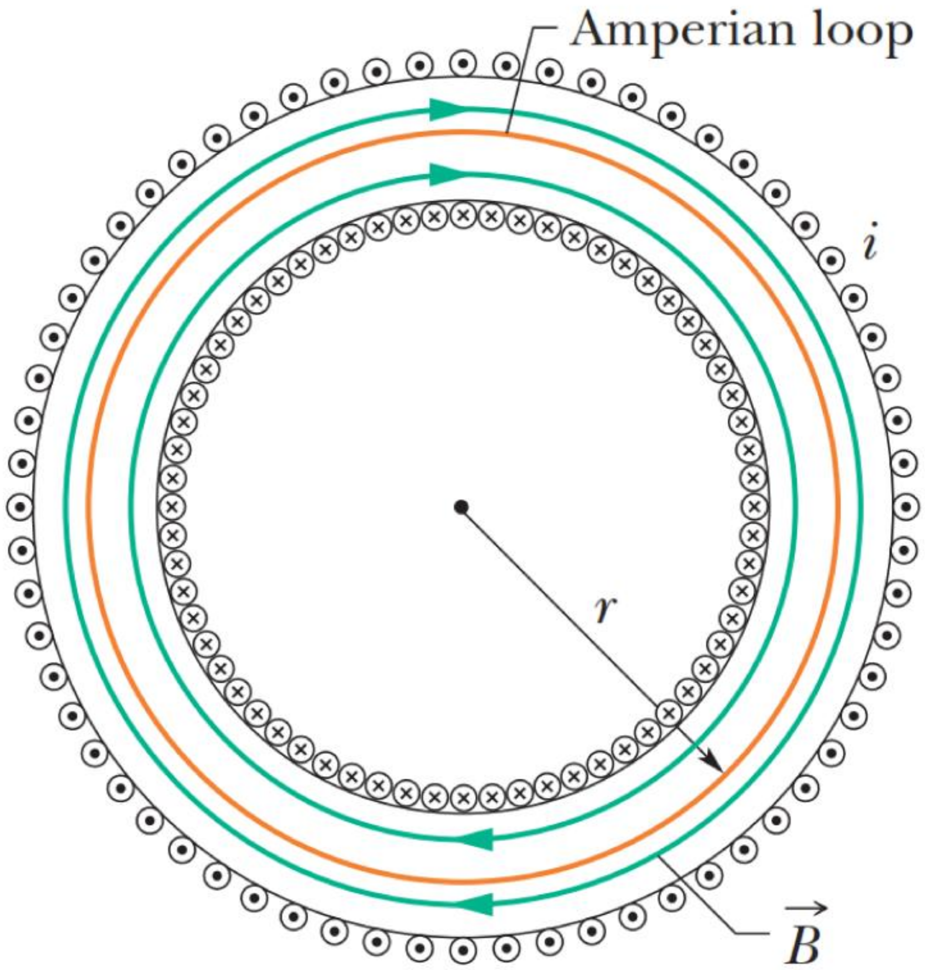
$$i_{\text{enc}} = i(nh).$$

$$Bh = \mu_0 inh$$

$$B = \mu_0 in \qquad \text{(ideal solenoid).}$$

Magnetic Field of a Toroid

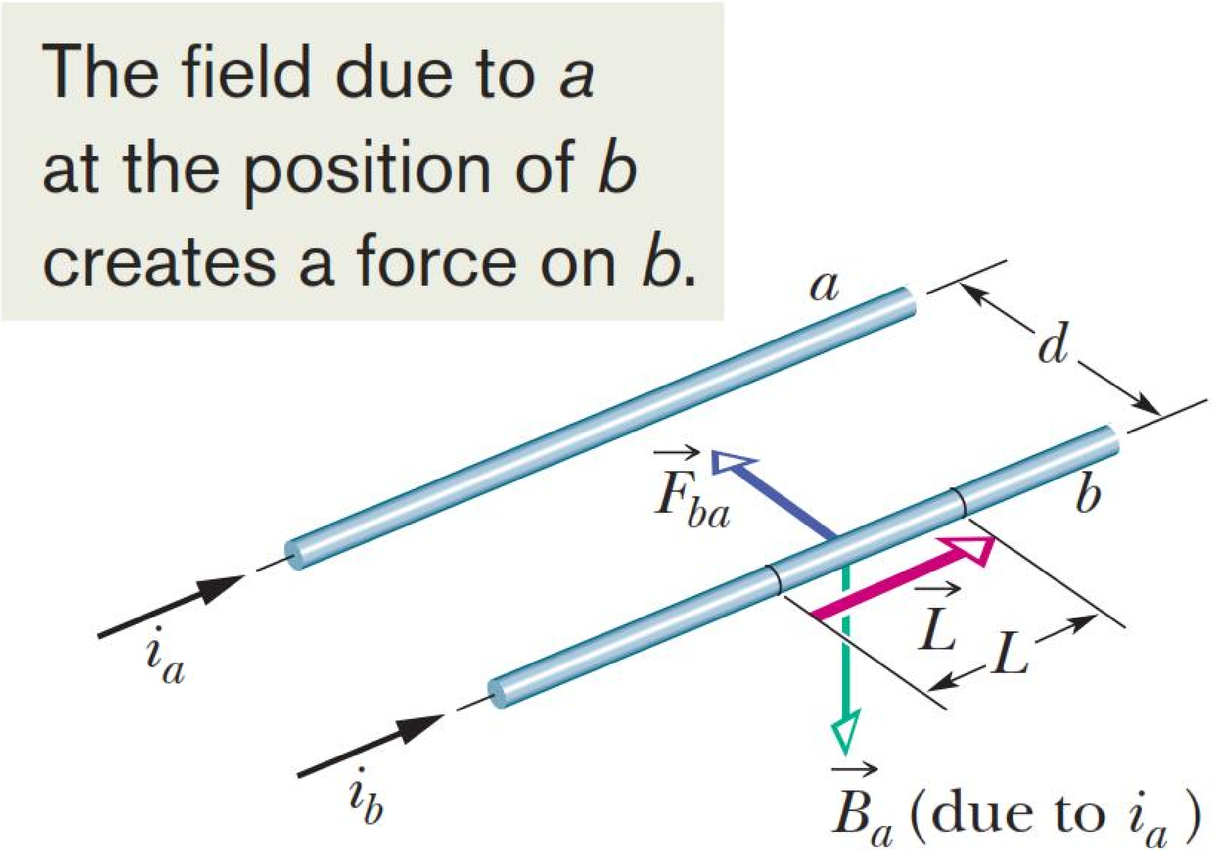




$$(B)(2\pi r) = \mu_0 iN,$$

$$\boxed{B = \frac{\mu_0 iN}{2\pi}\frac{1}{r} \qquad \text{(toroid).}}$$

Force Between Two Parallel Currents



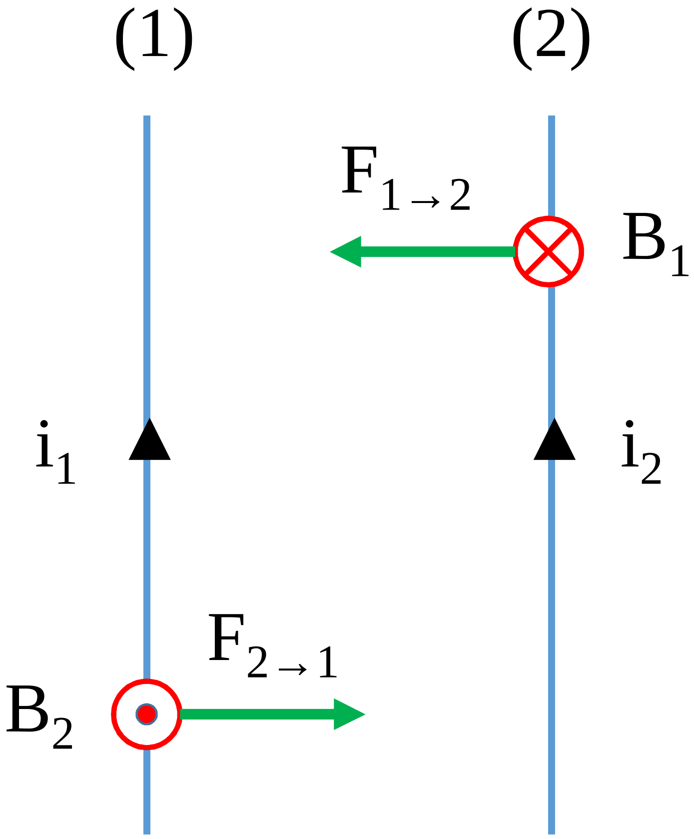
$$B_a = \frac{\mu_0 i_a}{2\pi d}.$$

$$\vec{F}_{ba} = i_b \vec{L} \times \vec{B}_a,$$

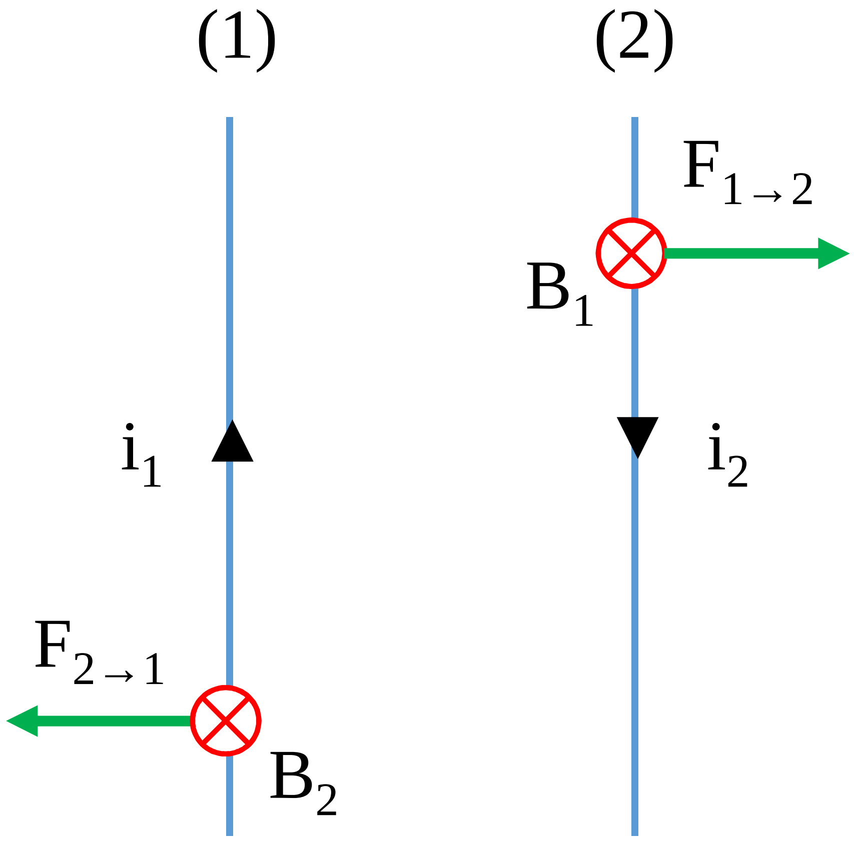
$$F_{ba} = i_b L B_a \sin 90^\circ = \frac{\mu_0 L i_a i_b}{2\pi d}.$$

To find the force on a current-carrying wire due to a second current-carrying wire, first find the field due to the second wire at the site of the first wire. Then find the force on the first wire due to that field.

Parallel currents attract each other, and antiparallel currents repel each other.

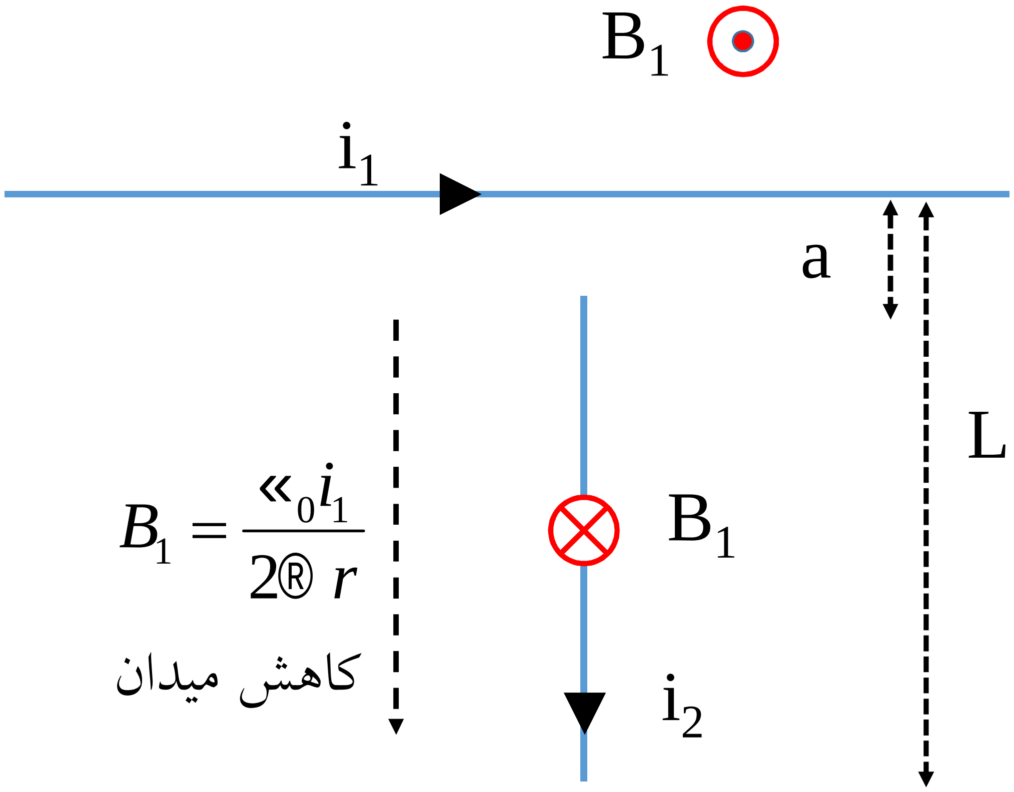


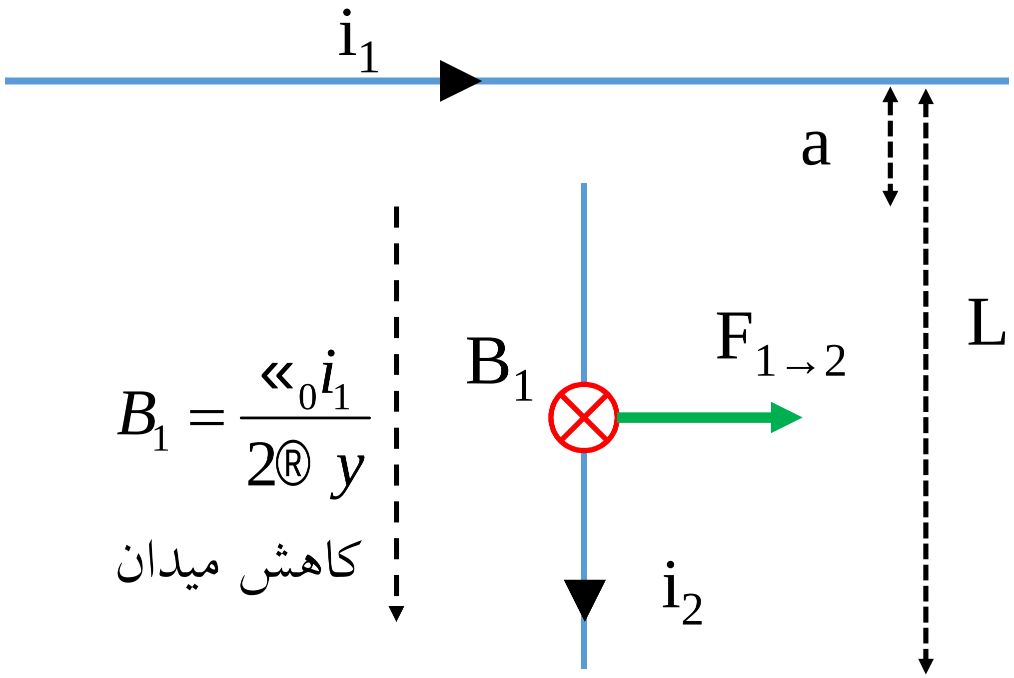
Attractive Force

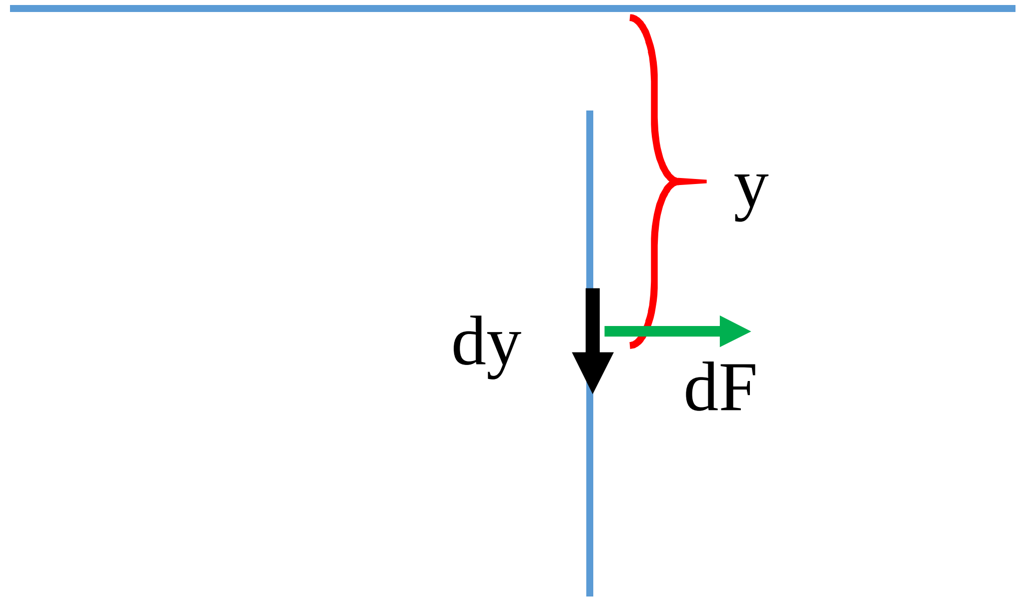


Repulsive Force

مثال) نیروی وارد از سیم بسیار دراز و دارای جریان i_1 بر سیمی به طول L و جریان i_2 (که عمود بر همدیگر هستند) را بدست آورید





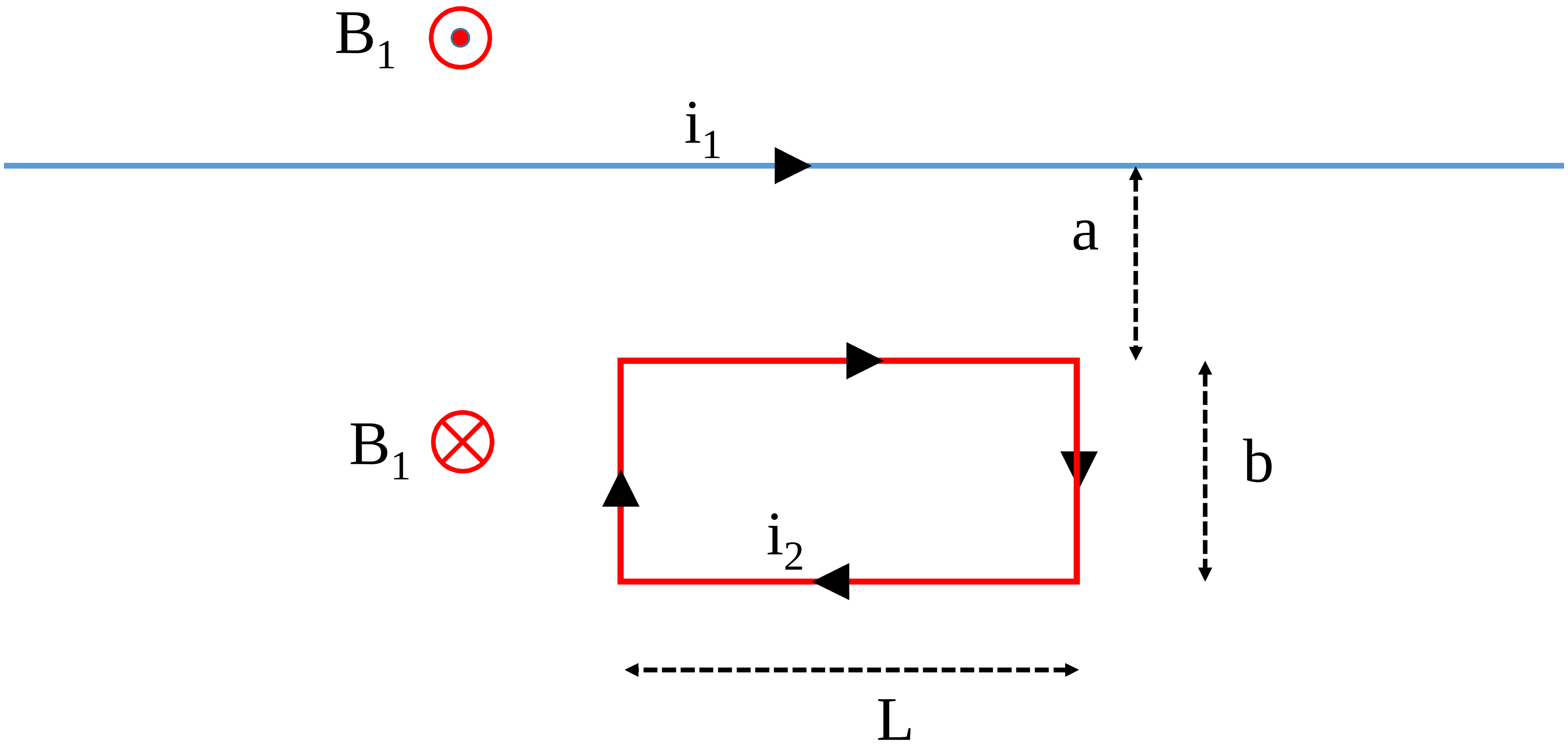


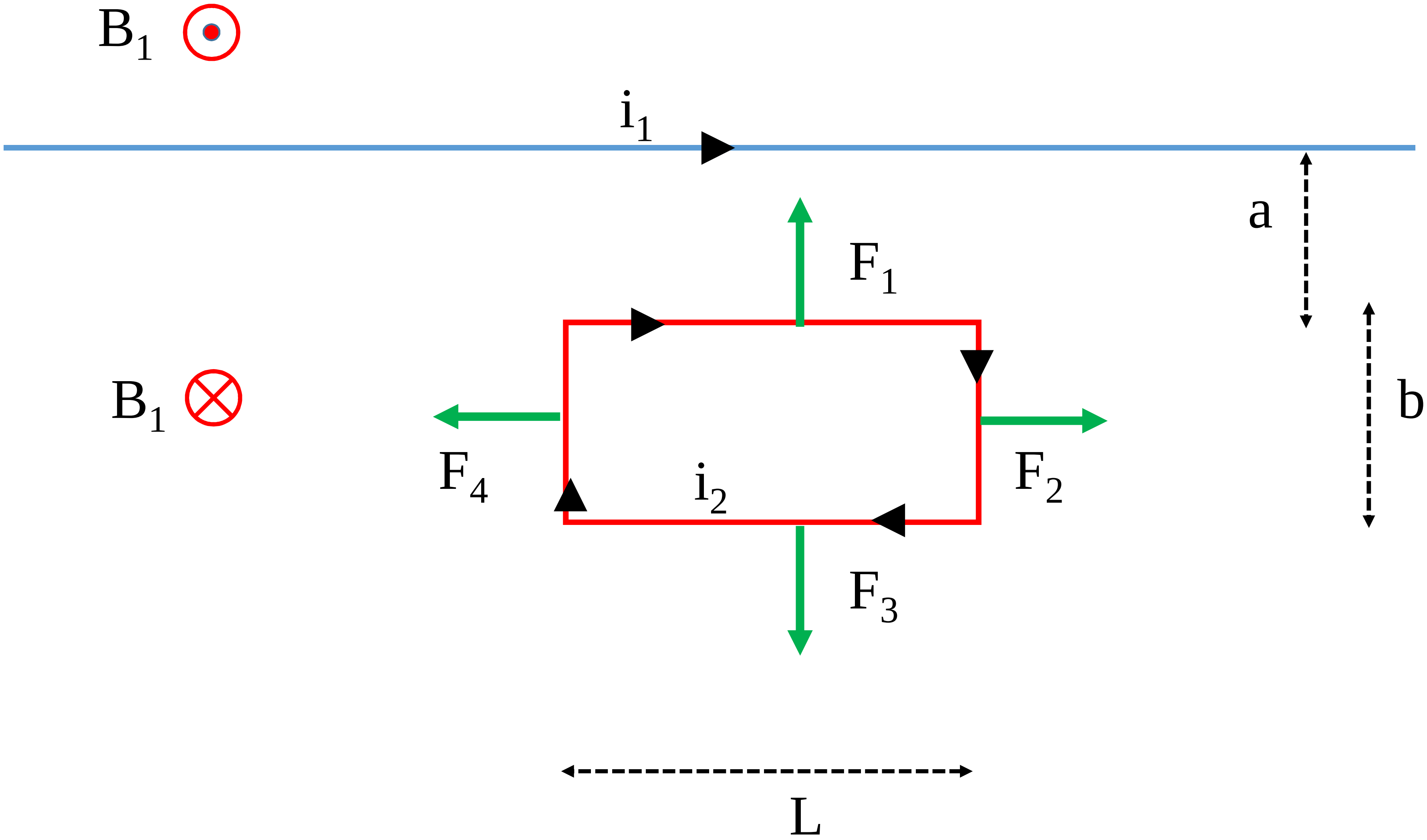
$$dF = i_2 B_1 dy$$

$$dF = i_2 B_1 dy \qquad \Rightarrow \qquad F = \int i_2 B_1 dy$$

$$F = \int_{y=a}^{y=a+L} i_2 \frac{«_0 i_1}{2® \ y} dy = \frac{«_0 i_1 i_2}{2®} \int_{y=a}^{y=a+L} \frac{dy}{y} = \frac{«_0 i_1 i_2}{2®} Ln \frac{a+L}{a}$$

مثال) نیروی خالص وارد بر حلقه شامل جریان i_2 از طرف سیم بسیار دراز و دارای جریان i_1 را بدست آورید





B_1
i_1
a
F_1
B_1
b
F_4
i_2
F_2
F_3
L

$$\vec{F}_t = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4$$

$$\vec{F}_2 = -\vec{F}_4$$

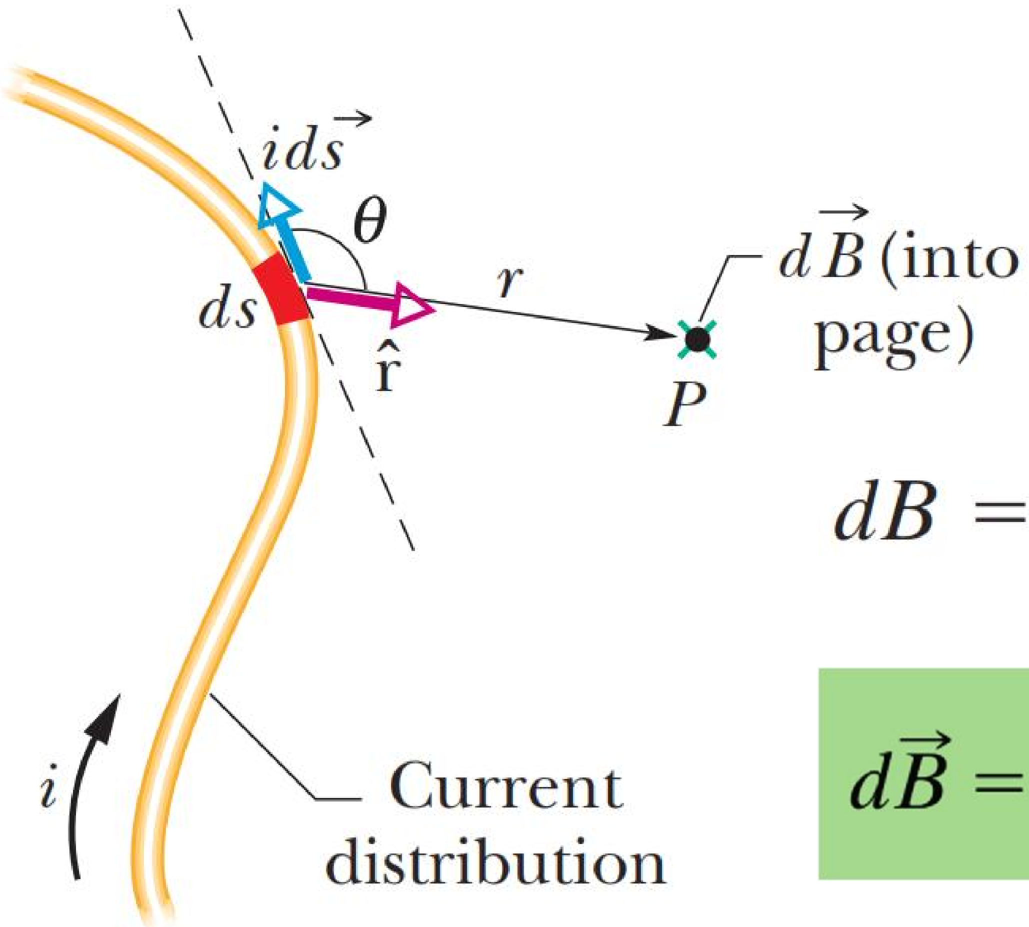
$$\vec{F}_1 = i_2 L B_1(a)\,(+\hat{j}) \qquad , \qquad B_1(a) = \frac{\mu_0 i_1}{2\pi\, a}$$

$$\vec{F}_3 = i_2 L B_1(a+b)\,(-\hat{j}) \qquad , \qquad B_1(a+b) = \frac{\mu_0 i_1}{2\pi\,(a+b)}$$

$$\vec{F}_t = \vec{F}_1 + \vec{F}_3$$

law of Biot and Savart

قانون بيو ساوار



$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{i\,ds\sin\theta}{r^2}$$

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{i\,d\vec{s}\times\hat{r}}{r^2} \quad \text{(Biot–Savart law).}$$

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{i\, d\vec{s} \times \hat{\mathrm{r}}}{r^2} \quad \text{(Biot–Savart law).}$$

نکات:

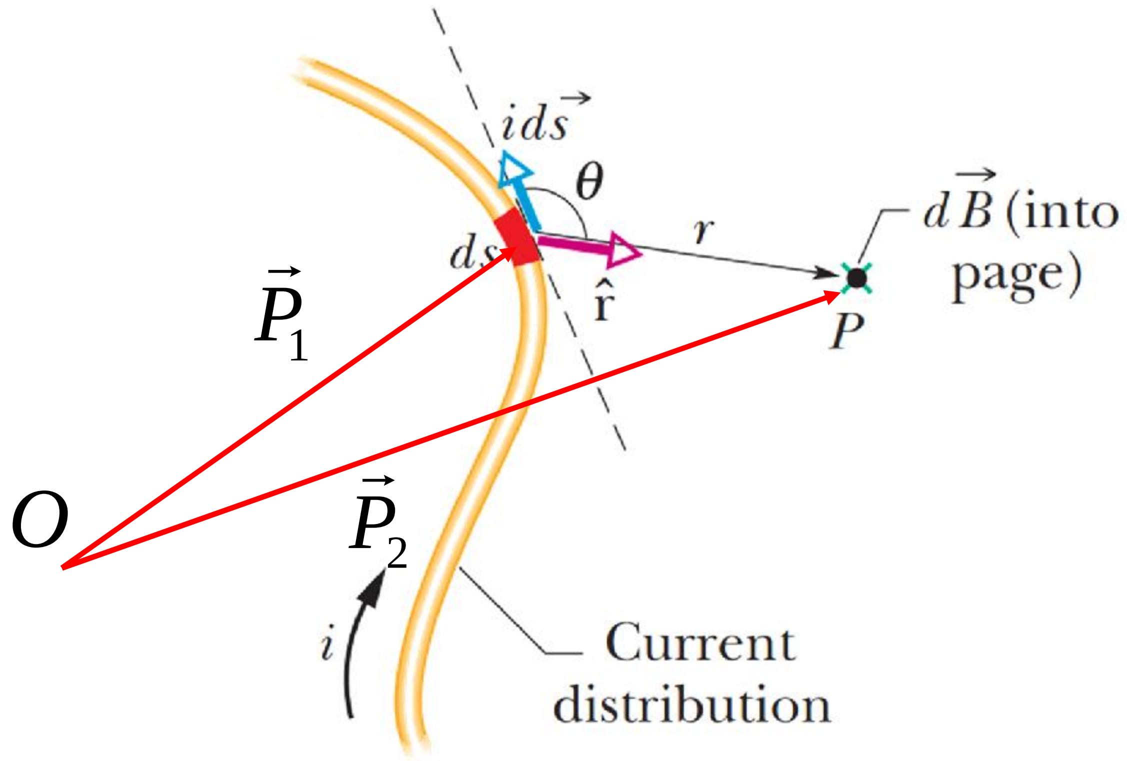
ds المان خطی در راستای توزیع جریان است

r بردار واصل میان المان تا نقطه مورد نظر می باشد (نقطه ای که می خواهیم در آن نقطه میدان را بدست آوریم)

μ_0 ثابت نفوذ پذیری مغناطیسی (permeability constant)

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\,\mathrm{T \cdot m/A} \approx 1.26 \times 10^{-6}\,\mathrm{T \cdot m/A}.$$

دستورالعمل بدست آوردن میدان مغناطیسی به کمک قانون بیوساوار



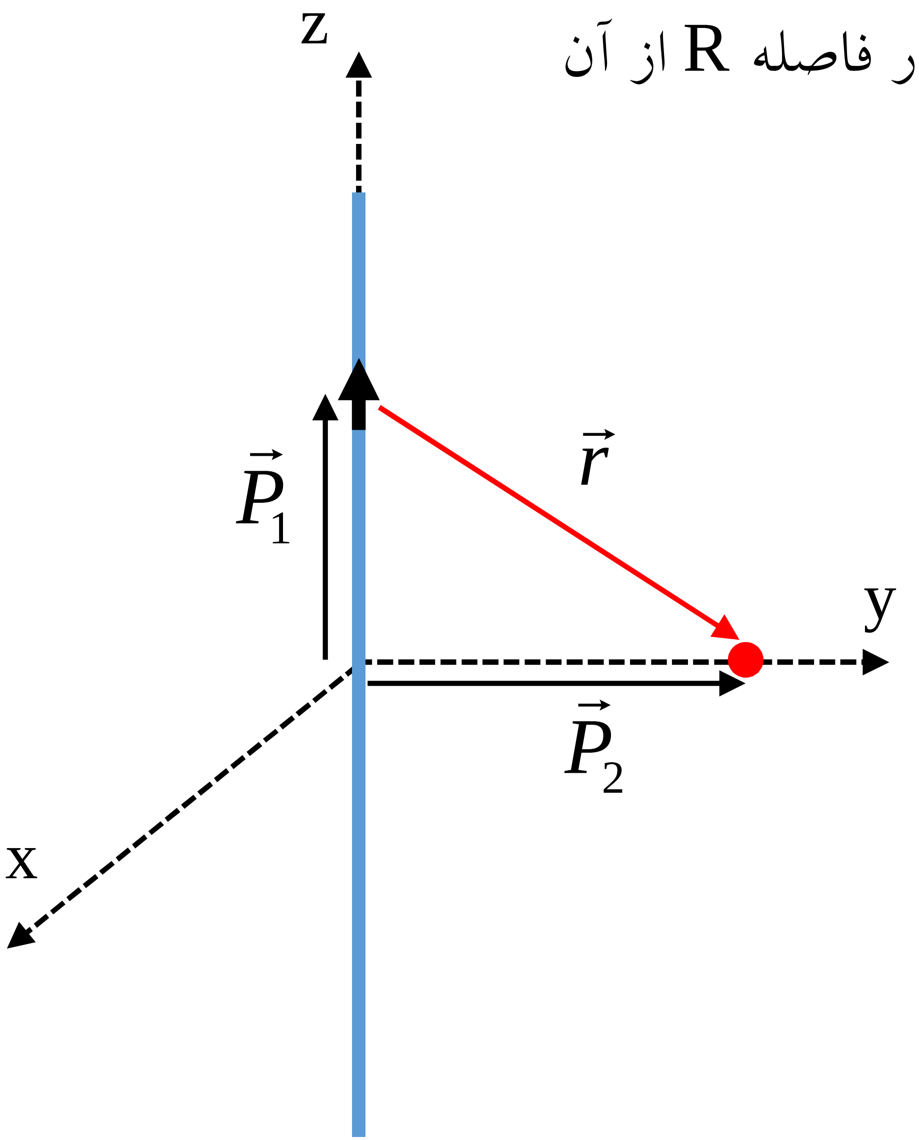
۱- نوشتن بردار $d\vec{s}$

۲- نوشتن $\vec{r} = \vec{P}_2 - \vec{P}_1$

۳- محاسبه حاصلضرب خارجی $d\vec{s} \times \vec{r}$

٤- محاسبه انتگرال $\vec{B} = \int d\vec{B}$

مثال: میدان مغناطیسی ناشی از یک سیم دراز مستقیم در فاصله R از آن



$$d\vec{s} = dz\,\hat{k}$$

$$\vec{P}_1 = z\,\hat{k} \qquad -\infty < z < +\infty$$

$$\vec{P}_2 = R\,\hat{j}$$

$$\vec{r} = \vec{P}_2 - \vec{P}_1$$

$$\vec{r} = R\,\hat{j} - z\,\hat{k}$$

$$r = (R^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$d\vec{s} \times \vec{r} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 0 & dz \\ 0 & R & -z \end{vmatrix} = \hat{i}(-Rdz) - \hat{j}(0) + \hat{k}(0)$$

$$d\vec{s} \times \vec{r} = -Rdz\hat{i}$$

$$d\vec{B} = \frac{\text{«}_0 I}{4\text{®}} \frac{d\vec{s} \times \vec{r}}{r^3} \quad \rightarrow \quad d\vec{B} = \frac{\text{«}_0 I}{4\text{®}} \frac{-Rdz\hat{i}}{(R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\vec{B} = \frac{-\text{«}_0 IR\hat{i}}{4\text{®}} \int_{z=-\infty}^{z=+\infty} \frac{dz}{(R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\vec{B} = \frac{-\text{«}_0 I R \hat{i}}{4\text{®}} \int_{z=-\infty}^{z=+\infty} \frac{dz}{(R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{-\text{«}_0 I R \hat{i}}{4\text{®}} \int_{z=-\infty}^{z=+\infty} \frac{dz}{(R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\tan \text{¯} = \frac{z}{R} \quad \rightarrow \quad z = R \tan \text{¯} \quad \rightarrow \quad dz = R(1 + \tan^2 \text{¯}) d\text{¯}$$

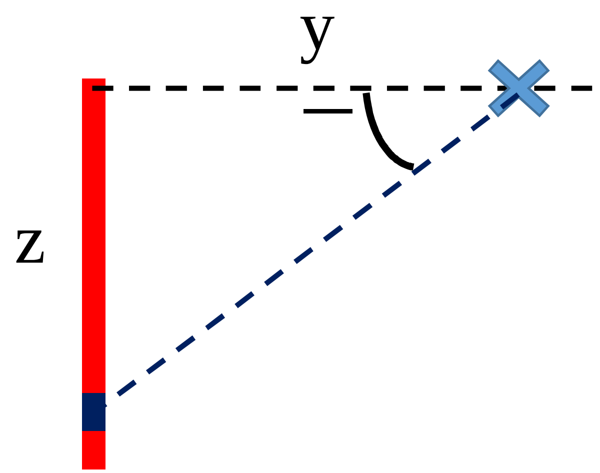
$$z \rightarrow -\infty \qquad \text{¯} \rightarrow -\frac{\text{®}}{2}$$

تغيير متغير

$$z \rightarrow +\infty \qquad \text{¯} \rightarrow +\frac{\text{®}}{2}$$

$$\vec{B} = \frac{-\text{«}_0 I R \hat{i}}{4\text{®}} \int_{\text{¯}_1 = -\frac{\text{®}}{2}}^{\text{¯}_2 = +\frac{\text{®}}{2}} \frac{R(1 + \tan^2 \text{¯}) d\text{¯}}{R^3 (1 + \tan^2 \text{¯})^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{-\text{«}_0 I R \hat{i}}{4\text{®} R^2} \int_{\text{¯}_1 = -\frac{\text{®}}{2}}^{\text{¯}_2 = +\frac{\text{®}}{2}} \frac{d\text{¯}}{(1 + \tan^2 \text{¯})^{\frac{1}{2}}}$$

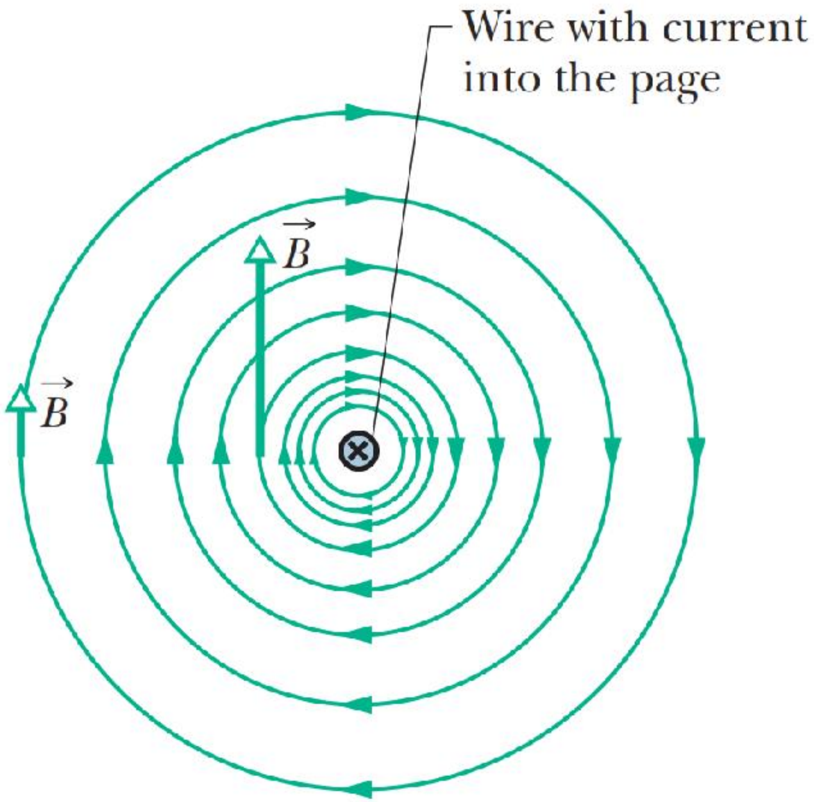


$$\vec{B} = \frac{-\mu_0 I\hat{i}}{4\pi R}\int_{\theta_1=-\frac{\pi}{2}}^{\theta_2=+\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{(1+\tan^2\theta)^{\frac{1}{2}}} = \frac{-\mu_0 I\hat{i}}{4\pi R}\int_{\theta_1=-\frac{\pi}{2}}^{\theta_2=+\frac{\pi}{2}} \cos\theta \, d\theta = \frac{-\mu_0 I\hat{i}}{4\pi R}\sin\theta\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}$$

$$\vec{B} = \frac{-\mu_0 I\hat{i}}{4\pi R}(1-(-1)) = \frac{-\mu_0 I}{2\pi R}\hat{i}$$

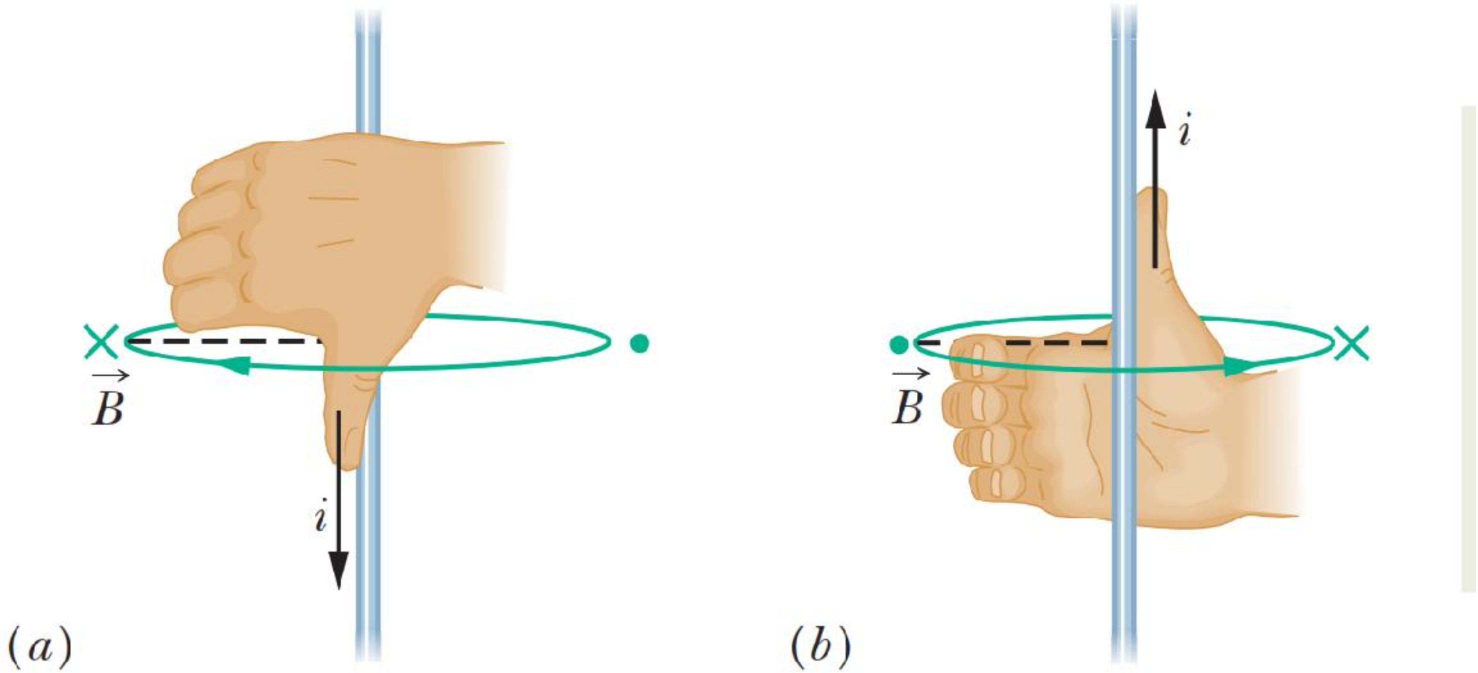
$$\vec{B} = \frac{-\mu_0 I}{2\pi R}\hat{i}$$

نکات:



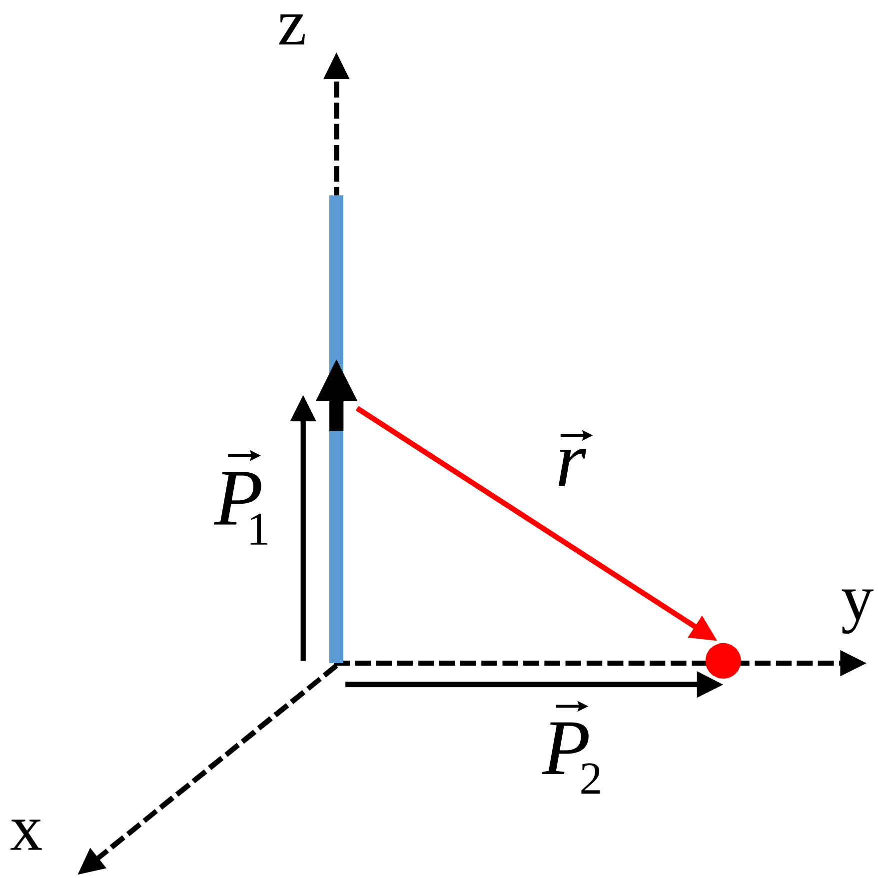
- ❑ وابستگی میدان با فاصله از سیم به صورت − است
- ❑ روی صفحه عمود برسیم (صفحه xy) میدان در هر نقطه مماس بر دایره هم محور با سیم است
- ❑ مشخص کردن جهت میدان با دست راست: ب قرار دادن انگشن شست در جهت جریان، جهت بسته شدن انگشتان جهت میدان مغناطیسی را مشخص می کند

Iron filings that have been sprinkled onto cardboard collect in concentric circles when current is sent through the central wire.The alignment, which is along magnetic field lines, is caused by the magnetic field produced by the current.



The thumb is in the current's direction. The fingers reveal the field vector's direction, which is tangent to a circle

مثال: میدان مغناطیسی ناشی از یک سیم مستقیم نیم متناهی در فاصله R از آن



$$d\vec{s} = dz\,\hat{k}$$

$$\vec{P}_1 = z\,\hat{k} \qquad 0 < z < +\infty$$

$$\vec{P}_2 = R\,\hat{j}$$

$$\vec{r} = \vec{P}_2 - \vec{P}_1$$

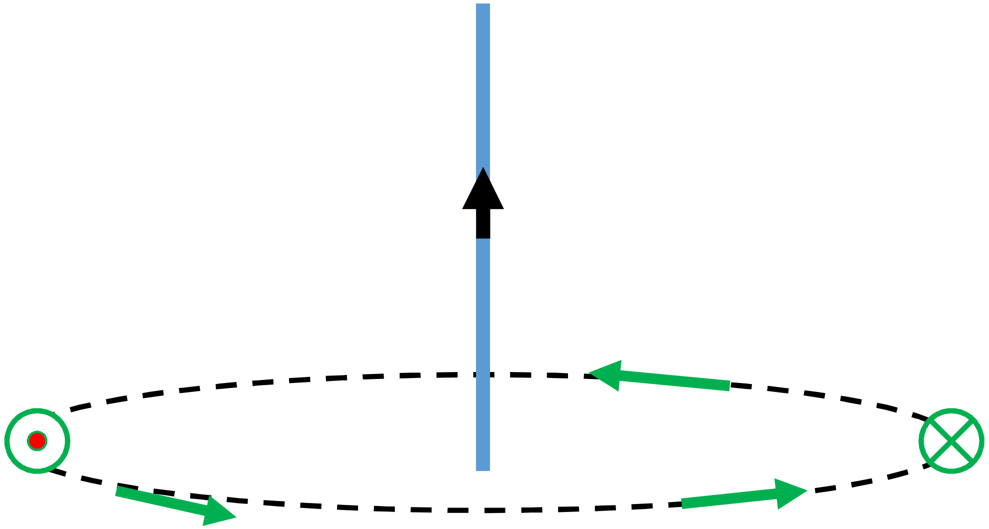
$$\vec{r} = R\,\hat{j} - z\,\hat{k}$$

$$r = (R^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}$$

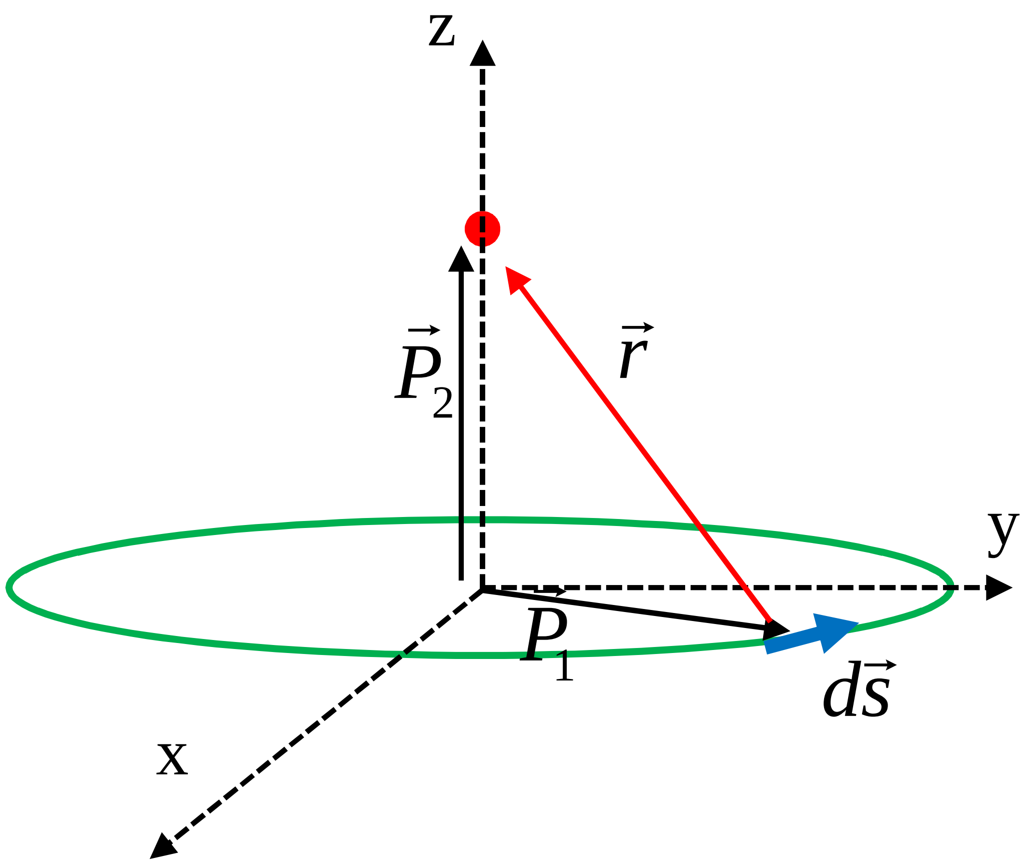
…

$$\vec{B} = \frac{-\text{«}_0 I\hat{i}}{4\text{®}R}\int_{\text{¯}_1=0}^{\text{¯}_2=+\frac{\text{®}}{2}} \frac{d\text{¯}}{(1+\tan^2\text{¯})^{\frac{1}{2}}} = \frac{-\text{«}_0 I\hat{i}}{4\text{®}R}\int_{\text{¯}_1=0}^{\text{¯}_2=+\frac{\text{®}}{2}} \cos\text{¯}\, d\text{¯} = \frac{-\text{«}_0 I\hat{i}}{4\text{®}R}\sin\text{¯}\Big|_{0}^{+\frac{\text{®}}{2}}$$

$$\vec{B} = \frac{-\text{«}_0 I\hat{i}}{4\text{®}R}(1-(0)) = \frac{-\text{«}_0 I}{4\text{®}R}\hat{i}$$



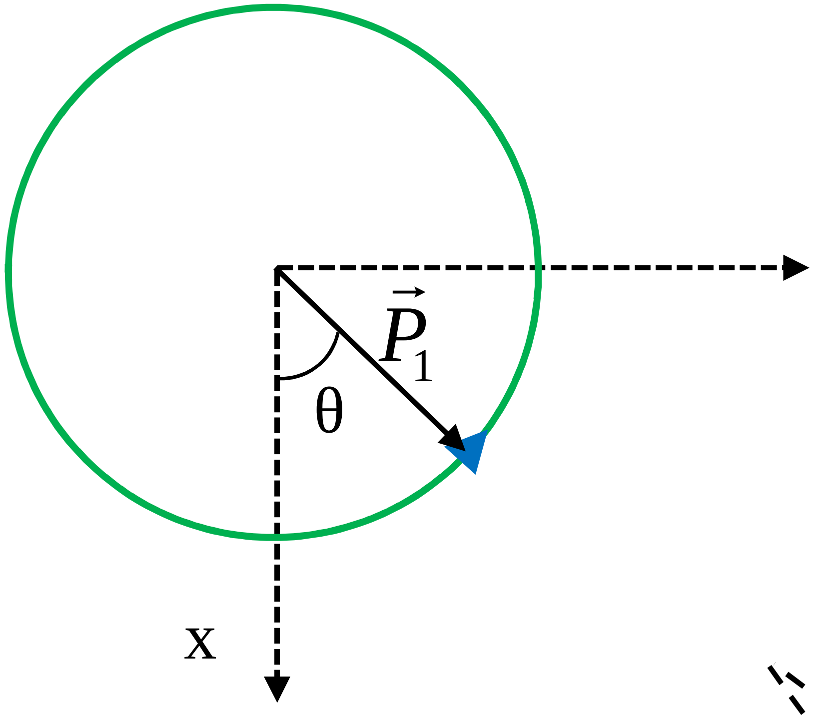
مثال: میدان مغناطیسی ناشی از یک حلقه جریان به شعاع R و در فاصله z روی محور آن

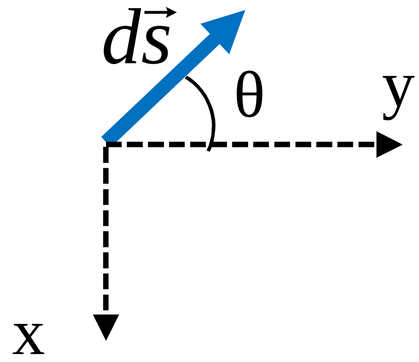


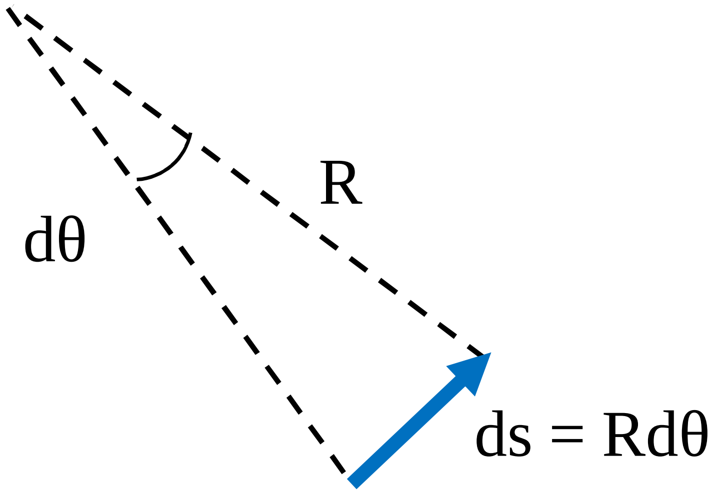
$$d\vec{s} = -ds\sin\theta\,\hat{i} + ds\cos\theta\,\hat{j}$$

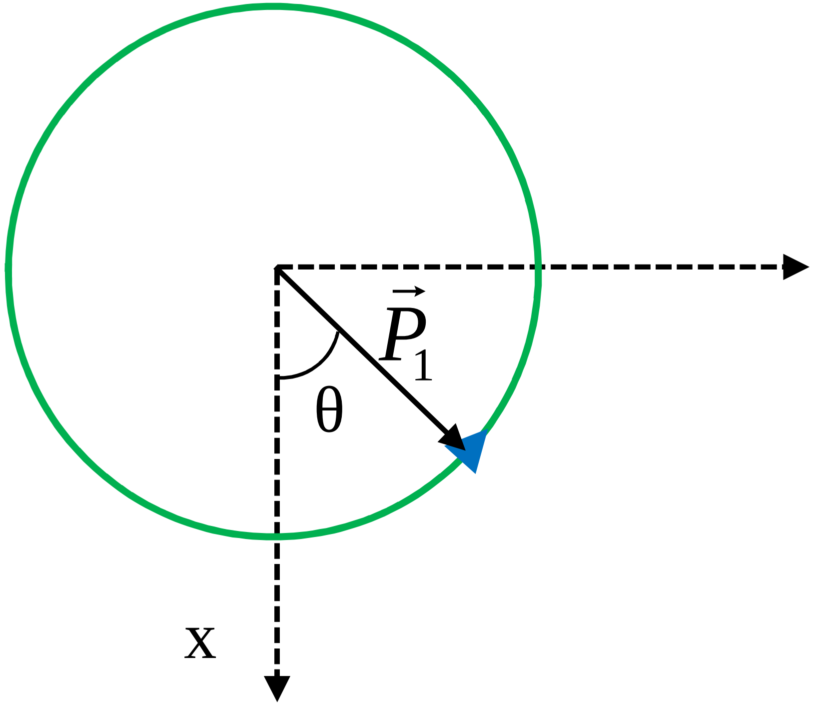
$$d\vec{s} = -Rd\theta\,\sin\theta\,\hat{i} + Rd\theta\,\cos\theta\,\hat{j}$$

$$0 \le \theta \le 2\pi$$









$$\vec{P}_1 = R\cos\text{¯}\ \hat{i} + R\sin\text{¯}\ \hat{j}$$

$$\vec{P}_2 = z\,\hat{k}$$

$$\vec{r} = \vec{P}_2 - \vec{P}_1$$

$$\vec{r} = -R\cos\text{¯}\ \hat{i} - R\sin\text{¯}\ \hat{j} + z\,\hat{k}$$

$$r = (R^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$d\vec{s} \times \vec{r} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -R\sin\theta\, d\theta & R\cos\theta\, d\theta & 0 \\ -R\cos\theta & -R\sin\theta & z \end{vmatrix}$$

$$= \hat{i}(Rz\cos\theta\, d\theta) - \hat{j}(-Rz\sin\theta\, d\theta) + \hat{k}(R^2\sin^2\theta\, d\theta + R^2\cos^2\theta\, d\theta)$$

$$d\vec{s} \times \vec{r} = \hat{i}(Rz\cos\theta\, d\theta) + \hat{j}(Rz\sin\theta\, d\theta) + \hat{k}(R^2 d\theta)$$

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{d\vec{s}\times\vec{r}}{r^3} \quad \rightarrow$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi (R^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\int_{\theta=0}^{\theta=2\pi}[\hat{i}(Rz\cos\theta\, d\theta) + \hat{j}(Rz\sin\theta\, d\theta) + \hat{k}(R^2 d\theta)]$$

$$\int_{\theta=0}^{\theta=2\pi}\cos\theta\, d\theta = \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi}\sin\theta\, d\theta = 0$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I R^2 \hat{k}}{4\pi (R^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} d\theta = \frac{\mu_0 I R^2 \hat{k}}{4\pi (R^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\times 2\pi$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I R^2 \hat{k}}{2(R^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

نکات:

❖ میدان در امتداد محور حلقه

$$\vec{B}=\frac{\mu_0 I R^2\hat{k}}{2(R^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

❖ در پیچه شامل N حلقه

$$\vec{B}=\frac{\mu_0 N I R^2}{2(R^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\hat{k}$$

❖ در مرکز حلقه z = 0

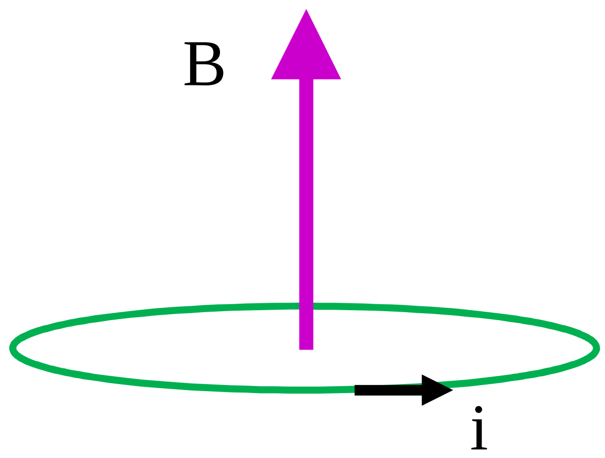
$$\vec{B}=\frac{\mu_0 N I}{2R}\hat{k}$$

❖ برای Z >> R

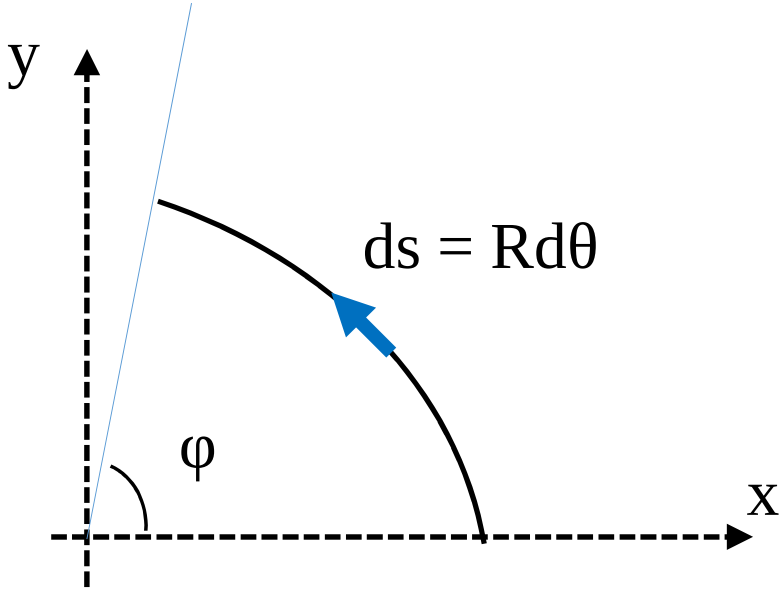
$$\vec{B}=\frac{\mu_0 N I R^2}{2(R^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\hat{k}=\frac{\mu_0 N I \pi R^2}{2\pi\, z^3}\hat{k}=\frac{\mu_0 \mu}{2\pi\, z^3}\hat{k} \qquad ,\ \mu = N I \pi R^2$$

❖ جهت میدان مغناطیسی ناشی از یک المان از حلقه را می توان توسط قاعده دست راست بدست آورد: سیم در دست راست بگونه ای گرفته می شود تا جهت انگشت شست در جهت جریان باشد. در این صورت جهت خم شدن انگشتان، جهت میدان را در هر نقطه اطراف المان نشان می دهد.

❖ برآیند میدان مغناطیسی حلقه جریان: اگر حلقه در دست راست گرفته شود به گونه ای که جهت جریان در جهت خم شدن انگشتان باشد آنگاه انگشت شست جهت میدان را نشان می دهد.



مثال: میدان مغناطیسی ناشی از یک کمان از دایره به شعاع R و حامل جریان I و در مرکز دایره



$$d\vec{s} = -Rd\theta \sin\theta \;\hat{i} + Rd\theta \cos\theta \;\hat{j} \quad ,0 \le \theta \le 2\pi$$

$$\vec{r} = -R\cos\theta \;\hat{i} - R\sin\theta \;\hat{j} \quad , \quad r = R$$

$$d\vec{s} \times \vec{r} = \hat{k}(R^2 d\theta)$$

$$\Rightarrow \quad \vec{B} = \frac{\mu_0 I R^2 \hat{k}}{4\pi (R^2)^{\frac{3}{2}}} \int_{\theta=0}^{\theta=\varphi} d\theta = \frac{\mu_0 I \varphi}{4\pi R}\hat{k}$$

نکات:

- میدان نیم دایره

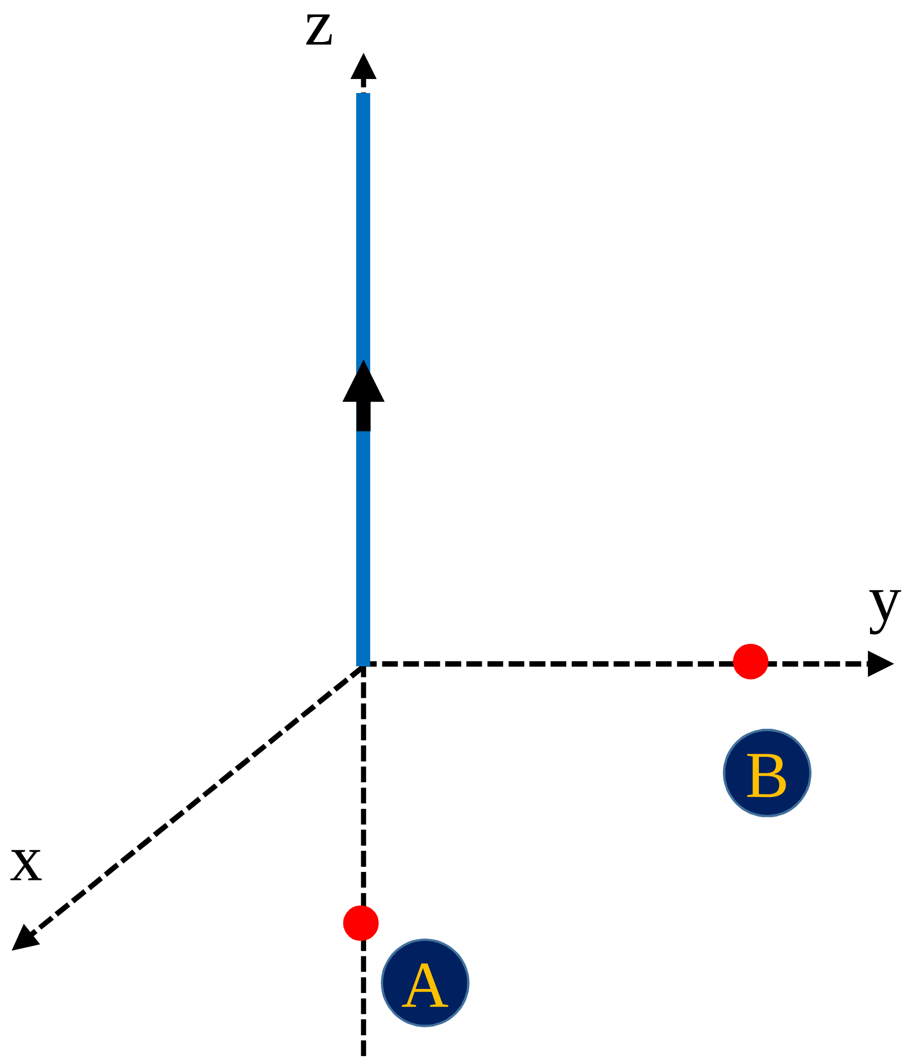
$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I \theta}{4\pi R}\hat{k} = \frac{\mu_0 I \pi}{4\pi R}\hat{k}$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4R}\hat{k}$$

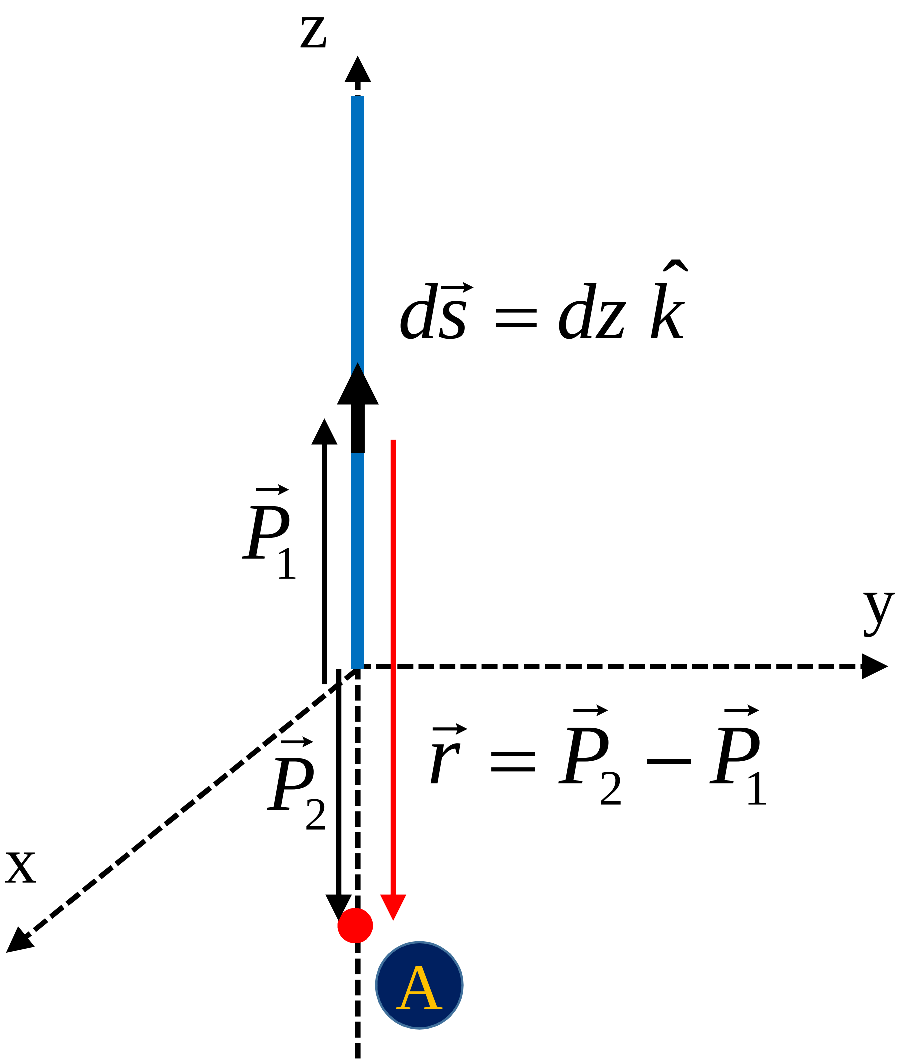
- میدان ناشی از حلقه جریان در مرکز

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I R^2 \hat{k}}{2(R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

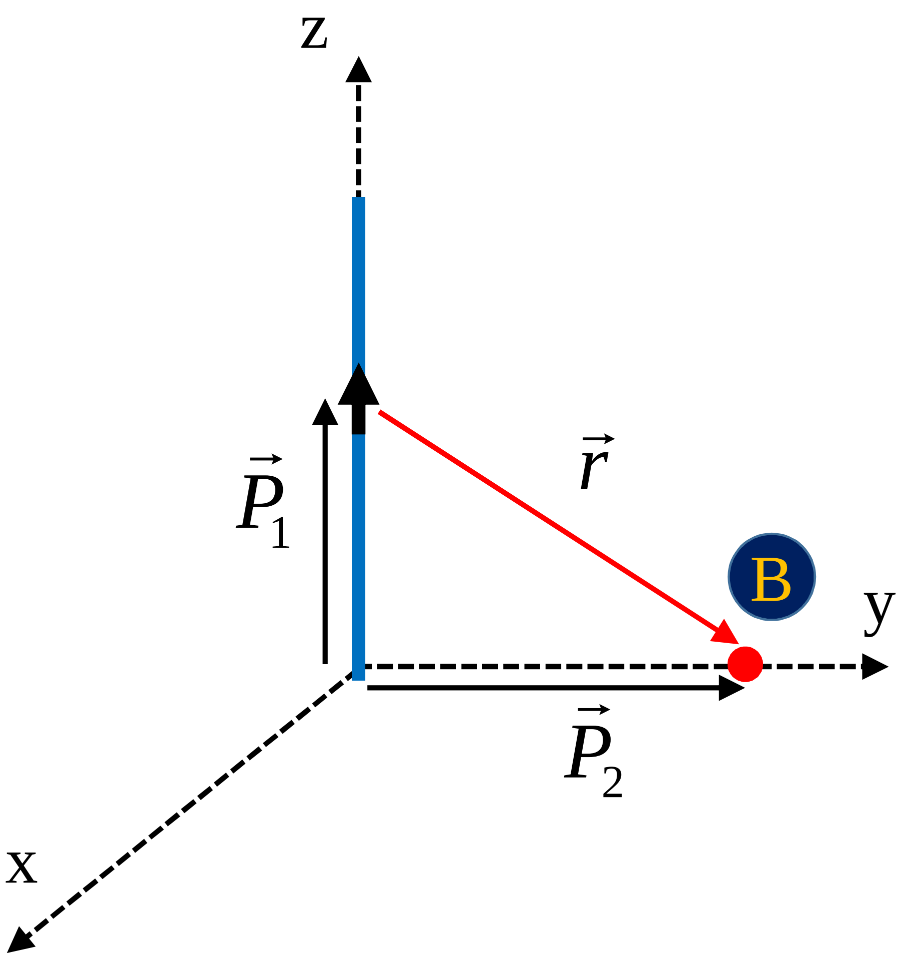
مثال: میدان مغناطیسی ناشی از یک سیم نیم متناهی در نقاط مشخص شده



میدان مغناطیسی در نقطه A :



$$d\vec{B} \propto d\vec{s} \times \vec{r} \quad \rightarrow \quad d\vec{B} = 0$$



میدان مغناطیسی در نقطه B :

$$d\vec{s} = dz\,\hat{k}$$

$$\vec{P}_1 = z\,\hat{k} \qquad 0 < z < +\infty$$

$$\vec{P}_2 = R\,\hat{j}$$

$$\vec{r} = \vec{P}_2 - \vec{P}_1$$

$$\vec{r} = R\,\hat{j} - z\,\hat{k}$$

$$r = (R^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$d\vec{s} \times \vec{r} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 0 & dz \\ 0 & R & -z \end{vmatrix} = \hat{i}(-Rdz) - \hat{j}(0) + \hat{k}(0)$$

$$d\vec{s} \times \vec{r} = -Rdz\hat{i}$$

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{s} \times \vec{r}}{r^3} \quad \rightarrow \quad d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{-Rdz\hat{i}}{(R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\vec{B} = \frac{-\mu_0 IR\hat{i}}{4\pi} \int_{z=0}^{z=+\infty} \frac{dz}{(R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\vec{B} = \frac{-\mu_0 I R \hat{i}}{4\pi} \int_{z=0}^{z=+\infty} \frac{dz}{(R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\tan\theta = \frac{z}{R} \quad \rightarrow \quad z = R\tan\theta \quad \rightarrow \quad dz = R(1+\tan^2\theta)d\theta$$

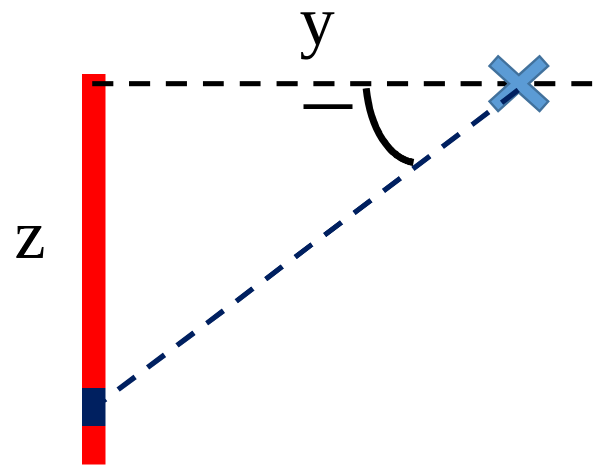
$$z \rightarrow 0 \qquad \theta \rightarrow 0$$

$$z \rightarrow +\infty \qquad \theta \rightarrow +\frac{\pi}{2}$$

تغيير متغير

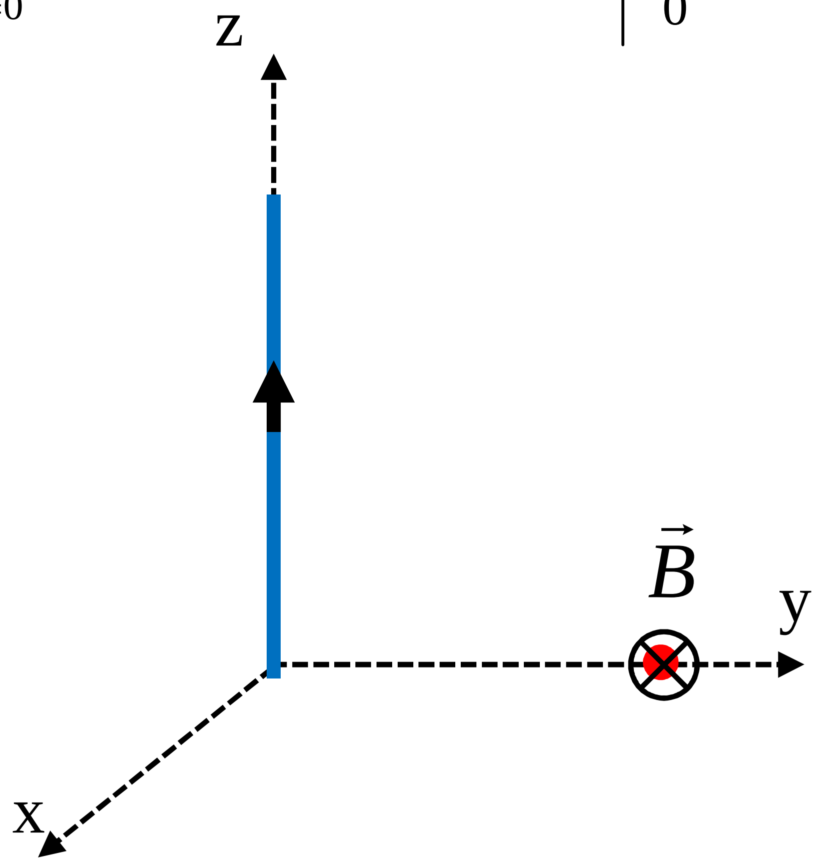
$$\vec{B} = \frac{-\mu_0 I R \hat{i}}{4\pi} \int_{\theta_1=0}^{\theta_2=+\frac{\pi}{2}} \frac{R(1+\tan^2\theta)d\theta}{R^3(1+\tan^2\theta)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{-\mu_0 I R \hat{i}}{4\pi R^2} \int_{\theta_1=0}^{\theta_2=+\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{(1+\tan^2\theta)^{\frac{1}{2}}}$$

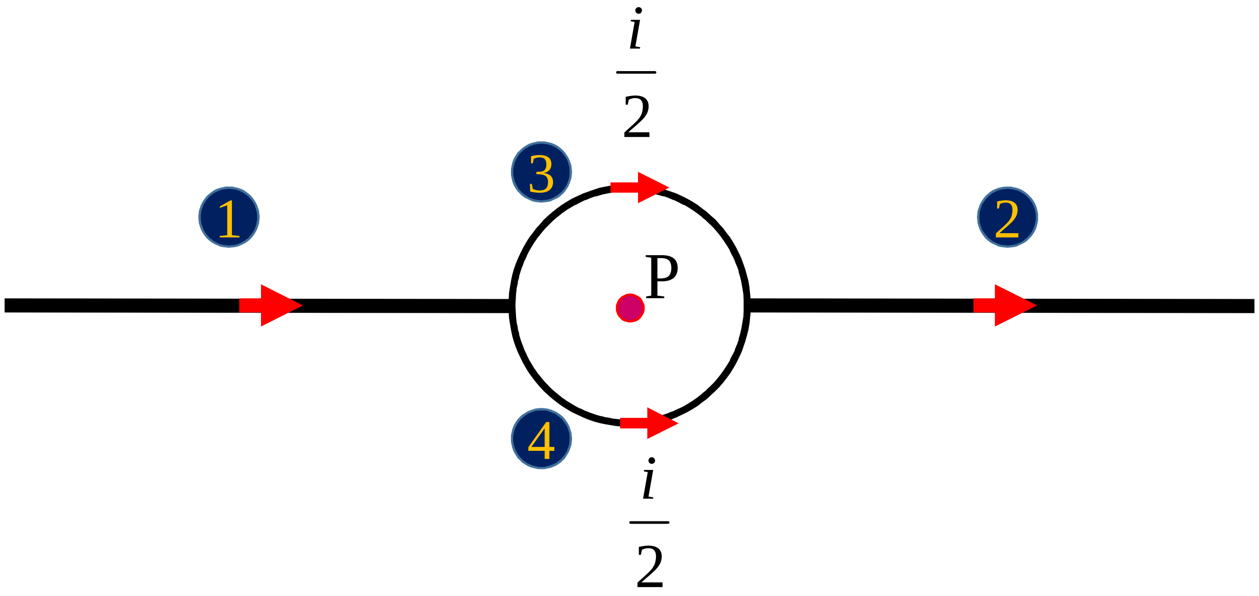


$$\vec{B}=\frac{-\mu_0 I\hat{i}}{4\pi R}\int_{\theta_1=0}^{\theta_2=+\frac{\pi}{2}}\frac{d\theta}{(1+\tan^2\theta)^{\frac{1}{2}}}=\frac{-\mu_0 I\hat{i}}{4\pi R}\int_{\theta_1=0}^{\theta_2=+\frac{\pi}{2}}\cos\theta\, d\theta=\frac{-\mu_0 I\hat{i}}{4\pi R}\sin\theta\Big|_{0}^{+\frac{\pi}{2}}$$

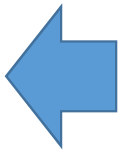
$$\vec{B}=\frac{-\mu_0 I\hat{i}}{4\pi R}(1-0)=\frac{-\mu_0 I}{4\pi R}\hat{i}$$



مثال: سیمی طویل حاوی جریان i در بخشی از مسیرش به دو نیمه دایره ای شکل باز شده است. در این بخش در هر نیمه جریان – جریان دارد. میدان را در وسط حلقه بدست آورید.

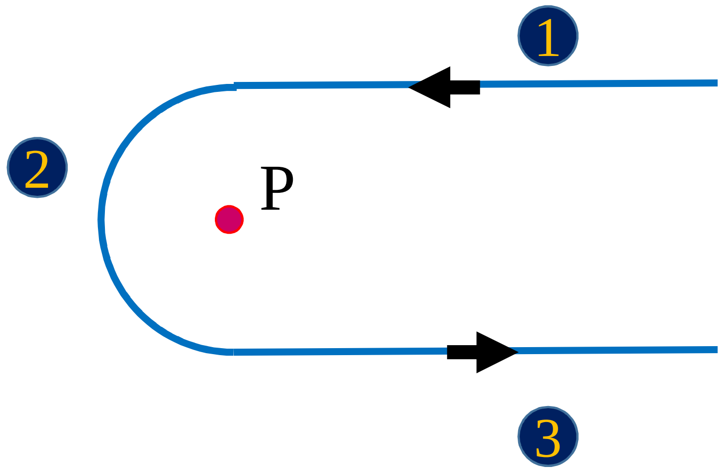


میدان ناشی از ۱ و ۲ صفر چون نقطه مورد نظر در امتداد سیم قرار دارد
میدان های ۳ و ٤ هم در نقطه P هم اندازه و در جهات مختلف است



میدان کل صفر است

مثال: سیمی بسیار درازی حاوی جریان I به شکل زیر درآورده شده است. میدان مغناطیسی را در مرکز نیم حلقه بدست آورید.

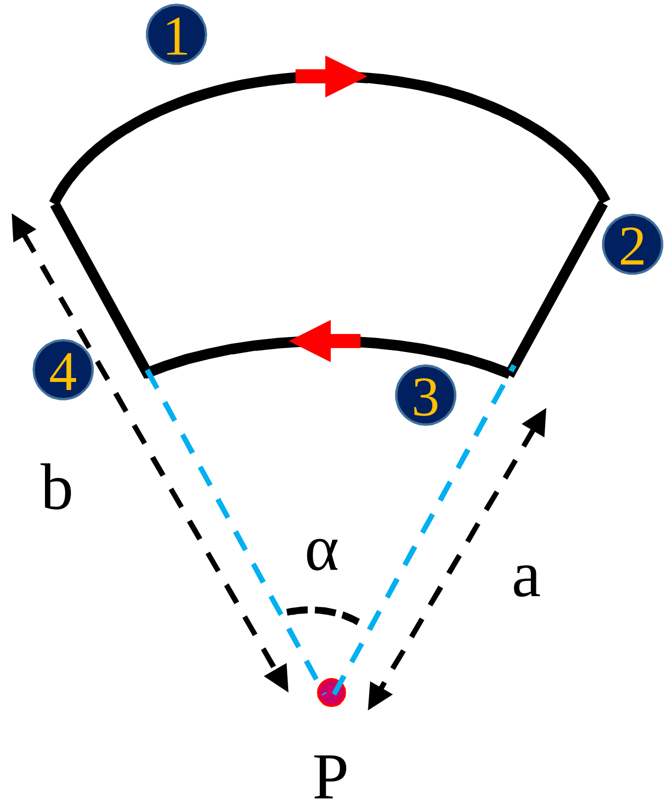


سیم ۱ یک سیم نیمه متناهی: $B_1 = \dfrac{\mu_0 I}{4\pi R}$ $\odot$

سیم ۲ یک سیم نیمه دایره: $B_2 = \dfrac{\mu_0 I}{4R}$ $\odot$

سیم ۳ یک سیم نیمه متناهی: $B_3 = \dfrac{\mu_0 I}{4\pi R}$ $\odot$

مثال: سیمی حامل جریان به صورت قابی به شکل زیر درآورده شده است. میدان مغناطیسی را در نقطه P بدست آورید.



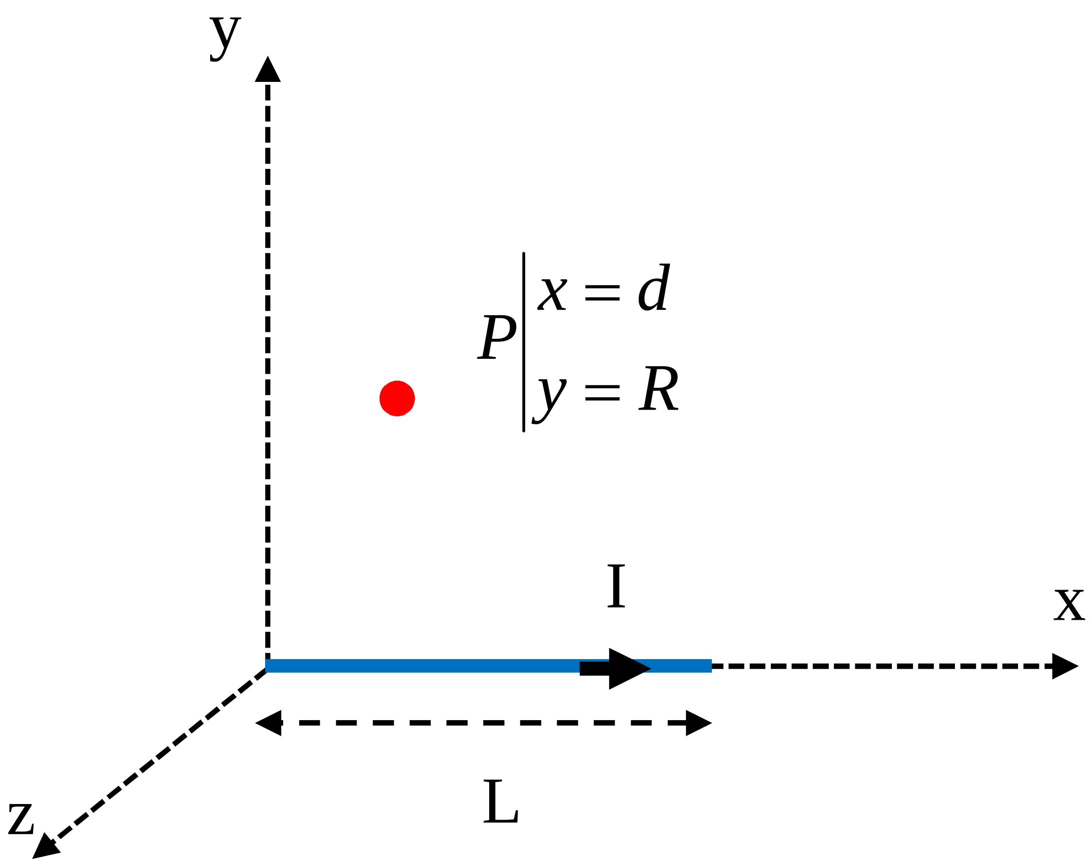
قطعه سیم ۱ : $\vec{B}_1 = \frac{\mu_0 I \alpha}{4\pi b}$ $\otimes$

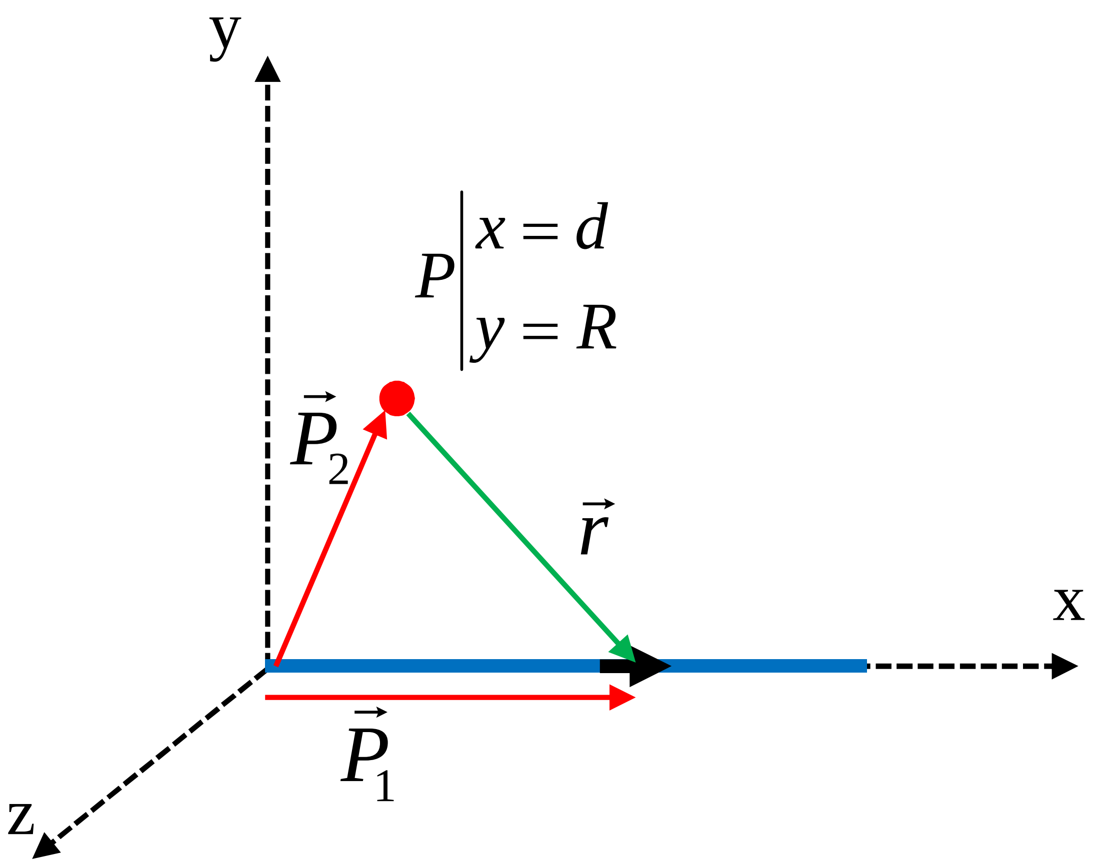
قطعه سیم ۲ : $\vec{B}_2 = 0$

قطعه سیم ۳ : $\vec{B}_3 = \frac{\mu_0 I \alpha}{4\pi a}$ $\odot$

قطعه سیم ٤ : $\vec{B}_4 = 0$

مثال: سیمی به طول L حامل جریان I است. میدان مغناطیسی را در نقطه P بدست آورید.





$$d\vec{s} = dx\,\hat{i}$$

$$\vec{P}_1 = x\,\hat{i} \qquad 0 < x < L$$

$$\vec{P}_2 = d\,\hat{i} + R\,\hat{j}$$

$$\vec{r} = \vec{P}_2 - \vec{P}_1$$

$$\vec{r} = (d - x)\,\hat{i} + R\,\hat{j}$$

$$r = [(d - x)^2 + R^2]^{\frac{1}{2}}$$

$$d\vec{s}\times\vec{r} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ dx & 0 & 0 \\ d-x & R & 0 \end{vmatrix} = \hat{i}(0) - \hat{j}(0) + \hat{k}(Rdx)$$

$$d\vec{s}\times\vec{r} = Rdx\,\hat{k}$$

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{d\vec{s}\times\vec{r}}{r^3} \quad \rightarrow \quad d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{Rdx\,\hat{k}}{[(d-x)^2 + R^2]^{\frac{3}{2}}}$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 IR\,\hat{k}}{4\pi}\int_{x=0}^{x=L}\frac{dx}{[(d-x)^2 + R^2]^{\frac{3}{2}}}$$

$$\vec{B}=\frac{-\mu_0 IR}{4\pi}\hat{k}\int_{z=0}^{z=+\infty}\frac{dz}{(R^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\tan\theta=\frac{d-x}{R}\quad\rightarrow\quad d-x=R\tan\theta\quad\rightarrow\quad -dx=R(1+\tan^2\theta)d\theta$$

$$\vec{B}=\frac{-\mu_0 IR}{4\pi}\hat{k}\int_{\theta_1=0}^{\theta_2}\frac{R(1+\tan^2\theta)d\theta}{R^3(1+\tan^2\theta)^{\frac{3}{2}}}$$

$x\rightarrow 0 \qquad \theta\rightarrow 0$ تغيير متغير

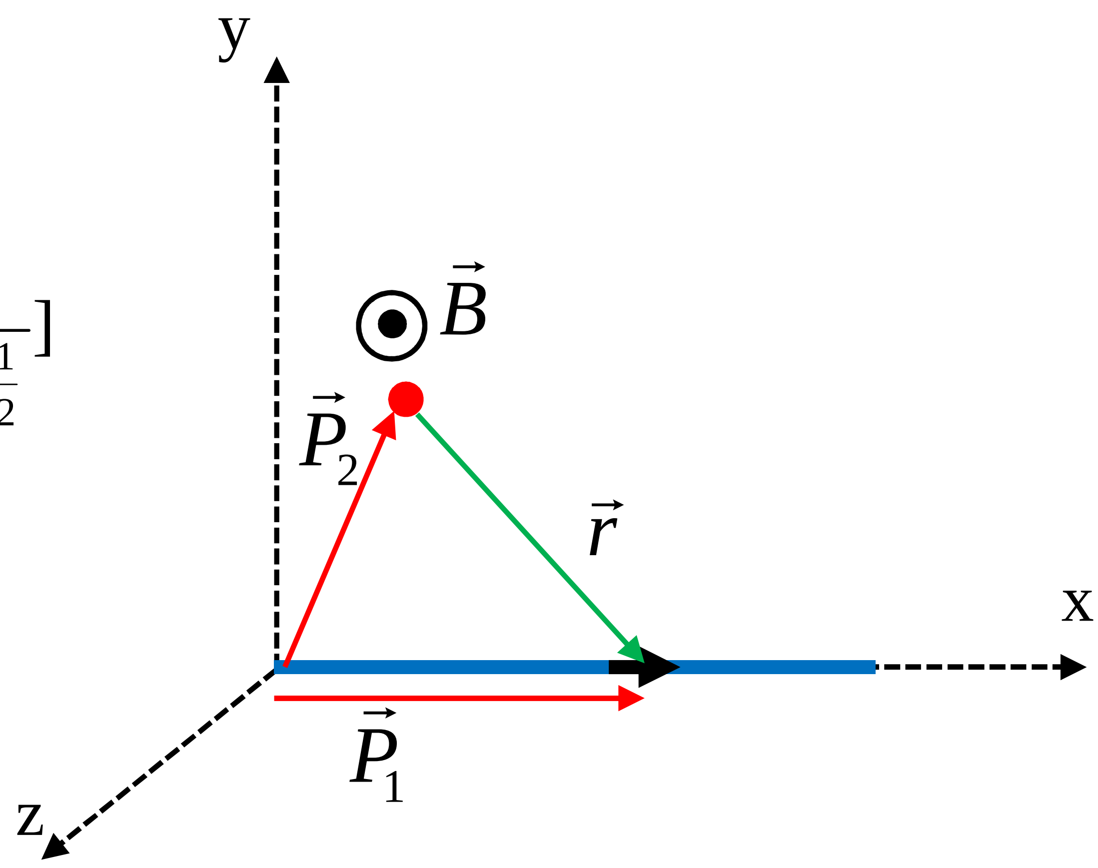
$x\rightarrow L \qquad \theta\rightarrow\theta_2$

$$=\frac{-\mu_0 IR}{4\pi R^2}\hat{k}\int_{\theta_1=0}^{\theta_2=+\frac{\pi}{2}}\frac{d\theta}{(1+\tan^2\theta)^{\frac{1}{2}}}$$

$$\vec{B} = \frac{-\text{«}_0 I}{4\text{®}R}\hat{k}\int_{\text{¯}_1=0}^{\text{¯}_2} \frac{d\text{¯}}{(1+\tan^2\text{¯})^{\frac{1}{2}}} = \frac{-\text{«}_0 I\hat{i}}{4\text{®}R}\int_{\text{¯}_1=0}^{\text{¯}_2} \cos\text{¯}\, d\text{¯} = \frac{-\text{«}_0 I\hat{i}}{4\text{®}R}\sin\text{¯}\Big|_0^{+\frac{\text{®}}{2}}$$

$$\vec{B} = \frac{-\text{«}_0 I}{4\text{®}R}\hat{k}\left[\frac{d-x}{[(d-x)^2+R^2]^{\frac{1}{2}}}\right]\Bigg|_{x=0}^{x=L}$$

$$\vec{B} = \frac{\text{«}_0 I}{4\text{®}R}\hat{k}\left[\frac{d}{[d^2+R^2]^{\frac{1}{2}}} - \frac{d-L}{[(d-L)^2+R^2]^{\frac{1}{2}}}\right]$$



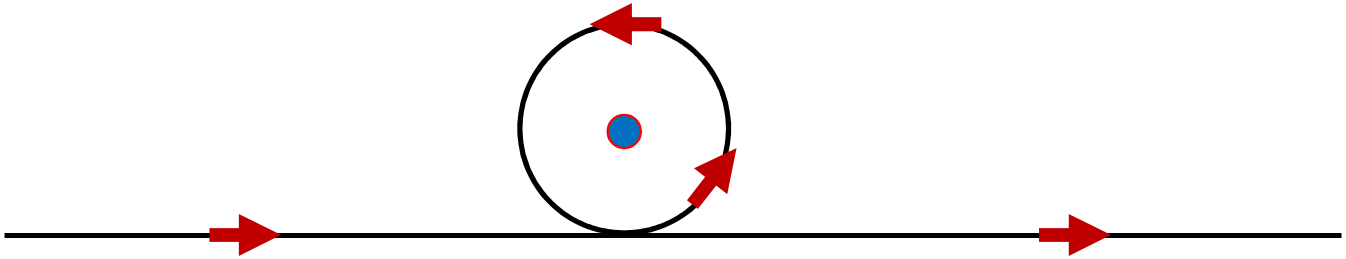
مثال: میدان مغناطیسی ناشی از سیمی به طول L حامل جریان I روی خط عمود منصف و در فاصله R از آن را بدست آورید.

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi R}\hat{k}\left[\frac{d}{[d^2+R^2]^{\frac{1}{2}}} - \frac{d-L}{[(d-L)^2+R^2]^{\frac{1}{2}}}\right] \qquad d = \frac{L}{2}$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi R}\hat{k}\left[\frac{\frac{L}{2}}{[\frac{L^2}{4}+R^2]^{\frac{1}{2}}} - \frac{-\frac{L}{2}}{[\frac{L^2}{4}+R^2]^{\frac{1}{2}}}\right]$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \times \frac{L}{[L^2+4R^2]^{\frac{1}{2}}}\hat{k}$$

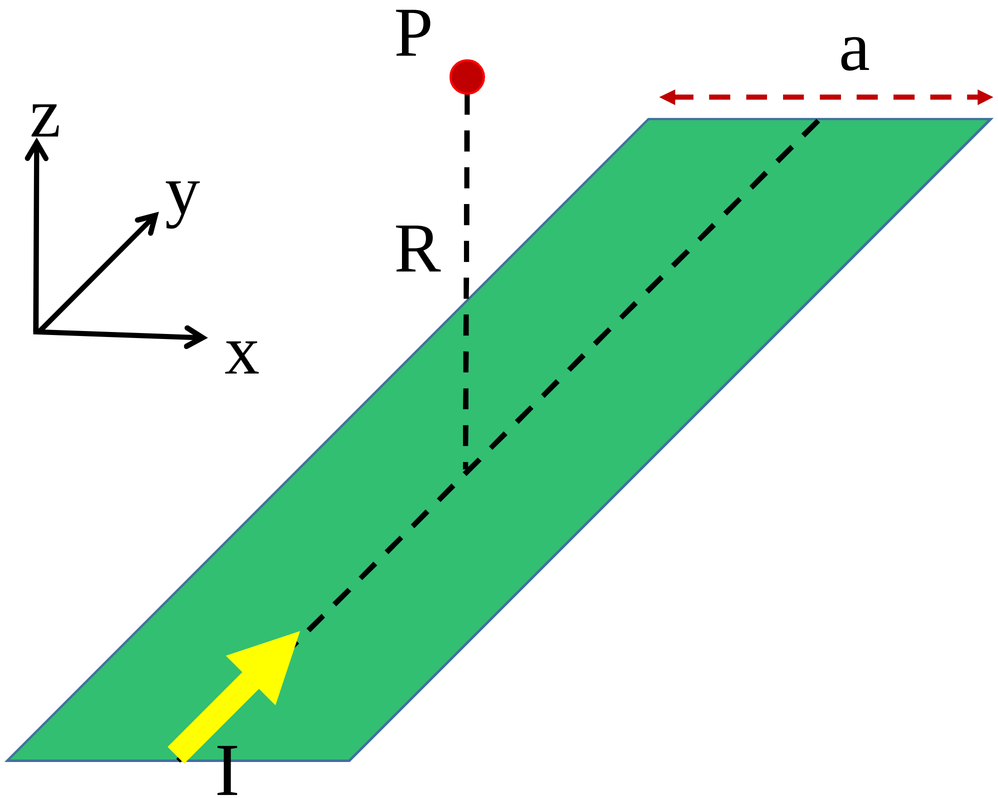
مثال: سیم بسیار بلندی در نقطه ای به صورت یک دایره به شعاع R خمیده شده است. میدان را در مرکز دایره بدست آورید.



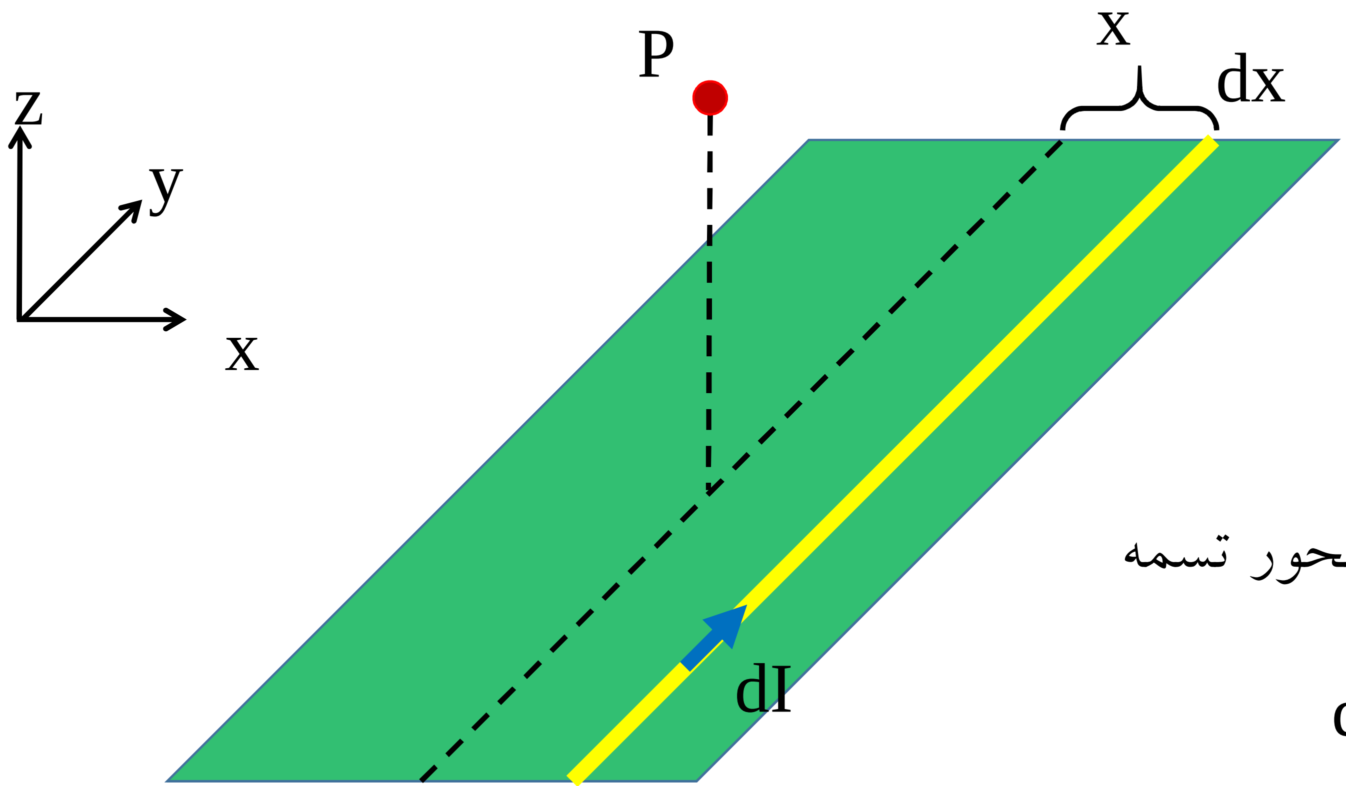
میدان در مرز حلقه = میدان سیم مستقیم در فاصله R + میدان در وسط حلقه به شعاع R

$$B_1 = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \qquad B_2 = \frac{\mu_0 I}{2R}$$

مثال: نوار پهن مسی به عرض a و ضخامت ناچیز حامل جریان i است. میدان مغناطیسی در نقطه P در فاصله R از مرکز نوار و روی عمود منصف آن را بدست آورید.



۱) تسمه به صورت المانهای سیمی که کنار هم در عرض تسمه چیده شده اند در نظر گرفته می شود



المان سیمی

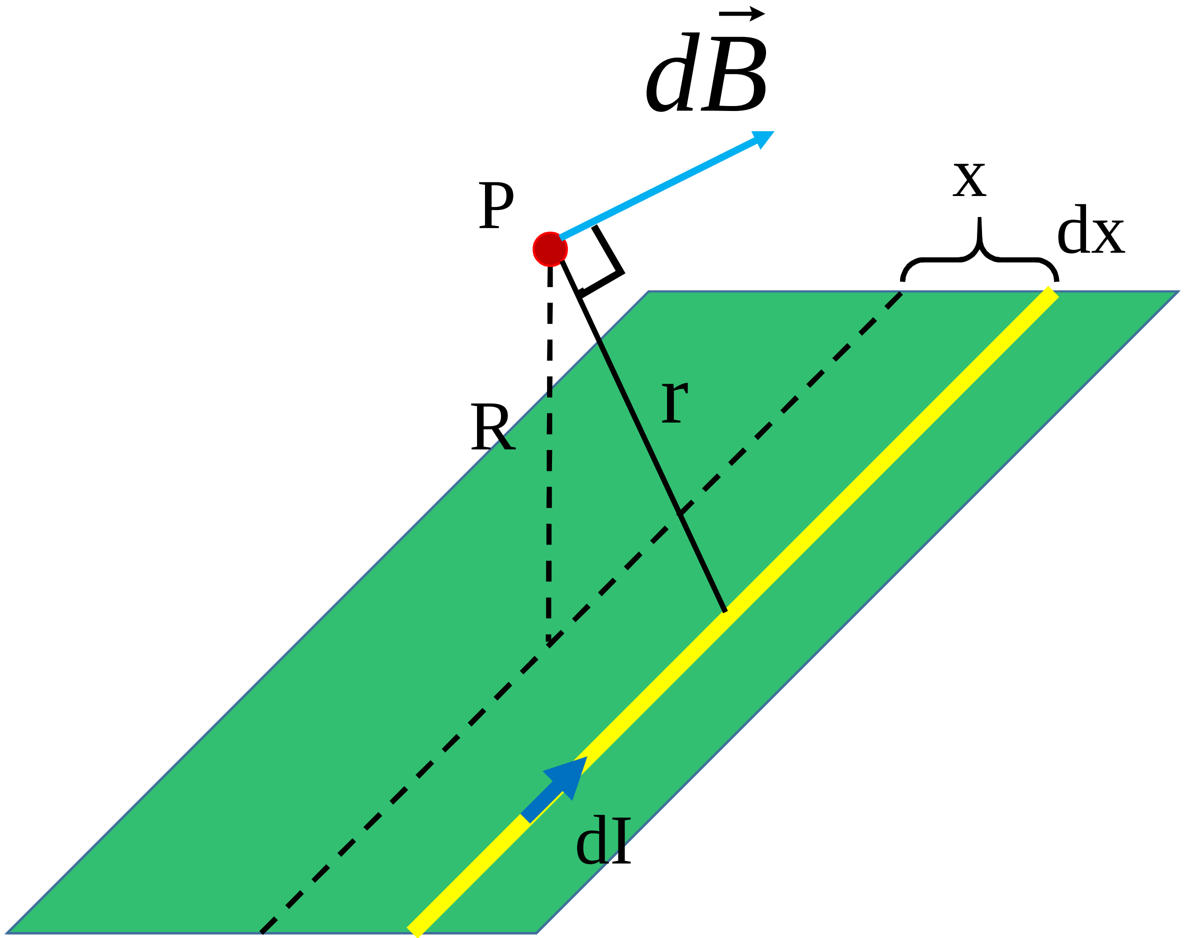
به ضخامت dx

در فاصله x از محور تسمه

حاوی جریان di

$$\frac{I}{a} = \frac{dI}{dx} \rightarrow dI = \frac{Idx}{a}$$

۲) میدان مغناطیسی المان

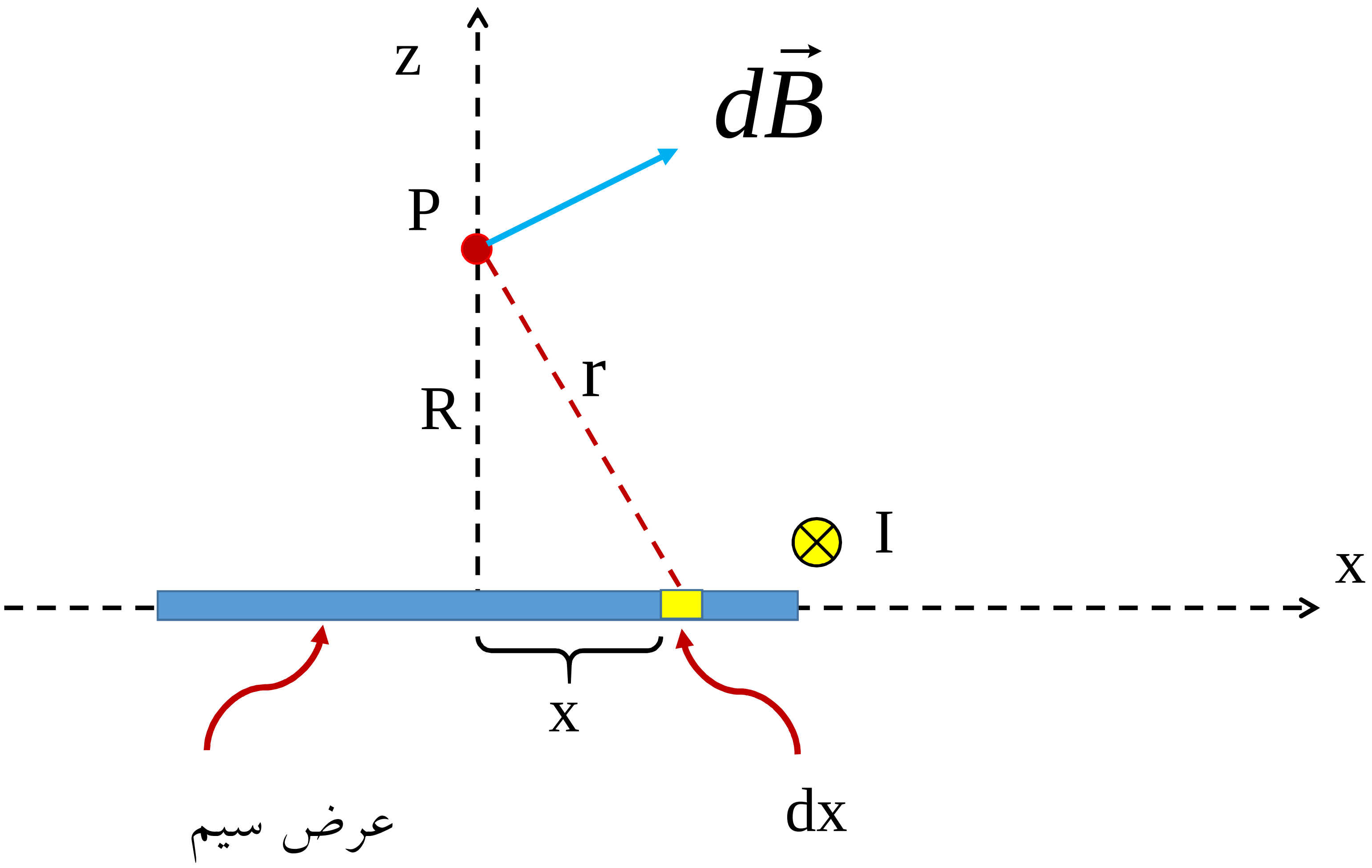


$$dB = \frac{\mu_0 dI}{2\pi r}$$

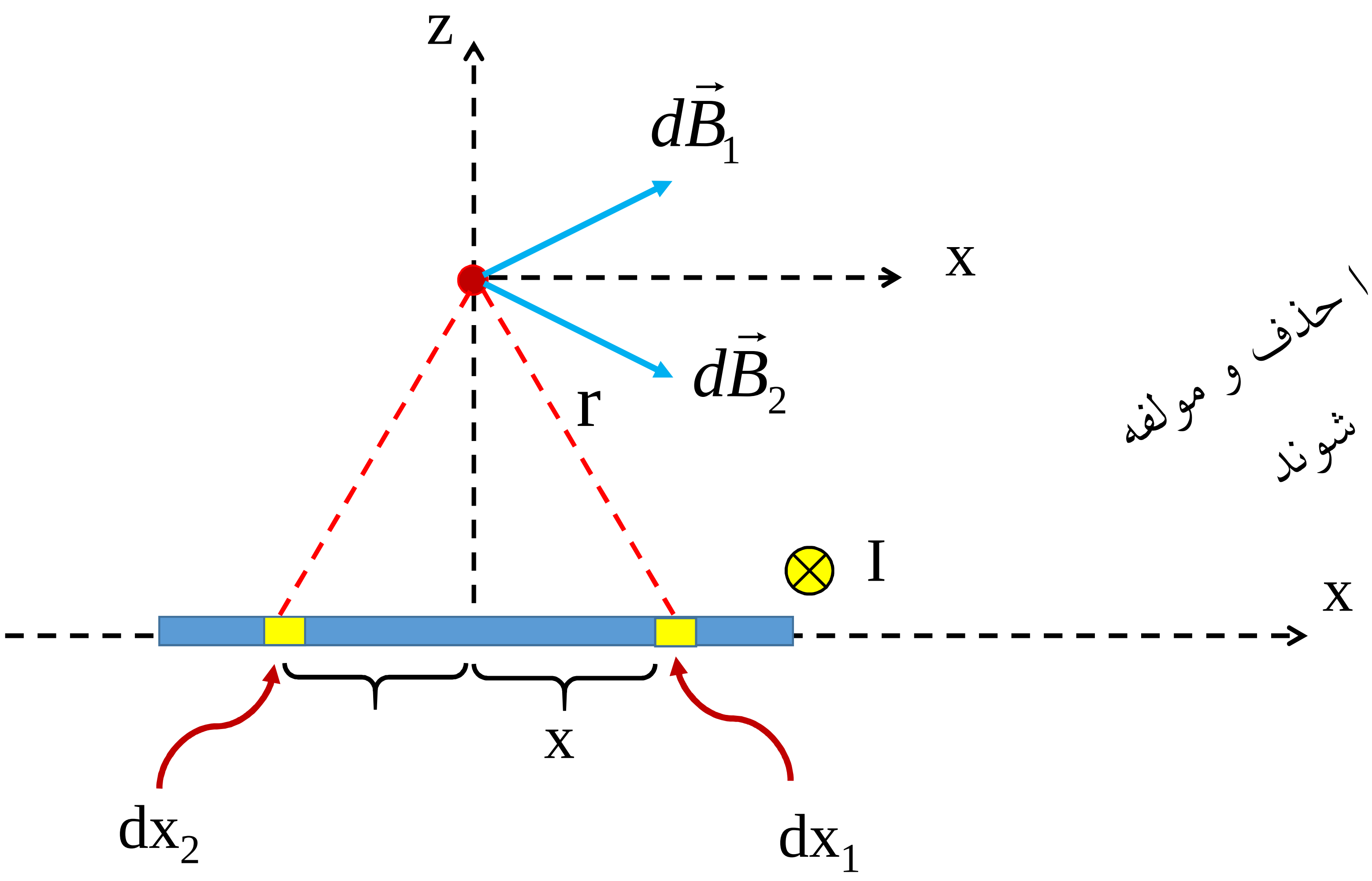
فاصله المان سیم تا نقطه P

$$r = (R^2 + x^2)^{\frac{1}{2}}$$

dB در صفحه xz قرار دارد

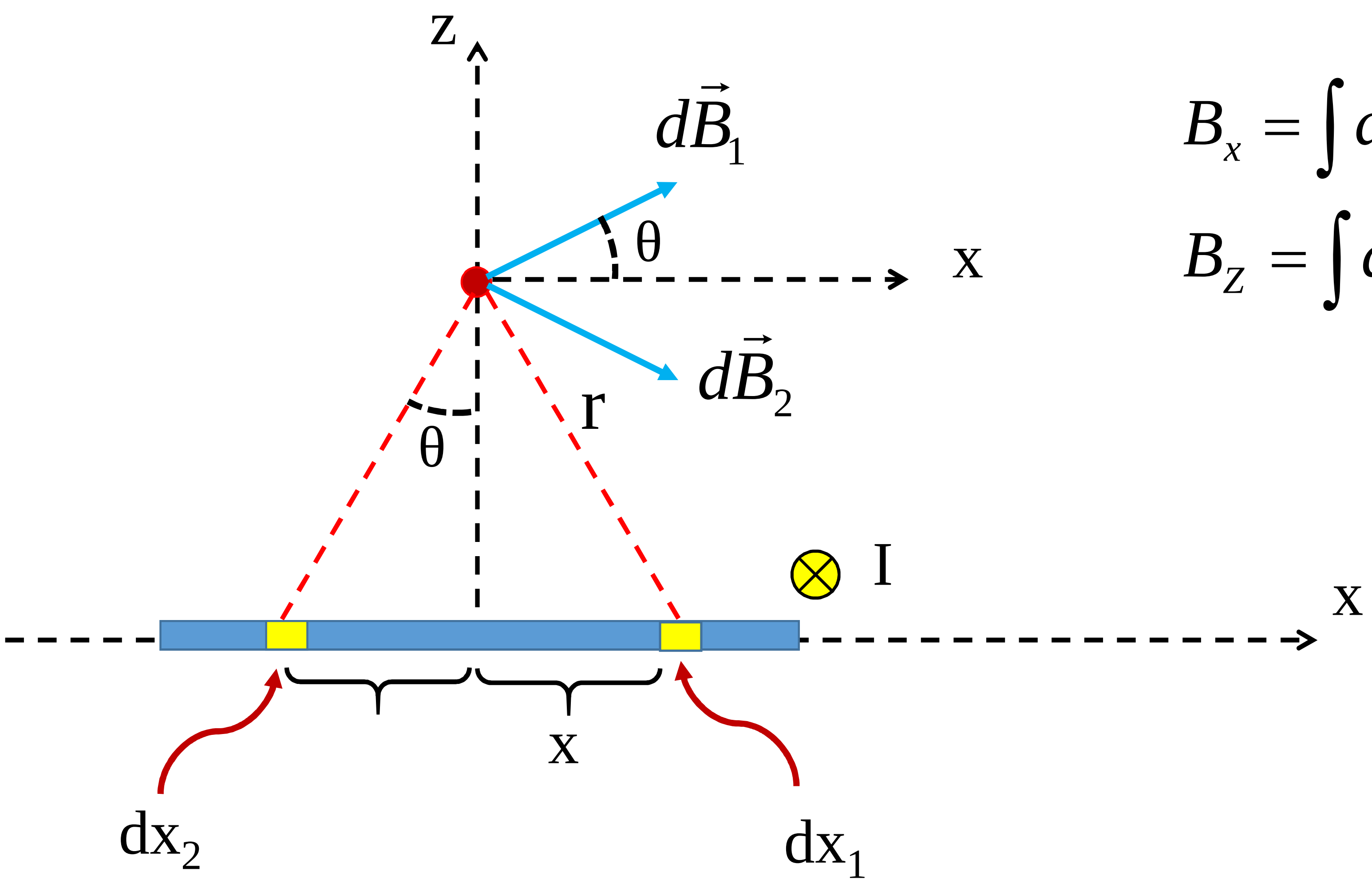

z
$d\vec{B}$
P
r
R
I
x
x
عرض سیم
dx

۳) میدان مغناطیسی ناشی از دو المان متقارن



مولفه های z همدیگر را حذف و مولفه های x با همدیگر جمع می شوند

٤) جمع مولفه های میدان

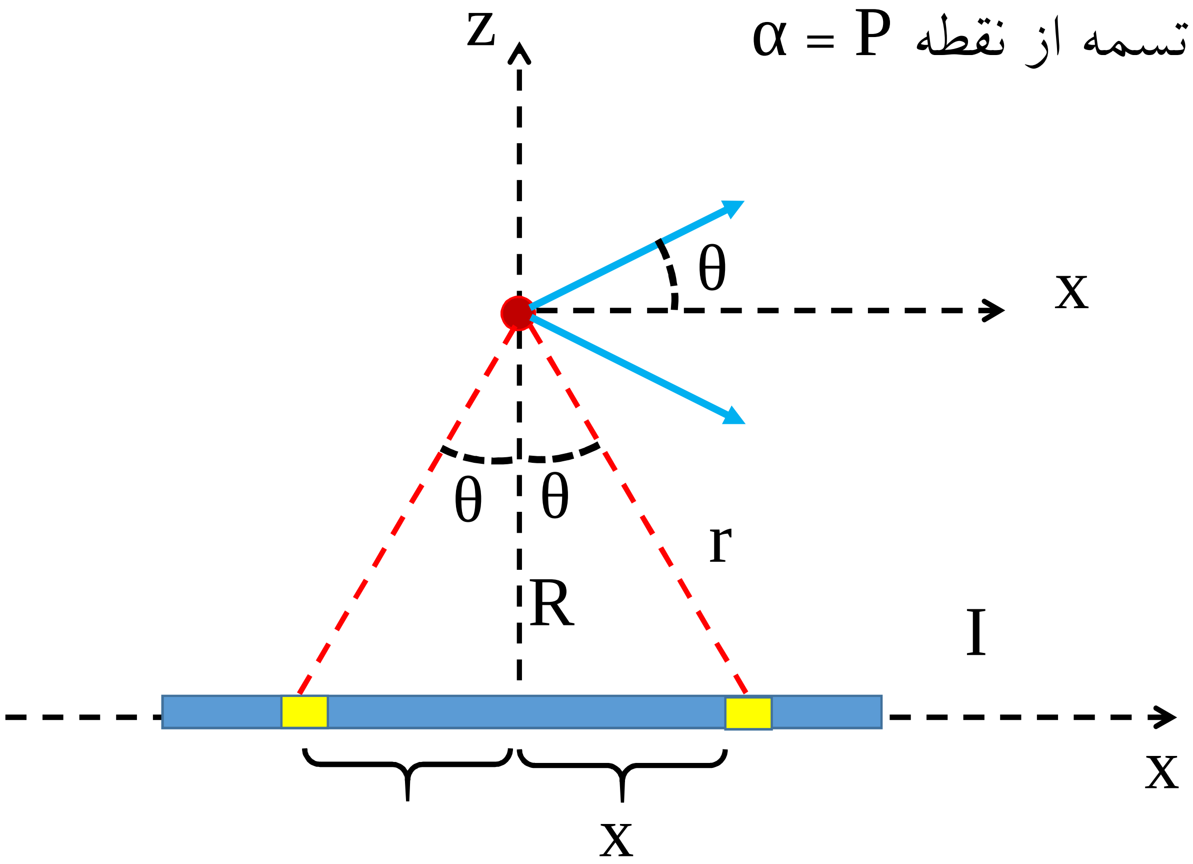


$$B_x = \int dB \cos\theta \neq 0$$

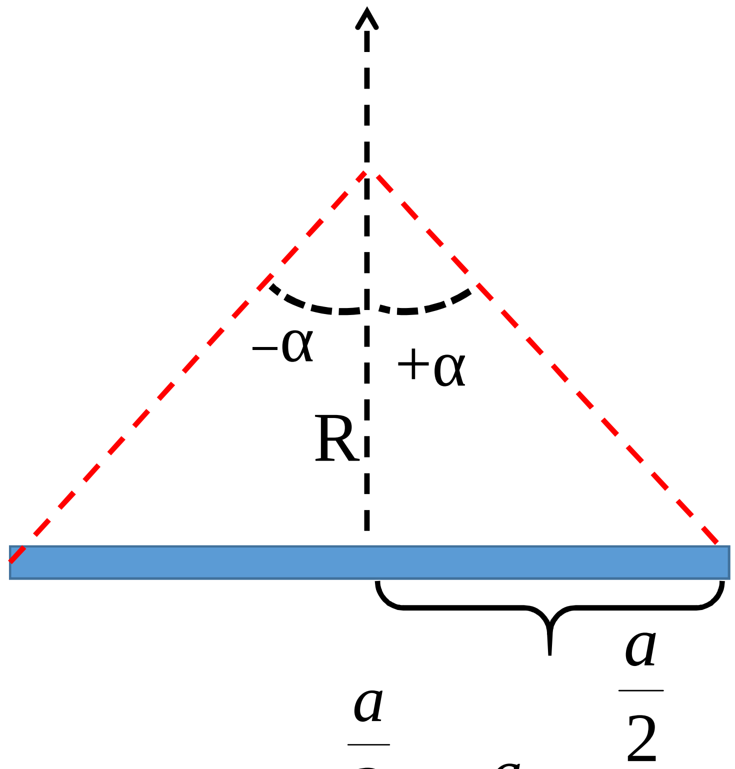
$$B_Z = \int dB \sin\theta = 0$$

۵) پیرامون زاویه θ

حد زاویه θ برابر با زاویه دید نیمی از عرض تسمه از نقطه P = α



$$\tan\theta = \frac{x}{R}$$



$$\tan\alpha = \frac{\frac{a}{2}}{R} = \frac{a}{2R}$$

۶) محاسبه میدان کل

$$\vec{B} = B_x \hat{i}$$

$$B = \int dB \cos \text{¯} = \int \frac{\text{«}_0 I dx}{2\text{®}a(R^2+x^2)^{\frac{1}{2}}} \times \frac{R}{(R^2+x^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{\text{«}_0 IR}{2\text{®}\, a} \int \frac{dx}{(R^2+x^2)}$$

تغییر متغیر $\tan \text{¯} = \dfrac{x}{R}$

$$B = \frac{\text{«}_0 IR}{2\text{®}\, a} \int \frac{R(1+\tan^2 \text{¯})d\text{¯}}{R^2(1+\tan^2 \text{¯})} = \frac{\text{«}_0 I}{2\text{®}\, a} \int_{-\text{~}}^{+\text{~}} d\text{¯}$$

$$B = \frac{\text{«}_0 I}{2\text{®}\, a} \times 2\text{~} = \frac{\text{«}_0 I}{\text{®}\, a} \tan^{-1}\left(\frac{a}{2R}\right)$$