بِسْمِ ٱللَّهِ ٱلرَّحْمَٰنِ ٱلرَّحِيمِ

فصل اول – بخش دوم

آنالیز بردار

Vector Analysis

۳.۱ بردارها

حرکت سیستمهای دینامیکی نوعاً برحسب دو نوع کمیت اساسی، کمیتهای عددی یا اسکالر و کمیتهای برداری یا بردارها، توصیف می‌شود. کمیت عددی یا اسکالر عبارت است ازکمیتی فیزیکی که فقط بزرگی دارد، مانند جرم هر جسم که به‌طور کامل با یک تک‌عدد برحسب یکاهای مناسب بیان می‌شود. مقدار این کمیت از هر دستگاه مختصات انتخابی برای توصیف حرکت سیستم، مستقل است. نمونه‌های کمیتهای عددی که با آنها آشناییم، عبارت‌اند از: چگالی، حجم، دما، و انرژی. از لحاظ ریاضی، کمیتهای عددی را اعداد حقیقی تلقی می‌کنند. تمام قواعد معمولی جبر، یعنی جمع، تفریق، ضرب، و تقسیم و مانند آنها بر این کمیتها حاکم‌اند.

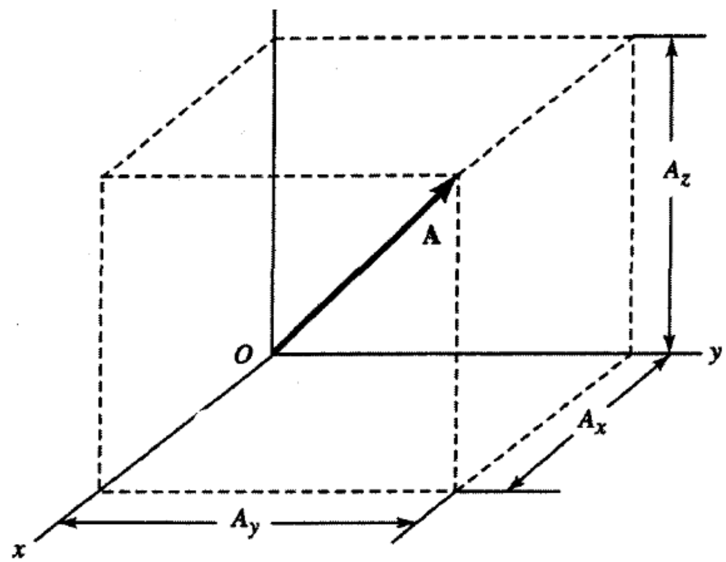
بردار هم بزرگی و هم جهت دارد، مانند تغییر مکان از یک نقطهٔ فضا به نقطهٔ دیگر.

بردار، برخلاف کمیت عددی یا اسکالر، مستلزم مجموعه‌ای از اعداد است تا به‌طور کامل مشخص شود. مقادیر آن اعداد، عموماً، به دستگاه مختصات بستگی دارند. علاوه بر تغییر مکان در فضا، مثالهای دیگر بردارها عبارت‌اند از سرعت، شتاب، و نیرو. از لحاظ ریاضی، بردارها بنابر قاعدهٔ جمع متوازی‌الاضلاع، که به‌زودی دربارهٔ آن بحث خواهیم کرد، با یکدیگر ترکیب می‌شوند.[۱] مفهوم

هر بردار مفروض $\mathbf{A}$ با بزرگی و راستایش نسبت به دستگاه مرجع انتخابی مشخص می‌شود.

بردار را می‌توان با مجموعهٔ مؤلفه‌هایش، یا تصاویرش بر محورهای مختصات، نیز مشخص کرد.

$$\mathbf{A} = (A_x, A_y, A_z)$$



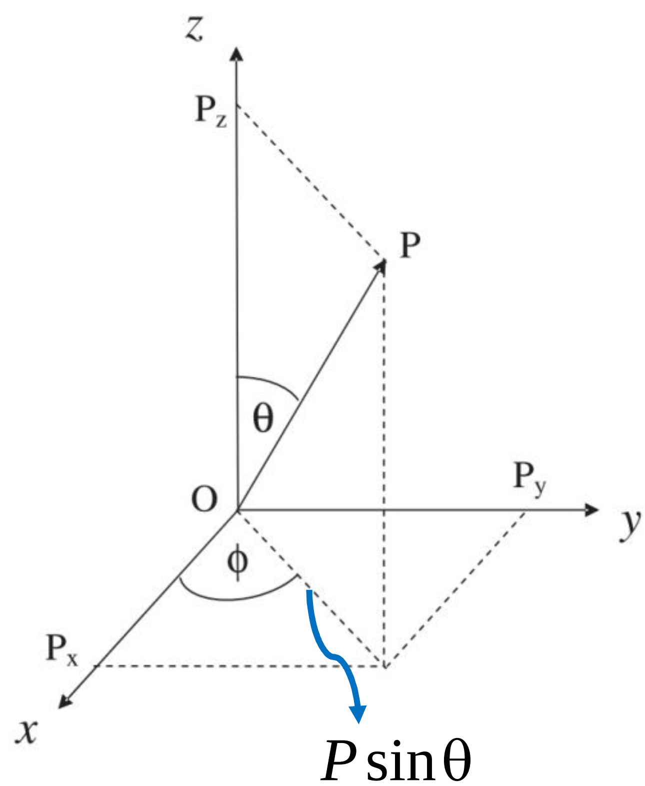
اگر بردار $\mathbf{A}$ نمایانگر تغییر مکان از نقطهٔ $\mathrm{P}_۱(x_۱, y_۱, z_۱)$ به نقطهٔ $\mathbf{P}_۲(x_۲, y_۲, z_۲)$ باشد، در این صورت، سه مؤلفهٔ آن عبارت‌اند از $A_x = x_۲ - x_۱$، $A_y = y_۲ - y_۱$، و $A_z = z_۲ - z_۱$؛

نمایش بردار در دستگاه مختصات کروی

Projecting the components:

$$\underline{\mathbf{p}} = (p_x, p_y, p_z)$$

- x-component
  $p_x = |\underline{\mathbf{p}}| \sin(\theta) \cos(\phi)$
- y-component
  $p_y = |\underline{\mathbf{p}}| \sin(\theta) \sin(\phi)$
- z-component
  $p_z = |\underline{\mathbf{p}}| \cos(\theta)$
- Magnitude $|\underline{\mathbf{p}}| = \sqrt{}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2)$
- Direction $\tan(\phi) = (p_y/p_x)$
  $\cos(\theta) = (p_z/|\underline{\mathbf{p}}|)$

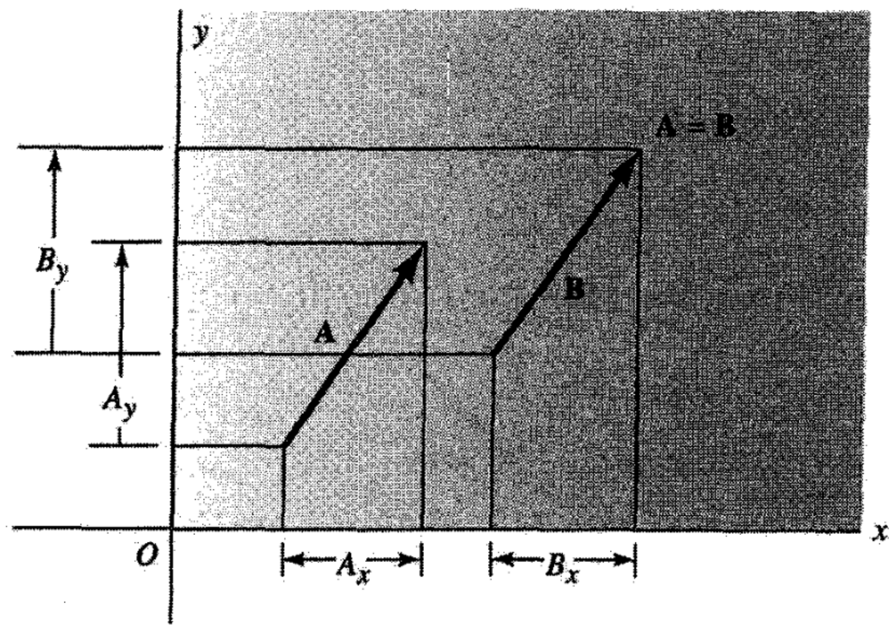


I. تساوی بردارها

$$\mathbf{A} = \mathbf{B}$$

$$(A_x, A_y, A_z) = (B_x, B_y, B_z)$$

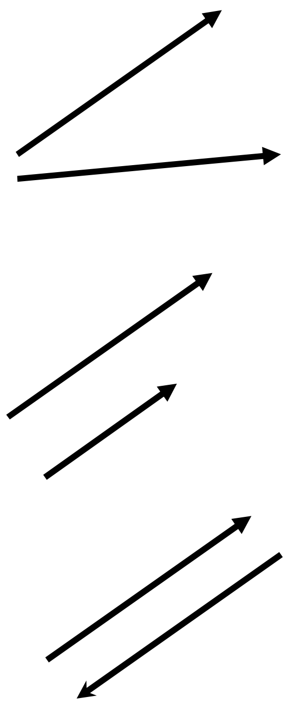
$$A_x = B_x \qquad A_y = B_y \qquad A_z = B_z$$



یعنی، دو بردار مساوی‌اند، اگر و فقط اگر، مؤلفه‌های آنها به‌ترتیب با هم مساوی باشند. به تعبیر هندسی، بردارهای مساوی با هم موازی‌اند و طولهای یکسانی دارند، ولی ضرورتاً مکان آنها یکی نیست. در شکل ۲.۳.۱، بردارهای مساوی را مشاهده می‌کنید که گرچه مساوی‌اند، از لحاظ

دو بردار یکسان هستند هر گاه هر سه ویژگی آنها یکسان باشد:

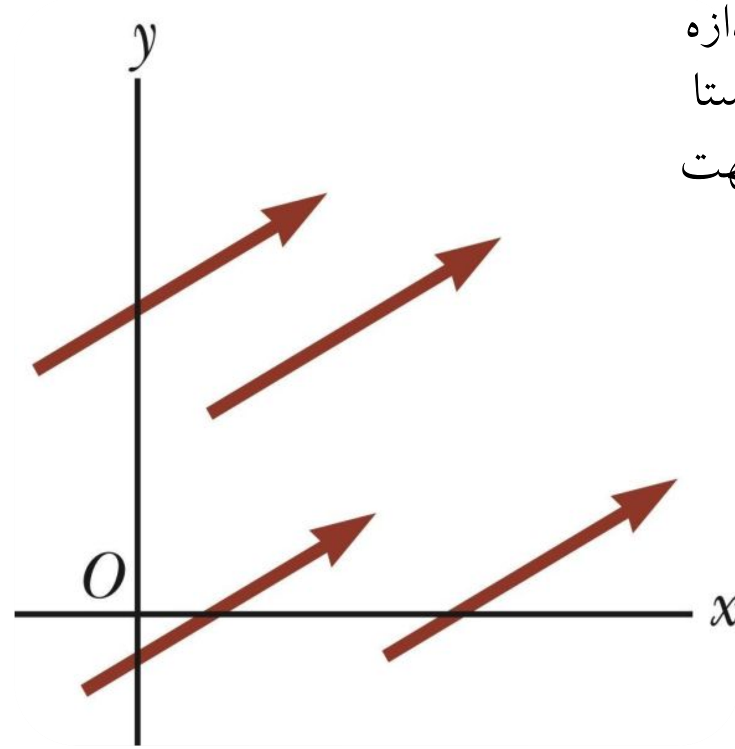
- هم اندازه
- هم راستا
- هم جهت



$\vec{a} \neq \vec{b}$

$\vec{a} \neq \vec{b}$

$\vec{a} \neq \vec{b}$

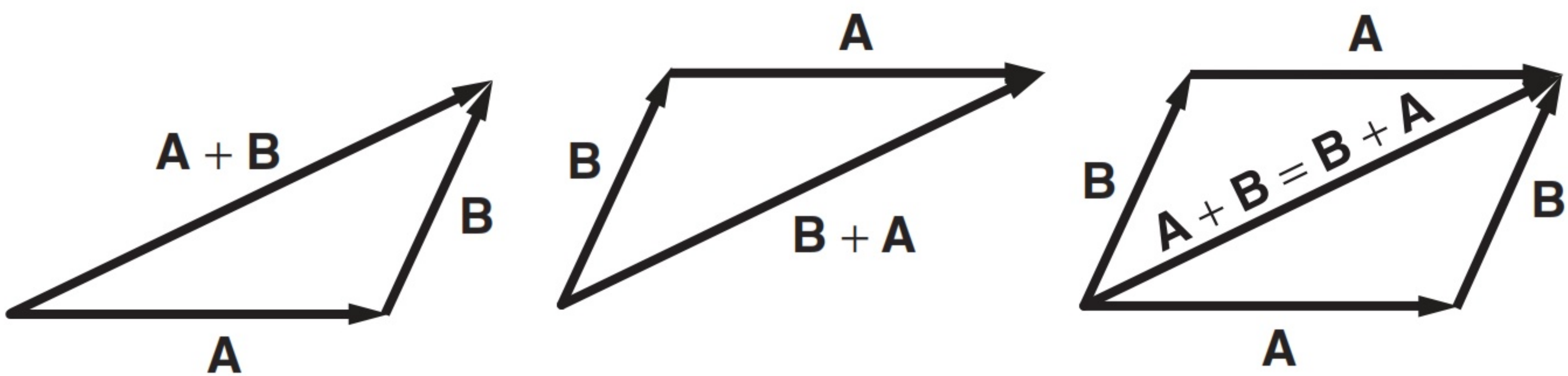


II. جمع برداری

جمع دو بردار به‌کمک معادلهٔ زیر تعریف می‌شود:

$$\mathbf{A}+\mathbf{B}=(A_x,A_y,A_z)+(B_x,B_y,B_z)=(A_x+B_x,A_y+B_y,A_z+B_z) \tag{۳.۳.۱}$$

مجموع دو بردار عبارت است از برداری که مؤلفه‌هایش مجموع مؤلفه‌های آن بردارها باشد. نمایش هندسی جمع برداری دو بردار ناموازی ضلع سوم یک مثلث را تشکیل می‌دهد که دو ضلع دیگرش بردارهای یادشده باشند. جمع برداری را در شکل ۳.۳.۱ مشاهده می‌کنید. این مجموع نیز مطابق



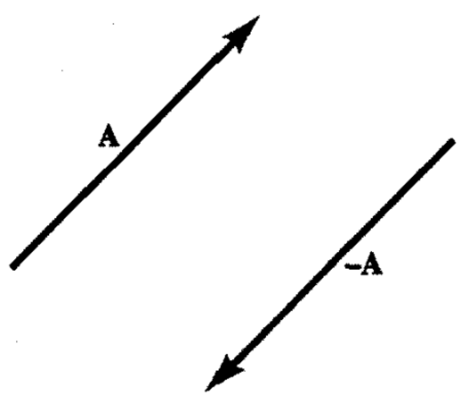
شکل به‌کمک قاعدهٔ متوازی‌الاضلاع به‌دست می‌آید. به‌هرحال، جمع برداری طبق معادلهٔ بالا تعریف می‌شود، حتی اگر بردارها نقطهٔ مشترکی نداشته باشند.

III. ضرب بردار در اسکالر

اگر c کمیتی اسکالر و $\mathbf{A}$ بردار باشد، آنگاه

$$c\mathbf{A} = c(A_x, A_y, A_z) = (cA_x, cA_y, cA_z) = \mathbf{A}c \qquad (۴.۳.۱)$$

حاصلضرب $c\mathbf{A}$ برداری است با مؤلفه‌های c برابر مؤلفه‌های بردار $\mathbf{A}$. به‌تعبیر هندسی، بردار $c\mathbf{A}$ با $\mathbf{A}$ موازی و طولش c برابر طول $\mathbf{A}$ است. وقتی $c = -۱$، بردار $-\mathbf{A}$، مطابق شکل ۴.۳.۱، برداری خواهد بود که جهتش عکس جهت $\mathbf{A}$ است.

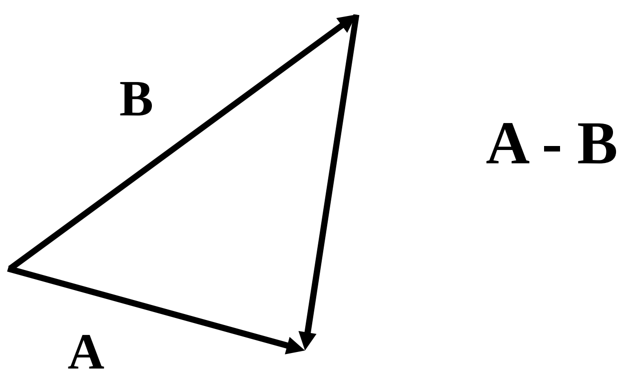


IV. تفریق برداری

بنابر تعریف، تفریق عبارت است از

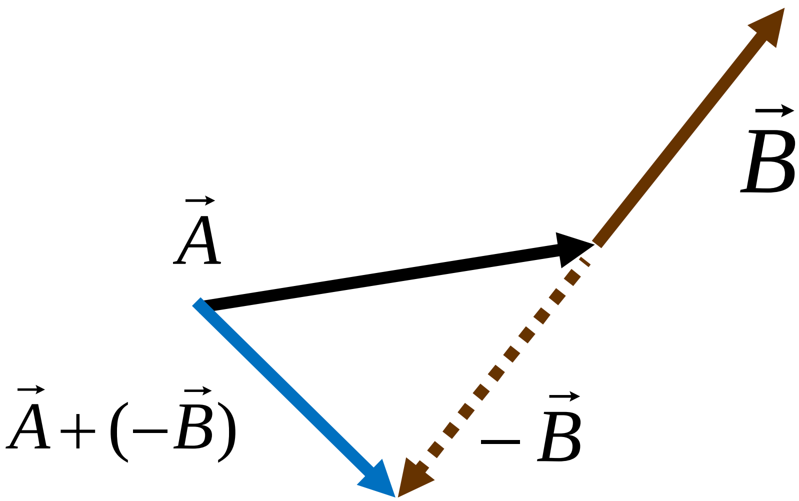
$$\mathbf{A} - \mathbf{B} = \mathbf{A} + (-۱)\mathbf{B} = (A_x - B_x, A_y - B_y, A_z - B_z) \qquad (۵.۳.۱)$$

یعنی، تفریق بردار مفروض $\mathbf{B}$ از بردار $\mathbf{A}$، با جمع کردن $\mathbf{-B}$ و $\mathbf{A}$ هم‌ارز است.



تفریق بردارها (در نمایش هندسی)

الف) دو بردار پشت سرهم باشند

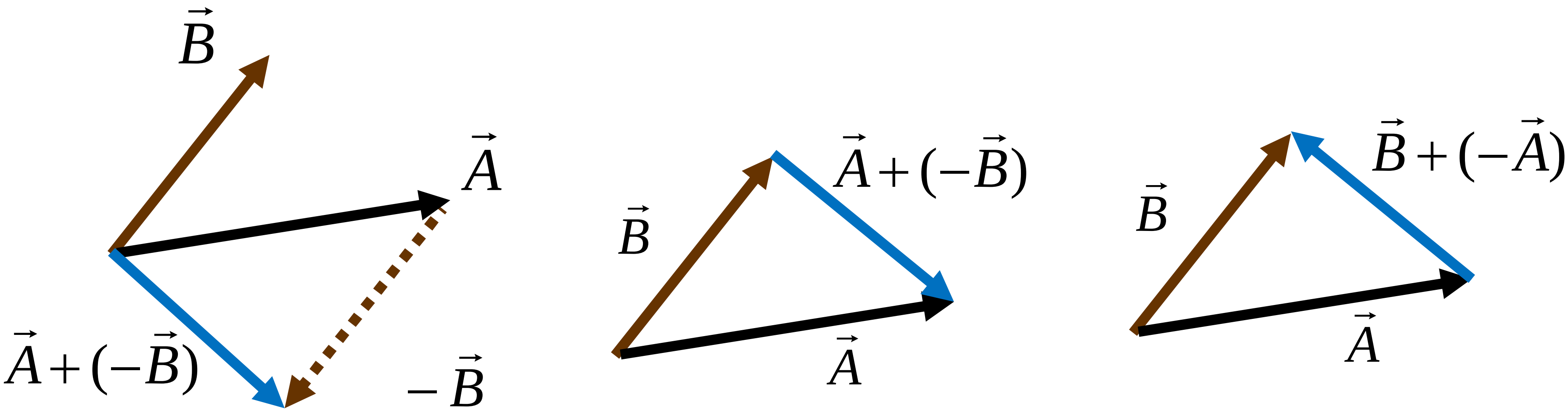


$$\vec{A}-\vec{B}=\vec{A}+(-\vec{B})$$

منفی بردار B

ب) دو بردار از یک نقطه شروع شده باشند

بردار حاصل تفریق برداری است که از انتهای بردار دوم به انتهای بردار اول رسم می شود



$$\vec{B}-\vec{A}=-(\vec{A}-\vec{B})$$

$\mathbf{V}$. بردار صفر

بردار $\mathbf{O} = [\circ, \circ, \circ]$ را بردار صفر می‌نامند. جهت بردار صفر تعریف نشده (نامشخص) است.

بنابر بند IV، $\mathbf{A} - \mathbf{A} = \mathbf{O}$. چون بردار صفر با یک صفر نشان داده می‌شود، برای اینکه اشتباهی صورت نگیرد، از این پس نمادگذاری $\mathbf{O} = \circ$ را به کار خواهیم برد.

خاصیت جابجایی *Commutativity*

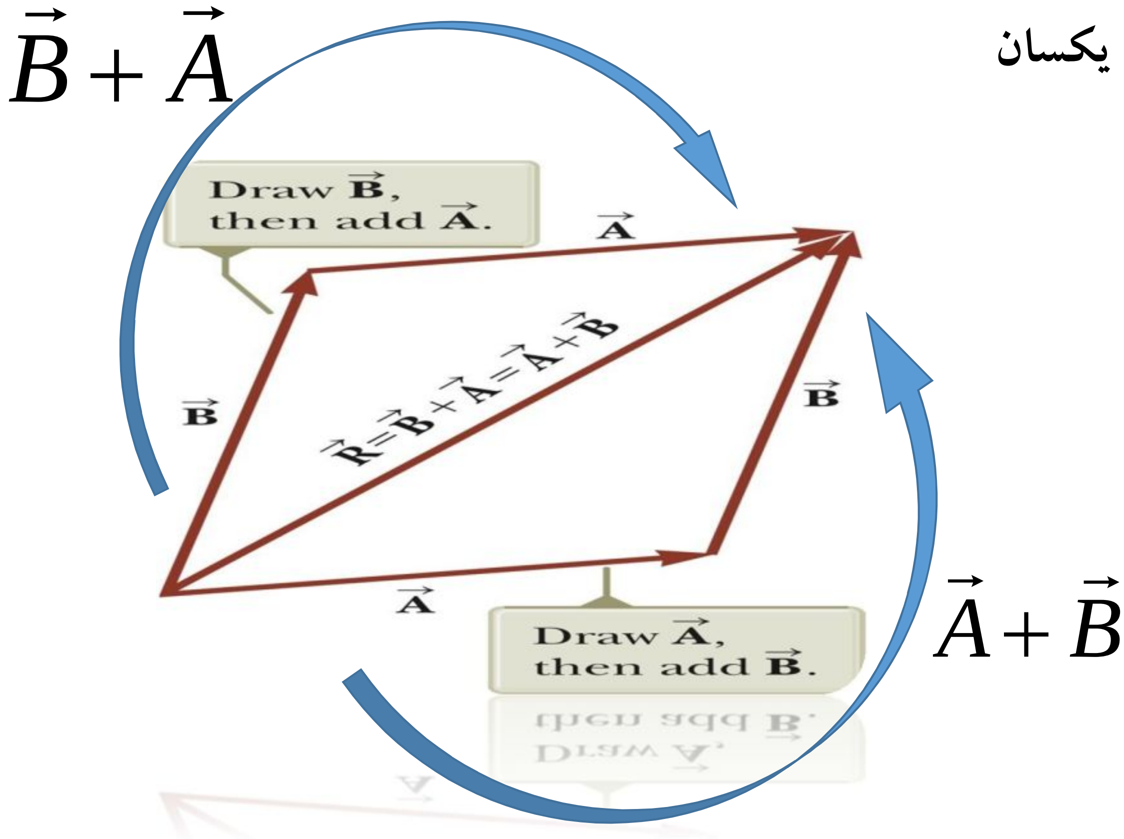
این قانون در مورد بردارها صادق است، یعنی

$$\mathbf{A}+\mathbf{B}=\mathbf{B}+\mathbf{A} \tag{۶.۳.۱}$$

زیرا $A_x+B_x=B_x+A_x$، و این رابطه به همین ترتیب برای مؤلفه‌های y و z برقرار است.

ج) جمع دو بردار با نقطه ابتدایی یکسان

(روش متوازی الاضلاع)



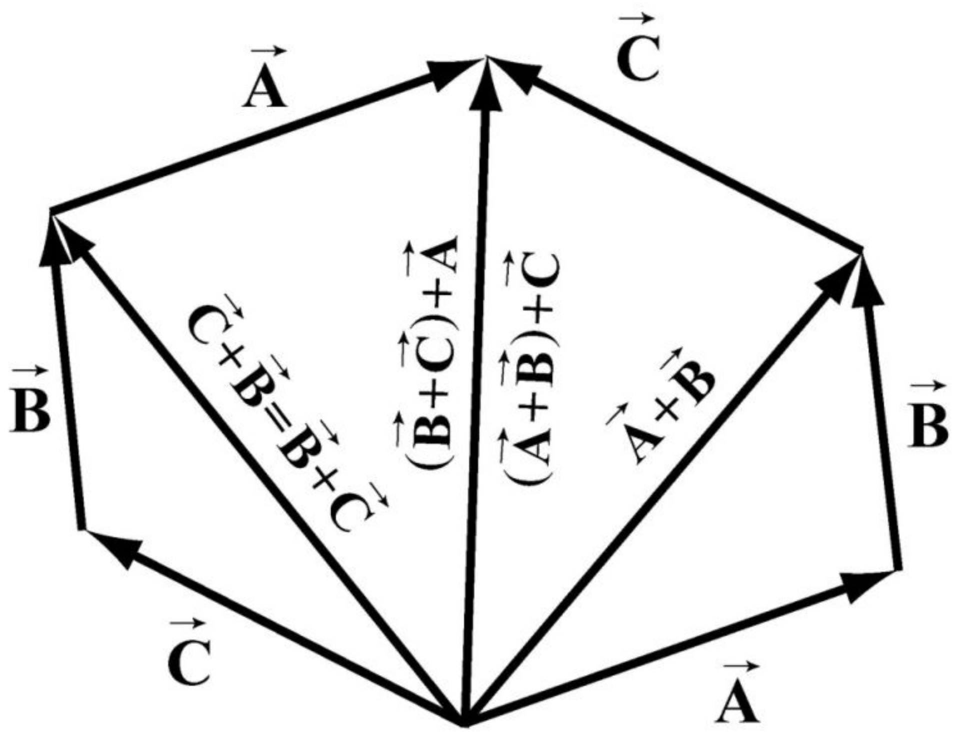
$$\vec{A}+\vec{B}=\vec{B}+\vec{A}$$ خاصیت جابجایی

د) خاصیت شرکت پذیری *Associativity*

قانون شرکت‌پذیری نیز دربارهٔ بردارها صادق است، زیرا

$$\begin{aligned}\mathbf{A}+(\mathbf{B}+\mathbf{C}) &= (A_x+(B_x+C_x), A_y+(B_y+C_y), A_z+(B_z+C_z)) \\ &= ((A_x+B_x)+C_x, (A_y+B_y)+C_y, (A_z+B_z)+C_z) \qquad (۷.۳.۱) \\ &= (\mathbf{A}+\mathbf{B})+\mathbf{C}\end{aligned}$$

هنگام اضافه کردن سه بردار یا بیشتر، جمع آنها مستقل از شیوه ای است که بردارها گروه بندی می شوند.



$$\vec{A}+\left(\vec{B}+\vec{C}\right)=\left(\vec{A}+\vec{B}\right)+\vec{C}$$

VIII. قانون توزیع‌پذیری

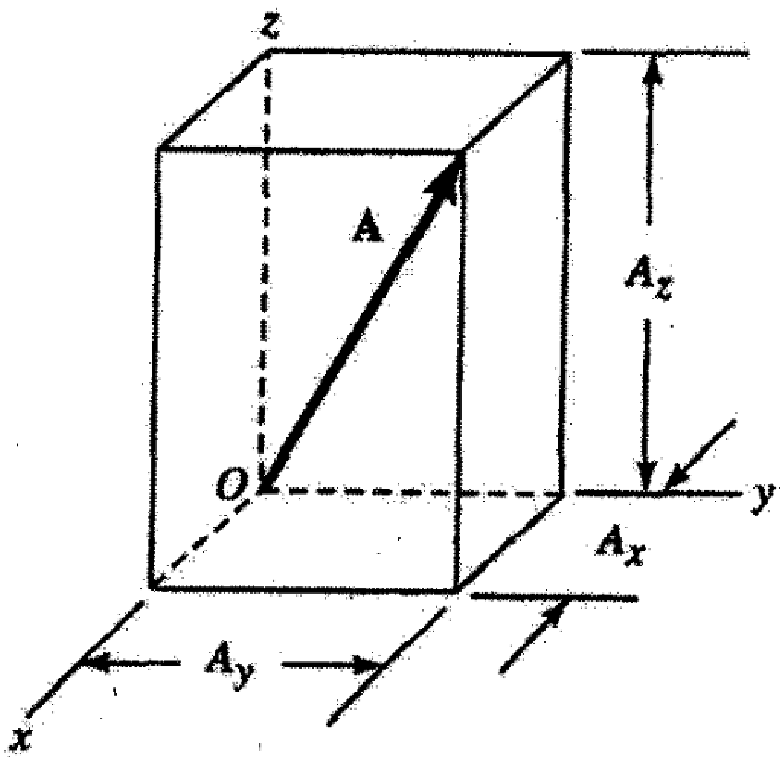
قانون توزیع‌پذیری در مورد ضرب بردار در اسکالر، صدق می‌کند. زیرا با استفاده از بندهای (II) و (III)،

$$\begin{aligned} c(\mathbf{A}+\mathbf{B}) &= c(A_x+B_x, A_y+B_y, A_z+B_z) \\ &= (c(A_x+B_x), c(A_y+B_y), c(A_z+B_z)) \\ &= (cA_z+cB_x, cA_y+cB_y, cA_z+cB_z) \\ &= c\mathbf{A}+c\mathbf{B} \end{aligned} \qquad (۸.۳.۱)$$

IX بزرگی بردار

بزرگی بردار $\mathbf{A}$، که با نماد $|\mathbf{A}|$ یا با A نمایش داده می‌شود، بنابر تعریف، عبارت است از ریشهٔ دوم مجموع مربعات مؤلفه‌های آن، یعنی

$$A = |\mathbf{A}| = (A_x^۲ + A_y^۲ + A_z^۲)^{\frac{۱}{۲}} \qquad (۹.۳.۱)$$



X. بردارهای مختصات یکه

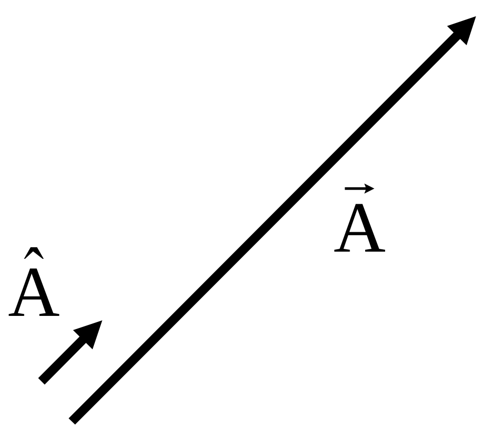
بردار یکه برداری است به بزرگی واحد. بردارهای یکه را غالباً با نماد **e**، سرواژهٔ آلمانی *Einheit*

دارای طول واحد

هم راستا با بردار اصلی

از کنار هم چیدن بردارهای یکه بردار اصلی ساخته می شود

$$\vec{A} = |A|\,\hat{A}$$



(به معنی مقیاس) نشان می‌دهند. سه بردار یکهٔ مشروح زیر،

$$\mathbf{e}_x = (۱, ۰, ۰) \qquad \mathbf{e}_y = (۰, ۱, ۰) \qquad \mathbf{e}_z = (۰, ۰, ۱) \tag{۱۰.۳.۱}$$

را بردارهای مختصات یکه یا بردارهای پایه می‌نامند. هر بردار را می‌توان برحسب بردارهای پایه، به‌صورت جمع برداری مؤلفه‌ها، به قرار زیر بیان کرد:

$$\begin{aligned}\mathbf{A} &= (A_x, A_y, A_z) = (A_x, ۰, ۰) + (۰, A_y, ۰) + (۰, ۰, A_z)\\ &= A_x(۱, ۰, ۰) + A_y(۰, ۱, ۰) + A_z(۰, ۰, ۱)\\ &= \mathbf{e}_x A_x + \mathbf{e}_y A_y + \mathbf{e}_z A_z\end{aligned} \tag{۱۱.۳.۱}$$

نمادگذاری بردارهای یکهٔ دکارتی که با حروف $\mathbf{i}$، $\mathbf{j}$، و $\mathbf{k}$ نموده می‌شوند، کاربرد گسترده‌ای یافته‌اند:

$$\mathbf{i} = \mathbf{e}_x \qquad \mathbf{j} = \mathbf{e}_y \qquad \mathbf{k} = \mathbf{e}_z \tag{۱۲.۳.۱}$$

از این پس معمولاً این نمادگذاری را به‌کار خواهیم برد.

جهت بردارهای مختصات یکهٔ دکارتی، مطابق شکل ۶.۳.۱، به‌کمک محورهای مختصات تعریف می‌شوند. این بردارها بسته به نوع دستگاه مختصاتی که به‌کار می‌رود، مجموعهٔ سه‌تایی راستگرد یا چپگردی را تشکیل می‌دهند؛ معمولاً دستگاههای مختصات راستگرد به‌کار می‌روند.

مثال ۳.۳.۱

هلیکوپتری $۱۰۰\mathrm{m}$ به‌طور قائم به بالا، بعد $۵۰۰\mathrm{m}$ به‌طور افقی به شرق، سپس $۱۰۰۰\mathrm{m}$ به‌طور افقی به شمال پرواز می‌کند. این هلیکوپتر از هلیکوپتر دومی که از همان نقطه حرکت خود را شروع کرده $۲۰۰\mathrm{m}$ به بالا، $۱۰۰\ \mathrm{m}$ به غرب، و $۵۰۰\mathrm{m}$ به شمال می‌رود، چقدر فاصله دارد؟

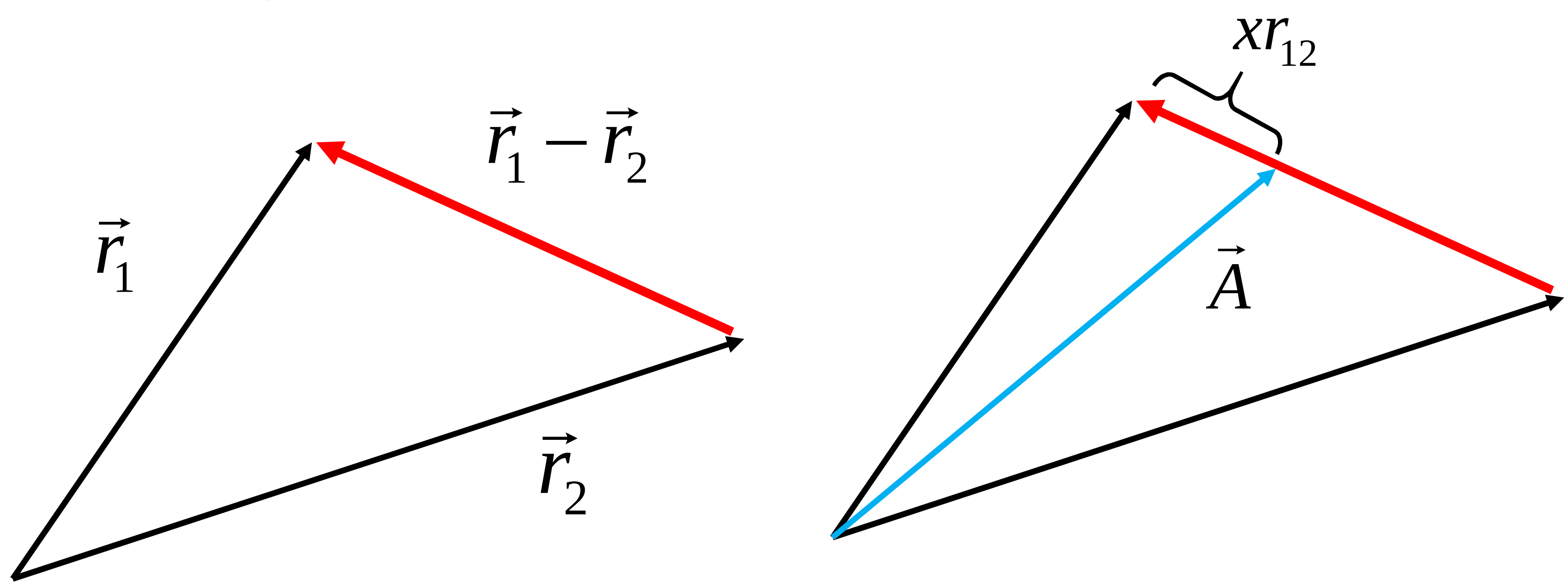
حل:

با انتخاب جهتهای «بالا»، «شرق»، و «شمال» به‌عنوان جهتهای اصلی موضع نهایی هلیکوپتر اول از لحاظ برداری به‌صورت $\mathbf{A} = (۱۰۰, ۵۰۰, ۱۰۰۰)$ و دومی به‌صورت $\mathbf{B} = (۲۰۰, -۱۰۰, ۵۰۰)$، برحسب متر، بیان می‌شود. از این‌رو، فاصلهٔ بین مواضع نهایی از عبارت زیر به‌دست می‌آید:

$$
\begin{aligned}
|\mathbf{A}-\mathbf{B}| &= |((۱۰۰-۲۰۰),(۵۰۰+۱۰۰),(۱۰۰۰-۵۰۰))|\mathrm{m} \\
&= (۱۰۰^۲+۶۰۰^۲+۵۰۰^۲)^{\frac{۱}{۲}}\mathrm{m} = ۷۸۷{,}۴\mathrm{m}
\end{aligned}
$$

تکلیف ۱:

Consider two points located at $\vec{\mathbf{r}}_1$ and $\vec{\mathbf{r}}_2$, separated by distance $r_{12} = |\vec{\mathbf{r}}_1 - \vec{\mathbf{r}}_2|$. Find a vector $\vec{\mathbf{A}}$ from the origin to the point on the line between $\vec{\mathbf{r}}_1$ and $\vec{\mathbf{r}}_2$ at a distance xr_{12} from the point at $\vec{\mathbf{r}}_1$, where x is some number.



۴.۱ ضرب داخلی (اسکالر)

در مورد دو بردار مفروض $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ حاصلضرب «داخلی» یا ضرب «نقطه‌ای»، $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$ عبارت از کمیتی اسکالر خواهد بود که، بنابر تعریف، از این قرار است:

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z \qquad (۱.۴.۱)$$

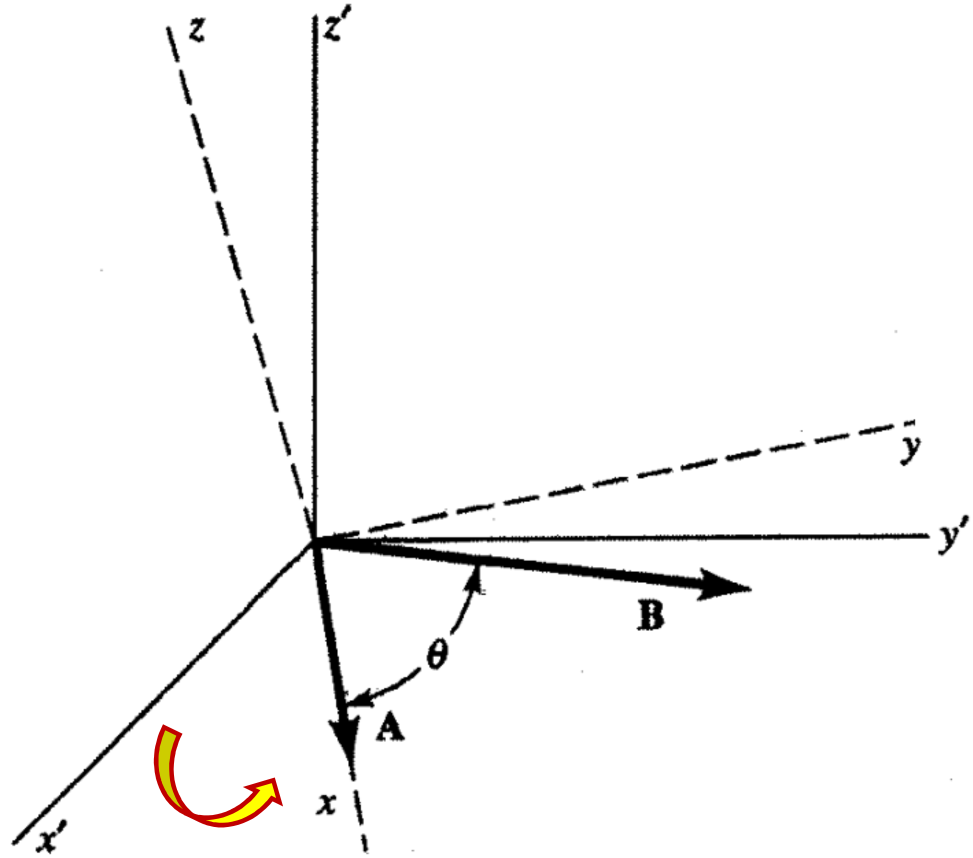
تعویض‌پذیر $\qquad \mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = \mathbf{B}\cdot\mathbf{A}$

توزیع‌پذیری $\qquad \mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}+\mathbf{C}) = \mathbf{A}\cdot\mathbf{B} + \mathbf{A}\cdot\mathbf{C}$

$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$، تعبیر هندسی

دو بردار سود جست. مثلاً، بنا بر شکل ۱.۴.۱، دو بردار $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ را زاویهٔ θ از هم جدا کرده، همراه با دستگاه مختصات x'، y'، و z' که به‌طور دلخواه مبنای آن بردارها انتخاب شده است. ولی چون کمیت $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$ اسکالر است، مقدار آن مستقل از انتخاب مختصات است. می‌توانیم، بدون از دست‌دادن عمومیت، دستگاه x'، y'، و z' را با چرخش به دستگاه مختصات x، y، و z تبدیل کنیم، به‌طوری که محور x در امتداد بردار $\mathbf{A}$ قرارگرفته و محور z بر صفحهٔ مشخص‌شده به‌وسیلهٔ دو بردار عمود باشد. این دستگاه مختصات نیز در شکل ۱.۴.۱ نمایش داده شده است. مؤلفه‌های بردارها و حاصلضرب نقطه‌ای آنها خیلی ساده‌تر از آن هستند که در این دستگاه محاسبه شوند. بردار $\mathbf{A}$ به‌صورت $(A,\circ,\circ)$ و بردار $\mathbf{B}$ به‌صورت $(B_x,B_y,\circ)$ یا $(B\cos\theta, B\sin\theta,\circ)$ بیان می‌شود. بنابراین،

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = A_xB_x = A(B\cos\theta) = |\mathbf{A}||\mathbf{B}|\cos\theta \qquad (۵.۴.۱)$$



شکل ۱.۴.۱ محاسبهٔ ضرب نقطه‌ای اسکالر بین دو بردار.

$$\begin{aligned}\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} &= A \text{ times the projection of } \mathbf{B} \text{ on } \mathbf{A}\\ &= B \text{ times the projection of } \mathbf{A} \text{ on } \mathbf{B}\end{aligned}$$

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}}{|\mathbf{A}||\mathbf{B}|} = \frac{\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}}{AB} \qquad (۶.۴.۱)$$

(توجه: اگر $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$ صفر باشد و $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ هیچ‌کدام صفر نباشند، در این صورت $\cos\theta$ صفر است و $\mathbf{A}$ بر $\mathbf{B}$ عمود است.)

$$\vec{A}\left|\begin{matrix}1\\-2\\3\end{matrix}\right. \quad , \quad \vec{B}\left|\begin{matrix}0\\3\\-2\end{matrix}\right. \quad \rightarrow \quad \cos\theta = \frac{-12}{\sqrt{14}\times\sqrt{13}}$$

مجذور بزرگی بردار $\mathbf{A}$ با ضرب نقطه‌ای بردار $\mathbf{A}$ در خودش به‌دست می‌آید

$$A^{۲} = |\mathbf{A}|^{۲} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{A} \qquad (۷.۴.۱)$$

می توان نشان داد که:

$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = ۱$$

$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{i} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = ۰$$

بیان هر بردار به‌صورت حاصلضرب بزرگی آن در بردار یکه: تصویر

$$\mathbf{A} = \mathbf{i}A_x + \mathbf{j}A_y + \mathbf{k}A_z \qquad (۹.۴.۱)$$

$$\mathbf{A} = A\left(\mathbf{i}\frac{A_x}{A} + \mathbf{j}\frac{A_y}{A} + \mathbf{k}\frac{A_z}{A}\right) \qquad (۱۰.۴.۱)$$

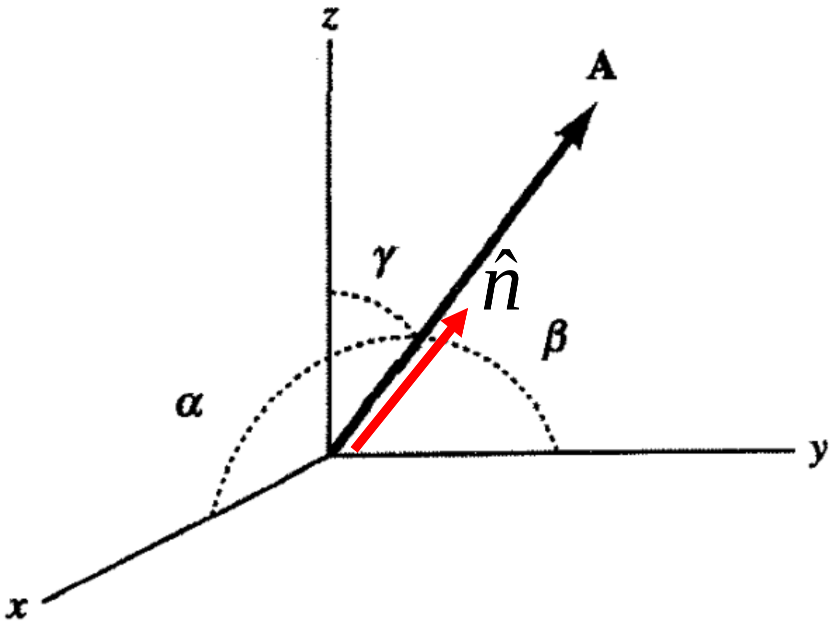
حال $A_x/A = \cos\alpha$، $A_y/A = \cos\beta$، و $A_z/A = \cos\gamma$ کسینوسهای هادی بردار $\mathbf{A}$، و α، β، و γ زاویه‌های هادی‌اند. بنابراین، می‌توانیم بنویسیم:

$$\mathbf{A} = A(\mathbf{i}\cos\alpha + \mathbf{j}\cos\beta + \mathbf{k}\cos\gamma) = A(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma) \qquad (۱۱.۴.۱\text{الف})$$

$$\mathbf{A} = A(\mathbf{i}\cos\alpha + \mathbf{j}\cos\beta + \mathbf{k}\cos\gamma) = A(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$$

$$\mathbf{A} = A\mathbf{n}$$

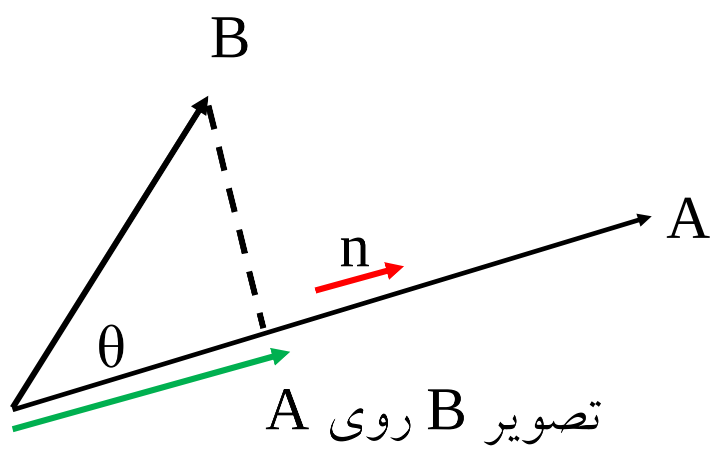
که $\mathbf{n}$ یک بردار یکه با مؤلفه‌های $\cos\alpha$، $\cos\beta$، و $\cos\gamma$ است



B، را در نظر بگیرید. واضح است که، تصویر **B** روی **A** عبارت است از

$$B\cos\theta = \frac{\mathbf{B}\cdot\mathbf{A}}{A} = \mathbf{B}\cdot\mathbf{n} \qquad (۱۲.۴.۱)$$

که θ زاویهٔ بین **A** و **B** است.

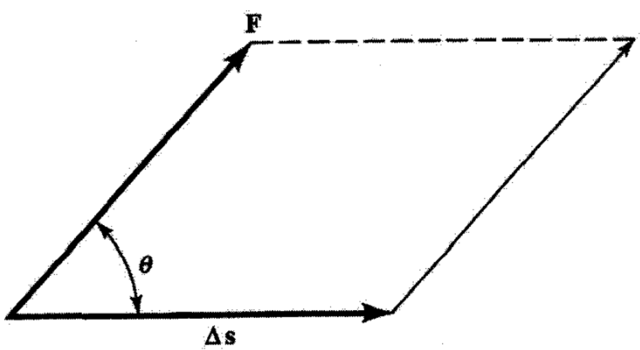


مثال ۱.۴.۱ مؤلفهٔ بردار: کار

به‌عنوان مثالی از ضرب نقطه‌ای، فرض می‌شود که، مطابق شکل ۳.۴.۱، تغییر مکان خطی جسمی تحت تأثیر نیروی ثابت[۱] $\Delta\mathbf{s}$ باشد. بنابر تعریف، کاری که این نیرو انجام می‌دهد، ΔW، عبارت است از حاصلضرب مؤلفهٔ نیروی $\mathbf{F}$ در جهت $\Delta\mathbf{s}$، در بزرگی تغییر مکان Δs، یعنی

$$\Delta W = \underbrace{(F\cos\theta)}\Delta s$$

θ زاویهٔ بین $\mathbf{F}$ و $\Delta\mathbf{s}$ است. اما عبارت سمت راست همان ضرب نقطه‌ای $\mathbf{F}$ و $\Delta\mathbf{s}$ به‌شمار می‌آید، یعنی:



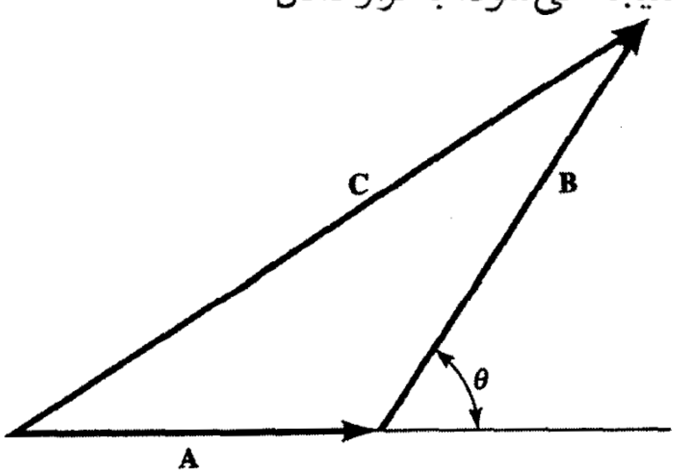
$$\Delta W = \mathbf{F}\cdot\Delta\mathbf{s}$$

مثال ۲.۴.۱ قانون کسینوسها

مطابق شکل ۴.۴.۱، مثلثی با اضلاع $\mathbf{A}$، $\mathbf{B}$، و $\mathbf{C}$ را در نظر بگیرید. در این صورت $\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$.
ضرب نقطه‌ای بردار $\mathbf{C}$ در خودش را به‌دست آورید:

$$\begin{aligned}\mathbf{C}\cdot\mathbf{C} &= (\mathbf{A}+\mathbf{B})\cdot(\mathbf{A}+\mathbf{B})\\ &= \mathbf{A}\cdot\mathbf{A} + ۲\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} + \mathbf{B}\cdot\mathbf{B}\end{aligned}$$

مرحلهٔ دوم از کاربرد قواعد پیش‌گفته در معادلات (۲.۴.۱) و (۳.۴.۱) نتیجه می‌شود. با قرار دادن $AB\cos\theta$ به‌جای $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$ می‌رسیم به



$$C^۲ = A^۲ + ۲AB\cos\theta + B^۲$$

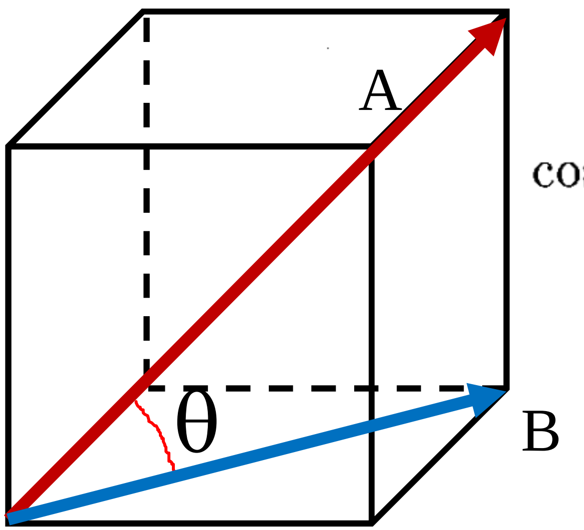
که همان قانون آشنای کسینوسهاست.

مثال ۳.۴.۱

کسینوس زاویهٔ بین قطر مکعب و قطر یکی از وجوه مجاور آن را پیدا کنید.

حل:

می‌توانیم دو قطر یادشده را با بردارهای $\mathbf{A} = (۱, ۱, ۱)$ و $\mathbf{B} = (۱, ۱, ۰)$ نمایش دهیم. بنابراین، از معادلات ۱.۴.۱ و ۶.۴.۱ خواهیم داشت:



$$\cos\theta = \frac{\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}}{AB} = \frac{۱+۱+۰}{\sqrt{۳}\sqrt{۲}} = \sqrt{\frac{۲}{۳}} = ۰{,}۸۱۶۵$$

۵.۱ ضرب برداری

حاصلضرب برداری یا حاصلضرب خارجی دو بردار مفروض $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$، $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$، بنابر تعریف، عبارت است از برداری که مؤلفه‌هایش از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آیند:

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = (A_y B_z - A_z B_y, A_z B_x - A_x B_z, A_x B_y - A_y B_x) \qquad (۱.۵.۱)$$

می‌توان نشان داد که قواعد زیر در ضرب برداری برقرارند:

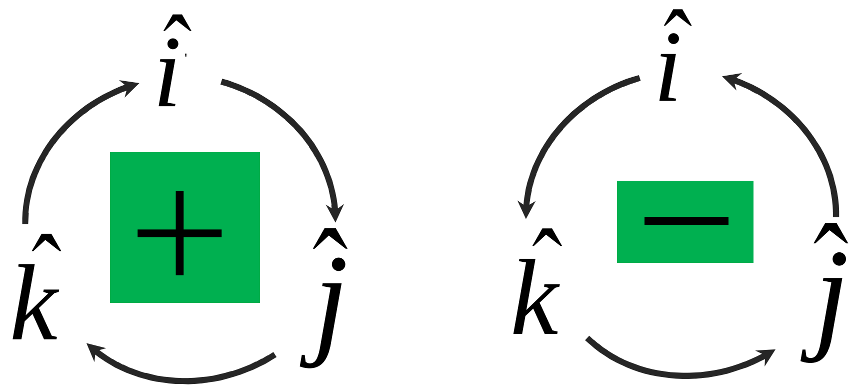
$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = -\mathbf{B} \times \mathbf{A} \qquad (۲.۵.۱)$$

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \times \mathbf{B} + \mathbf{A} \times \mathbf{C} \qquad (۳.۵.۱)$$

$$n(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = (n\mathbf{A}) \times \mathbf{B} = \mathbf{A} \times (n\mathbf{B}) \qquad (۴.۵.۱)$$

بنابر تعریف بردارهای مختصات یکه (بخش ۳.۱)، نتیجه می‌گیریم:

$$\begin{aligned}
\mathbf{i}\times\mathbf{i} &= \mathbf{j}\times\mathbf{j} = \mathbf{k}\times\mathbf{k} = 0 \\
\mathbf{j}\times\mathbf{k} &= \mathbf{i} = -\mathbf{k}\times\mathbf{j} \\
\mathbf{i}\times\mathbf{j} &= \mathbf{k} = -\mathbf{j}\times\mathbf{i} \\
\mathbf{k}\times\mathbf{i} &= \mathbf{j} = -\mathbf{i}\times\mathbf{k}
\end{aligned} \tag{۵.۵.۱}$$



$$
\mathbf{A}\times\mathbf{B}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ A_x & A_y & A_z\\ B_x & B_y & B_z\end{vmatrix}
$$

$$
\mathbf{A}\times\mathbf{B}=\mathbf{i}(A_yB_z-A_zB_y)+\mathbf{j}(A_zB_x-A_xB_z)+\mathbf{k}(A_xB_y-A_yB_x)
$$

ضرب برداری کمک مناسبی به ما می‌کند. از خواص دترمینانها فوراً می‌توان پی‌برد که اگر $\mathbf{A}$ موازی $\mathbf{B}$ باشد، یعنی $\mathbf{A}=c\mathbf{B}$، آنگاه دو سطر پایین دترمینان با هم متناسب‌اند و از این رو دترمینان صفر است. بنابراین، ضرب برداری دو بردار موازی صفر است.

$$|\mathbf{A} \times \mathbf{B}| = AB(۱ - \cos^{۲} \theta)^{\frac{۱}{۲}} = AB \sin \theta$$

$$|\mathbf{A} \times \mathbf{B}|^{۲} = A^{۲} B^{۲} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^{۲}$$

$$|\mathbf{A} \times \mathbf{B}|^{۲} = (A_y B_z - A_z B_y)^{۲} + (A_z B_x - A_x B_z)^{۲} + (A_x B_y - A_y B_x)^{۲} \tag{۱۰.۵.۱}$$

می‌توان این عبارت را تبدیل کرد به

$$|\mathbf{A} \times \mathbf{B}|^{۲} = (A_x^{۲} + A_y^{۲} + A_z^{۲})(B_x^{۲} + B_y^{۲} + B_z^{۲}) - (A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z)^{۲} \tag{۱۱.۵.۱}$$

تعبیر هندسی ضرب برداری:

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B}$$

برای ارائهٔ تعبیر هندسی ضرب برداری، مشاهده می‌کنیم که بردار $\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B}$ بر $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ عمود است، زیرا:

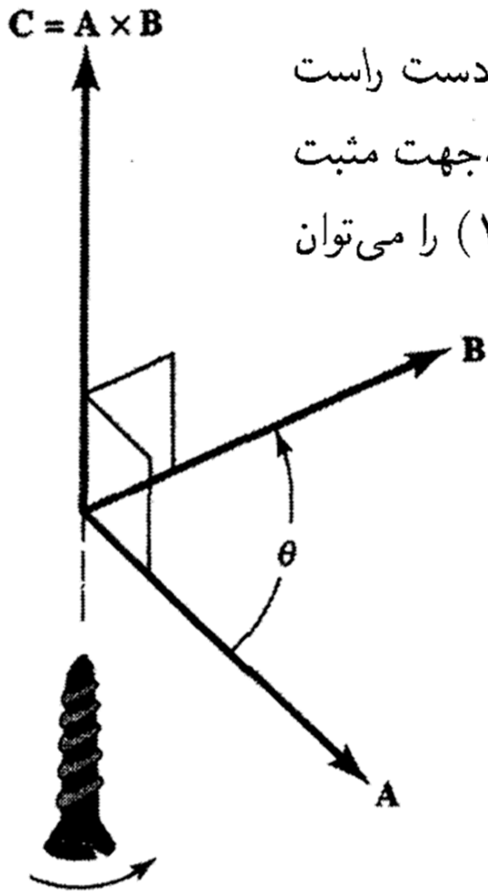
$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{C} = A_x C_x + A_y C_y + A_z C_z \tag{۱۴.۵.۱}$$

$$= A_x(A_y B_z - A_z B_y) + A_y(A_z B_x - A_x B_z) + A_z(A_x B_y - A_y B_x) = ۰$$

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{C} = ۰$$

بردار C بر صفحه گذرنده از دو بردار A و B عمود است

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = (AB\sin\theta)\mathbf{n}$$



که $\mathbf{n}$ برداری یکه عمود بر صفحهٔ دو بردار $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ است. راستای $\mathbf{n}$ را از قاعدهٔ دست راست تعیین می‌کنیم. یعنی، جهت پیشروی یک پیچ راستگرد است که از جهت مثبت $\mathbf{A}$ به‌جهت مثبت $\mathbf{B}$ با طی کوچکترین زاویهٔ بین آنها می‌چرخد، مطابق شکل ۱.۵.۱، معادلهٔ (۱۵.۵.۱) را می‌توان تعریف دیگر ضرب برداری در دستگاه مختصات راستگرد دانست.

مثال ۲.۵.۱

بردار یکهٔ عمود بر صفحهٔ شامل دو بردار $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ یادشده در بالا را بیابید.

حل:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{n} &= \frac{\mathbf{A}\times\mathbf{B}}{|\mathbf{A}\times\mathbf{B}|} = \frac{\mathbf{i}-۵\mathbf{j}-۳\mathbf{k}}{[۱^{۲}+۵^{۲}+۳^{۲}]^{\frac{۱}{۲}}} \\
&= \frac{\mathbf{i}}{\sqrt{۳۵}}\frac{۵\mathbf{i}}{\sqrt{۳۵}}-\frac{۳\mathbf{k}}{\sqrt{۳۵}}.
\end{aligned}
$$

مثال)

با محاسبهٔ مستقیم نشان دهید که $\mathbf{A}\times\mathbf{B}$ عبارت است از برداری که راستای آن بر $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ عمود و بزرگیش $AB\sin\theta$ باشد.

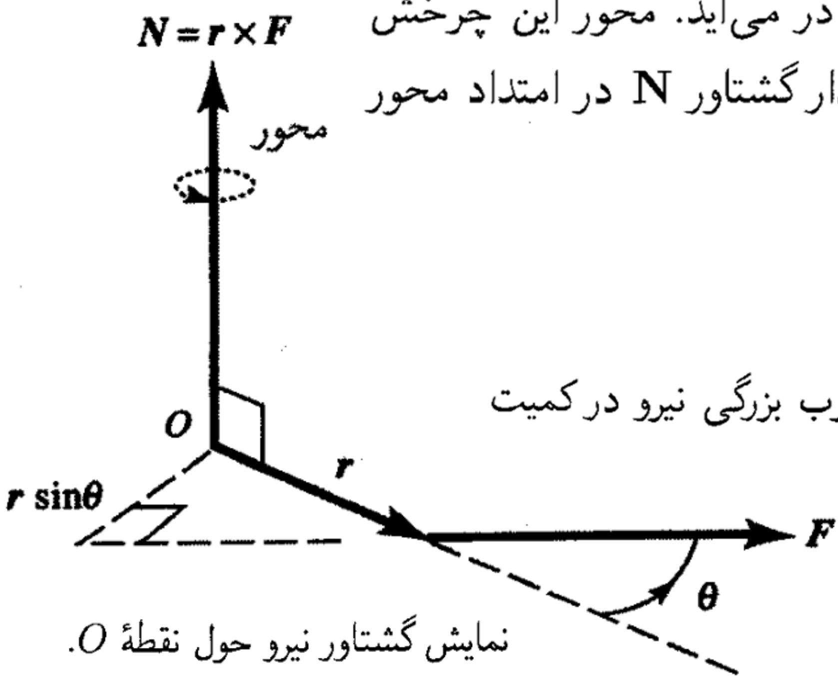
با بهره‌گیری از چارچوب مرجع مورد بحث برای شکل (۱.۴.۱) که در آن بردارهای $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ در صفحهٔ x, y تعریف می‌شوند، $\mathbf{A}$ به‌صورت $(A, ۰, ۰)$ و $\mathbf{B}$ به‌صورت $(B\cos\theta, B\sin\theta, ۰)$ بیان می‌شود. در این صورت

$$\mathbf{A}\times\mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ A & ۰ & ۰ \\ B\cos\theta & B\sin\theta & ۰ \end{vmatrix} = \mathbf{k}AB\sin\theta$$

مثالی از ضرب برداری: گشتاور نیرو

$$\mathbf{N} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$$

به این ترتیب، گشتاور هر نیرو حول یک نقطه عبارت است از کمیتی برداری با بزرگی و جهت. اگر یک تک‌نیرو بر نقطهٔ P واقع بر جسمی وارد آید، و آن جسم ابتدا در حال سکون باشد و بتواند حول نقطهٔ ثابت O مثل لولا بگردد، در این صورت جسم به چرخش در می‌آید. محور این چرخش بر نیروی $\mathbf{F}$، و نیز بر خط $\mathbf{OP}$ عمود است. از این‌رو راستای بردار گشتاور $\mathbf{N}$ در امتداد محور چرخش واقع است.



نمایش گشتاور نیرو حول نقطهٔ O.

$$|\mathbf{N}| = |\mathbf{r} \times \mathbf{F}| = rF\sin\theta$$

که در آن θ زاویهٔ بین $\mathbf{r}$ و $\mathbf{F}$ است. بنابراین، $|\mathbf{N}|$ را می‌توان حاصلضرب بزرگی نیرو در کمیت $r\sin\theta$، یعنی فاصلهٔ عمودی خط عمل نیرو تا نقطهٔ O، دانست.

وقتی چند نیرو بر نقاط مختلف یک جسم وارد آیند، گشتاورها با هم جمع برداری می‌شوند.

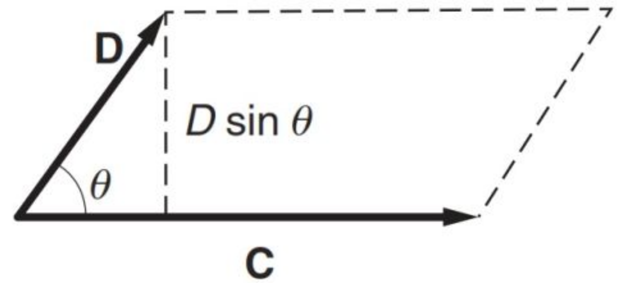
قانون توزیع‌پذیری ضرب برداری است.

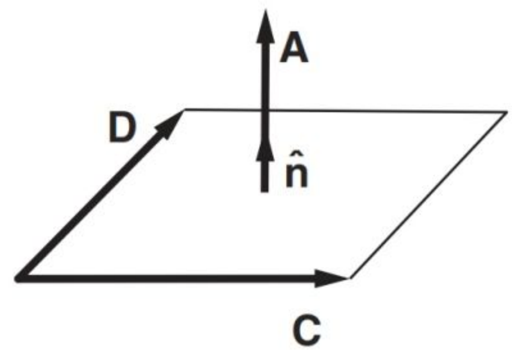
شرط تعادل چرخشی آن است که جمع برداری تمام گشتاورها صفر باشد

$$\sum_i (r_i \times \mathbf{F}_i) = \sum_i \mathbf{N}_i = 0$$

Area as a Vector

We can use the cross product to describe an area. Usually one thinks of area in terms of magnitude only. However, many applications in physics require that we also specify the orientation of the area. For example, if we wish to calculate the rate at which water in a stream flows through a wire loop of given area, it obviously makes a difference whether the plane of the loop is perpendicular or parallel to the flow. (If parallel, the flow through the loop is zero.) Here is how the vector product accomplishes this:





$$\begin{aligned} A &= \text{base} \times \text{height} \\ &= CD \sin\theta \\ &= |\mathbf{C} \times \mathbf{D}| \,. \end{aligned}$$

۷.۱ ضربهای سه‌گانه

ضربهای سه‌گانهٔ بردارها به‌خصوص در مطالعهٔ دستگاههای مختصات چرخان و چرخشهای
ام صلب که در فصلهای بعد به آنها خواهیم پرداخت، مفیدند. یکی از کاربردهای هندسی آن

الف) حاصل این ضرب کمیتی اسکالر (یا عددی)

$$\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C})$$

$$\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C}) = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C}) = (\mathbf{A}\times\mathbf{B})\cdot\mathbf{C}$$

الف) ضرب برداری سه تایی

$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})$$

قاعدهٔ "bac منهای cab" به خاطر سپرد.

مثال) نشان دهید که ضرب برداری سه گانه شرکت‌پذیر نیست.

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = -\mathbf{c} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = -\mathbf{a}(\mathbf{c} \cdot \mathbf{b}) + \mathbf{b}(\mathbf{c} \cdot \mathbf{a})$$

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) - (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \mathbf{a}(\mathbf{c} \cdot \mathbf{b}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$$

۹.۱ مشتق بردار

بردار $\mathbf{A}$ را در نظر بگیرید که مؤلفه‌های آن تابعی از یک تک متغیر u هستند
مشتق هر بردار عبارت است از برداری که مؤلفه‌های دکارتی آن مشتقهای معمولی

$$\mathbf{A}(u) = \mathbf{i}A_x(u) + \mathbf{j}A_y(u) + \mathbf{k}A_z(u)$$

$$\frac{d\mathbf{A}}{du} = \lim_{\Delta u \to ۰} \frac{\Delta \mathbf{A}}{\Delta u} = \lim_{\Delta u \to ۰} \left(\mathbf{i}\frac{\Delta A_x}{\Delta u} + \mathbf{j}\frac{\Delta A_y}{\Delta u} + \mathbf{k}\frac{\Delta A_z}{\Delta u} \right)$$

$$\Delta A_x = A_x(u + \Delta u) - A_x(u)$$

$$\frac{d\mathbf{A}}{du} = \mathbf{i}\frac{dA_x}{du} + \mathbf{j}\frac{dA_y}{du} + \mathbf{k}\frac{dA_z}{du}$$

$$\frac{d}{du}(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = \frac{d\mathbf{A}}{du} + \frac{d\mathbf{B}}{du}$$

$$\frac{d(n\mathbf{A})}{du} = \frac{dn}{du}\mathbf{A} + n\frac{d\mathbf{A}}{du}$$

$$\frac{d(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})}{du} = \frac{d\mathbf{A}}{du}\cdot\mathbf{B} + \mathbf{A}\cdot\frac{d\mathbf{B}}{du}$$

$$\frac{d(\mathbf{A}\times\mathbf{B})}{du} = \frac{d\mathbf{A}}{du}\times\mathbf{B} + \mathbf{A}\times\frac{d\mathbf{B}}{du}$$

باید ترتیب جملات در مشتق حاصلضرب برداری رعایت شود