



الکترو دینامیک کلاسیک

(ویرایش سوم ۱۹۹۸)

جان . دیوید . جکسون



«به نام خدا»

الکترو دینامیک کلاسیک

جان. دیوید. جکسون
دانشگاه برکلی، کالیفرنیا
ویرایش سوم (۱۹۹۸)

جلد اول

مترجمان و مؤلفان:

ق.ع. مقدم

ش. اکاتی

و همکاری

ع. مسلم زاده

ویراستار: هایک فولتوقچیان

سرشناسه	: جکسون. جان دیوید ۱۹۲۵
عنوان و نام پدیدآور	: الکترودینامیک کلاسیک / جان دیوید جکسون: مترجمان علی مقدم؛ ویراستار هایک قولتوقچیان
مشخصات نشر	: تهران: آراکس، ۱۳۸۸.
مشخصات ظاهری	: ص.ص.: مصور.
شابک	: 978-964-8753-07-3:
وضعیت فهرست‌نویسی	: فیبا
یادداشت	: عنوان اصلی. Classical Electrodynamics (1998) 3 rd ed.
موضوع	: فیزیک
شناسه افزوده	: آکاتی، شمسی، ۱۳۴۸ -
رده‌بندی کنگره	: Q۷۷۳۱/ج۸ -
رده‌بندی دیویی	: ۵۳۷/۶
کتابخانه ملی ایران	
محل نگهداری	: ۸۰-۱۲۲۱۶م

هیچ فرد حقیقی و حقوقی، حق تکثیر (با هر روش) چاپ و یا استفاده غیرقانونی و تقلید از ترجمه و مطالب اثبات‌شده‌ی فصول داخل کتاب یعنی ضمیمه‌ها را نخواهد داشت. افراد متخلف طبق قوانین وزارت فرهنگ و ارشاد اسلامی تحت پیگرد قرار خواهند گرفت.

نام کتاب : الکترودینامیک کلاسیک ویرایش سوم (۱۹۹۸)

چاپ ششم : تابستان ۹۰

تیراژ : ۳۶۰۰

قیمت : ۱۳۰۰۰ تومان

کلیه حقوق مادی این اثر متعلق به نشر آراکس است.

فهرست

صفحه

عنوان

۱	مقدمه و مرور	۱
۲	۱-I معادلات ماکسول در خلاء، میدان‌ها، و چشمه‌ها	۲
۶	۲-I قانون عکس مجذوری یا جرم فوتون	۶
۱۱	۳-I برهم‌نهی خطی	۱۱
۱۶	۴-I معادلات ماکسول در محیط‌های ماکروسکوپی	۱۶
۲۰	۵-I شرایط مرزی در فصل مشترک بین محیط‌های مختلف	۲۰
۲۳	۶-I نکاتی در مورد ایده‌آل‌سازی در الکترومغناطیس	۲۳
۲۷	مراجع و خواندنی‌های پیشنهادی	۲۷
<hr/>		
۲۹	فصل ۱ مقدمه‌ای بر الکترواستاتیک	۲۹
۲۹	۱-۱ قانون کولن	۲۹
۳۰	۲-۱ میدان الکتریکی	۳۰
۳۳	۳-۱ قانون گوس	۳۳
۳۵	۴-۱ شکل دیفرانسیلی قانون گوس	۳۵
۳۶	۵-۱ معادله‌ی دیگری الکترواستاتیک و پتانسیل اسکالر	۳۶
۳۸	۶-۱ توزیع‌های سطحی بار، و دوقطبی‌ها و انفصال‌ها در میدان الکتریکی و پتانسیل	۳۸
۴۲	۷-۱ معادله‌های پواسن و لاپلاس	۴۲
۴۴	۸-۱ قضیه‌ی گرین	۴۴
۴۶	۹-۱ یکتایی جواب با شرایط مرزی دیریکله یا نیومن	۴۶
۴۸	۱۰-۱ حل رسمی مسئله مقدار مرزی الکترواستاتیک با تابع گرین	۴۸
۵۰	۱۱-۱ انرژی پتانسیل الکترواستاتیک و چگالی انرژی؛ ظرفیت	۵۰
۵۵	۱۲-۱ روش وردشی برای حل معادله‌های لاپلاس و پواسن	۵۵
۵۹	۱۳-۱ روش واهلش برای مسائل الکترواستاتیک دوبعدی	۵۹

۶۳	مراجع و خواندنی‌های پیشنهادی
۶۴	مسائل

۷۵	فصل ۲ مسائل مقدار مرزی در الکترواستاتیک: ۱
۷۶	۱-۲ روش تصاویر
۷۶	۲-۲ بار نقطه‌ای در حضور یک کره‌ی رسانای زمین‌شده
۷۹	۳-۲ بار نقطه‌ای در حضور یک کره‌ی رسانای عایق‌بندی‌شده باردار
۸۱	۴-۲ بار نقطه‌ای نزدیک یک کره‌ی رسانا در پتانسیل ثابت
۸۲	۵-۲ کره‌ی رسانا در یک میدان الکتریکی یکنواخت با روش تصاویر
۸۴	۶-۲ تابع گرین برای کره؛ جواب عمومی برای پتانسیل
۸۵	۷-۲ کره‌ی رسانا با نیم‌کره‌هایی در پتانسیل‌های متفاوت
۸۸	۸-۲ توابع متعامد و بسط‌ها
۹۱	۹-۲ جداسازی متغیرها؛ معادله‌ی لاپلاس در مختصات قائم
۹۴	۱۰-۲ یک مسئله‌ی پتانسیلی دوبعدی؛ جمع‌بندی سری فوریه
۹۸	۱۱-۲ میدان‌ها و چگالی‌های بار در گوشه‌های دوبعدی و در امتداد لبه‌ها
۱۰۳	۱۲-۲ مقدمه‌ای بر آنالیز المان محدود در الکترواستاتیک
۱۱۰	مراجع و خواندنی‌های پیشنهادی
۱۱۱	مسائل
۱۲۹	پیوست فصل ۲

۱۵۷	فصل ۳ مسائل مقدار مرزی در الکترواستاتیک: ۲
۱۵۷	۱-۳ معادله‌ی لاپلاس در مختصات کروی
۱۵۹	۲-۳ معادله‌ی لژاندر و چندجمله‌ای‌های لژاندر
۱۶۵	۳-۳ مسائل مقدار مرزی با تقارن سمتی
۱۶۸	۴-۳ رفتار میدان‌ها در یک سوراخ مخروطی یا نزدیک یک نقطه‌ی تیز
۱۷۳	۵-۳ توابع لژاندر وابسته و هماهنگ‌های کروی $Y_{lm}(\theta, \phi)$
۱۷۶	۶-۳ قضیه‌ی جمع برای هماهنگ‌های کروی
۱۷۸	۷-۳ معادله‌ی لاپلاس در مختصات استوانه‌ای؛ توابع بسل
۱۸۵	۸-۳ مسائل مقدار مرزی در مختصات استوانه‌ای
۱۸۸	۹-۳ بسط توابع گرین در مختصات کروی

۱۰-۳	حل مسائل پتانسیلی با بسط تابع گرین کروی	۱۹۲
۱۱-۳	بسط توابع گرین در مختصات استوانه‌ای	۱۹۶
۱۲-۳	بسط ویژه توابع برای توابع گرین	۱۹۸
۱۳-۳	شرایط مرزی آمیخته، صفحه‌ی رسانا با یک سوراخ دایروی	۲۰۱
	مراجع و خواندنی‌های پیشنهادی	۲۰۸
	مسائل	۲۰۹
	پیوست فصل ۳	۲۲۷

	فصل ۴ چندقطبی‌ها، الکترواستاتیک محیط‌های ماکروسکوپی، دی‌الکتریک‌ها	۲۶۳
۱-۴	بسط چندقطبی	۲۶۳
۲-۴	بسط چندقطبی انرژی یک توزیع بار در میدان خارجی	۲۶۹
۳-۴	بحث مقدماتی الکترواستاتیک با محیط‌های دارای وزن محسوس ^۱	۲۷۱
۴-۴	مسائل مقدار مرزی با دی‌الکتریک‌ها	۲۷۵
۵-۴	قطبش‌پذیری مولکولی و پذیرایی ویژه الکتریکی ^۲	۲۸۲
۶-۴	مدل‌های قطبش‌پذیری مولکولی	۲۸۵
۷-۴	انرژی الکترواستاتیک در محیط‌های دی‌الکتریک	۲۸۹
	مراجع و خواندنی‌های پیشنهادی	۲۹۴
	مسائل	۲۹۵
	پیوست فصل ۴	۳۰۳

	فصل ۵ مگنتواستاتیک، قانون فارادی، میدان‌های شبه‌ایستا	۳۲۷
۱-۵	مقدمه و تعاریف	۳۲۷
۲-۵	قانون بیوساوار ^۳	۳۲۸
۳-۵	معادلات دیفرانسیل مگنتواستاتیک و قانون آمپر	۳۳۳
۴-۵	پتانسیل برداری	۳۳۵
۵-۵	پتانسیل برداری و القای مغناطیسی برای یک حلقه‌ی جریان دایروی	۳۳۷
۶-۵	میدان‌های مغناطیسی یک توزیع جریان جایگزیده، گشتاور مغناطیسی	۳۴۰
۷-۵	انرژی، نیرو و گشتاور مؤثر بر یک توزیع جریان جایگزیده در یک القای مغناطیسی خارجی	۳۴۵
۸-۵	معادلات ماکروسکوپی، شرایط مرزی روی H و B	۳۴۹

۳۵۳	روش‌های حل مسائل مقدار مرزی در مگنتواستاتیک	۹-۵
۳۵۸	کره‌ی مغناطیده یکنواخت	۱۰-۵
۳۶۰	کره‌ی مغناطیده در یک میدان خارجی؛ آهنربای دائمی	۱۱-۵
۳۶۲	حفاظت مغناطیسی، پوسته‌ای کروی از یک ماده‌ی تراوا در یک میدان یکنواخت	۱۲-۵
۳۶۵	اثر یک حفره‌ی دایره‌ای در یک صفحه‌ی رسانای کامل با یک میدان مغناطیسی مماسی یکنواخت	۱۳-۵
۳۶۵	مجانبی روی یک وجه	۱۴-۵
۳۶۸	روش‌های عددی برای میدان‌های مغناطیسی دوبعدی	۱۵-۵
۳۷۱	قانون القای فارادی	۱۶-۵
۳۷۵	انرژی در میدان مغناطیسی	۱۷-۵
۳۷۹	خودالقاهای و القاهای متقابل	۱۸-۵
۳۸۴	میدان‌های مغناطیسی نیمه‌ساکن در رساناها، جریان‌های گردابی ^۱ ؛ انتشار مغناطیسی	۱۹-۵
۳۹۱	مراجع و خواندنی‌های پیشنهادی	
۳۹۳	مسائل	
۴۱۳	پیوست فصل ۵	

۴۶۷	فصل ۶ معادلات ماکسول، الکترومغناطیسی ماکروسکوپی، قوانین بقا	
۴۶۸	جریان جابه‌جایی ماکسول؛ معادلات ماکسول	۱-۶
۴۷۰	پتانسیل‌های اسکالر و برداری	۲-۶
۴۷۲	تبدیلات پیمانه‌ای، پیمانه لورنز، پیمانه کولن	۳-۶
۴۷۵	توابع گرین برای معادله‌ی موج	۴-۶
۴۷۸	جواب‌های تأخیری ^۲ برای میدان‌ها: تعمیم‌های جفی منکو ^۳ در مورد قوانین کولن و بیو - ساوار؛ روابط هویساید - فاینمن برای میدان‌های یک بار نقطه‌ای	۵-۶
۴۸۱	استخراج معادلات ماکروسکوپی الکترومغناطیس	۶-۶
۴۹۴	قضیه‌ی پوینتینگ و بقای انرژی و اندازه حرکت برای سیستمی از ذرات باردار و میدان‌های الکترومغناطیسی	۷-۶
۴۹۹	قضیه‌ی پوینتینگ در محیط‌های خطی ^۴ پاشنده، همراه با افت	۸-۶
۵۰۲	قضیه‌ی پوینتینگ برای میدان‌های هماهنگ؛ تعاریف میدانی امپدانس و ادمیتانس	۹-۶
۵۰۶	خواص تبدیلی میدان‌های الکترومغناطیسی و چشمه‌های تحت دوران، انعکاس‌های فضایی و وارونگی زمان	۱۰-۶

۵۱۴	در خصوص تک قطبی های مغناطیسی	۱۱-۶
۵۱۷	بحث مربوط به شرط کوانتس دیراک	۱۲-۶
۵۲۳	پتانسیل قطبشی (بردارهای هرتز)	۱۳-۶
۵۲۶	مراجع و خواندنی های پیشنهادی	
۵۲۷	مسائل	

۵۴۳	ضمیمه پیوست های فصول ۲ و ۳	
-----	----------------------------	--

فهرست جلد دوم

فصل ۷ امواج الکترومغناطیسی تخت و انتشار موج		
۱-۷	امواج تخت در محیط های نارسانا	
۲-۷	قطبش خطی و دایره ای؛ پارامترهای استوکس	
۳-۷	انعکاس و شکست امواج الکترومغناطیسی در فصل مشترک تخت بین دو دی الکتریک	
۴-۷	قطبش و انعکاس، انعکاس کلی داخلی؛ اثر گوز- هانخن	
۵-۷	مشخصات پاشیدگی فرکانس دی الکتریک ها، رساناها و پلاسماها	
۶-۷	مدل ساده ای از انتشار موج در یونسفر و مگنتوسفر	
۷-۷	امواج مگنتوهیدرو دینامیک	
۸-۷	برهم نهی امواج در یک بعد؛ سرعت گروه	
۹-۷	بررسی پهن شدگی یک پالس وقتی در یک محیط پاشنده منتشر می شود	
۱۰-۷	علیت در رابطه ی بین D و E ؛ روابط کرامرز- کرونیک	
	مراجع و خواندنی های پیشنهادی	
	مسائل	

فصل ۸ موج برها، حفره های تشدید و تارهای نوری		
۱-۸	میدان ها در سطح و درون یک رسانا	
۲-۸	حفره های استوانه ای و موج برها	
۳-۸	موج برها	
۴-۸	مدها در یک موج بر مستطیلی	
۵-۸	شارش انرژی و	

.....	اغتشاش شرایط مرزی	۶-۸
.....	حفره‌های تشدید	۷-۸
.....	افت توان در یک حفره؛ Q ی یک حفره	۸-۸
.....	زمین‌ویونسفر به‌مثابه‌ی یک حفره تشدید؛ رزونانس‌های شومن	۹-۸
.....	انتشار چند مدی در تارهای نوری	۱۰-۸
.....	مدها در موج‌برهای دی‌الکتریک	۱۱-۸
.....	بسط برحسب مدهای نرمال؛ میدان‌های ایجادشده توسط یک منبع جایگزیده در یک موج‌بر	۱۲-۸
.....	فلزی توخالی	
.....	مراجع و خواندنی‌های پیشنهادی	
.....	مسائل	

.....	فصل ۹ سیستم‌های تابشی، میدان‌های چندقطبی و تابش	
.....	میدان‌کارو تابش یک چشمه‌ی نوسانگر جایگزیده	۱-۹
.....	میدان‌های دوقطبی الکتریکی و تابش	۲-۹
.....	دوقطبی مغناطیسی و میدان‌های چهارقطبی الکتریکی	۳-۹
.....	آنتن‌های خطی	۴-۹
.....	بسط چندقطبی برای چشمه‌ی جایگزیده	۵-۹
.....	جواب موج کروی معادله‌ی موج اسکالر	۶-۹
.....	بسط چندقطبی میدان‌های الکترومغناطیسی	۷-۹
.....	خواص میدان‌های چندقطبی، انرژی و تکانه‌ی زاویه‌ای تابش چندقطبی	۸-۹
.....	توزیع زاویه‌ای تابش چندقطبی	۹-۹
.....	چشمه‌های تابش چندقطبی؛ گشتاورهای چندقطبی	۱۰-۹
.....	تابش چندقطبی در اتم‌ها و هسته‌ها	۱۱-۹
.....	تابش چندقطبی از یک آنتن خطی،	۱۲-۹
.....	مراجع و خواندنی‌های پیشنهادی	
.....	مسائل	

مقدمه آراکس

کتاب الکترودینامیک کلاسیک اثر جان. دیوید. جکسون شاید به جرأت بتوان گفت قوی‌ترین و بی‌نظیرترین کتاب تألیف شده در این زمینه است که در حال حاضر در دوره‌های تحصیلات تکمیلی رشته فیزیک و بعضاً کارشناسی تعداد از دانشگاه‌های جهان که از سطح علمی خوبی برخوردار هستند تدریس می‌شود. این کتاب می‌تواند به‌عنوان کتابی معتبر حتی در چند دهه آینده نیز در قرن ۲۱ نقش خود را به خوبی ایفا کند. این کتاب همچنین به‌عنوان کتابی مرجع، مورد استفاده اساتید و دانشجویان دوره‌های کارشناسی ارشد و دکترای تخصصی در رشته‌های مهندسی برق و مخابرات قرار می‌گیرد، به‌خصوص فصولی همچون فصل هشتم که از اهمیت بالایی در تکنولوژی ارتباطات نوری برخوردار است.

کتاب از متن بسیار سنگینی، چه به لحاظ علمی و چه از لحاظ متن انگلیسی آن برخوردار است و هر دو مورد دلیل به ترجمه درنیامدن آن در طول دو یا سه دهه از تدریس آن در ایران می‌باشد. کتاب حاضر که ترجمه شش فصل از کتاب اصلی است در درس الکترودینامیک ۱ تدریس می‌شود. با توجه به وجود ضمیمه‌های فصول ۲ و ۳ به‌نظر می‌رسد بتوان کتاب را در دوره لیسانس و در یک درس پیشرفته‌تر تدریس نمود و این کاری است که در حال حاضر در چند دانشکده قوی‌تر فیزیک در ایران انجام می‌شود و بعضی از دانشکده‌ها فصول ۲ و ۳ را به‌عنوان ریاضی فیزیک ۳ تدریس می‌کنند. در هر حال مبارزه کردن دانشجویان دوره لیسانس با مسائل این کتاب باعث پیشرفت آن‌ها خواهد شد و آن‌ها می‌توانند قدرت خود را در حل مسائل آن بیازمایند.

ساده‌سازی انجام‌شده در فصول ۲ و ۳ حداقل مقدار ساده‌سازی است که امیدواریم این کار رضایت آن دسته از مریبان محترمی را که در سال‌های دورتر دوره کارشناسی‌ارشد خود را به‌پایان رسانده‌اند و تمایل به ادامه تحصیل در دوره Ph-D را دارند جلب کند، که البته دیدگاه آن‌ها در اینکه در چاپ دوم آیا اثبات ریز به‌ریز مطالب آورده شود یا خیر (هم‌چنین در جلد دوم) برای ما بسیار با اهمیت است.

در چاپ پنجم این کتاب یعنی کتاب حاضر تغییراتی صورت گرفته است که عمدتاً مربوط به نکات ادبی و ویراستاری آن هستند. امیدواریم این چاپ که با آن کتاب روند تکاملی خود را طی کرده است مورد توجه دانش‌پژوهان و خوانندگان محترم قرار گیرد و نیز امیدواریم آرزوی دیرینه‌ی ما که همانا به تجربه و آزمایشگاه کشاندن مطالب این کتاب است به تحقق بپیوندد درست همان‌گونه که در آزمایشگاه‌های پیشرفته در دانشگاه‌های تراز اول دنیا این مطالب جنبه‌ی تجربی به خود گرفته‌اند و در تکنولوژی‌های بالا از آن‌ها استفاده می‌شود. در پایان از همسر فداکار و فرزندان عزیزم شایا و پویا کمال عذرخواهی را دارم که با حوصله تمام کارها و پروژه‌های پرمشقت و بسیار زمان‌بر فیزیک را تحمل می‌کنند.

مقدمه مؤلف

۳۶ سال از پیدایش ویرایش اول این کتاب، و ۲۳ سال نیز از چاپ ویرایش دوم آن گذشته است. یک چنین بازه‌هایی از زمان برای موضوعی که پایه‌ی اصلی آن به‌طور کامل از لحاظ نظری ۱۳۴ سال پیش توسط ماکسول ثابت شد و از لحاظ آزمایشگاهی نیز ۱۱۰ سال پیش توسط هرتز، شاید مناسب باشد. با این وجود هنوز هم اصلاحاتی در اهمیت و کاربردهای این نظریه وجود دارد.

ویرایش سوم سعی کرده است تا هر موردی را بدون هرگونه افزایش عمده‌ای در اندازه یا حجم کتاب عنوان کند. لذا به ناچار بعضی از موضوعاتی که در ویرایش دوم حضور داشتند برای طرح مطالب جدید در این ویرایش حذف شده‌اند. حذف عمده‌ای در فصل مربوط به فیزیک پلاسما صورت گرفته است. هرچند که در جای دیگری، بخش‌هایی از این موضوع حضور پیدا کرده‌اند.

بیش‌ترین تغییر نمایان در این ویرایش، استفاده از سیستم واحدهای SI در ۱۰ فصل اول کتاب است. واحدهای گوسی در فصول بعدی همانند قبل باقی مانده‌اند، چراکه یک چنین واحدهایی نسبت به واحدهای SI، بیش‌تر با نسبیت و الکترودینامیک نسبیتی هماهنگی دارند. به‌خاطر این‌که یادآوری سیستم واحدها صورت گیرد، بالای سمت - چپ هر صفحه به‌طور مکرر، بسته به آن فصل، عبارت‌های "SI" یا "C" درج شده است. گواه پذیرش دیر هنگام سیستم واحدهای پذیرفته‌شده‌ی جهای SI توسط اینجانب، این است که تقریباً تمامی کتاب‌های درسی دوره‌ی کارشناسی فیزیک و هم‌چنین کتاب‌های مهندسی در تمامی سطوح، تماماً سیستم SI را به‌کار می‌برند.

برای سال‌های زیادی، ای. دی. پورسل و من با هم قراری داشتیم که یکدیگر را در استفاده از واحدهای گوسی تقویت کنیم. حال با این کار من به او خیانت کردم! لذا گرچه این کتاب به‌طور رسمی به یاد پدرم اهدا شده است، با این وجود این ویرایش سوم را به‌طور غیررسمی به یاد ادوارد. میل. پورسل به وی (۱۹۹۷-۱۹۱۲) اهدا می‌کنم؛ فیزیکدانی عالی با فهمی عمیق، معلمی بزرگ و انسانی فوق‌العاده.

به‌جهت استفاده‌ی در حال افزایش از کامپیوترهای شخصی برای تکمیل کارهای تحلیلی، برای مواجهه با مسائلی که تابع جواب تحلیلی نیستند، چند بخش جدید در ارتباط با اصول مربوط به تعدادی تکنیک عددی برای الکترواستاتیک و مگنتواستاتیک و علاوه بر آن چند مسئله مقدماتی را نیز در کتاب گنجانده‌ام. مریبان می‌توانند هوش خودشان را جهت خلق مسائلی که به مبارزه‌طلبی بیش‌تر احتیاج دارد مورد استفاده قرار دهند. هدف ارائه درکی از یک چنین روش‌هایی است قبل از استفاده‌ی کورکورانه از پکیج‌ها یا حتی دایره‌المعارف‌های ریاضی و یا میل ریاضی (Mathematica or Maple). چندین بازاریابی در ارتباط

با موضوعات کتاب انجام گرفته است - قانون فارادی و میدان‌های شبه‌ایستا همراه با مگنتواستاتیک در فصل ۵ حضور دارند که بحث منطقی‌تری را در مورد انرژی و القاها امکان‌پذیر ساخته است. تغییر عمده‌ی دیگری که در این کتاب انجام گرفته است، به هم پیوستن مبحث تابش با چشمه‌های بار و جریان است (در هر دو شکل مقدماتی و چندقطبی دقیق آن در فصل ۱۹). تمام کاربردهای مربوط به پراکندگی و پراش در فصل ۱۰ قرار دارند.

اصول مربوط به فیبرهای نوری^۱ و موج‌برهای دی‌الکتریک در دو بخش جدید از فصل ۸، مورد بحث قرار گرفته‌اند. در فصل ۱۳ مبحث مربوط به اتلاف انرژی، کوتاه‌تر اما قوی‌تر شده است. به جهت اهمیت در حال افزایش تابش سینکروترون^۲ به‌عنوان یک ابزار تحقیقاتی، بحث موجود در فصل ۱۴، با حضور یک بخش دقیق راجع به فیزیک مولدهای موج و موج‌زن‌های چشمه‌های نور سنکروترون، افزایش یافته است. مباحث جدیدی در فصل ۱۶ راجع به واکنش تشعشعی^۳ و مدل‌هایی از ذرات باردار کلاسیکی، و هم‌چنین ویگلرها وجود دارد.

تعداد پیچیدگی‌های شدید در سرتاسر کتاب کم است، که امیدوارم خواننده یا اصلاً از آن‌ها آگاه نشود یا اگر آگاه شد آن‌ها را با شفافیت بیش‌تری درک کند. به‌جز چند ضمیمه کوچک، موارد اشاره‌شده عبارتند از: تعیین خود القاها، قضیه‌ی پوینتینگ در مواد اتلافی، پتانسیل‌های قطبشی (بردارهای هرتز) اثر گوس - هم‌چنین، تضعیف در فیبرهای نوری و عمق نفوذ لندن در ابررساناها، و البته تعداد زیادی مسئله! متجاوز از یکصد و ده مسئله جدید، یعنی ۴۰٪ افزایش، که تمام آن‌ها به هدف تعلیم اضافه شده‌اند و نه دلسرد کردن.

در آماده کردن این ویرایش، از سوالات، پیشنهادات، انتقادات و پندهای تعداد زیادی از دانشجویان، همکاران و دوستانی که جدیداً پیدا کرده‌ام استفاده نمودم. من به همه‌ی آن‌ها مدیونم. تشکر ویژه به‌خاطر کمک با روش‌های مختلف تقدیم می‌شود به "میرون باندر"^۴، "دیوید اف. بارتلت"^۵، "رابرت ان. کان"^۶، "جان کوپر"^۷، "جان ال. گامل"^۸، "دیوید جی گریفیتس"^۹، "لروی تی. کرت"^{۱۰}، "کوانگ جی کیم"^{۱۱}، "نورمن ام. کرول"^{۱۲}، "هری جی لیب کین"^{۱۳}، "ویلیام مندوزا"^{۱۴}، "جرالد ای میلیر"^{۱۵}، "ویلیام ای نیوکومب"^{۱۶}، "ایوان اوترو"^{۱۷}، "آلان ام پورتیس"^{۱۸}، "فریتز روهرلیچ"^{۱۹}، "وین ام سلو"^{۲۰}، "گریس شمید"^{۲۱}، "جرج H. تریلینگ"^{۲۲}.

1) Fiber optics 2) Synchrotron 3) Radiation reaction 4) Myron Bander

5) David F. Bartlett 6) Robert N. Chan 7) Jahn Cooper 8) John L. Gammel

9) David J. Griffiths 10) Leroy T. Kerth 11) Kwang J. Kim 12) Norman M. Kroll

13) Harry J. Lopkin 14) William Mendoza 15) Gerald A. Miller

16) William A. Newcomb 17) Ivan Otero 18) Alan M. Protis 19) Fritz Rohrlich

20) Wayne M. Saslow 21) Chris Schmid 22) George H. Trilling

مقدمه و مرور

هرچند کهر با و مغناطیس طبیعی برای یونانیان باستان شناخته شده بودند، با وجود این الکترودینامیک در مقام یک موضوع کمی تنها در کم تر از یک صد سال رشد و تعمیم پیدا کرد. آزمایش‌های قابل ملاحظه‌ی کاوندیش در زمینه‌ی الکترواستاتیک از ۱۷۷۱ تا ۱۷۷۳ انجام شدند. تحقیقات ماندگار کولن در سال ۱۷۸۵ شروع به چاپ شدند. این کار شروع تحقیق کمی در الکتریسیته و مغناطیس را در مقیاس جهانی مشخص کرد. پنجاه سال بعد از آن فارادی مشغول مطالعه‌ی اثر جریان‌های متغیر با زمان و میدان‌های مغناطیسی بود. در سال ۱۸۶۴ ماکسول مقاله‌ی مشهورش را در مورد نظریه‌ی دینامیکی میدان‌های الکترومغناطیسی منتشر نمود. بیست و چهار سال بعد (۱۸۸۸) هرتز کشف خود را در مورد امواج الکترومغناطیسی عرضی که با سرعتی مشابه با سرعت نور انتشار می‌یابند به چاپ رساند و با این کار نظریه‌ی ماکسول را در یک وضعیت کاملاً آزمایشی قرار داد. البته داستان تعمیم و گسترش فهم ما از الکتریسیته و نور، بسیار طولانی‌تر و غنی‌تر از ذکر چند اسم است که یک قرن نشان می‌دهد. جهت یک گزارش دقیق از تاریخچه‌ی جذاب مربوط به این موضوع، خواننده می‌تواند به کتاب‌های معتبری که توسط ویتاکر^۱ تألیف شده‌اند مراجعه کنید. یک گزارش خلاصه‌تر، با تأکید بر پدیده‌های نوری در ابتدای کتاب‌های بورن و وولف نیز منتشر شده است. از دهه‌ی ۱۹۶۰ یک انقلاب واقعی در درک ما از نیروهای اساسی و اجزاء تشکیل دهنده‌ی ماده صورت گرفته است. اکنون (در دهه‌ی ۱۹۹۰) الکترودینامیک کلاسیک در مقابل جبهه‌ای از توصیف وحدت‌یافته‌ی ذرات و برهم‌کنش‌هایی که به‌عنوان مدل استاندارد نامیده می‌شود ساکن مانده است. مدل استاندارد یک توصیف کوانتوم مکانیکی منسجم از برهم‌کنش‌های الکترومغناطیسی، ضعیف و قوی براساس اجزاء اصلی، یعنی کوارک‌ها و لپتون‌ها (که از طریق حامل‌های نیرو یعنی فوتون‌ها، بوزون‌های W و Z و گلوئون‌ها، برهم‌کنش می‌کنند) ارائه می‌کند. چارچوب نظریه‌ی وحدت‌یافته از طریق اصول ناوردایی پیمانه‌ای متصل نیروها و تقارن‌های گسسته‌ی خواص ذرات ایجاد گردید. از نقطه نظر مدل استاندارد، الکترودینامیک کلاسیک، حد الکترودینامیک کوانتومی است (برای انتقال‌های کوچک انرژی و اندازه‌ی حرکت، و تعداد میانگین بزرگ فوتون‌های مجازی یا حقیقی). الکترودینامیک کوانتومی، به ترتیب نتیجه‌ای است از تقارن شکسته شده‌ی خودبه‌خودی در یک نظریه که در آن برهم‌کنش‌های ضعیف و الکترومغناطیسی در ابتدا وحدت یافته‌اند و این که حامل‌های نیروی مربوط به هر دو بدون جرم هستند. شکست تقارن، حامل نیروی الکترومغناطیسی (فوتون) را بدون جرم باقی می‌گذارد، همراه با یک قانون کولن با برد نامتناهی. در حالی که حامل‌های نیروی ضعیف جرم‌هایی از مرتبه‌ی $90 \text{ GeV}/c^2 \sim 80$ را [همراه با یک برهم‌کنش ضعیف در انرژی‌های پایین با برد بسیار کوتاه (متر $10^{-18} \times 2$)] به دست می‌آورند. به خاطر منشأها در یک نظریه‌ی وحدت‌یافته، برد و قدرت برهم‌کنش ضعیف به جفت‌شدگی^۲ الکترومغناطیسی مربوط شده‌اند. (ثابت ساختار ریز $1/137 \approx \alpha$).

علی‌رغم حضور تعداد نسبتاً زیادی از کمیت‌هایی که باید از طریق آزمایش به دست آیند، مدل استاندارد

(همراه با نسبت عام در مقیاس‌های بزرگ)، توصیفی با دقت بالا از طبیعت را در تمام جنبه‌هایش ارائه می‌دهد، از خیلی درون هسته، تا میکروالکترونیک، تا میزها و صندلی‌ها و تا دورترین کهکشان. البته بسیاری از پدیده‌ها کلاسیکی هستند یا قابل توضیح با مکانیک کوانتومی غیرنسبیتی، اما دقت انطباق مدل استاندارد با آزمایش در فیزیک اتمی و ذره، که در آن قواعد مکانیک کوانتومی نسبیتی حاکم هستند واقعاً مهوت‌کننده است. مکانیک کلاسیک و الکترودینامیک کلاسیک به‌عنوان پیشروان درک کنونی ما از پدیده‌ها مفید واقع شدند، و هنوز هم نقش مهمی در زندگی عملی و در مرز تحقیقات علمی ایفا می‌کنند. این کتاب خود - شمول است^۱ از این جهت که هر چند در آن مقداری پیش زمینه‌ی ریاضی (حساب دیفرانسیل و انتگرال برداری و معادلات دیفرانسیل) برای خواننده فرض شده است، با این حال موضوع الکترودینامیک در کتاب حاضر از ابتدای شروع آن در الکترواستاتیک تعمیم و توسعه‌یافته است. اما بیش‌تر خوانندگان در نخستین بار با موضوع کنار نمی‌آیند. بنابراین هدف این مقدمه ایجاد صحنه‌ای برای بحث در مورد قانون کولن و یا سایر مباحث پایه‌ای نیست، بلکه هدف بیش‌تر مرور و خلاصه‌ای از الکترومغناطیس کلاسیک است.

در این مورد سؤالاتی همچون دقت قانون عکس مجذوری نیرو در حال حاضر (جرم فوتون)، حدود اعتبار اصل برهم‌نهی خطی، و تأثیرات گسسته بودن بار و اختلاف‌های انرژی مورد بررسی قرار گرفته‌اند. موضوع "نان و آب دارای^۲" همچون شرایط مرزی برای میدان‌های ماکروسکوپی، در سطوح بین محیط‌های مختلف و در رسانه‌ها نیز بحث شده‌اند. هدف این فصل این است که الکترومغناطیس کلاسیک در متن قرار گیرد، اولاً به این جهت که دامنه‌ی اعتبارش را نشان دهد، و ثانیاً برای روشن کردن بعضی از ایده‌آل‌سازی‌هایی که (الکترومغناطیس کلاسیک) دربر دارد. تعدادی از نتایج بعدی در این کتاب و چند ایده‌ی غیرکلاسیکی در جریان این بحث مورد استفاده قرار گرفته‌اند.

مطمئناً خواننده‌ای که مطالعه‌ی الکترومغناطیس را برای نخستین بار آغاز نموده است همه‌ی مباحث را پیگیری نخواهد کرد یا لاقلاً متوجه‌ی اهمیت همه‌ی آن‌ها نخواهد شد. گرچه برای دیگران، این مقدمه به‌عنوان یک تخته‌ی پرش در قسمت‌های بعدی این کتاب (بعد از فصل ۵)، مورد استفاده واقع خواهد شد، و به آن‌ها یادآوری می‌کند که چگونه این موضوع به‌عنوان یک علم تجربی قد علم کرده است.

I-۱ معادلات ماکسول در خلاء، میدان‌ها و چشمه‌ها، معادلات حاکم بر پدیده‌های الکترومغناطیسی

معادلات حاکم بر پدیده‌های الکترومغناطیسی معادلات ماکسول زیر هستند

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$$

1) Self-contained

۲) منظور این است که این موضوع‌ها کاربردهای تکنیکی دارند و در صنعت به‌کار می‌روند (مترجم)

$$\nabla \times \mathbf{H} - \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \mathbf{J} \quad (1-I \text{ الف})$$

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

که در آن برای چشمه‌های خارجی در خلاء داریم، $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E}$ و $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$. بدین ترتیب دو معادله‌ی اول به صورت زیر درمی‌آیند

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (1-I \text{ ب})$$

$$\nabla \times \mathbf{B} - \frac{\partial \mathbf{E}}{c^2 \partial t} = \mu_0 \mathbf{J}$$

معادله‌ی ضمنی موجود در معادلات ماکسول معادله‌ی پیوستگی برای چگالی بار و جریان است

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0 \quad (2-I)$$

این معادله از ترکیب مشتق زمانی معادله‌ی اول در 1-I الف، با دیورژانس معادله‌ی دوم نتیجه می‌شود. علاوه بر این معادله‌ای که برای حرکت ذره‌ی باردار ضروری است معادله‌ی نیروی لورنتز است

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (3-I)$$

که نیروی مؤثر روی بار نقطه‌ای q را در حضور میدان‌های الکترومغناطیسی مشخص می‌کند. این معادلات در سیستم واحدهای SI نوشته شده‌اند، سیستمی از واحدهای الکترومغناطیسی که در ۱۰ فصل اول این کتاب مورد استفاده قرار گرفته است. (واحدها و ابعاد در ضمیمه بحث شده‌اند) معادلات ماکسول در سیستم واحدهای مرسوم‌تر، در جدول ۲ از ضمیمه نمایش داده شده‌اند. پارامتر ضروری در الکترودینامیک سرعت نور در خلاء است که در سیستم واحدهای SI با $c = (\mu_0 \epsilon_0)^{-\frac{1}{2}}$ مشخص می‌شود. همان‌طور که در ضمیمه نیز بحث شده است، در حال حاضر متر برحسب ثانیه (براساس یک گذار فوق‌ریز در سزیم - ۱۳۳) و سرعت نور (دقیقاً $c = 299792458 \text{ m/s}$) تعریف می‌شود. این تعاریف فرض می‌کنند که سرعت نور یک ثابت جهانی است، هماهنگ با گواهی که نشان می‌دهد سرعت نور تا دقت بالایی در خلاء مستقل از فرکانس است، [از فرکانس‌های بسیار کم تا حداقل 10^{24} Hz (یعنی فوتون‌هایی با انرژی 4 GeV)]. برای بسیاری از مقاصد عملی می‌توانیم سرعت نور را به $c \simeq 10^8 \text{ m/s}$ تقریب بزنیم. یا برای اینکه به‌طور قابل ملاحظه‌ای بسیار دقیق باشد، $c = 2,998 \times 10^8 \text{ m/s}$.

در اصل میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی \mathbf{E} و \mathbf{B} در معادله‌های (1-I) توسط معادله‌ی نیروی (3-I) معرفی شدند. در آزمایش‌های کولن نیروهای مؤثر بین توزیع‌های جایگزیده بار مورد اندازه‌گیری

قرار گرفتند. در آنجا معرفی میدان الکتریکی E به صورت نیروی وارد بر واحد بار، مفید تشخیص داده شد (بخش ۱-۲ را ملاحظه کنید). به گونه‌ای مشابه در آزمایش‌های آمپر نیز نیروهای متقابل بین حلقه‌های حامل جریان مطالعه شدند (بخش ۵-۲ را ملاحظه کنید).

با شناسایی $NAqv$ به عنوان جریان موجود در یک رسانا با سطح مقطع عرضی A و با N حامل بار بر واحد حجم که با سرعت v در حال حرکت هستند ملاحظه می‌کنیم که B در $(I-3)$ از لحاظ مقدار به صورت یک نیرو بر واحد جریان تعریف می‌شود.

بدین ترتیب گرچه E و B در ابتدا دقیقاً به عنوان جانشین مناسبی برای نیروهای ایجاد شده توسط توزیع‌های بار و جریان ظاهر شدند، ولی در واقع این دو میدان جنبه‌های مهم دیگری نیز دارند. اول اینکه معرفی این میدان‌ها از لحاظ مفهومی چشمه‌ها را از اجسام آزمایشی (که نیروهای الکترومغناطیسی را احساس می‌کنند) جدا می‌کند. اگر میدان‌های E و B ناشی از دو چشمه در یک نقطه‌ی مشخص در فضا یکسان باشند، صرف نظر از کیفیت تفاوت چشمه‌ها، نیروی مؤثر روی یک بار یا جریان آزمایشی در آن نقطه، یکسان خواهد بود. این واقعیت، E و B در رابطه‌ی $(I-3)$ را به معنی صحیح خودش مستقل می‌کند و دوم این که میدان‌های الکترومغناطیسی می‌توانند در ناحیه‌هایی از فضا که در آن هیچ چشمه‌ای نیست وجود داشته باشند. این میدان‌ها می‌توانند حامل انرژی، اندازه‌ی حرکت و اندازه‌ی حرکت زاویه باشند، و بنابراین دارای موجودیتی به طور کل مستقل از بارها و جریان‌ها هستند.

گرچه در حقیقت تلاش‌های مکرری وجود دارد تا ارجاع صریح به میدان‌ها را حذف کند (به اسم "کنش از راه دور" مربوط به برهم‌کنش ذرات باردار)، اما مفهوم میدان الکترومغناطیسی هم از لحاظ کلاسیکی و هم کوانتوم مکانیکی، یکی از ثمربخش‌ترین ایده‌ها در ارتباط با علم فیزیک است.

مفهوم E و B به عنوان میدان‌هایی معمولی یک ایده‌ی کلاسیکی است. می‌توان این دو را به صورت حد کلاسیکی (حد اعداد کوانتومی بزرگ) یک توصیف کوانتوم مکانیکی، برحسب فوتون‌های حقیقی یا مجازی تصور کرد. در حوزه‌ی مربوط به پدیده‌های ماکروسکوپی و حتی تعدادی از پدیده‌های اتمی، می‌توان معمولاً جنبه‌ی فوتون دانه‌دانه را در مورد میدان‌های الکترومغناطیسی صرف نظر نمود، یا لا اقل این جنبه را در حاشیه قرار داد. برای مثال در فاصله‌ی یک متری از لامپ نوری 10^0 وات، ریشه‌ی میانگین مربعی میدان الکتریکی، از مرتبه‌ی 50 V/m است و از مرتبه‌ی 10^2 sec/cm^2 (فوتون مرئی) 10^{15} وجود دارد. به طور مشابه یک آنتن FM همسانگرد با توان 10^0 وات در 10^8 Hz ، باعث ایجاد ریشه‌ی میانگین مربعی (rms) میدان الکتریکی به اندازه‌ی تنها 5 mV/m در فاصله 10^0 کیلومتری می‌شود. اما همین مقدار متناظر با "شار فوتونی" به اندازه‌ی 10^{12} فوتون sec/cm^2 یا حدود 10^9 فوتون در حجم مکعبی به ضلع 1 m (1 m^3) در آن فاصله است. معمولاً یک دستگاه به فوتون‌های مجزا حساس نیست؛ اثر تجمعی تعداد زیادی فوتون که گسیل یا جذب می‌شوند به صورت یک پاسخ پیوسته و قابل مشاهده ظاهر می‌شود. بنابراین یک توصیف کاملاً کلاسیکی برحسب معادلات ماکسول مجاز شمرده شده و مفید است.

چگونه می‌توانیم از قبل تعیین کنیم که چه وقت یک توصیف کلاسیکی از میدان‌های الکترومغناطیسی مناسب است؟

مقداری پیچیدگی گاه و بیگاه لازم می‌شود. با این وجود آنچه در ذیل آمده است، معمولاً معیاری محکم است: وقتی تعداد فوتون‌های مورد بحث را بتوان بسیار زیاد در نظر گرفت، اما اندازه‌ی حرکت حمل شده توسط یک فوتون مجزا در مقایسه با اندازه‌ی حرکت سیستم مادی کوچک باشد، در این صورت پاسخ سیستم مادی را می‌توان به‌گونه‌ای مناسب با یک توصیف کلاسیکی از میدان‌های الکترومغناطیسی تعیین نمود. برای مثال هر فوتون 10^8 هرتزی که توسط آنتن FM گسیل می‌شود ضربه‌ای به اندازه‌ی تنها $NS = 10^{-34} \times 2.2$ به آن وارد می‌کند. بنابراین یک بحث کلاسیکی در اینجا مطمئناً پذیرفتنی است. علاوه بر این پراکندگی نور توسط یک الکترون آزاد در فرکانس‌های پایین تحت کنترل فرمول پراکندگی تامسون است (بخش ۱۴-۸)، اما با قوانین مربوط به اثر کمپتون، اندازه‌ی حرکت $\frac{\hbar\omega}{c}$ فوتون تابشی، در مقایسه با mc با اهمیت می‌شود. اثر فوتوالکتریک برای سیستم مادی غیرکلاسیکی است، چراکه الکترون‌های شبه آزاد در فلز، انرژی‌های جداگانه‌ی خودشان را به اندازه‌ای که مساوی با انرژی فوتون‌های جذب شده است تغییر می‌دهند، اما جریان فوتوالکتریک برای الکترون‌ها را می‌توان با استفاده از یک توصیف کلاسیکی از میدان‌های الکترومغناطیسی به‌طور کوانتوم مکانیکی محاسبه نمود. از طرف دیگر طبیعت کوانتومی میدان‌های الکترومغناطیسی بایستی در گسیلش خودبه‌خودی تابش توسط اتم‌ها (یا توسط هر سیستم دیگری که در ابتدا دارای فوتون نیست و تنها دارای تعداد کمی از فوتون است که در نهایت حضور دارند) به حساب آورده شود.

اساساً به جهت بقای قوانین انرژی و اندازه‌ی حرکت، رفتار میانگین شاید هنوز قابل شرح برحسب عباراتی کاملاً کلاسیکی باشد. یک مثال در این رابطه، بحث کلاسیکی فرو افتادن یک ذره‌ی باردار به طرف پایین در مدارهای یک پتانسیل جاذبه‌ای است. در اعداد کوانتومی بالا برای یک ذره، توصیفی کلاسیکی از حرکت پذیرفتنی است و تغییرات عمومی در انرژی و اندازه‌ی حرکت زاویه‌ای را می‌توان به‌طور کلاسیکی از طریق برهم‌کنش تابشی محاسبه نمود، چراکه انرژی فوتون‌های گسیل شده‌ی متوالی، در مقایسه با انرژی جنبشی یا پتانسیل ذره‌ی چرخنده کوچک هستند.

چشمه‌ها در مجموعه‌ی $(I-1)$ ، عبارتند از $\rho(x, t)$ چگالی بار الکتریکی و $\mathbf{J}(x, t)$ چگالی جریان الکتریکی. در الکترومغناطیس کلاسیک فرض شده است که این چگالی‌ها توزیع‌هایی متصل برحسب x هستند. هرچند که گاه و بیگاه توزیع‌های جایگزیده‌ای را در نظر می‌گیریم که می‌توان آن‌ها را با نقاط تقریب زد. فرض شده است که اندازه‌ی این بارهای نقطه‌ای کاملاً اختیاری هستند، اما مشخص شده است که در واقعیت به مقادیر منفصل مقیدند. واحد اساسی بار، اندازه‌ی بار روی یک الکترون است

$$|q_e| = 4.8032068(15) \times 10^{-10} \text{ esu} \\ = 1.60217733(49) \times 10^{-19} \text{ C}$$

که در آن خطاها در مکان‌های اعشاری آخر در داخل پرنانتر نشان داده شده‌اند. بار روی پروتون و روی تمامی ذرات یا سیستم ذراتی که تاکنون شناخته شده‌اند، مضارب صحیحی از این واحد اساسی هستند.^۱ دقت آزمایشی که با آن مشخص شده است که این مضرب‌ها اعداد صحیحی هستند چشم‌گیر است (بهتر از یک در 10^{20}). آزمایش‌های فوق در بخش ۱۱-۹ مورد بررسی قرار گرفته‌اند، که در آن سوآل ناوردایی لورنتز بار نیز مورد بحث قرار گرفته است.

در بسیاری از کاربرهای ماکروسکوپی، لزومی به در نظر گرفتن انفصالی بودن بار الکتریکی نیست. برای مثال یک خازن یک میکرو فاراد در یک پتانسیل 150 ولت، کلاً دارای 10^{15} بار بنیادی روی هر الکترو است. چند هزار الکترون بیش‌تر یا کم‌تر، اهمیتی ندارد. یک جریان یک میلی‌آمپری، متناظر با $10^{12} \times 6.2$ بار بنیادی بر ثانیه است. البته تعدادی آزمایش ماکروسکوپی حساس یا تقریباً ماکروسکوپی وجود دارند که در آن انفصالی بودن بار مطرح می‌شود. آزمایش مشهور قطره‌ی روغن میلیکان یکی از آن‌هاست. قطرات مورد استفاده او نوعاً دارای شعاع 10^{-4} cm بودند و چندین (یا چند ده) بار بنیادی روی آن‌ها قرار گرفته بود. یک عدم تقارن در صورت حضور جملات چشمه در معادلات ماکسول ($1-I$) الف وجود دارد. دو معادله‌ی اول دارای چشمه هستند و دوتای دیگر فاقد این جملات. این موضوع، عدم وجود تجربی بارها و جریان‌های مغناطیسی را منعکس می‌کند. در واقع همان‌گونه که در بخش ۶-۱۱ نشان داده شده است، ذرات می‌توانستند همانند بار الکتریکی دارای بار مغناطیسی نیز باشند. اگر تمام ذرات موجود در طبیعت دارای نسبت مشابهی از بار مغناطیسی به الکتریکی می‌بودند، میدان‌ها و چشمه‌ها را می‌شد مجدداً طوری تعریف کرد که معادلات معمول ماکسول ($1-I$) الف معتبر باشند. در این معنی، بیان اینکه هیچ بار یا جریان مغناطیسی‌ای وجود ندارد تا اندازه‌ای ابداعی است. در قسمت اعظم این کتاب فرض شده است که تنها بارهای الکتریکی و جریان‌ها در معادلات ماکسول عمل می‌کنند، اما بعضی از نتایج مربوط به وجود یک ذره با یک نسبت متفاوت بار مغناطیسی به الکتریکی، برای مثال یک تک‌قطبی مغناطیسی، در فصل ۶ توصیف شده است.

I-۲ قانون عکس مجذوری یا جرم فوتون

بستگی به فاصله‌ی قانون نیروی الکترواستاتیک، به‌طور کمی توسط کاوندیش و کولن به‌صورت یک قانون عکس مجذوری نشان داده شد. به خاطر قانون گوس و قضیه‌ی دیورژانس (بخش‌های ۱-۳ و ۱-۴ را ملاحظه کنید)، این موضوع (عکس مجذوری بودن قانون نیرو؛ م) منجر به اولین معادله از مجموعه‌ی معادلات ماکسول I-۱ ب شد. آزمایش‌های اولیه، دارای دقتی به اندازه‌ی تنها چند درصد بودند و علاوه بر این، دقت آن‌ها در حد مقیاس طولی آزمایشگاه بود. آزمایش‌هایی با دقت بالاتر و شامل ناحیه‌های مختلف اندازه‌گیری در طی سال‌ها انجام گرفته‌اند. در حال حاضر بررسی‌های مربوط به قانون عکس مجذوری با یکی از دو روش مرسوم زیر انجام می‌شود

(۱) کوارک‌ها دارای باری به اندازه‌ی $\frac{2}{3}$ و $-\frac{1}{3}$ این واحدها هستند ولی به‌طور مجزا مشاهده نشده‌اند (تاکنون).

الف) فرض کنید نیرو به صورت $\frac{1}{r^{2+\epsilon}}$ تغییر می‌کند، و یک مقدار یا یک حد برای ϵ ذکر کنید.

ب) فرض کنید پتانسیل الکترواستاتیک شکل "یوکاوی" $r^{-1}e^{-\mu r}$ را دارد و یک مقدار یا حد برای μ یا μ^{-1} ذکر کنید. چون $\mu = \frac{m_\gamma c}{h}$ ، (که در آن m_γ جرم فوتون فرض شده است) آزمایش قانون عکس مجذوری بعضی اوقات برحسب حد بالایی روی m_γ بیان می‌شود. تجربیات آزمایشگاهی معمولاً ϵ و احتمالاً μ یا m_γ را مشخص می‌کنند؛ و تجربیات ژئومغناطیسی μ یا m_γ را ارائه می‌دهند.

در آزمایش اصلی انجام شده با کره‌های هم‌مرکز توسط کاوندیش^۱ در سال ۱۷۷۲، یک حد بالا برای ϵ به صورت، $|\epsilon| \leq 0.2^\circ$ به دست آمد. وسیله‌ی کاوندیش در شکل I-۱ نشان داده شده است. حدود 100° سال بعد، ماکسول آزمایشی بسیار شبیه به آزمایش کاوندیش را در کمبریج* انجام داد و حد بالایی به صورت $|\epsilon| \leq 5 \times 10^{-5}$ بر جای گذاشت. دو تجربه‌ی آزمایشگاهی قابل ملاحظه‌ی دیگر (براساس قانون گوس) تجربیاتی بودند که توسط پلیمتون ولاتون^۲ انجام شدند، که حد بالایی را به صورت $2 \times 10^{-9} < |\epsilon|$ ، ارائه کردند و نیز تجربه اخیر توسط ویلیامز، فائولر و هیل^۳ (که در مرجع داده شده در ذیل آمده است؛ م). ترسیمی الگووار از وسیله‌ی مربوط به آزمایش اخیر در شکل I-۲ نشان داده شده است. هرچند که آزمایش اخیر ($\nu = 4 \times 10^6 \text{ Hz}$) یک آزمایش استاتیکی نبود ولی ایده‌ی اساسی تقریباً مشابه با همان آزمایش کاوندیش است. کاوندیش در جستجوی باری کره داخلی بود (البته پس از این که کره‌ی داخلی را در تماس الکتریکی با کره‌ی باردار بیرونی قرار داده و سپس آن را جدا کرده بود) اما چیزی عایدش نشد. ویلیامز، فائولر و هیل به دنبال یک اختلاف پتانسیل بین دو لایه‌ی هم‌مرکز بودند، وقتی لایه‌ی بیرونی تحت تأثیر یک پتانسیل متناوب به اندازه‌ی $10 \text{ kV} \pm$ نسبت به زمین قرار داشت. حساسیت وسیله‌ی آن‌ها طوری بود که اختلاف پتانسیلی به اندازه‌ی کم‌تر از 10^{-12} ولت را می‌توانست آشکار کند. نتیجه‌ی فاقد اعتبار آن‌ها، وقتی به وسیله‌ی معادلات پروکا (بخش ۱۲-۸) تفسیر شد، حدی به اندازه‌ی $10^{-16} \times (2.7 \pm 3.1) = \epsilon$ را مشخص کرد. اندازه‌گیری میدان مغناطیسی زمین، هم روی سطح و هم در خارج از سطح زمین (توسط مشاهدات ماهواره‌ای) بهترین حدود واضحی را که بایستی برای ϵ یا به‌طور معادل جرم فوتون (m_γ) قرار داد امکان‌پذیر می‌کند.

مشاهدات ژئوفیزیکی و همچنین آزمایشگاهی توسط کوبزاروف و اخن^۴ و همچنین توسط گلدهابر و نیتو^۵ در مقالاتی مروری مورد بحث قرار گرفتند که در انتهای این مقدمه فهرست شده‌اند. اندازه‌گیری‌های

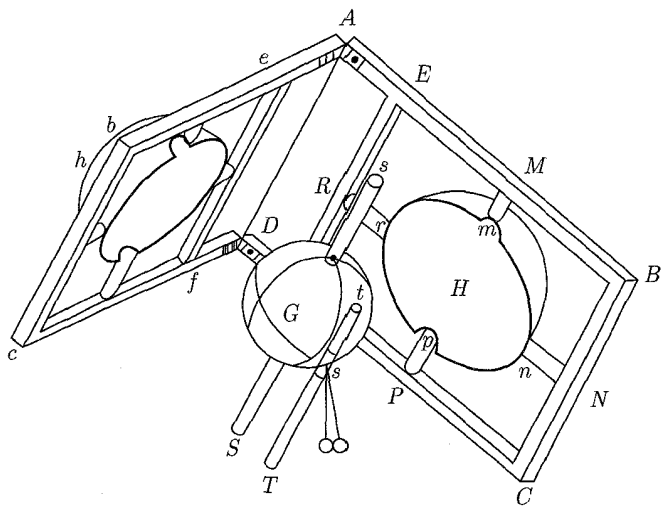
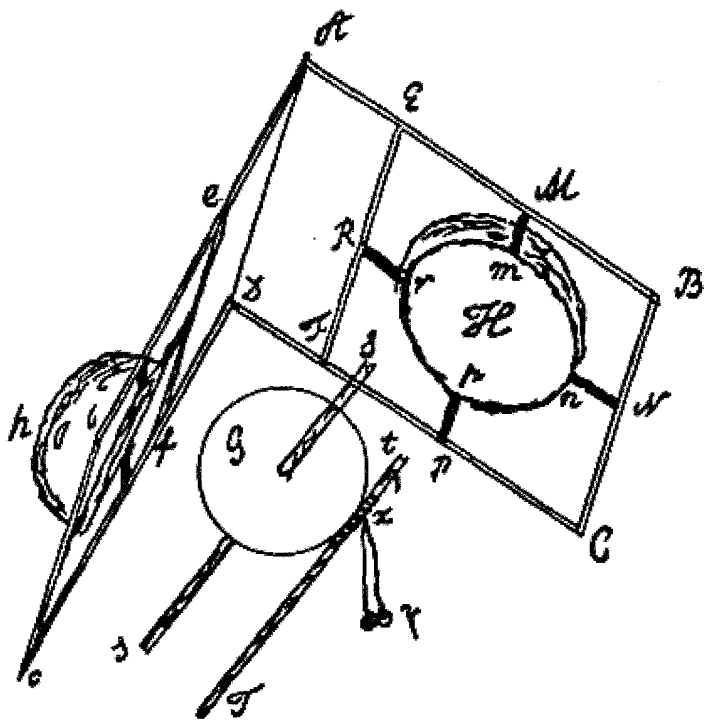
1) H. Cavendish, Electrical Researches,

*) J. C. Maxwell, Cambridge University Press, Cambridge (1879), pp. 104-113

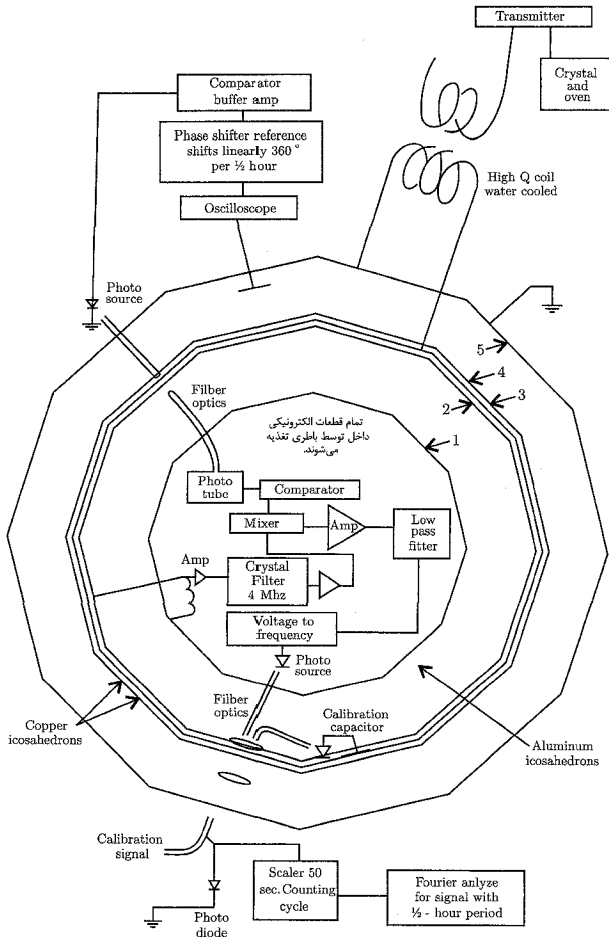
2) S. J. Plimpton & W. E. Lowton, Phys. Rev. **50**, 1066 (1936).

3) E. R. Williams, J. E. Faller, and H. A. Hill, Phys. Rev. Lett., **26**, 721 (1971).

4) Kobzarev and Okun 5) Goldhaber and Nieto



شکل ۱: دستگاه کاوندیش برای اثبات قانون عکس مجذوری الکترواستاتیک. طرح بالا عین رونوشت مربوط به طرح خود کاوندیش است؛ پایینی خطوط ترسیم شده توسط یک نقاش است. قطر گوی داخلی ۱۲/۱ اینچ است. نیم کره‌های مقوایی داخلی اندکی بزرگ‌ترند. هم گوی و هم نیم‌کره‌ها با ورقه‌ی حلبی پوشش داده شده‌اند تا آن‌ها را به صورت رساناهای کامل‌تری از الکتروسیسته دریاورند (اشکال مجدداً با اجازه از انتشارات دانشگاه کمبریج ترسیم شده‌اند).



شکل ۲: نمودار شماتیک آزمایش "کاوندیش" توسط ویلیامز، فالروهیل

بیست وجهی‌های هم‌مرکز لایه‌هایی رسانا هستند. یک ولتاژ ۴MHz با ۱۰kV یک، بین لایه‌های ۴ و ۵ اعمال می‌شود. لایه ۴ و لایه‌های ۲ و ۳ مجاور آن تقریباً دارای قطری به اندازه ۱/۵ متر هستند و لایه ۱ را درون خود دارند. اختلاف ولتاژی بین لایه‌های ۱ و ۲ (اگر باشد) در عبور از (یا در) القاگر نشان داده شده در حدود ساعت ۸، در لایه ۱ ظاهر می‌شود. تقویت‌کننده و سیستم اپتیکی جهت استخراج اطلاعات مربوط به ولتاژ برای دنیای بیرون لازم هستند. آن‌ها معادل با سیستم کاوندیش هستند همراه با ریسمان‌هایی که به‌طور اتوماتیک نیم‌کره‌های لولادار را باز کرده، و گلوله‌های اقطبی را برای بررسی بار روی کروی داخلی در معرض قرار می‌دهند (شکل مجدداً با اجازه نویسنده‌گان رسم شده است).

سطحی میدان مغناطیسی زمین تا اندازه‌ای بهترین مقدار را مشخص می‌کند، یعنی

$$m_{\gamma} < 4 \times 10^{-51} \text{ kg}$$

یا

$$\mu^{-1} > 10^8$$

برای مقایسه، جرم الکترون عبارت است از $m_e = 9/1 \times 10^{-31} \text{ kg}$. تجربه آزمایشگاهی ویلیامز، فاولر و هیل را می‌توان با قرار دادن یک حد، $m_{\gamma} < 1/6 \times 10^{-50} \text{ kg}$ تفسیر کرد (تنها با عامل ۴ برابر ضعیف‌تر از حد ژئومغناطیسی).

با اشاره به وجود مدهای فرکانسی بسیار پایین در حفره‌ی تشدید زمین - یونسفر، می‌توان به راحتی کامل یک حد تقریبی برای جرم فوتون تعیین نمود (رزونانس‌های شومن^۱ که در بخش ۸-۹ بحث شده‌اند).

رابطه‌ی دوگانه‌ی انشتین، $h\nu = m_{\gamma}c^2$ ، پیشنهاد می‌کند که جرم فوتون بایستی نامساوی $m_{\gamma} < \frac{h\nu}{c^2}$ را برآورده کند، که در آن ν هر نوع فرکانس تشدید الکترومغناطیسی‌ای می‌تواند باشد. پایین‌ترین تشدید شومن دارای $\nu \simeq 8 \text{ Hz}$ است. با توجه به این مقدار می‌توانیم $m_{\gamma} < 6 \times 10^{-50} \text{ kg}$ را که مقدار بسیار کوچکی است محاسبه کنیم (تنها یک مرتبه‌ی مقدار بالاتر از بهترین حد).

در عین اینکه این موضوع از اعتبار پیش پا افتاده‌ای برخوردار است، بررسی دقیق‌تر (بخش ۱۲-۸ و مراجع داده شده در آن‌جا را ملاحظه کنید) نشان می‌دهد که حد فوق به‌طور تقریب $10^{\frac{1}{3}} \left(\frac{R}{H}\right)$ برابر بزرگ‌تر است، $R \simeq 6400 \text{ km}$ کیلومتر شعاع زمین و $H \simeq 60 \text{ km}$ ارتفاع یونسفر هستند^۲. علی‌رغم این ضریب رقت^۳، حد 10^{-48} که صرف وجود تشدیدهای شومن تعیین شد کاملاً قابل توجه است.

تجربیات آزمایشگاهی و ژئوفیزیکی نشان می‌دهد که در مقیاس‌های طولی از مرتبه‌ی 10^{-2} تا 10^{-7} متر، قانون عکس مجذوری با دقت بسیار زیادی صادق است. در فواصل کوچک‌تر بایستی کم‌تر به دنبال مدرک صریحی که اغلب شامل فرض‌های اضافی است باشیم. برای مثال، تجزیه و تحلیل تاریخی پراکندگی ذرات آلفا توسط راترفورد با ورقه‌های نازک، قانون نیروی کولن را تا فواصلی از مرتبه‌ی 10^{-13} متر، به‌طور اساسی اثبات می‌کند، مشروط بر اینکه بتوان ذره‌ی آلفا و هسته را به‌صورت بارهای نقطه‌ای کلاسیکی، که به‌صورت ایستا برهم‌کنش می‌کنند، (و از ابر بار الکترونی بتوان چشم‌پوشی نمود) تلقی نمود.

تمامی این فرضیات را می‌توان آزمایش کرد (و البته آزمایش نیز شده‌اند)، اما تنها در چارچوب اعتبار مکانیک کوانتومی، برهم‌نهی خطی (زیرا ملاحظه کنید) و سایر فرضیات بسیار مدلل. با وجود این در

1) Schumann resonance

۲) نکته اساسی این است که، این گستره که $\frac{H}{R}$ قابل اغماض باشد، انتشار فرکانس بسیار پایین (ELF) مشابه انتشار در یک خط انتقال با صفحات موازی در مد اصلی (TEM) است. این انتشار با یک جرم محدود از فوتون تأثیر نمی‌پذیرد.

3) dilution factor

فواصل کوچکتر، مکانیک کوانتومی نسبیته ضروری است و اثرات برهم‌کنشی قوی در این رابطه وارد بحث می‌شوند تا سوالات و همچنین جواب‌ها را دشوار و پیچیده کنند.

با این وجود، آزمایش‌های پراکندگی الاستیک با الکترون‌های مثبت و منفی، در انرژی‌های مرکز جرمی‌ای تا 10^6 GeV نشان داده است که الکتروینامیک کوانتومی (نظریه‌ی نسبیته الکترون‌های نقطه‌ای برهم‌کنش‌کننده با فوتون‌های بدون جرم) برای فواصلی از مرتبه‌ی 10^{-18} متر، صادق است.

بنابراین نتیجه می‌گیریم که جرم فوتون را می‌توان روی کل ناحیه کلاسیکی مربوط به فواصل و همچنین ورطه‌ی درون دامنه‌ی کوانتومی صفر در نظر گرفت، (قانون نیروی عکس مجذوری صادق است). این نکته استنباط می‌شود که قانون عکس مجذوری روی حداقل ۲۵ مرتبه‌ی مقدار در مقیاس طولی صادق است!

I-۳ برهم‌نesh خطی

معادلات ماکسول در خلاء برحسب E و B خطی هستند. این خطی بودن اغلب به کرات مورد بهره‌برداری قرار می‌گیرد. برای مثال، با صدها مکالمه‌ی تلفنی مختلف روی یک تک ارتباط مایکروویو، خطی بودن بدیهی فرض می‌شود. البته وضعیت‌هایی وجود دارند که در آن اثرات غیرخطی اتفاق می‌افتد - در مواد مغناطیسی، در کریستال‌هایی که عامل پرتوهای شدید لیزری هستند، حتی در قطعات مورد استفاده برای برقراری مکالمات تلفنی و هم چنین قطع پرتوی مایکروویو. اما در اینجا ما به میدان‌های موجود در خلاء یا میدان‌های میکروسکوپی درون اتم‌ها و هسته‌ها علاقه‌مند هستیم.

چه دلیلی برای پشتیبانی از ایده‌ی برهم‌نesh خطی داریم؟ در سطح ماکروسکوپی، تمام انواع آزمایش‌های برهم‌نesh خطی را تا سطح $1/100\%$ دقت، تأیید می‌کنند - گروه‌های بار و جریان، باعث به وجود آمدن نیروهای الکتریکی و مغناطیسی می‌شوند که با برهم‌نesh خطی قابل محاسبه است. چنان‌که توقع می‌رود مبدل‌ها نیز برهم‌نesh خطی را به نمایش می‌گذارند و امواج ایستاده روی خطوط انتقال مشاهده می‌شوند - خواننده می‌تواند یک لیست از این موارد را تهیه کند. در اپتیک، سیستم‌های شکاف الگوهای پراش را نشان می‌دهند؛ پراش اشعه‌ی X در مورد ساختار کریستال به ما توضیح می‌دهد؛ نور سفید توسط یک منشور به رنگ‌های رنگین‌کمان می‌شکند و دوباره به نور سفید ترکیب مجدد می‌شوند. در سطح ماکروسکوپی و حتی در سطح اتمی، برهم‌نesh خطی به‌گونه‌ی قابل ملاحظه‌ای معتبر است.

این در دامنه‌ی زیر اتمی است که انحراف از برهم‌نesh خطی را می‌توان به‌طور قانونی پیگیری نمود. وقتی ذرات باردار بسیار آرام به یکدیگر نزدیک شوند، قدرت میدان الکتریکی بزرگ می‌شوند. اگر یک ذره‌ی باردار را به‌عنوان یک توزیع جایگزیده‌ی بار تصور کنیم، ملاحظه خواهیم کرد که وقتی بار بیش‌تر و بیش‌تر جایگزیده می‌شود، انرژی الکترومغناطیسی آن رشد وسیع‌تر و وسیع‌تری خواهد یافت. در تلاش برای اجتناب از خود انرژی‌های بی‌نهایت ذرات نقطه‌ای، طبیعی است فکر کنیم یک نوع اشباع اتفاق می‌افتد، بدین

معنی که قدرت‌های میدانی دارای یک حد بالا می‌شوند. یک چنین نظریه‌های غیرخطی کلاسیکی در گذشته مورد مطالعه قرار گرفته‌اند. یک مثال به‌خوبی شناخته‌شده، همان نظریه یورن و اینفلد* است. خلاء تراوایی‌های الکتریکی و مغناطیسی زیر را نشان می‌دهد

$$\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} = \frac{\mu_0}{\mu} = \left[1 + \frac{1}{b^2} (c^2 B^2 - E^2) \right]^{-\frac{1}{2}} \quad (4-I)$$

که در آن b یک قدرت میدانی ماکزیمم است. معادله‌ی (4-I) دقیقاً یک ساده‌سازی است که قبلاً توسط یورن به تنهایی پیشنهاد شد. این معادله برای بررسی ایده‌ی کلی کافی است. میدان‌ها به‌وضوح در فواصل کوتاه تغییر می‌کنند؛ تمام انرژی‌های الکترومغناطیسی محدود هستند. اما یک چنین نظریه‌هایی از اختیاری بودن رنج می‌برند؛ به‌طریقی از چگونگی مطرح شدن غیرخطیت و به طریقی دیگر نیز از مسائل عمده‌ی همراه با گذار به نظریه‌ی کوانتومی. علاوه‌بر این، هیچ گواهی برای این نوع غیرخطیت در کلاسیک وجود ندارد. نظریه‌ی کوانتومی اتم‌های چند الکترونی با دقت بالایی توسط نظریه‌ی کوانتومی معمولی توصیف می‌شود با برهم‌کنش‌هایی بین هسته‌ها و الکترون‌ها و بین خود الکترون‌ها که با برهم‌کنش خطی پتانسیل‌ها به‌صورت جفت‌جفت مشخص می‌شوند (یا برهم‌کنش‌های نسبیستی تأخیری برای اثرات ریز). قدرت‌هایی میدانی از مرتبه‌ی $10^{17} \text{ V/m} - 10^{11}$ در مدارهای الکترون‌ها در اتم‌ها وجود دارند، در حالی که میدان الکتریکی در لبه‌ی یک هسته‌ی سنگین از مرتبه‌ی 10^{21} V/m است. اختلاف بین سطوح انرژی در اتم‌های سبک مثل هلیوم، که بر مبنای برهم‌نهی خطی برهم‌کنش‌های الکترومغناطیسی محاسبه شده‌اند، با آزمایش (تا دقتی که نزدیک به ۱ در 10^6 است) هماهنگ است، و انرژی‌های کولونی هسته‌های سنگین با برهم‌نهی خطی اثرات الکترومغناطیسی سازگارند. البته امکان دارد برای قدرت‌های میدانی بزرگ‌تر از 10^{21} V/m ، اثرات غیرخطی بتوانند مطرح شوند. یک جای مناسب جهت جستجوی یک چنین اثرهایی هسته‌های فوق سنگین ($Z > 110$) است، هم در سطوح انرژی اتمی و هم در انرژی کولونی هسته‌ای [یک بررسی در مورد اثر غیرخطی بودن از نوع یورن - اینفلد در سطوح انرژی اتمی در عناصر فوق سنگین توسط J. Rafelski, W. Greiner, and L. P. Fulcher, *Nuovo Cimento* **13 B**, 135 (1973) انجام گرفته است] در حال حاضر هیچ دلیلی برای هر نوعی از رفتار غیرخطی کلاسیکی برای میدان‌های موجود در خلاء در فواصل کوتاه وجود ندارد.

نوعی غیرخطیت کوانتوم مکانیکی در میدان‌های الکترومغناطیسی وجود دارد که به‌خاطر اصل عدم قطعیت مطرح می‌شود که تولید آنی یک زوج الکترون پوزیترون را (از دو فوتون و ناپدید شدن بعدی این زوج با گسیلش دو فوتون متفاوت) امکان‌پذیر می‌کند، همان‌گونه که به‌صورت طرح‌وار در شکل I-3 نشان

(* برای یک بحث مقدماتی ببینید

M. Born and L. Infeled, *proc. R. Soc. London* **A 144**, 425 (1934)

M. Born, *Atomic Physics*, Blackie, London (1949), Appendix VI,

داده شده است. این پدیده پراکندگی نور با نور نامیده می‌شود.[†]

بنابراین دو موج تخت تابشی $e^{ik_1 \cdot x - i\omega_1 t}$ و $e^{ik_2 \cdot x - i\omega_2 t}$ چنان‌که طبق برهم‌نهمش خطی انتظار می‌رود تنها به‌طور کوهرنت با هم جمع نمی‌شوند، بلکه با هم برهم‌کنش کرده (با احتمال کم) و به دو موج تخت مختلف با اعداد موجی k_3 و k_4 تبدیل می‌شوند.

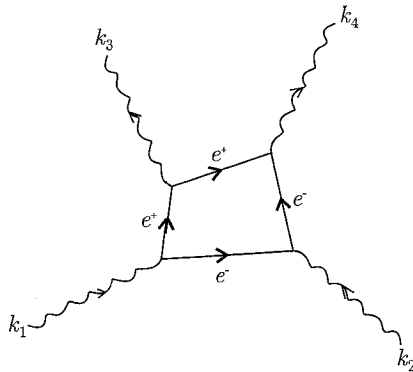
این سیمای غیرخطی الکترودینامیک کوانتومی را می‌توان حداقل برای میدان‌های با تغییرات آرام، برحسب تانسورهای تراوایی الکتریکی و مغناطیسی خلاء بیان نمود

$$\mathbf{D}_i = \varepsilon_0 \sum_k \varepsilon_{ik} \mathbf{E}_k \quad , \quad \mathbf{B}_i = \mu_0 \sum_k \mu_{ik} H_k$$

که در آن

$$\varepsilon_{ik} = \delta_{ik} + \frac{e_G^2 \hbar}{4\Delta\pi m^2 c^3} [\gamma(E^2 - c^2 B^2) \delta_{ik} + \gamma c^2 B_i B_k] + \dots \quad (5-I)$$

$$\mu_{ik} = \delta_{ik} + \frac{e_G^2 \hbar}{4\Delta\pi m^2 c^3} [\gamma(c^2 B^2 - E^2) \delta_{ik} + \gamma E_i E_k] + \dots$$



شکل ۳: پراکندگی نور با نور. نمودار طرح‌وار فرآیندی که توسط آن پراکندگی فوتون - فوتون اتفاق می‌افتد.

در اینجا m و e_G به ترتیب بار (برحسب سیستم واحدهای گوسی) و جرم الکترون هستند. این نتایج در ابتدا توسط اوپلر و کوکل در سال ۱۹۳۵ به دست آمدند. ملاحظه می‌کنیم که در حد کلاسیکی ($\hbar \rightarrow 0$)، اثرات غیرخطی بودن به سمت صفر میل می‌کنند. مقایسه با رابطه‌ی بورن - اینفلد[‡] (۴-I) نشان می‌دهد

(†) وقتی دو تا از فوتون‌های موجود در شکل ۳-۱، فوتون‌هایی مجازی باشند که نشان‌دهنده‌ی برهم‌کنش تا مرتبه‌ی دوم با یک میدان کولنی استاتیکی هسته‌ای است، فرآیند به‌عنوان پراکندگی دلبراک (Delbrück) شناخته می‌شود. بخش ۸-۱۵ از کتاب زیر را ملاحظه کنید

J. M. Jauch and F. Rohrlich, the Theory of photons, Addison-wesley, Reading MA (1955)

1) H. Euler and B. Kockel, *Naturwissenschaften* **23**, 246 (1935) 2) Born-Infeld

که برای غیرخطی بودن‌های کوچک، قدرت میدانی کوانتوم - مکانیکی

$$b_q = \frac{\sqrt{4\pi}}{2} \sqrt{\frac{e_G^2}{\hbar c} \frac{e_G}{r_0^2}} \simeq 0,51 \frac{e_G}{r_0^2}$$

نقشی مشابه با پارامتر بورن - اینفلد b ، بازی می‌کند. در اینجا $r_0 = \frac{e_G^2}{mc^2} \simeq 2,8 \times 10^{-15} \text{m}$ شعاع کلاسیکی الکترون و $\frac{e_G}{r_0^2} = 1,8 \times 10^{20} \frac{\text{V}}{\text{m}}$ میدان الکتریکی در سطح یک چنین الکترونی (کلاسیکی) است. دو نظریه به‌طور گذرا مطرح می‌شود: (الف) ϵ_{ik} و μ_{ik} در رابطه‌ی $(\Delta - I)$ تقریب‌هایی هستند که برای قدرت‌های میدانی‌ای که به سمت b_q میل می‌کنند، یا وقتی میدان‌ها خیلی سریع در فضا یا زمان تغییر می‌کنند، ناکارآمد هستند، (ب) به‌جای مقیاس حدی طول و $\frac{\hbar}{\text{cm}}$ به‌جای زمان؛ (ب) مطابقت عددی تصادفی b_q و $\frac{e_G}{2r_0^2}$ حیرت‌انگیز است اما احتمالاً با اهمیت نباشد، چرا که b_q شامل ثابت پلانک \hbar است.

در مشابهت با قطبش $\mathbf{P} = \frac{(\mathbf{D} - \mathbf{E})}{4\pi}$ در $(\Delta - I)$ صحبت از جملات وابسته به میدان به‌عنوان اثرات قطبشی خلاء می‌کنیم. علاوه‌بر پراکندگی نور توسط نور یا پراکندگی "دلبراک"، قطبش خلاء باعث جابه‌جایی‌های بسیار کوچک در سطوح انرژی اتمی می‌شود. سهم عمده، دقیقاً همانند شکل $(I-3)$ ، مربوط به یک جفت الکترون پوزیترون مجازی است، اما با تنها دو خط فوتونی به جای چهار خط. اگر فوتون‌ها حقیقی باشند فرآیند بر جرم فوتون تأثیر می‌گذارد و به نتیجه‌ی صفر برای جرم فوتون منجر می‌شود. هرچند که اگر فوتون‌ها مجازی باشند، (همانند برهم‌کنش الکترومغناطیسی بین یک هسته و یک الکترون مداری یا در واقع برای هر میدان اعمال‌شده‌ی خارجی) تولید و نابودی یک جفت الکترون پوزیترون مجازی لحظه‌به‌لحظه باعث اثرات قابل مشاهده‌ای می‌شود.

قطبش خلاء، با یک تغییر در برهم‌کنش الکترواستاتیکی بین دو بار در فواصل کوتاه بروز می‌کند، که به‌صورت یک "حائل" برای بارهای لخت با فاصله، یا در جملاتی مدرن‌تر به‌صورت یک ثابت جفت‌شدگی "پیوسته" توصیف شد. چون بار یک ذره به‌صورت قدرت جفت‌شدگی الکترومغناطیسی‌اش در فواصل بزرگ تعریف می‌شود (معادل با انتقال‌های اندازه حرکتی قابل اغماض) لذا، حضور یک کنش پنهان توسط جفت‌های الکترون - پوزیترون نزدیک‌تر به بار ایجاب می‌کند که بار "بنیادی" مشاهده‌شده در فواصل کوتاه بزرگ‌تر از بار تعریف شده در فواصل بلند باشد. به‌طورکمی، کم‌ترین نتیجه‌ی کوانتوم الکترو دینامیکی برای انرژی پتانسیل کولنی بین دو بار $Z_1 e$ و $Z_2 e$ برای قطبش خلاء عبارت است از

$$V(r) = \hbar c \frac{Z_1 Z_2 \alpha}{r} \left[1 + \frac{2\alpha}{3\pi} \int_{2m}^{\infty} dk \frac{\sqrt{k^2 - 4m^2}}{k^2} \left(1 + \frac{2m^2}{k^2} \right) e^{-kr} \right] \quad (6-I)$$

که در آن α ثابت ساختار ریز است ($\approx \frac{1}{137}$) و m عکس طول موج کمپتون (جرم الکترون ضربدر $\frac{c}{h}$). این انتگرال که برهم‌نهمی از پتانسیل‌های یوکاوا ($\frac{e^{-kr}}{r}$) است یک دور سهم از تمام جفت‌های مجازی است. این انتگرال اندازه‌ی انرژی پتانسیل را در فواصل جدایی درون طول موج کمپتون الکترون ($m \approx 10^{-31} \text{ kg}$) افزایش می‌دهد.

به جهت کوتاه‌برد بودن آن، انرژی قطبشی خلاء در اتم‌های سبک بی‌اهمیت است مگر برای اندازه‌گیری‌های بسیار دقیق. هرچند که این انرژی در اتم‌های با Z بالا و در اتم‌های میونی با اهمیت است، که در آن جرم سنگین‌تر میون ($m_\mu \approx 207 m_e$) بدین معنی است که حتی در سبک‌ترین اتم‌های میونی، شعاع بوهر به خوبی درون برد پتانسیل تغییر یافته قرار می‌گیرد. اندازه‌گیری‌های اشعه X در اتم‌های میونی با جرم متوسط، اثباتی با دقت بالا از اثر قطبشی خلاء در ($E-I$) را ارائه داده است.

ایده یک ثابت جفت‌شدگی پیوسته، (یعنی یک قدرت مؤثر برهم‌کنشی که با انتقال اندازه‌ی حرکت تغییر کند) در الکترومغناطیس با نمایش تبدیل فوریه فضایی انرژی برهم‌کنشی ($E-I$) مورد بررسی قرار گرفته است

$$\tilde{V}(Q^2) = \frac{4\pi Z_1 Z_2 \alpha(Q^2)}{Q^2} \quad (7-I)$$

بستگی $\frac{1}{Q^2}$ در رابطه‌ی بالا مشخصه‌ی پتانسیل کولنی است (که در پراکندگی راترفورد آشنا است)، اما در حال حاضر، قدرت با چیزی که ثابت جفت‌شدگی پیوسته $\alpha(Q^2)$ نامیده می‌شود، کنترل می‌شود، که معکوس آن عبارت است از

$$[\alpha(Q^2)]^{-1} \approx \frac{1}{\alpha(0)} - \frac{1}{3\pi} \ln \left(\frac{Q^2}{m^2 e^5 / 3} \right) \quad (8-I)$$

در اینجا $\alpha(0) = \frac{1}{137.036 \dots}$ ثابت ساختار ریز است، e پایه لگاریتم طبیعی و Q^2 مربع انتقال

عدد موج (اندازه حرکت) است. رابطه‌ی ($8-I$) یک تقریب برای مقدار بزرگ $\frac{Q^2}{m^2}$ است. ثابت جفت‌شدگی پیوسته‌ی ($\alpha(Q^2)$)، با آرامی با افزایش Q^2 (فواصل کوتاه‌تر) افزایش می‌یابد؛ ذرات به درون ابری از جفت الکترون پوزیترون‌های حائل نفوذ می‌کنند و یک محصول مؤثری را که بزرگ‌تر از بارها است، تجربه می‌کنند. از آنجا که پایین‌ترین مرتبه‌ی انرژی قطبشی خلاء متناسب با حاصل ضرب α در بارهای خارجی است آن را به عنوان یک اثر خطی توصیف می‌کنیم، هر چند که (برحسب α) شامل مربع بار درونی الکترون و پوزیترون است. اثرات مرتبه‌ی بالاتر کوچک، [همانند شکل ($3-I$)]، با مربع سه فوتون متناظر با توان سوم میدان خارجی یا بار [درواقع برهم‌کنش‌هایی غیرخطی هستند.

نتیجه‌ی نهایی در مورد برهم‌نهمش خطی میدان‌ها در خلاء این است که، در دامنه‌ی کلاسیکی اندازه‌ها و قدرت‌های میدانی قابل حصول، گواهی آشکار برای اعتبار برهم‌نهمش خطی (و عدم وجود گواهی بر

علیه آن) وجود دارد. در دامنه اتمی و زیراتمی، اثرات غیرخطی کوانتوم مکانیکی کوچکی وجود دارند که منشاء آن‌ها در جفت‌شدگی بین ذرات باردار و میدان الکترومغناطیسی نهفته است. این اثرات برهم‌کنش بین ذرات باردار را تغییر می‌دهند و برهم‌کنش بین میدان‌های الکترومغناطیسی را باعث می‌شوند حتی اگر ذرات حضور فیزیکی نیز نداشته باشند.

۴-۱ معادلات ماکسول در محیط‌های ماکروسکوپی

تاکنون میدان‌های الکترومغناطیسی و چشمه‌ها را در خلاء مورد بررسی قرار داده‌ایم. مجموعه‌ی معادلات ماکسول $I-۱$ ب را می‌توان برای میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی \mathbf{E} و \mathbf{B} ، به صورت معادلاتی که میدان‌ها را در جایی از فضا ارائه می‌کنند تصور نمود، مشروط بر اینکه چشمه‌های ρ و \mathbf{J} مشخص باشند. برای تعداد کمی از چشمه‌های مشخص تعیین میدان‌ها یک مسئله مهارشدنی است؛ اما برای توده‌های ماکروسکوپی ماده، جواب معادلات تقریباً غیرممکن هستند. دو جنبه در اینجا وجود دارد. یکی این است که تعداد چشمه‌های جداگانه، (یعنی تعداد ذرات باردار در هر اتم و هسته) به‌طور سرسام‌آوری زیاد است. جنبه‌ی دیگر این است که برای مشاهدات ماکروسکوپی، رفتار دقیق میدان‌ها با تغییرات شدید آن‌ها در فضای روی فواصل اتمی، متناسب نیست. آنچه در این مورد مطرح است، در واقع میانگین یک میدان یا یک چشمه روی یک حجم بزرگ است، (در مقایسه با حجمی که یک تک‌اتم یا مولکول اشغال می‌کند). ما یک چنین کمیت‌های میانگینی را میدان‌های ماکروسکوپی و چشمه‌های ماکروسکوپی می‌نامیم. به‌طور دقیق در بخش ۶-۶ نشان داده شده است که معادلات ماکروسکوپی ماکسول به صورت مجموعه‌ی $I-۱$ الف هستند با \mathbf{E} و \mathbf{B} به مثابه‌ی \mathbf{E} و \mathbf{B} میانگین‌گیری شده‌ی میکروسکوپی (با \mathbf{E} و \mathbf{B} برای معادلات ماکسول در خلاء)؛ در حالی که \mathbf{D} و \mathbf{H} هرگز مضارب ساده‌ای از به ترتیب \mathbf{E} و \mathbf{B} نیستند. کمیت‌های میدان ماکروسکوپی \mathbf{D} و \mathbf{E} که جابه‌جایی الکتریکی و میدان الکتریکی نامیده می‌شوند (همراه با \mathbf{B} که القاء مغناطیسی نامیده می‌شود)، دارای مؤلفه‌هایی هستند که توسط روابط زیر مشخص می‌شود

$$D_{\alpha} = \varepsilon_0 E_{\alpha} + \left(P_{\alpha} - \sum_{\beta} \frac{\partial Q'_{\alpha\beta}}{\partial x_{\beta}} + \dots \right) \quad (9-I)$$

$$H_{\alpha} = \frac{1}{\mu_0} B_{\alpha} - (M_{\alpha} + \dots)$$

کمیت‌های \mathbf{M} ، \mathbf{P} و $Q'_{\alpha\beta}$ مواردی مشابه با مرتبه‌ی بالاتر، میانگین ماکروسکوپی دوقطبی الکتریکی، دوقطبی مغناطیسی، و چهارقطبی الکتریکی و چگالی‌های گشتاوری مرتبه‌ی بالاتر محیط مادی را در حضور میدان‌های اعمال شده نشان می‌دهند. به‌طور مشابه، چگالی‌های بار و جریان ρ و \mathbf{J} میانگین ماکروسکوپی چگالی‌های بار "آزاد" و جریان هستند. بارها و جریان‌های مقید در این معادلات از طریق \mathbf{M} ، \mathbf{P} و $Q'_{\alpha\beta}$ حضور پیدا می‌کنند.

معادلات ماکروسکوپی ماکسول \mathbf{I} -۱ الف، از مجموعه‌ای از هشت معادله‌ی شامل مؤلفه‌های چهار میدان \mathbf{E} , \mathbf{B} , \mathbf{D} و \mathbf{H} تشکیل شده‌اند. چهار معادله‌ی همگن را می‌توان به‌طور رسمی با بیان \mathbf{E} و \mathbf{B} برحسب پتانسیل اسکالر Φ و پتانسیل برداری \mathbf{A} ، حل نمود، اما معادلات غیرهمگن را تا هنگامی که میدان‌های اقتباس‌شده‌ی \mathbf{D} و \mathbf{H} برحسب \mathbf{E} و \mathbf{B} شناخته شوند، نمی‌توان حل کرد. این ارتباط‌ها که معادله‌ی (۹-۱) لحاظ شده‌اند روابط ساختاری نامیده می‌شوند

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}[\mathbf{E}, \mathbf{B}]$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}[\mathbf{E}, \mathbf{B}]$$

علاوه‌بر این برای محیط‌های رسانا، قانون اهم تعمیم‌یافته‌ی زیر وجود دارد

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}[\mathbf{E}, \mathbf{B}]$$

گروه‌های مربعی بیان می‌کنند که ارتباط لزوماً ساده نیست و امکان دارد به تاریخچه‌ی گذشته‌ی ماده نیز (هیستریزیس) بستگی داشته باشند، و یا شاید (این ارتباط‌ها) غیرخطی باشند و غیره.

در بیش‌تر مواد، چهارقطبی الکتریکی و جملات مرتبه‌ی بالاتر در رابطه‌ی (\mathbf{I} -۹) به‌طور کامل قابل اغماض هستند. تنها قطبش‌های الکتریکی و مغناطیسی \mathbf{P} و \mathbf{M} دارای اهمیت هستند. هرچند این بدان معنی نیست که روابط ساختاری در آنجا ساده باشند. تفاوت زیادی در خواص الکتریکی و مغناطیسی ماده وجود دارد، بالاخص در جامدات کریستالی، با موادی فروالکتریک و فرومغناطیس که در غیاب میدان‌های اعمال‌شده دارای \mathbf{P} یا \mathbf{M} غیرصفرند و همچنین تعداد زیادی از مواد دی‌الکتریک، دیامغناطیس و پارامغناطیس معمولی. مطالعه‌ی این خواص یکی از حوزه‌های فیزیک حالت جامد را تشکیل می‌دهد. در این کتاب تنها به‌صورتی بسیار خلاصه و سطحی به چند جنبه‌ی مقدماتی‌تر اشاره می‌کنیم. جهت بحثی بسیار اصولی و جامع در مورد خواص الکترومغناطیسی یک ماده‌ی حجمی، باید به کتاب‌های حالت جامدی همچون کیتل مراجعه نمود.

در موادی غیر از فروالکتریک‌ها یا فرومغناطیس‌ها، حضور یک میدان اعمال‌شده‌ی الکتریکی یا مغناطیسی، برای میدان‌های به قدر کافی ضعیف، قطبشی الکتریکی و یا مغناطیسی را در ماده القا می‌کند که متناسب با اندازه‌ی میدان اعمال‌شده هستند. در آن صورت می‌گوئیم که پاسخ محیط خطی است و مؤلفه‌های دکارتی \mathbf{D} و \mathbf{H} ^۱ را به‌صورت زیر می‌نویسیم

$$\begin{cases} D_\alpha = \sum_\beta \varepsilon_{\alpha\beta} E_\beta \\ H_\alpha = \sum_\beta \mu'_{\alpha\beta} B_\beta \end{cases} \quad (\mathbf{I}-10)$$

(۱) سابق نوشتن $B_\alpha = \sum_\beta \mu_{\alpha\beta} H_\beta$ لازم می‌شد، اما این موضوع قواعد طبیعی مربوط به \mathbf{B} را به‌عنوان میدان مغناطیسی و \mathbf{H} را به‌عنوان کمیت اقتباس‌شده دگرگون می‌کند. در فصل ۵ به عادت قدیمی برخواهیم گشت.

تانسورهای $\varepsilon_{\alpha\beta}$ و $\mu'_{\alpha\beta}$ ، نفوذپذیری الکتریکی (یا تانسوردی الکتریک) و تراوایی مغناطیسی معکوس، نامیده می‌شوند. این تانسورها پاسخ خطی محیط را خلاصه می‌کنند و به ساختمان مولکولی و شاید کریستالی ماده و خواص حجمی آن همانند چگالی و دما وابسته‌اند. برای مواد ساده، پاسخ خطی اغلب در فضا همسانگرد^۱ است. در این صورت تانسورهای $\varepsilon_{\alpha\beta}$ و $\mu'_{\alpha\beta}$ با تمام سه عنصر مساوی خود (در هر تانسور)،

$$\mathbf{H} = \mu' \mathbf{B} = \frac{\mathbf{B}}{\mu} \quad \text{و} \quad \mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$$

برای اینکه قضیه در حالت کلی صحیح باشد معادلات $(I-10)$ ، باید برای تبدیلات فضا و زمان فوریه صادق باشد. این بدان جهت است که رابطه‌ی خطی ساده‌ی بین \mathbf{D} و \mathbf{E} (یا \mathbf{H} و \mathbf{B}) می‌تواند غیرموضعی باشد. بنابراین

$$D(\mathbf{x}, t) = \sum_{\beta} \int d^3x' \int dt' \varepsilon_{\alpha\beta}(\mathbf{x}', t') E_{\beta}(\mathbf{x} - \mathbf{x}', t - t')$$

که در آن ممکن است $\varepsilon_{\alpha\beta}(\mathbf{x}', t')$ حول $\mathbf{x}' = 0$ و $t' = 0$ جایگزیده باشد، اما در نواحی دور از مبدأ غیرصفر است. اگر تبدیلات فوریه‌ی $D_{\alpha}(\mathbf{k}, \omega)$ ، $E_{\beta}(\mathbf{k}, \omega)$ و $\varepsilon_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \omega)$ را توسط رابطه‌ی

$$F(\mathbf{k}, \omega) = \int d^3x \int dt f(\mathbf{x}, t) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} + i\omega t}$$

معرفی کنیم، معادله‌ی $(I-10)$ را می‌توانیم برحسب تبدیلات فوریه به صورت زیر بنویسیم

$$D_{\alpha}(\mathbf{k}, \omega) = \sum_{\beta} \varepsilon_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \omega) E_{\beta}(\mathbf{k}, \omega) \quad (I-11)$$

می‌توان رابطه‌ی مشابهی را برای $B_{\beta}(\mathbf{k}, \omega)$ برحسب $H_{\alpha}(\mathbf{k}, \omega)$ نوشت. بنابراین تانسورهای تراوایی مغناطیسی در حالت کلی تابعی از فرکانس و بردار موج هستند. برای نور مرئی یا تابش الکترومغناطیسی با طول موج بالاتر، اغلب صرف‌نظر کردن از عدم جایگزیدگی در فضا پذیرفتنی است. بدین ترتیب $\varepsilon_{\alpha\beta}$ و $\mu'_{\alpha\beta}$ تنها تابعی از فرکانس‌اند و این همان وضعیتی است که در فصل ۷ مورد بحث قرار می‌گیرد که بحث ساده‌ای از خواص فرکانس بالای ماده را ارائه می‌کند و نتایج علیت را نیز مورد بررسی قرار خواهد داد. اثرات برد بلند برای رساناها و ابررساناها می‌تواند اهمیت داشته باشد. برای مثال، وقتی مسیر آزاد میانگین^۲ برخورد الکترونی در یک رسانا، در مقایسه با عمق پوسته بزرگ باشد یک شکل موضعی فضایی برای قانون اهم هرگز دیگر پذیرفتنی نخواهد بود. در این صورت بستگی به بردار موج نیز وارد بحث می‌شود. در فهم بعضی از ویژگی‌های جامدات، مفهوم یک ثابت دی‌الکتریک به صورت تابعی از بردار موج و فرکانس، مفید است. تعدادی از مراجع نمونه در خواندنی‌های پیشنهادی در انتهای این مقدمه ارائه شده‌اند.

برای جهت‌گیری بحث خاطر نشان می‌کنیم که در فرکانس‌های پایین ($\nu \leq 10^6 \text{ Hz}$) که در آن تمام بارها، (صرف‌نظر از اینرسی آن‌ها) به میدان‌های اعمال شده پاسخ می‌دهند، جامدات نوعاً دارای ثابت‌های دی‌الکتریکی در گستره‌ی تغییرات $20 - 2 \sim \frac{\varepsilon_{\alpha\beta}}{\varepsilon_0}$ هستند، با مقادیر بزرگ‌تر که نامتعارف هم نیستند.

سیستم‌های با گشتاورهای دوقطبی مولکولی دائمی می‌توانند دارای ثابت‌های دی‌الکتریکی بزرگ‌تر و با حساسیت دمایی بیش‌تری باشند. برای مثال، آب مقطر دارای ثابت دی‌الکتریک استاتیکی به اندازه‌ی $\frac{\epsilon}{\epsilon_0} = ۸۸$ در ۰°C و $\frac{\epsilon}{\epsilon_0} = ۵۶$ در ۱۰۰°C است. در فرکانس‌های نوری، تنها الکترون‌ها می‌توانند به‌گونه‌ای با اهمیت از خود عکس‌العمل نشان دهند. ثابت‌های دی‌الکتریک در دامنه‌ی تغییرات $۱۰ - ۱۷ \frac{\epsilon_{\alpha\alpha}}{\epsilon_0} \simeq$ قرار گرفته‌اند و برای اکثر جامدات داریم؛ $۳ - ۲ \simeq \frac{\epsilon_{\alpha\alpha}}{\epsilon_0}$. روی ناحیه تغییرات مرئی آب دارای $\frac{\epsilon}{\epsilon_0} = ۱۷۷ - ۱۸۰$ است که اساساً از ۰ تا ۱۰۰°C مستقل از دما است.

نوع عکس‌العمل مواد به یک میدان مغناطیسی خارجی به خواص اتم‌ها و یا مولکول‌های آن ماده به‌طور جداگانه و همچنین به برهم‌کنش بین آن‌ها بستگی دارد. مواد دیامغناطیس شامل اتم‌ها یا مولکول‌هایی هستند که فاقد اندازه‌ی حرکت زاویه‌ای برآیند می‌باشند. عکس‌العمل به یک میدان مغناطیسی اعمال‌شده به معنی پیدایش جریان‌های اتمی چرخنده است که باعث ایجاد یک مغناطش حجمی بسیار کوچک در ماده می‌شود که میدان ناشی از آن با میدان اعمال‌شده مخالفت می‌کند. با توجه به تعریف $\mu'_{\alpha\beta}$ در رابطه‌ی (I-۱۰) و شکل رابطه‌ی (I-۹) این موضوع بدان معنی است که $\mu_0 \mu'_{\alpha\alpha} > ۱$.

بیس‌موت شناخته‌شده‌ترین ماده‌ی دیامغناطیس، دارای $۱۰^{-۴} \times ۱/۸ \simeq (\mu_0 \mu'_{\alpha\alpha} - ۱)$ است. بدین‌ترتیب دیامغناطیس اثری بسیار کوچک است. اگر واحد اتمی پایه‌ی ماده دارای یک اندازه‌ی حرکت زاویه‌ای برآیند، (ناشی از الکترون‌های جفت‌نشده) باشد، ماده پارامغناطیس خواهد بود. گشتاور مغناطیسی الکترون فرد به موازات میدان اعمال‌شده تراز می‌شود. از این‌رو، $\mu_0 \mu'_{\alpha\alpha} < ۱$ است. مقادیر نوعی در دمای اتاق در حدود تغییرات $۱۰^{-۵} - ۱۰^{-۲} \simeq (\mu_0 \mu'_{\alpha\alpha} - ۱)$ هستند، اما در دماهای بالاتر به جهت اثر کاتوره‌ای^۱ مربوط به برانگیختگی‌های گرمایی، کاهش می‌یابند.

مواد فرومغناطیس، پارامغناطیس نیز هستند، اما به‌جهت برهم‌کنش بین اتم‌ها، شدیداً رفتار متفاوتی از خود نشان می‌دهند. زیر دمای کوری (۱۰۴°K برای Fe، ۶۳۰°K برای N_i) مواد فرومغناطیس از خودشان مغناطش خودبه‌خودی به نمایش می‌گذارند؛ یعنی تمامی گشتاورهای مغناطیسی در یک ناحیه که از لحاظ میکروسکوپی یک دامنه نامیده می‌شوند، با هم تراز می‌شوند. اعمال یک میدان خارجی باعث تغییر در دامنه‌ها می‌شود و همچنین باعث می‌شود تا گشتاورها در دامنه‌های مختلف با یکدیگر هم‌جهت شده و منجر به اشباع مغناطش حجمی شود. برداشتن میدان (از روی ماده) کسر قابل ملاحظه‌ای از گشتاورها را هنوز به همان حالت تراز خود باقی می‌گذارد، که این مقدار می‌تواند مغناطشی دائمی را که به بزرگی $B_T = \mu_0 M_T \leq ۱$ تسلا است ارائه دهد. برای اطلاعات مربوط به خواص دی‌الکتریک و مغناطیسی مواد، خواننده می‌تواند به تعدادی از هندبوک‌های اصلی فیزیک مراجعه کند که از این طریق خواننده به تألیفات اختصاصی‌تر و دقیق‌تر راهنمایی خواهد شد.

موادی که به میدان‌های ضعیف پاسخی خطی نشان می‌دهند در نهایت در قدرت‌های میدانی به قدر

1) randomizing effect

کافی قوی؛ همانند نوسانگرهای الکترونی و یونی که تا دامنه‌های بزرگ برانگیخته می‌شوند از خود رفتاری غیرخطی به نمایش خواهند گذاشت. روابط خطی ($I=10^\circ$) برای مثال به صورت زیر اصلاح می‌شوند

$$D_\alpha = \sum_\beta \varepsilon_{\alpha\beta}^{(1)} E_\beta + \sum_{\beta\gamma} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma}^{(2)} E_\beta E_\gamma + \dots \quad (12-I)$$

برای میدان‌های ساکن نتایج فوق به‌طور اخص مهم نیستند اما برای میدان‌های متغیر با زمان قضیه به‌گونه‌ی دیگری است. یک دامنه‌ی موج بلند با دو فرکانس ω_1 و ω_2 علاوه بر فرکانس‌های ω_1 و ω_2 باعث ایجاد امواجی با فرکانس‌های $0, \omega_1, 2\omega_1, \omega_2, 2\omega_2, \omega_1 - \omega_2$ نیز در محیط می‌شود. با توجه به جملات خطی مکعبی و بالاتر، می‌توان یک طیف هم‌تراز غنی‌تر برای فرکانس‌ها تولید کرد. با گسترش لیزرها، رفتار غیرخطی این نوع از منابع نوری باعث به‌وجود آمدن یک حوزه‌ی تحقیقاتی (و همچنین یک ابزار آزمایشگاهی) مختص به خود، تحت عنوان اپتیک غیرخطی شده است، در حال حاضر، لیزرها قادر به تولید پالس‌هایی نوری با میدان‌های الکتریکی حداکثری نزدیک به 10^{12} تا حتی 10^{13} $\frac{V}{m}$ هستند؛ میدان الکتریکی ساکنی که توسط الکترون در مدارش در یک اتم هیدروژن تجربه می‌شود عبارت است از $\frac{eG}{a_0^2} \simeq 5 \times 10^{11} \frac{V}{m}$. بدین ترتیب به نظر می‌رسد یک چنین میدان‌هایی در لیزر به‌خوبی قادر به راه‌انداختن نوسانگرهای اتمی به طریقه‌ی غیرخطی باشند (راستش را بخواهید قادر به تخریب نمونه‌ی مورد مطالعه!)

مراجعی تا حد چند نمونه از نوشته‌های (رساله‌ها) مربوط به این موضوع خاص، در خواندنی‌های پیشنهادی در انتهای این مقدمه ارائه شده‌اند. خواننده این کتاب مجبور خواهد بود که به پدیده‌های خطی اساسی مطرح شده در این کتاب قناعت کند.

I-5 شرایط مرزی در فصل مشترک بین محیط‌های مختلف

معادلات ماکسول ($I=1$) معادلات دیفرانسیلی هستند که به‌طور موضعی در هر نقطه از فضا - زمان (x, t) به‌کار می‌روند. با کمک قضیه‌ی دیورژانس و قضیه‌ی استوکس، می‌توان آن‌ها را به‌صورت انتگرالی درآورد. فرض کنید V یک حجم محدود در فضا، و S سطح بسته‌ی احاطه‌کننده‌ی آن باشد، da یک المان مساحت روی سطح فوق و \mathbf{n} عمود یکانی بر سطح در da است که جهت آن به‌طرف خارج از حجم فوق است. بدین ترتیب اگر قضیه‌ی دیورژانس روی معادلات اول و آخر از مجموعه‌ی $I=1$ الف اعمال شود، روابط انتگرالی زیر را نتیجه خواهد داد

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} da = \int_V \rho d^3x \quad (13-I)$$

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} da = 0 \quad (14-I)$$

رابطه‌ی اول دقیقاً همان قانون گوس است که طبق این قانون شار کل \mathbf{D} ی گذرنده از سطح، مساوی بار موجود در درون آن سطح است. دومین رابطه، به جهت نبود بارهای مغناطیسی، مشابه با عدم وجود شار خالص مغناطیسی \mathbf{B} ی گذرنده از یک سطح بسته است. به گونه‌ای مشابه، فرض کنید C یک مسیر بسته در فضا باشد؛ S' یک سطح باز که پوشش‌دهنده‌ی این مسیر است و $d\mathbf{l}$ یک المان خطی روی مسیر و در نهایت da یک المان سطحی روی S' و \mathbf{n}' یک عمود یکانی در da که در جهتی اشاره می‌کند که از قاعده‌ی دست راست مشخص می‌شود (در جهت انتگرال‌گیری حول مسیر) بدین ترتیب اعمال قضیه‌ی استوکس برای دو معادله‌ی وسطی در مجموعه‌ی ۱-۱ (الف) روابط انتگرالی زیر را نتیجه می‌دهد

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_{S'} \left[\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right] \cdot \mathbf{n}' da \quad (15-I)$$

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \int_{S'} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \mathbf{n}' da \quad (16-I)$$

معادله‌ی (15-I) قانون آمپر ماکسول برای میدان‌های مغناطیسی و (16-I) قانون القاء الکتریکی فارادی است.

این هم‌ارزهای انتگرالی آشنا برای معادلات ماکسول را می‌توان به‌طور مستقیم برای استخراج رابطه‌ی مربوط به مؤلفه‌های عمودی و مماسی میدان‌ها روی دو طرف سطح بین محیط‌های مختلف مورد استفاده قرار داد (احتمالاً با یک بار سطحی یا چگالی جریان در فصل مشترک). یک آرایش هندسی مناسب در شکل 4-I نشان داده شده است. یک جعبه‌ی قرص گوسی بینهایت کوچک، سطح مرزی بین دو محیط با خواص الکترومغناطیسی مختلف را در بر می‌گیرد. به‌طور مشابه، مسیر بی‌نهایت کوچک C دارای اضلاعی روی دو طرف مرز است و طوری جهت گرفته است که عمود بر سطح پوشش‌دهنده‌ی آن، بر فصل مشترک دو محیط مماس است. ابتدا روابط (13-I) و (14-I) را برای حجم جعبه قرص به‌کار می‌بریم. در حد یک جعبه قرص بسیار کم عمق (یا سطحی)، سطح جانبی سهمی در انتگرال‌های طرف چپ روابط (13-I) و (14-I) نخواهد داشت. تنها قسمت‌های بالا و پایین جعبه‌ی قرص در این انتگرال‌ها سهم دارند. اگر بالا و پایین جعبه قرص موازی و مماس بر سطح باشند، در این صورت انتگرال طرف چپ در (13-I) عبارت است از

$$\oint \mathbf{D} \cdot n d\mathbf{a} = (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) \cdot \mathbf{n} \Delta a$$

و به‌گونه‌ای مشابه برای رابطه‌ی (14-I).

اگر چگالی بار ρ برای ایجاد یک چگالی بار سطحی ایده‌آل σ در فصل مشترک نامتعارف باشد، در این صورت انتگرال سمت راست در رابطه‌ی (13-I) عبارت خواهد بود با

$$\int_v \rho d^3x = \sigma \Delta a$$

بدین ترتیب، مؤلفه‌های عمودی مربوط به \mathbf{D} و \mathbf{B} روی دو طرف سطح مرزی طبق رابطه‌های زیر به هم مربوط می‌شوند

$$(\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) \cdot \mathbf{n} = \sigma \quad (17-I)$$

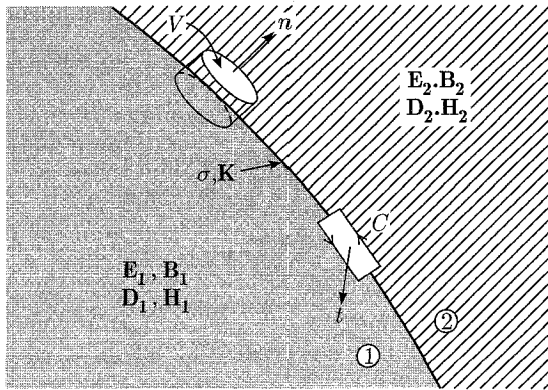
$$(\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (18-I)$$

برحسب کلمات می‌گوییم؛ مؤلفه‌ی عمودی B متصل است و انفصال مؤلفه‌ی عمودی D در هر نقطه، مساوی چگالی بار سطحی در آن نقطه است.

با روشی مشابه، حلقه‌ی استوکسی بی‌نهایت کوچکی را می‌توان برای تعیین انفصال‌های مؤلفه‌های مماسی \mathbf{E} و \mathbf{H} مورد استفاده قرار داد. در صورتی که اضلاع کوچک مسیر C در شکل ۴، طول قابل اغماضی داشته باشند و هر ضلع بلند موازی با سطح دارای طول Δl باشد، در این صورت انتگرال سمت چپ ($16-I$) عبارت خواهد بود با

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = (\mathbf{t} \times \mathbf{n}) \cdot (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) \Delta l$$

و به‌طور مشابه برای طرف سمت چپ رابطه‌ی ($15-I$).



شکل ۴: نمودار طرح‌وار سطح مرزی بین محیط‌های مختلف (خط توپر). فرض شده است که ناحیه‌ی مرزی، حامل چگالی‌های بار و جریان سطح ایده‌آل σ و \mathbf{K} باشد. حجم V ، یک جعبه‌ی قرص کوچک است که نیمی از آن در یک محیط و نیمی در محیطی دیگر قرار دارد، همراه با عمود \mathbf{n} که نوک پیکان آن از محیط ۱ به محیط ۲ اشاره می‌کند. بخشی از مسیر مستطیلی C در یک محیط و بخشی در محیط دیگر قرار گرفته است، و با صفحه‌ی خود عمود بر سطح مرزی) طوری جهت یافته است که عمود \mathbf{t} آن مماس بر سطح مرزی است.

طرف سمت راست رابطه‌ی ($16-I$) صفر می‌شود، چراکه $\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ در سطح محدود است و وقتی طول اضلاع کوتاه به سمت صفر میل می‌کنند، مساحت حلقه صفر می‌شود. هرچند که اگر یک چگالی جریان

سطحی ایده‌آل \mathbf{K} دقیقاً روی سطح مرزی جاری باشد، طرف سمت راست ($I-I$) صفر نخواهد شد. در یک چنین وضعیت‌هایی انتگرال موجود در سمت راست ($I-I$) عبارت خواهد بود با

$$\int_{S'} \left[\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right] \cdot \mathbf{t} da = \mathbf{K} \cdot \mathbf{t} \Delta l$$

با توجه به بحث مشابه‌ای که الساعه ارائه شد جمله‌ی دوم در انتگرال فوق صفر می‌شود. بنابراین مؤلفه‌های مماسی \mathbf{E} و \mathbf{H} روی دو طرف مرز طبق روابط زیر به یکدیگر مربوط می‌شوند

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) = 0 \quad (19-I)$$

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = \mathbf{K} \quad (20-I)$$

از رابطه‌ی ($I-20$) استنباط می‌شود که چگالی سطحی \mathbf{K} در هر نقطه تنها دارای مؤلفه‌هایی به موازات سطح است. مؤلفه‌ی مماسی \mathbf{E} در عبور از یک فصل مشترک متصل است، در حالی‌که مؤلفه‌های مماسی \mathbf{H} به اندازه‌ای که مقدارش مساوی با مقدار چگالی جریان سطحی و جهت آن موازی $\mathbf{n} \times \mathbf{K}$ باشد، منفصل است. معادلات انفصالی ($I-20$) - ($I-17$) در حل معادلات ماکسول در محیط‌های مختلف مفیدند و همچنین جواب‌ها را برای به دست آوردن میدان‌ها در تمامی فضا به هم مربوط می‌کنند.

I-6 چند نکته راجع به ایده‌آل‌سازی در الکترومغناطیس

در بخش قبل، از توزیع‌های سطحی بار و جریان استفاده کردیم. اینها (این کارها؛ م) به‌طور واضح ایده‌آل‌سازی‌هایی ریاضی هستند که در دنیای فیزیکی وجود ندارد. امور انتزاعی دیگری نیز وجود دارد که در سرتاسر الکترومغناطیس اتفاق می‌افتد. برای مثال، در الکترواستاتیک، از نگه داشتن اجسام در یک پتانسیل ثابت نسبت به یک پتانسیل صفر صحبت می‌کنیم که معمولاً "زمین" نامیده می‌شود. رابطه‌ی یک چنین ایده‌آل‌سازی‌هایی با دنیای حقیقی شاید ارزش بحث کمی داشته باشد، گرچه برای یک استاد مجرب، رابطه‌ی این ایده‌آل‌سازها با دنیای حقیقی بیش‌تر واضح به نظر می‌رسد.

در ابتدا سؤال مربوط به نگه داشتن یک جسم رسانا در یک پتانسیل الکترواستاتیکی ثابت نسبت به یک مقدار مرجع را مورد بررسی قرار می‌دهیم. فرض مطلقاً که در اینجا صورت گرفته این است که، روش‌های مورد نظر برای این کار به‌طور قابل ملاحظه‌ای آرایش بارها و میدان‌ها را به هم نمی‌ریزند. برای نگه داشتن یک شیء در پتانسیل ثابت، داشتن یک مسیر رسانا (حداقل گاه‌گاهی) یا معادل آن داشتن یک مسیر رسانا از شیء به یک منبع بار در فاصله‌ی دور (در "بی‌نهایت") ضروری است، طوری‌که وقتی سایر اجسام باردار یا بدون بار در مجاورت آن قرار می‌گیرند، بار بتواند با جاری شدن به درون جسم یا با خارج شدن از آن، همواره پتانسیل را در مقدار مورد نظر ثابت نگه دارد. اگرچه امکان روش‌های بسیار

پیشرفته‌ای برای این کار وجود دارد، ولی به‌طور معمول سیم‌های فلزی برای ایجاد مسیر رسانا مورد استفاده قرار می‌گیرند. به‌طور شهودی انتظار داریم سیم‌های کوچک آشفته‌گی کم‌تری نسبت به سیم‌های بزرگ ایجاد کنند. دلیل این موضوع به شرح ذیل است:

چون مقدار الکتریسیته موجود روی هر بخش مشخص از یک سیم، (در یک پتانسیل مشخص) وقتی قطر سیم به‌طور نامحدودی کاهش می‌یابد به‌گونه‌ای نامحدود تقلیل پیدا می‌کند، توزیع الکتریسیته روی اجسامی با ابعاد بزرگ، با وارد کردن سیم‌های فلزی بسیار نازک، به‌طور محسوسی تحت تأثیر قرار نخواهد گرفت، همانند آنچه برای تشکیل ارتباط الکتریکی بین این اجسام و زمین، و ماشین الکتریکی، یا یک الکترومتر*، داریم.

مسئلاً میدان الکتریکی در همسایگی نزدیک سیم نازک بسیار بزرگ خواهد بود. هرچند که در فواصل دور، از مرتبه‌ی اندازه‌ی اجسام دارای ابعاد نسبتاً بزرگ، اثرات فوق را می‌توان کوچک در نظر گرفت. یک بررسی تاریخی مهم از عبارات ماکسول، ۲۰۰ سال پیش توسط هنری کاوندیش ارائه شده است. کاوندیش با انجام آزمایش‌های انجام شده در یک اصطبل تجدید بنا شده از خانه‌ی پدری‌اش، با استفاده از بطری‌های لید به‌عنوان چشمه‌های بار، سیم‌های نازک به‌عنوان رسانا و معلق نمودن اجسام در اتاق، مقادیر بار روی استوانه‌ها، دیسک‌ها و سایر اجسام را (که در پتانسیلی ثابت نگه داشته شده بودند) اندازه‌گیری کرد و آن‌ها را با بار روی کره‌ای که در پتانسیل مشابهی قرار داشت، مقایسه نمود، (کره‌ی مشابه نشان داده شده در شکل $(I-1)$). مقادیر ظرفیت‌هایی که به این طریق اندازه‌گیری کرد، تا چند درصدی صحیح هستند. برای مثال او دریافت که نسبت ظرفیت یک کره به مقدار این ظرفیت برای یک دیسک دایروی نازک با همان شعاع، $1/57$ است. در حالی‌که مقدار موردنظر این نسبت $\frac{\pi}{4}$ است.

در استفاده از سیم‌های نازک‌تر و نازک‌تر محدودیت‌هایی عملی وجود دارد. مقدار بار بر واحد طول تنها به‌صورت لگاریتمی کاهش پیدا می‌کند [به‌صورت معکوس $\ln\left(\frac{d}{a}\right)$ ، که در آن a شعاع میانگین سیم و d فاصله‌ی نوعی سیم از سطح یک رسانا است]. برای کمینه کردن اغتشاش سیستم تا تقریباً زیر یک سطح خاص، لازم است (جهت حفظ پتانسیل) به راه‌های دیگری، برای مثال به روش‌های مقایسه‌ای با استفاده از پرتوهایی متناوب از ذرات باردار متوسل شویم.

وقتی گفته می‌شود یک جسم رسانا "زمین" شده است، فرض بر این است که این جسم با یک سیم رسانای بسیار نازک به یک مخزن بار در فاصله دور متصل است تا با این کار صفر معمول پتانسیل تأمین شود. اجسامی که در پتانسیل‌های ثابت نگه داشته شده‌اند، تمامی به‌طور مشابه، از یک سمت به یک منبع ولتاژ همانند یک باتری وصل شده‌اند، و از سمت دیگر به "زمین" (معمول پتانسیل صفر). در این صورت، اگر اجسامی که در ابتدا الکتریسیته‌دار شده‌اند، طوری نسبت به یکدیگر به حرکت درآیند که توزیع الکتریسیته‌ی آن‌ها تغییر پیدا کند (اما پتانسیل آن‌ها ثابت باقی بماند)، مقادیر مناسبی بار از مخزن در فاصله‌ی دور خارج و یا به آن وارد می‌شود، که در آن فرض شده است که یک منبع مخزنی بی‌پایان از بار

است. ایده‌ی "زمین‌شدگی" شیء یک مفهوم خوش تعریف در الکترواستاتیک است، که در آن زمان یک عامل نیست، اما برای میدان‌های نوسان‌کننده، سرعت محدود انتشار این مفهوم را مبهم می‌کند. به عبارت دیگر اثرات القایی و ظرفیتی سرگردان می‌توانند به‌گونه‌ای چشم‌گیر وارد عمل شوند. در آن صورت دقت زیادی برای اطمینان از یک اتصال "خوب زمین" لازم است.

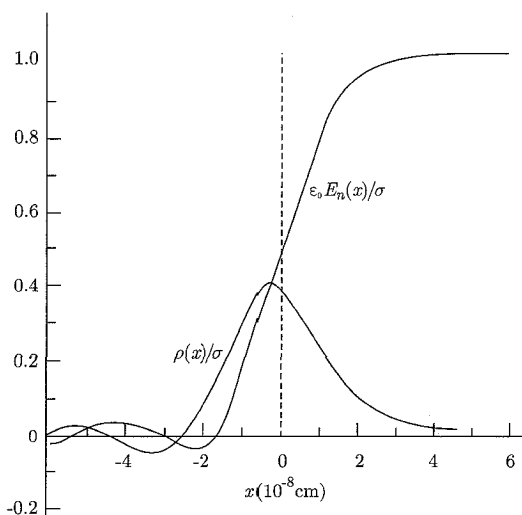
ایده‌آل‌سازی دیگر در الکترومغناطیس ماکروسکوپی، ایده‌ی یک چگالی بار سطحی یا یک چگالی جریان سطحی است. واقعیت فیزیکی این است که بار یا جریان دقیقاً در مجاورت سطح محدود می‌شود. در صورتی‌که این ناحیه دارای ضخامت کوچکی در مقایسه با مقیاس طولی موردنظر باشد، می‌توانیم واقعیت را با ایده‌آل یک ناحیه با ضخامت بی‌نهایت کوچک تقریب زده و از یک توزیع سطحی بار یا جریان صحبت کنیم. دو محدودیت متفاوت وجود دارد که لازم است از هم تفکیک شوند. یکی محدودیتی است که در آن توزیع "سطحی" به ناحیه‌ای در نزدیکی سطح محدود می‌شود، که به لحاظ ماکروسکوپی کوچک، اما از لحاظ میکروسکوپی بزرگ است. یک مثال در این مورد، نفوذ میدان‌های متغیر با زمان به درون یک رسانای خیلی خوب (اما نه کامل) است که در بخش ۸-۱ توصیف شد. این نکته دریافت شد که میدان‌ها (متغیر با زمان) به یک ضخامت δ که عمق پوسته نامیده می‌شود محدود می‌شوند و اینکه برای فرکانس‌های به‌قدر کافی بالا و رسانایی‌های خیلی خوب، δ می‌تواند از لحاظ ماکروسکوپی بسیار کوچک باشد. در این صورت مناسب است برای به‌دست آوردن یک چگالی جریان سطحی مؤثر K_{eff} از چگالی جریان J روی جهت عمود بر سطح انتگرال‌گیری کنیم.

محدودیت دیگر، در حقیقت میکروسکوپی است و با اثرات کوانتوم مکانیکی در ساختار اتمی مواد مطرح می‌شود. برای نمونه، توزیع بار اضافی یک جسم رسانا در الکترواستاتیک را در نظر بگیرید. کاملاً این موضوع مشخص است که این بار به‌طور کامل روی سطح رسانا قرار می‌گیرد. بنابراین ما از یک چگالی بار سطحی σ صحبت می‌کنیم. درون رسانای فوق‌هیچ میدان الکتریکی‌ای وجود ندارد، ولی طبق رابطه‌ی (۱۷-۱) یک مؤلفه‌ی عمودی از میدان الکتریکی دقیقاً در خارج از رسانا وجود خواهد داشت.

در سطح میکروسکوپی بار به‌طور کامل روی سطح قرار نمی‌گیرد و میدان به‌طور منفصل تغییر نمی‌کند. بررسی‌های بسیار مقدماتی نشان می‌دهد که ناحیه‌ی گذار از لحاظ گستردگی به اندازه‌ی چند قطر اتمی است و یون‌های موجود در یک فلز را می‌توان به‌صورتی نسبتاً بی‌حرکت و جایگزیده در ناحیه‌ای به اندازه‌ی انگستروم یا بیشتر تصور نمود؛ الکترون‌های آزاد کم‌تر شده‌اند. نتایج محاسبات مدل* فوق در شکل ۱-۵ آمده است. این نتایج از جواب کوانتوم مکانیکی مسئله‌ی چند الکترونی به‌دست آمده‌اند، که در آن یون‌های مربوط به رسانا با یک چگالی بار ثابت متصل در ناحیه‌ی $x < 0$ تقریب زده شده‌اند. چگالی الکترونی ($r_s = 5$) تقریباً برای مس و فلزات قلیائی سنگین‌تر مناسب است. ملاحظه می‌شود که بار الکتریکی

*) N. D. Lang and W. Kohn, Phys. Rev. **B1**, 4555 (1970); **B3**, 125 (1971); V. E. Kenner, R. E. Aller., and W. M. Saslow, Phys. Lett. **38 A**, 225 (1972)

اضافی، به ناحیه‌ای در محدوده‌ی $\pm 2A^\circ$ از "سطح" توزیع یون، محدود شده است. میدان الکتریکی به آرامی روی این ناحیه تا مقدار σ ی آن در "خارج" از رسانا صعود می‌کند. برای وضعیت‌های ماکروسکوپی که در آن 10^{-9} m یک مسافت قابل اغماض است، می‌توانیم چگالی بار و رفتار میدان الکتریکی را به صورت، $\rho(x) = \sigma \delta(x)$ و $E_n(x) = \frac{\sigma \theta(x)}{\epsilon_0}$ ، که متناظر با یک چگالی سطحی واقعی، و یک پرش تابع - پله‌ای از میدان هستند، ایده‌آل‌سازی کنیم.



شکل ۵: توزیع بار اضافی در سطح یک رسانا و توزیع مؤلفه‌ی عمودی میدان الکتریکی. یون‌های جسم در ناحیه $x < 0$ محدود شده و با یک توزیع بار ثابت متصل تقریب زده شده‌اند که الکترون‌ها از میان این توزیع بار حرکت می‌کنند. توده‌ی بار اضافی در ناحیه‌ای به اندازه‌ی $\pm 2A$ از "سطح" محدود شده است.

ملاحظه می‌کنیم که بحث نظری الکترومغناطیس کلاسیک چندین ایده‌آل‌سازی را در خود دارد که بعضی از آن‌ها تکنیکی و بعضی فیزیکی‌اند. موضوع الکترواستاتیک که در فصول اول این کتاب مورد بحث قرار می‌گیرند، به صورت یک علم تجربی از پدیده‌های الکتریکی ماکروسکوپی، همانند تقریباً تمامی جنبه‌های دیگر الکترومغناطیس تعمیم و گسترش یافته است. بسط این قوانین ماکروسکوپی به دامنه‌ی میکروسکوپی آن (حتی برای بارها و جریان‌های موجود در خلاء)، معمولاً یک مقایسه‌ی بی‌دلیل است. قبلاً در این مقدمه بعضی از محدودیت‌های موجود برای این مقایسه را مورد بحث قرار دادیم. نکته‌ای که باید به آن دقت کنیم به شرح ذیل است.

با نگرشی عمیق درمی‌یابیم که جنبه‌های زیادی از قوانین الکترومغناطیس، به خوبی در حوزه‌ی اتمی نیز به کار می‌روند، مشروط بر اینکه چشمه‌های مربوط به میدان‌ها به طور کوانتوم - مکانیکی مورد بحث قرار

گرفته باشند. به این معنی که میانگین کمیت‌های الکترومغناطیسی، روی حجم‌هایی شامل تعداد زیادی از مولکول‌ها، به‌گونه‌ای افت‌وخیزهای سریع را برطرف کنند که میدان‌های استاتیکی اعمال‌شده پاسخ‌های میانگین استاتیک در ماده را ایجاد کنند و در نهایت بار اضافی به معنی ماکروسکوپی آن روی سطح یک رسانا قرار گیرد. بدین ترتیب مشاهدات ماکروسکوپی کولن و آمپر و انتزاع ریاضی از این مشاهدات نسبت به آنچه ممکن است توسط یک فیزیکدان فوق‌العاده محتاط‌کار پیشنهاد شود، قابلیت کاربردی وسیع‌تری دارند. قابل ملاحظه نبودن نفوذپذیری ویژه‌ی الکتریکی یا مغناطیسی هوا، مطمئناً مسائل را ساده خواهد کرد!

مراجع و خواندنی‌های پیشنهادی

تاریخچه‌ی الکتریسیته و مغناطیس به گستردگی تاریخچه‌ی خود علم است، تاکنون در این رابطه دو جلد از کتاب‌های ویتاکر^۱ چاپ شده‌اند، که جلد اول آن موضوع را تا سال ۱۹۰۰ پوشش داده است، و همچنین در این رابطه شرح کوتاه‌تری با تأکید بر مبحث اپتیک در کتاب

Born and Wolf

صورت گرفته است.

گزارش خواندنی دیگری در این رابطه همراه با بحثی احساسی از آزمایش‌های اولیه عبارت است از N. Feather, *Electricity and Matter*, University Press Edinburgh (1968)

آزمایش‌های تجربی در مورد طبیعت عکس مجذوری قانون کولن، یا جرم فوتون (به زبان مدرن)، توسط I. Yu. Kobzarev and L. B. Okun. *USP. Fiz. Nauk* **95**, 131 (1968) [transl. *phys. usp.* **11**, 338 (1968).]

و

A. S. Goldhaber and M. M. Nieto, *Rev. Phys.* **43**, 277 (1971)

مورد یادآوری قرار گرفته‌اند.

بحث قابل دسترسی در ارتباط با اصل پیمانه‌ای در ساختار نظریه‌ی میدان (براساس الکترودینامیک کلاسیک و مکانیک کوانتومی معمول) را می‌توان در مرجع زیر پیدا کرد.

I. J. R. Aitchison and A. J. G. Hey, *Gauge Theories in Particle Physics*, 2nd ed., Adam Hilger, Bristol (1989).

خواندنی‌های پیشنهادی در ارتباط با موضوع معادلات ماکسول و استخراج آن‌ها از معادلات میکروسکوپی را می‌توان در انتهای فصل ۶ پیدا کرد. اساس فیزیک دی‌الکتریک‌ها، فرومغناطیس‌ها و مواد مغناطیسی را می‌توان در کتاب‌های متعددی از فیزیک حالت جامد پیدا کرد، برای مثال

Ashcroft and Mermin

Beam

1) Whittaker

Kittel

Wert and Thomson

Wooten

دومین مرجع از این مراجع (در بالا) مورد توجه مهندسان برق قرار خواهد گرفت. طوری که موضوعاتی کاربردی نظیر نیمه‌هادی‌ها را نیز مورد تأکید قرار داده است.

آخرین مرجع (داده شده در بالا) عمدتاً روی خواص نوری مواد بحث نموده است. نیاز به عدم جایگزینی فضایی در بحث امیدانس سطحی فلزات (اثر پوسته غیرعادی) در چندین جا در مراجع زیر مورد بحث قرار گرفته‌اند

A. B. Pippard, *Advances in Electronics and Electron Physics*, vol. VI, ed. L. Marton, Academic Press, New York (1954), pp. 1-45; *Reports on Progress in Physics*, vol. XXIII, pp. 176-266 (1960); *The Dynamics of Conduction Electrons*, Gordon and Breach, New York (1965).

مفهوم یک بردار موج و ثابت دی‌الکتریک وابسته به فرکانس $\varepsilon(\mathbf{k}, \omega)$ در مراجع زیر آمده است

Kittel, *Advanced Topic D*.

D. Pines, *Elementary Excitations in Solids*, W. A. Benjamin, New York (1963), Chapter 3 and 4.

F. Stern, *Solid State Physics*, vol. 15, eds. F. Seitz and D. Turnbull, Academic Press, New York, pp. 299-408.

رشته‌ی اپتیک غیرخطی در حال حاضر تقریباً ۴۰ سال قدمت دارد. شروع و مقدمات این رشته را می‌توان در مراجع زیر پیدا کرد

J. A. Giordaine, *phys. Today* **22** (1), 38 (1969).

N. Bloembergen, *Am. J. phys.* **33**, 989 (1967).

پدیده‌های اپتیک غیرخطی و کاربردهای مربوطه در مرجع زیر مورد بحث قرار گرفته‌اند

R. L. Sutherland, *Handbook of Nonlinear optics*, Marcel Dekker, New York (1966).

بعضی از کتاب‌های درسی و رساله‌ها (تک‌نگاشت‌ها) در ارتباط با این موضع عبارتند از

R. W. Boyd, *Nonlinear optics*, Academic Press, New York (1990).

M. Schubert and B. Wilhelmi, *Nonlinear optics and Quantum Electronics*, wiley, New York (1986).

Y. R. Shen, *The principles of Nonlinear optics*, wiley, New York (1984).

فصل ۱

مقدمه‌ای بر الکترواستاتیک

بحث در مورد الکترودینامیک را با موضوع الکترواستاتیک آغاز می‌کنیم - پدیده‌هایی در ارتباط با توزیع‌های بار و میدان‌های مستقل از زمان.

برای تعداد زیادی از خوانندگان این موضوع صرفاً به منزله‌ی یک یادآوری است. به‌ویژه آنکه در این فصل موضوع را به‌گونه‌ای مهم و کامل نیز بحث نکرده‌ایم. در این فصل مفاهیم و تعاریفی را که برای مباحث بعدی اهمیت دارند معرفی و تعدادی از دستگاه‌های ریاضی ضروری را نیز نشان داده‌ایم. در فصل‌های آینده روش‌های ریاضی را تعمیم داده و به‌کار خواهیم گرفت.

نکته‌ای از فیزیک را باید در اینجا یادآوری کنیم و آن این است که از نقطه‌نظر تاریخی، منشأ گسترش علم الکترواستاتیک پدیده‌های ماکروسکوپی بوده است، چنانکه این موضوع در انتهای مقدمه هم نشان داده شد. ایده‌آل‌سازی‌هایی هم چون بارهای نقطه‌ای یا میدان‌های الکتریکی در یک نقطه را باید به مثابه ساختارهایی ریاضی تصور کنیم که توصیفی ماکروسکوپی از پدیده‌ها را امکان‌پذیر می‌کنند اما ممکن است به داشتن معنی از لحاظ میکروسکوپی عاجز باشند.

۱-۱ قانون کولن

تمامی الکترواستاتیک از بیان کمی قانون کولن در رابطه با نیروی مؤثر بین اجسام باردار ساکن نشأت می‌گیرد. کولن در یک سری آزمایش‌های مؤثر با روشی تجربی نشان داد که نیروی بین دو جسم باردار

کوچک در هوا، که در فاصله‌ی زیادی نسبت به ابعادشان از هم قرار دارند مستقیماً با اندازه‌ی هر بار تغییر می‌کند.

به‌طور معکوس با مربع فاصله‌ی بین آن‌ها تغییر می‌کند. در امتداد خط واصل بین دو بار است.

جاذبه است اگر دو جسم ضد هم باردار شده باشند و دافعه است اگر بار مشابهی داشته باشند.

علاوه بر این با آزمایش نشان داده شده است که نیروی کل وارد بر یک جسم باردار کوچک از طرف تعدادی از اجسام باردار کوچک دیگر که در اطراف آن قرار دارند، برابر است با جمع برداری نیروهای کولنی بین هر دو جسم به‌طور مجزا.

نتایج کولن برای بارهای موجود در خلاء یا در محیط‌هایی با پذیرایی ویژه‌ی قابل اغماض به‌کار گرفته می‌شوند. بررسی بارها در دی‌الکتریک‌ها را تا فصل ۴ به تعویق می‌اندازیم.

۲-۱ میدان الکتریکی

هر چند در نهایت، کمیتی که اندازه گرفته می‌شود یک نیرو است، اما معرفی مفهومی جدید که یک گام با نیرو تفاوت داشته باشد، یعنی مفهوم میدان الکتریکی ناشی از آرایه‌ای از اجسام باردار، مفید خواهد بود. در اینجا می‌توانیم میدان الکتریکی را به‌صورت نیروی وارد بر واحد بار در یک نقطه‌ی مشخص تعریف کنیم. این کمیت تابعی برداری از مکان است که با \mathbf{E} نشان داده می‌شود. هر چند که در تعریف آن بایستی دقیق‌تر شویم.

لزوماً این نیرو همان نیرویی نیست که ما با قرار دادن یک واحد بار بر روی یک گلوله‌ی آقطی و گذاشتن آن در محل مربوطه مشاهده می‌کردیم. علت این است که یک واحد بار می‌تواند به‌قدری بزرگ باشد که حضورش به‌گونه‌ای قابل ملاحظه وضعیت میدان ناشی از آرایش بار را تغییر دهد. در نتیجه باید از یک فرآیند حدّی استفاده کنیم که در این فرآیند بتوانیم، نسبت نیروی وارد بر جسم کوچک مورد آزمایش به بار روی آن جسم را برای مقادیر کوچک و کوچک‌تر بار اندازه‌گیری کنیم*.

اندازه‌ی این نسبت و جهت نیرو، وقتی اندازه‌ی بار آزمایشی کوچک و کوچک‌تر می‌شود ثابت می‌ماند. در واقع این مقادیر حدّی اندازه و جهت میدان الکتریکی \mathbf{E} را در نقطه‌ی مورد نظر تعریف می‌کنند. برحسب علائم می‌توانیم چنین بنویسیم

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} \quad (1-1)$$

که در آن \mathbf{F} نیرو، \mathbf{E} میدان الکتریکی و q اندازه‌ی بار است. در این معادله فرض شده است که بار q در یک نقطه قرار دارد و نیرو و میدان الکتریکی در آن نقطه محاسبه می‌شوند. قانون کولن را می‌توانیم به‌طور

(* از لحاظ تجربی انحصالی بودن بار الکتریکی (بخش ۱-۱ را ملاحظه کنید) به این معنی است که تحقق این فرآیند حدّی ریاضی از لحاظ فیزیکی ناممکن است. این مورد مثالی از ایده‌آل‌سازی ریاضی در الکترواستاتیک ماکروسکوپی است.

مشابه به صورت زیر هم بنویسیم

اگر \mathbf{F} نیروی وارد بر بار q_1 ، در مکان x_1 ، ناشی از بار نقطه‌ای q_2 در مکان x_2 باشد،
 آنگاه قانون کولن عبارت است از

$$\mathbf{F} = kq_1q_2 \frac{x_1 - x_2}{|x_1 - x_2|^3} \quad (2-1)$$

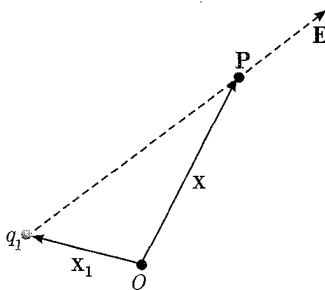
دقت کنید که q_1 و q_2 کمیت‌هایی جبری هستند که می‌توانند مثبت و یا منفی باشند و ثابت تناسب k نیز به سیستم واحدهای مورد استفاده بستگی دارد.

همانند شکل ۱-۱ میدان الکتریکی در نقطه‌ی x ناشی از بار نقطه‌ای q_1 در نقطه‌ی x_1 را می‌توانیم به طور مستقیم به دست آوریم

$$\mathbf{E}(x) = kq_1 \frac{x - x_1}{|x - x_1|^3} \quad (3-1)$$

ثابت k در دستگاه‌های واحدهای مختلف متفاوت است.[†]

در دستگاه واحدهای الکترواستاتیکی (esu) $k = 1$ است و بار واحد باری است که نیرویی به اندازه‌ی یک دین بر روی یک بار نقطه‌ای مشابه که در فاصله‌ی یک سانتی‌متری آن قرار گرفته است وارد کند. واحد بار در دستگاه esu، استات کولن نامیده می‌شود و میدان الکتریکی برحسب استات ولت بر سانتی‌متر اندازه‌گیری می‌شود.



شکل ۱-۱:

در دستگاه SI که در اینجا به کار می‌گیریم، $k = (4\pi\epsilon_0)^{-1} = 10^{-7}c^2$ است که در آن $\epsilon_0 \cong 8.854 \times 10^{-12} \left(\frac{F}{m}\right)$ واحد بار در دستگاه SI کولن (C) است و میدان الکتریکی نیز برحسب ولت بر متر $\left(\frac{V}{m}\right)$ اندازه‌گیری می‌شود. یک کولن (۱C) باعث ایجاد میدانی الکتریکی به اندازه‌ی تقریبی $8.9874 \times 10^9 \frac{V}{m}$ در فاصله‌ی یک

[†] مسئله‌ی واحدها به تفصیل در ضمیمه مورد بحث قرار گرفته است.

متری می‌شود. یک الکترون نیز ($C \approx 1,602 \times 10^{-19}$) باعث ایجاد میدانی به اندازه‌ی تقریبی $\frac{V}{m} \approx 1,44 \times 10^{-9}$ در فاصله‌ی یک متری خواهد شد. $\left(1,44 \frac{nV}{m}\right)$

برهم‌نهی خطی تجربی مشاهده شده برای نیروهای ناشی از تعداد زیادی بار به این معنی است که می‌توانیم میدان الکتریکی در نقطه‌ی x ، ناشی از دستگاهی از بارهای نقطه‌ای q_i که در مکان‌های x_i ($i = 1, 2, \dots, n$) قرار دارند را به صورت جمع برداری زیر بنویسیم

$$\mathbf{E}(x) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n q_i \frac{x - x_i}{|x - x_i|^3} \quad (4-1)$$

اگر بارها به قدری کوچک و زیاد باشند که بتوانیم آن‌ها را با چگالی بار $\rho(x')$ توصیف کنیم، [اگر Δq بار موجود در حجم کوچک $\Delta x \Delta y \Delta z$ در نقطه‌ی x' باشد، در این صورت $\Delta q = \rho(x') \Delta x \Delta y \Delta z$ علامت سیگما به انتگرال تبدیل می‌شود.

$$\mathbf{E}(x) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \rho(x') \frac{x - x'}{|x - x'|^3} d^3x' \quad (5-1)$$

که در آن $d^3x' = dx' dy' dz'$ المان حجمی سه‌بعدی در مکان x' است. در این وضعیت معرفی تابع دلتای دیراک کار ارزشمندی است. تابع دلتا در یک بعد که به صورت $\delta(x - a)$ نوشته می‌شود، یک تابع ناسره‌ی ریاضی است که دارای خواص زیر است

$$1. \quad \delta(x - a) = 0 \quad \text{برای } (x \neq a)$$

$$2. \quad \int \delta(x - a) dx = 1$$

(اگر ناحیه انتگرال‌گیری شامل $x = a$ باشد، و در غیر این صورت صفر می‌شود)

به تابع دلتا می‌توان یک معنی شهودی و ساده هم داد و آن را به صورت حد یک منحنی قله‌دار، هم‌چون یک منحنی گوسی که باریک و باریک‌تر اما بلند و بلندتر می‌شود، توصیف کرد طوری که در نهایت سطح زیر منحنی همواره ثابت بماند. نظریه‌ی ال شوارتز در رابطه با توابع توزیع، یک روش ریاضی پیچیده‌ی جامع در مورد توابع دلتا (و کار با آن‌ها) ارائه می‌دهد.

از تعاریف بالا واضح است که برای یک تابع اختیاری $f(x)$ داریم

$$3. \quad \int f(x) \delta(x - a) dx = f(a)$$

انتگرال حاصل ضرب تابع اختیاری $f(x)$ در مشتق یک تابع دلتا، در صورتی که تابع دلتا به صورت یک تابع خوش‌رفتار، اما قله‌ای تیز رفتار کند نیز به راحتی قابل درک است. به این ترتیب تعریف بالا عبارت

است از

$$۴. \quad \int f(x)\delta'(x-a)dx = -f'(a)$$

که در آن پریم نشان‌دهنده‌ی مشتق‌گیری نسبت به شناسه است. در صورتی که تابع $f(x)$ شناسه‌ی تابع دلتا باشد می‌توان آن را طبق قاعده‌ی زیر تبدیل کرد

$$۵. \quad \delta(f(x)) = \sum_i \frac{1}{\left| \frac{df}{dx}(x_i) \right|} \delta(x - x_i)$$

که در آن طبق فرض $f(x)$ تنها دارای صفرهایی ساده است که در $x = x_i$ قرار گرفته‌اند. در بیش‌تر از یک بعد تنها کافیسست حاصل ضرب توابع دلتا را در هر بعد انجام دهیم. برای مثال در سه بعد با مختصات دکارتی، تابع

$$۶. \quad \delta(x - X) = \delta(x_1 - X_1)\delta(x_2 - X_2)\delta(x_3 - X_3)$$

تابعی است که همه جا صفر است مگر در $x = X$ و به‌گونه‌ای است که

$$\int_{\Delta V} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{X}) d^3x = \begin{cases} 1 & \text{اگر } \Delta V \text{ شامل } \mathbf{x} = \mathbf{X} \text{ باشد} \\ 0 & \text{اگر } \Delta V \text{ شامل } \mathbf{x} = \mathbf{X} \text{ نباشد} \end{cases}$$

دقت کنید که یک تابع دلتا دارای ابعاد یک حجم معکوس به اندازه‌ی تعداد ابعاد فضا است. مجموعه‌ای منفصل از ذرات نقطه‌ای را می‌توان با یک چگالی بار، توسط توابع دلتا توصیف کرد. برای مثال

$$\rho(x) = \sum_{i=1}^n q_i \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) \quad (۶-۱)$$

نشان‌دهنده‌ی توزیعی از n بار نقطه‌ای q_i است که در نقاط مختلف \mathbf{x}_i قرار گرفته‌اند. با جایگزینی چگالی بار (۶-۱) در (۵-۱) و انتگرال‌گیری از آن و با استفاده از خواص توابع دلتا، به جمع انفصالی (۴-۱) می‌رسیم.

۳-۱ قانون گوس

انتگرال (۵-۱) همیشه مناسب‌ترین شکل برای محاسبه‌ی میدان‌های الکتریکی نیست. نتیجه‌ی انتگرالی دیگری هم وجود دارد که قانون گوس نامیده می‌شود که گاهی اوقات مفیدتر است و علاوه بر این منجر به یک معادله‌ی دیفرانسیلی برای $\mathbf{E}(\mathbf{x})$ نیز می‌شود.

برای به دست آوردن قانون گوس، همان‌طور که در شکل ۲-۱ نیز نشان داده شده است، ابتدا بار نقطه‌ای q و سطح بسته‌ی S را در نظر می‌گیریم. فرض کنید r فاصله‌ی بار فوق تا نقطه‌ای بر روی سطح S باشد؛

از طرفی \mathbf{n} بردار یکانی عمود بر سطح در نقطه‌ی مذکور است که جهت آن به طرف خارج از سطح بوده و da نیز همان مساحت سطح است. اگر میدان الکتریکی \mathbf{E} ناشی از بار q در نقطه‌ی مورد نظر روی سطح، با بردار یکانی عمود زاویه‌ی θ را بسازد، آنگاه حاصل ضرب مؤلفه‌ی عمودی E در همان سطح عبارت است از

$$\mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}} da = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\cos\theta}{r^2} da \quad (7-1)$$

چراکه جهت \mathbf{E} در امتداد خط واصل بین همان سطح و بار q است. داریم: $\cos\theta da = r^2 d\Omega$ که در آن $d\Omega$ همان زاویه‌ی فضایی در بر گرفته شده توسط da از محل بار است. بنابراین

$$\mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}} da = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} d\Omega \quad (8-1)$$

حال اگر از مؤلفه‌ی عمودی میدان \mathbf{E} روی کل سطح انتگرال بگیریم، ملاحظه‌ی این نکته ساده خواهد بود که

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}} da = \begin{cases} \frac{q}{\epsilon_0} & \text{اگر } q \text{ درون سطح } S \text{ قرار گیرد} \\ 0 & \text{اگر } q \text{ بیرون سطح } S \text{ قرار گیرد} \end{cases} \quad (9-1)$$

این نتیجه، قانون گوس برای یک تک بار نقطه‌ای است. برای یک مجموعه‌ی منفصل از بارها پرواضح است که

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}} da = \frac{1}{\epsilon_0} \sum q_i \quad (10-1)$$

که در آن جمع فقط روی بارهایی است که داخل سطح S قرار دارند. برای یک چگالی بار متصل $\rho(\mathbf{x})$ قانون گوس به صورت زیر درمی‌آید

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}} da = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho(\mathbf{x}) d^3x \quad (11-1)$$

که در آن V حجم محصور توسط سطح S است. معادله‌ی (۱۱-۱) یکی از معادلات اساسی الکترواستاتیک است. دقت کنید که این معادله بستگی دارد به

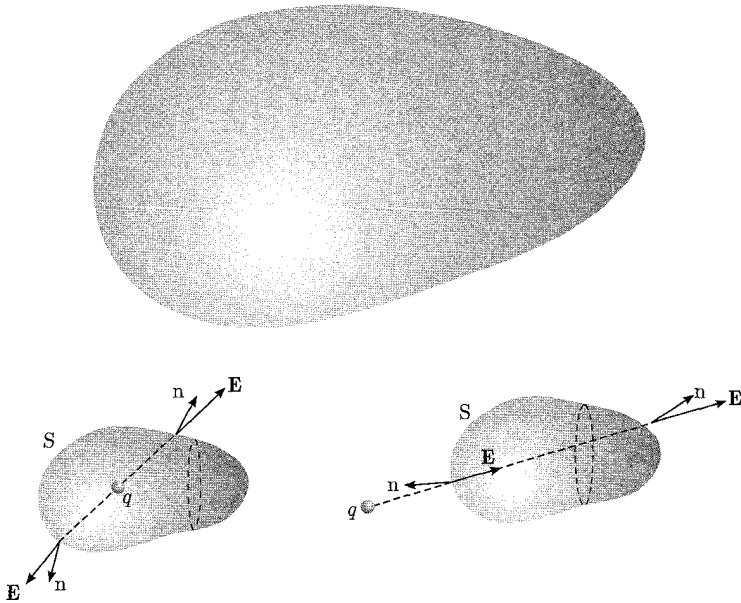
۱. قانون عکس مجذوری برای نیروی بین بارها

۲. طبیعت مرکزی نیرو و

۳. برهم‌نهی خطی اثر بارهای مختلف.

بنابراین به‌وضوح، قانون گوس برای میدان‌های نیروی گرانشی نیوتونی نیز صادق خواهد بود؛ با چگالی

ماده به‌جای چگالی بار.



شکل ۴-۱: قانون گوس. مؤلفه‌ی عمودی میدان الکتریکی بر روی سطح بسته‌ی S انتگرال‌گیری شده است. اگر بار درون (بیرون) S باشد، زاویه‌ی فضایی کل در بر گرفته شده در محل بار q توسط طرف داخلی این سطح دارای مقدار 4π (صفر) است.

۴-۱ شکل دیفرانسیلی قانون گوس

قانون گوس را می‌توانیم فرمول‌بندی انتگرالی قوانین الکترواستاتیک تصور کنیم. ما می‌توانیم با استفاده از قضیه‌ی دیورژانس یک صورت دیفرانسیلی (یعنی یک معادله‌ی دیفرانسیل) به دست آوریم.

قضیه‌ی دیورژانس بیان می‌کند که برای هر میدان برداری خوش رفتار $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ که درون حجم V محصور با سطح بسته‌ی S ، تعریف می‌شود، رابطه‌ی

$$\oint_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} da = \int_V \nabla \cdot \mathbf{A} d^3x$$

بین انتگرال حجمی دیورژانس \mathbf{A} و انتگرال سطحی مؤلفه‌ی عمودی \mathbf{A} (با جهت به سمت خارج) برقرار است. در واقع می‌توانیم این معادله را به مثابه تعریفی برای دیورژانس مورد استفاده قرار دهیم. (صفحه‌ی ۴ کتاب استراتون* را ملاحظه کنید). برای به‌کارگیری قضیه‌ی دیورژانس، رابطه‌ی انتگرالی بیان شده در قانون گوس را در نظر می‌گیریم

$$\oint \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} da = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho(\mathbf{x}) d^3x$$

*) Stratton

حال قضیهی دیورژانس به ما این امکان را می‌دهد که معادله‌ی فوق را برای حجم اختیاری V به صورت زیر بنویسیم

$$\int_V (\nabla \cdot \mathbf{E} - \frac{\rho}{\epsilon_0}) d^3x = 0 \quad (12-1)$$

با روش معمول می‌توانیم انتگرالده را مساوی صفر قرار دهیم و رابطه‌ی زیر را به دست آوریم

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (13-1)$$

که شکل دیفرانسیلی قانون گوس در الکترواستاتیک است. این معادله خود می‌تواند جهت حل مسائل الکترواستاتیک مورد استفاده قرار گیرد، گرچه سروکار داشتن با توابع اسکالر، به جای توابع برداری مکان (و سپس در صورت لزوم استخراج کمیت‌های برداری) اغلب راحت‌تر است. در زیر این نکته روشن‌تر خواهد شد.

۵-۱ معادله‌ی دیگری از الکترواستاتیک و پتانسیل اسکالر

تک معادله‌ی (۱۳-۱) برای مشخص کردن سه مؤلفه‌ی میدان الکتریکی $\mathbf{E}(\mathbf{x})$ به‌طور کامل کافی نیست. احتمالاً بعضی از خوانندگان می‌دانند که یک میدان برداری را می‌توان، در صورتی که دیورژانس و کرل آن در هر جایی از فضا معلوم باشد تقریباً* به‌طور کامل مشخص کرد. بنابراین در پی معادله‌ای هستیم که کرل \mathbf{E} را به صورت تابعی از مکان مشخص کند. یک چنین معادله‌ای یعنی

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0 \quad (14-1)$$

به‌طور مستقیم از قانون تعمیم‌یافته‌ی کولن یعنی (۵-۱) نتیجه می‌شود

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \rho(\mathbf{x}') \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} d^3x'$$

عامل برداری در انتگرالده که تابعی از \mathbf{x} به‌نظر می‌رسد، منفی گرادیان اسکالر $\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}$ است

$$\frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} = -\nabla \left(\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right)$$

چون عمل گرادیان‌گیری روی متغیر \mathbf{x} انجام می‌شود و نه متغیر انتگرال‌گیری \mathbf{x}' ، لذا می‌توان علامت گرادیان را بیرون از انتگرال قرار داد. در این صورت میدان را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \nabla \int \frac{\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x' \quad (15-1)$$

(* مطابق با گرادیان یک تابع اسکالر که معادله‌ی لاپلاس را برآورده کند. بخش ۹-۱ در مورد یکتایی را ببینید.

چون کرل گرادیان یک تابع اسکالر خوش رفتار از مکان صفر است (به‌ازای تمام ψ ها؛ $\nabla \times \nabla \psi = 0$)، معادله‌ی (۱۴-۱) بلافاصله از (۱۵-۱) نتیجه می‌شود. دقت کنید که $\nabla \times \mathbf{E} = 0$ به مرکزی بودن طبیعت نیروی بین بارها و به این حقیقت که نیرو فقط تابعی از فواصل نسبی است بستگی دارد و به طبیعت عکس مجذوری نیرو وابسته نیست.

در رابطه‌ی (۱۵-۱) میدان الکتریکی (که یک بردار است) با عمل گرادیان‌گیری از یک اسکالر به‌دست آمده است. از آنجا که سروکار داشتن با یک تابع از مکان، نسبت به سه تابع راحت‌تر است، لذا تمرکز بر روی تابع اسکالر و نامگذاری آن کار با ارزشی است. در نتیجه پتانسیل اسکالر $\Phi(x)$ را با معادله‌ی زیر تعریف می‌کنیم

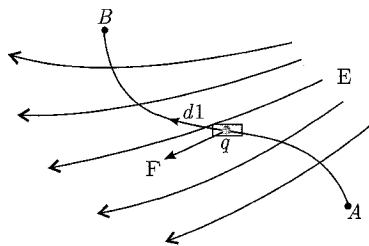
$$\mathbf{E} = -\nabla\Phi \quad (16-1)$$

در این صورت (۱۵-۱) نشان می‌دهد که پتانسیل اسکالر با رابطه‌ی زیر برحسب چگالی بار مشخص می‌شود

$$\Phi(x) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x' \quad (17-1)$$

که در آن انتگرال‌گیری بر روی تمام بارهای موجود در عالم انجام شده است و Φ تنها تا این گستره که بتوانیم یک مقدار ثابت به سمت راست (۱۷-۱) اضافه کنیم، اختیاری خواهد بود.

همانند شکل ۳-۱ اگر کار انجام شده بر روی بار آزمایشی q در انتقال آن از نقطه‌ی A به نقطه‌ی B در حضور میدان الکتریکی $E(x)$ را در نظر بگیریم پتانسیل اسکالر تفسیری فیزیکی خواهد داشت.



شکل ۳-۱:

نیروی وارد بر بار در هر نقطه عبارت است از

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E}$$

بنابراین کار انجام شده در حرکت بار از A به B عبارت است از

$$W = - \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = -q \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \quad (18-1)$$

علامت منفی به این علت ظاهر شده است که کار انجام شده در خلاف جهت اثر میدان بر روی بار را محاسبه کرده‌ایم. با توجه به تعریف (۱۶-۱) می‌توانیم کار را به صورت زیر بنویسیم

$$W = q \int_A^B \nabla \phi \cdot d\mathbf{l} = q \int_A^B d\Phi = q(\Phi_B - \Phi_A) \quad (19-1)$$

این رابطه نشان می‌دهد که $q\Phi$ را می‌توان به عنوان انرژی پتانسیل بار آزمایشی در میدان الکترواستاتیک تعبیر کرد. از (۱۸-۱) و (۱۹-۱) می‌توان ملاحظه کرد که انتگرال خطی میدان الکتریکی بین دو نقطه، مستقل از مسیر بوده و با منفی اختلاف پتانسیل بین این دو نقطه برابر است

$$\int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -(\Phi_B - \Phi_A) \quad (20-1)$$

البته این رابطه به طور مستقیم از تعریف (۱۶-۱) نیز نتیجه می‌شود. اگر مسیر بسته باشد، انتگرال خطی صفر خواهد بود

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0 \quad (21-1)$$

نتیجه‌ای که می‌توان آن را به طور مستقیم از قانون کولن نیز به دست آورد. به این ترتیب کاربرد قضیه استوکس بی‌درنگ منجر به بازگشت به رابطه $\nabla \times \mathbf{E} = 0$ می‌شود. [اگر $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ یک میدان برداری خوش رفتار، S یک سطح اختیاری باز و C منحنی بسته‌ی محدودکننده‌ی سطح S باشد خواهیم داشت

$$\oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \int_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \hat{\mathbf{n}} da$$

که در آن $d\mathbf{l}$ یک المان خطی از منحنی بسته‌ی C است، \mathbf{n} بردار یکانی عمود بر سطح S و مسیر C به گونه‌ای است که در جهت پیچ راستگرد نسبت به \mathbf{n} پیموده می‌شود.]

۶-۱ توزیع‌های سطحی بار، دوقطبی‌ها و انفصال در میدان الکتریکی

و پتانسیل

یکی از مسائل معمول در الکترواستاتیک، تعیین میدان الکتریکی یا پتانسیل ناشی از توزیع بارهای مشخص سطحی است. قانون گوس (۱۱-۱) به طور مستقیم به ما امکان نوشتن تنها یک نتیجه‌ی جزئی را می‌دهد. همان‌گونه که در شکل ۴-۱ نشان داده شده است، اگر سطح S ، با عمود یکانی \mathbf{n} (که جهت آن از طرف ۱ به طرف ۲ است) دارای چگالی بار سطحی $\sigma(\mathbf{x})$ باشد (برحسب کولن بر مترمربع) و میدان‌های الکتریکی در دو طرف سطح \mathbf{E}_1 و \mathbf{E}_2 باشند، بی‌درنگ قانون گوس به ما می‌گوید که

$$(\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) \cdot \hat{\mathbf{n}} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad (22-1)$$

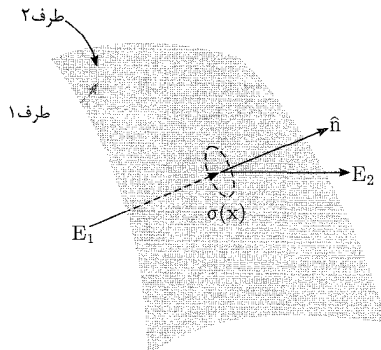
این فرمول E_1 و E_2 را تعیین نمی‌کند مگر اینکه چشمه‌های میدانی دیگری موجود نباشند و اینکه به خصوص هندسه و شکل σ ساده باشد.

تمام آنچه (۲۲-۱) بیان می‌کند این است که، انفصالی به اندازه‌ی $\frac{\sigma}{\epsilon_0}$ در مؤلفه‌ی عمودی میدان الکتریکی در عبور از سطحی با چگالی σ وجود دارد. عبور از سطح نیز در جهت \mathbf{n} انجام می‌گیرد. با استفاده از (۲۱-۱) برای انتگرال خطی \mathbf{E} حول یک مسیر بسته می‌توان نشان داد که مؤلفه‌ی مماسی میدان الکتریکی در عبور از یک سطح مرزی پیوسته باقی می‌ماند. تنها لازم است مسیری مستطیلی را در نظر بگیریم که دو انتهای آن قابل چشم‌پوشی باشد و هر کدام از اضلاع بزرگ آن در دو طرف مرز قرار بگیرند. با استفاده از (۱۷-۱) و با تعویض ρd^3x با σda می‌توانیم برای پتانسیل و متعاقب با آن برای میدان (با عمل مشتق‌گیری) در هر نقطه از فضا (نه دقیقاً روی سطح) به دست آوریم

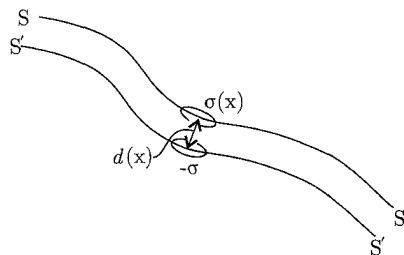
$$\Phi(x) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\sigma(x')}{|x - x'|} da' \quad (23-1)$$

برای توزیع‌های سطحی یا حجمی بار، پتانسیل در همه جا حتی در داخل توزیع بار نیز متصل است. این موضوع را از (۲۳-۱) یا از این حقیقت که \mathbf{E} با وجود انفصال در عبور از یک توزیع سطحی بار محدود است می‌توان نشان داد.

همان‌طوری که در آینده نزدیک ملاحظه خواهید کرد، با حضور بارهای نقطه‌ای یا خطی یا لایه‌های دوقطبی، پتانسیل دیگر اصلاً متصل نخواهد بود. مسئله‌ی دیگر مورد علاقه‌ی ما پتانسیل ناشی از یک توزیع لایه‌ی دوقطبی روی سطح S است. می‌توان چنین تصور کرد که یک لایه‌ی دوقطبی، با قرار دادن سطح S در نزدیکی سطح S' ، که دارای چگالی‌های بار سطحی مساوی و مخالف $\sigma(x)$ در نقاط مجاور هم هستند، شکل می‌گیرد. چنانکه در شکل ۵-۱ نیز نشان داده شده است.



شکل ۵-۱: انفصال در مؤلفه‌ی عمودی میدان الکتریکی در عبور از یک لایه‌ی بار سطحی



شکل ۵-۱:

توزیع لایه‌ی دوقطبی‌ای با قدرت $D(x)$ را با فرض اینکه سطح S' بینهایت به سطح S نزدیک می‌شود، شکل می‌دهیم، به این صورت که چگالی بار سطحی $\sigma(x)$ به‌گونه‌ای بینهایت شود که حاصل ضرب $\sigma(x)$ در جدایی موضعی $d(x)$ بین سطوح S و S' به مقدار حدی $D(x)$ میل کند

$$\lim_{d(x) \rightarrow 0} \sigma(x)d(x) = D(x)$$

جهت گشتاور دوقطبی این لایه عمود بر سطح S و در جهت رفتن از بار منفی به بار مثبت است. برای یافتن پتانسیل ناشی از یک لایه‌ی دوقطبی می‌توانیم یک تک دوقطبی را در نظر بگیریم و سپس یک چگالی سطحی از آن‌ها را برهم‌نهی‌دهی خطی کنیم یا اینکه این نتیجه را با انجام فرآیند ریاضی حدگیری در بالا در غالب کلمات، روی رابطه‌ی چگالی سطحی $(1-23)$ توضیح دادیم، به‌دست آوریم. شاید راه اول ساده‌تر باشد، اما راه دوم تمرین مفیدی در حساب دیفرانسیل و انتگرال برداری است. در نتیجه کار خود را با فرآیند حدگیری آغاز می‌کنیم. با توجه به \mathbf{n} بردار یکانی عمود بر سطح S ، که جهت آن به طرف خارج از سطح S' است (چنانکه در شکل ۶-۱ نشان داده شده است) پتانسیل ناشی از این دو سطح نزدیک به هم عبارت است از

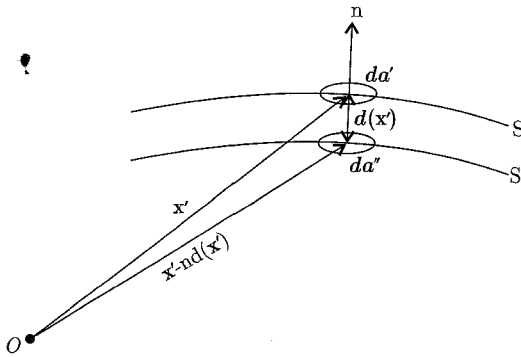
$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\sigma(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} da' - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\sigma(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}' + nd|} da''$$

به‌ازای مقادیر کوچک d می‌توانیم $|\mathbf{x} - \mathbf{x}' + nd|^{-1}$ را بسط دهیم. رابطه‌ی کلی $|\mathbf{x} + \mathbf{a}|^{-1}$ را که در آن $|\mathbf{a}| \ll |\mathbf{x}|$ است در نظر بگیرید. بسط سری تیلور در سه‌بعد را می‌نویسیم

$$\frac{1}{|\mathbf{x} + \mathbf{a}|} = \frac{1}{x} + \mathbf{a} \cdot \nabla \left(\frac{1}{x} \right) + \dots$$

از این طریق درمی‌یابیم که وقتی $d \rightarrow 0$ میل می‌کند پتانسیل به‌صورت زیر درمی‌آید

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S D(\mathbf{x}') \mathbf{n} \cdot \nabla' \left(\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right) da' \quad (24-1)$$



شکل ۱-۶: هندسه‌ی یک لایه‌ی دوقطبی

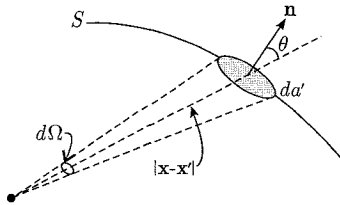
عجالتاً اشاره می‌کنیم که انتگرالده در (۲۴-۱) پتانسیل ناشی از یک دوقطبی نقطه‌ای، با گشتاور دوقطبی $\mathbf{P} = nDda'$ است. پتانسیل در مکان \mathbf{x} ناشی از دوقطبی \mathbf{P} در مکان \mathbf{x}' عبارت است از

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{P} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} \quad (25-1)$$

معادله‌ی (۲۴-۱) تعبیر هندسی ساده‌ای دارد. اشاره می‌کنیم که

$$\mathbf{n} \cdot \nabla' \left(\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right) da' = -\frac{\cos \theta da'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^2} = -d\Omega$$

که در آن $d\Omega$ چنانکه در شکل ۱-۷ نیز نشان داده شده است، المان زاویه‌ای فضایی دربرگرفته شده از نقطه‌ی مشاهده توسط المان سطحی da' است



شکل ۱-۷: پتانسیل در P ناشی از لایه‌ی دوقطبی D بر روی المان سطحی da' ، دقیقاً برابر است با منفی حاصل ضرب D در المان زاویه‌ی فضایی $d\Omega$ که توسط da' از نقطه‌ی P دربرگرفته شده است.

دقت کنید که اگر θ یک زاویه‌ی حاده باشد علامت $d\Omega$ مثبت است (یعنی وقتی نقطه‌ی مشاهده سمت درونی لایه‌ی دوقطبی را بنگرد) و پتانسیل را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\Phi(\mathbf{x}) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int D(x') d\Omega \quad (26-1)$$

برای چگالی گشتاور دوقطبی سطحی ثابت D صرف نظر از شکل آن، پتانسیل دقیقاً برابر است با حاصل ضرب گشتاور تقسیم بر $4\pi\epsilon_0$ در زاویه‌ی فضایی دربرگرفته شده از نقطه‌ی مشاهده توسط سطح فوق است.

در هنگام عبور از یک لایه‌ی دوگانه انفصالی در پتانسیل به وجود می‌آید. این موضوع را می‌توانیم با بینهایت نزدیک کردن نقطه‌ی مشاهده به لایه‌ی دوگانه ملاحظه کنیم. در این حالت لایه‌ی دوگانه متشکل از دو قسمت به نظر می‌آید؛ یک قسمت قرص کوچکی است که درست زیر نقطه‌ی مشاهده قرار دارد. این قرص به اندازه‌ای کوچک است که به طور محسوسی تخت به نظر می‌آید و دارای چگالی گشتاور دوقطبی سطحی ثابت D است. به وضوح می‌توانیم پتانسیل کل را با برهم‌نهمش خطی پتانسیل ناشی از قرص فوق و بقیه‌ی لایه به دست آوریم.

از (۲۶-۱) واضح است که پتانسیل قرص به تنهایی در عبور از درون به بیرون از لایه دارای انفصالی به اندازه‌ی $\frac{D}{\epsilon_0}$ است. $(-\frac{D}{2\epsilon_0}$ روی قسمت درونی و $+\frac{D}{2\epsilon_0}$ روی قسمت بیرونی لایه). پتانسیل بقیه‌ی لایه به تنهایی (همراه با سوراخ دایره‌ای‌اش) در عبور از صفحه‌ی سوراخ متصل می‌ماند. بنابراین خیز کلی در پتانسیل در عبور از سطح سوراخ‌دار عبارت است از

$$\Phi_2 - \Phi_1 = \frac{D}{\epsilon_0} \quad (27-1)$$

این نتیجه مشابه با نتیجه‌ی (۲۲-۱) برای انفصال میدان الکتریکی در عبور از یک چگالی بار سطحی است. از لحاظ فیزیکی می‌توانیم معادله‌ی (۲۷-۱) را به صورت یک افت پتانسیلی که درون لایه‌ی دوقطبی اتفاق می‌افتد تعبیر کنیم و می‌توانیم آن را از طریق حاصل ضرب میدان بین دو لایه‌ی بار سطحی در فاصله‌ی بین آن‌ها (قبل از اینکه حدی گرفته شود) محاسبه کنیم.

۷-۱ معادله‌های پواسن و لاپلاس

در بخش‌های ۴-۱ و ۵-۱ نشان دادیم که رفتار یک میدان الکترواستاتیکی را می‌توان با دو معادله‌ی دیفرانسیل زیر توصیف کرد

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (13-1)$$

و

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0 \quad (14-1)$$

معادله‌ی دوم معادل با این بیان است که \mathbf{E} ، گرادیان یک تابع اسکالر یعنی پتانسیل اسکالر Φ باشد؛

$$\mathbf{E} = -\nabla\Phi \quad (16-1)$$

معادلات (۱۳-۱) و (۱۶-۱) را می‌توان در یک معادله‌ی دیفرانسیل جزئی برای تک تابع $\Phi(x)$ ترکیب کرد

$$\nabla^2 \Phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (28-1)$$

این معادله معادله‌ی پواسن نامیده می‌شود. در ناحیه‌هایی از فضا که فاقد چگالی بار هستند پتانسیل اسکالر معادله‌ی لاپلاس زیر را برآورده می‌کند

$$\nabla^2 \Phi = 0 \quad (29-1)$$

تاکنون یک جواب برای پتانسیل اسکالر در رابطه‌ی (۱۷-۱) داشته‌ایم

$$\Phi(x) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(x')}{|x - x'|} d^3x' \quad (17-1)$$

برای اثبات مستقیم اینکه رابطه‌ی فوق حقیقتاً معادله‌ی پواسن (۲۸-۱) را برآورده می‌کند یا نه، با لاپلاسین روی دو طرف تساوی عمل می‌کنیم. چون این موضوع را در آینده اثبات خواهیم کرد که انتگرالدهی منتجه تکین است لذا در اینجا از یک روش حدی کمک می‌گیریم. «پتانسیل - a » یعنی $\Phi_a(x)$ را با رابطه‌ی زیر تعریف می‌کنیم

$$\Phi_a(x) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(x')}{\sqrt{(x' - x)^2 + a^2}} d^3x'$$

در این صورت پتانسیل واقعی (۱۷-۱) حد «پتانسیل - a » است وقتی $a \rightarrow 0$ میل می‌کند. با گرفتن لاپلاسین از «پتانسیل - a » نتیجه‌ی زیر به دست می‌آید

$$\begin{aligned} \nabla^2 \Phi_a(x) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \rho(x') \nabla^2 \left(\frac{1}{\sqrt{r^2 + a^2}} \right) d^3x' \\ &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \rho(x') \times \left[\frac{3a^2}{(r^2 + a^2)^{5/2}} \right] d^3x' \end{aligned} \quad (30-1)$$

که در آن $r = |x - x'|$

رابطه‌ی داخل کروشه‌ی مربعی همان منفی لاپلاسین عبارت $\frac{1}{\sqrt{r^2 + a^2}}$ است. این رابطه در هر مکانی، برای مقادیر غیرصفر a ، خوش رفتار است. اما وقتی a به سمت صفر میل می‌کند این رابطه در $r = a$ بینهایت و به ازای $r \neq 0$ صفر می‌شود. به ازای مقادیر اختیاری a رابطه‌ی فوق دارای یک انتگرال حجمی به اندازه‌ی 4π است.

برای انتگرال‌گیری، با کره‌ای به شعاع ثابت R که روی \mathbf{x} مرکزیت یافته است فضا را به دو ناحیه تقسیم‌بندی کنید. R را طوری انتخاب کنید که $\rho(\mathbf{x}')$ روی قسمت داخلی کره تغییرات اندکی داشته باشد و فرض کنید که a بسیار کوچک‌تر از R بوده و به سمت صفر میل کند.

اگر $\rho(\mathbf{x}')$ به‌گونه‌ای باشد که (۱۷-۱) وجود داشته باشد سهم انتگرال (۱-۳) از خارج از کره صفر خواهد شد، درست همانند a^2 وقتی $a \rightarrow 0$ میل می‌کند. بنابراین نیاز داریم که فقط سهم داخل کره را منظور کنیم. با بسط سری تیلور برای $\rho(\mathbf{x}')$ که حول $\mathbf{x}' = \mathbf{x}$ خوش‌رفتار است درمی‌یابیم که

$$\nabla^2 \Phi_a(\mathbf{x}) = -\frac{1}{\varepsilon_0} \int_0^R \frac{3a^2}{(r^2 + a^2)^{5/2}} \left[\rho(\mathbf{x}) + \frac{r^2}{6} \nabla^2 \rho + \dots \right] r^2 dr + O(a^2)$$

با انتگرال‌گیری مستقیم به‌دست می‌آوریم

$$\nabla^2 \Phi_a(\mathbf{x}) = -\frac{1}{\varepsilon_0} \rho(\mathbf{x}) \left(1 + O\left(\frac{a^2}{R^2}\right) \right) + O(a^2, a^2 \log a) \nabla^2 \rho + \dots$$

در حد $a \rightarrow 0$ ، معادله‌ی پواسن (۱-۲۸) را به‌دست می‌آوریم. طبیعت تکنیکی لاپلاسین $\frac{1}{r}$ را می‌توانیم به‌صورت رسمی برحسب یک تابع دلتای دیراک نشان دهیم. چون برای $r \neq 0$ ، $\nabla^2 \left(\frac{1}{r}\right) = 0$ است و از طرفی انتگرال حجمی آن -4π است می‌توانیم معادله‌ی رسمی $\nabla^2 \left(\frac{1}{r}\right) = -4\pi \delta(\mathbf{x})$ را داشته باشیم یا عمومی‌تر

$$\nabla^2 \left(\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right) = -4\pi \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \quad (۳۱-۱)$$

۸-۱ قضیه‌ی گرین

اگر مسائل الکترواستاتیک همواره شامل توزیع بارهای منفصل یا متصل جایگزیده و بدون سطوح مرزی باشند، جواب عمومی (۱۷-۱) مناسب‌ترین و سراسرترین حل برای هر مسئله است و هیچ نیازی به معادله‌ی پواسن و لاپلاس نخواهد بود.

البته در حقیقت واقع، اگر نگوئیم بیش‌ترین، ولی بسیاری از مسائل الکترواستاتیک شامل نواحی محدودی از فضا (با بار و یا بدون بار در درون آن ناحیه) هستند که شرایط مرزی روی سطوح محدودکننده این نواحی معین شده‌اند.

می‌توان این شرایط مرزی را با استفاده از یک توزیع مناسب برای بارها در خارج از ناحیه‌ی موردنظر (و احتمالاً در بینهایت) مشابه‌سازی کرد، ولی در این حالت استفاده از (۱۷-۱) برای محاسبه‌ی پتانسیل البته به‌جز در موارد ساده (یعنی روش تصاویر) دشوار خواهد بود.

برای به‌کارگیری شرایط مرزی، لازم است تعدادی از ابزارهای ریاضیات جدید، یعنی تساوی‌ها، یا قضایای جرج - گرین (۱۸۲۴) را تعمیم دهیم. این ابزارها با کاربردهای ساده‌ای از قضیه‌ی دیورژانس به‌دست می‌آیند. قضیه‌ی دیورژانس یعنی

$$\int (\nabla \cdot \mathbf{A}) d^3x = \oint_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} da$$

برای هر میدان برداری خوش‌رفتاری مثل A که درون حجم V تعریف شده و با سطح بسته‌ی S کراندار شده باشد به‌کار می‌رود.

فرض کنید $\mathbf{A} = \psi \nabla \psi$ ، که در آن ϕ و ψ میدان‌های اسکالری اختیاری هستند. حال داریم

$$\nabla \cdot (\phi \nabla \psi) = \phi \nabla^2 \psi + \nabla \phi \cdot \nabla \psi \quad (۳۲-۱)$$

و

$$\phi \nabla \psi \cdot \mathbf{n} = \phi \frac{\partial \psi}{\partial n} \quad (۳۳-۱)$$

که در آن $\frac{\partial}{\partial n}$ ، مشتق عمودی در سطح S است (که جهت آن به طرف خارج از حجم V است). وقتی (۳۲-۱) و (۳۳-۱) در قضیه‌ی دیورژانس جایگزین شوند، تساوی اول گرین نتیجه می‌شود

$$\int_V (\phi \nabla^2 \psi + \nabla \phi \cdot \nabla \psi) d^3x = \oint_S \phi \frac{\partial \psi}{\partial n} da \quad (۳۴-۱)$$

اگر مجدداً (۳۴-۱) را با جابه‌جا کردن جای ϕ و ψ بنویسیم و سپس آن را از (۳۴-۱) کسر کنیم، عبارت‌های $\nabla \phi \cdot \nabla \psi$ حذف خواهند شد و تساوی دوم گرین یا قضیه گرین را به‌دست می‌آوریم

$$\int_V (\phi \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \phi) d^3x = \oint_S \left[\phi \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial \phi}{\partial n} \right] da \quad (۳۵-۱)$$

اگر یک ψ خاص یعنی $\frac{1}{R} \equiv \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}$ را انتخاب کنیم معادله‌ی دیفرانسیل پواسن برای پتانسیل را می‌توانیم به یک معادله‌ی انتگرالی تبدیل کنیم که در آن \mathbf{x} نقطه‌ی مشاهده و \mathbf{x}' متغیر انتگرال‌گیری است. علاوه‌بر این قرار می‌دهیم $\phi = \Phi$ (پتانسیل اسکالر) و از $\nabla^2 \Phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$ استفاده می‌کنیم. از (۳۱-۱)

می‌دانیم که $\nabla^2 \left(\frac{1}{R} \right) = -4\pi \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$ (۳۵-۱) به‌صورت زیر درمی‌آید

$$\int_V \left[-4\pi \Phi(\mathbf{x}') \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') + \frac{1}{\epsilon_0 R} \rho(\mathbf{x}') \right] d^3x' = \oint_S \left[\Phi \frac{\partial}{\partial n'} \left(\frac{1}{R} \right) - \frac{1}{R} \frac{\partial \Phi}{\partial n'} \right] da'$$

اگر نقطه‌ی x درون حجم V قرار گیرد به دست می‌آوریم

$$\Phi(x) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(x')}{R} d^3x' + \frac{1}{4\pi} \oint_S \left[\frac{1}{R} \frac{\partial\Phi}{\partial n'} - \Phi \frac{\partial}{\partial n'} \left(\frac{1}{R} \right) \right] da' \quad (۳۶-۱)$$

در صورتی که x خارج از سطح S باشد سمت چپ (۳۶-۱) صفر می‌شود.* دقت کنید که این موضوع با تعبیر انتگرال سطحی به پتانسیل ناشی از یک چگالی بار سطحی $\sigma = \epsilon_0 \frac{\partial\Phi}{\partial n'}$ و یک لایه‌ی دوقطبی $\mathbf{D} = \epsilon_0 \Phi$ هماهنگی دارد. در این صورت انفصال در میدان‌های الکتریکی و پتانسیل (۲۲-۱) و (۲۷-۱) در عبور از سطح، منجر به صفر شدن میدان و پتانسیل در خارج از حجم V می‌شود.

دو نکته در مورد نتیجه‌ی (۳۶-۱) وجود دارد. اول اینکه اگر سطح S به سمت بینهایت میل کند و میدان الکتریکی روی سطح S سریع‌تر از R^{-1} افت کند، انتگرال سطحی صفر شده و رابطه‌ی (۳۶-۱) به نتیجه‌ی آشنای (۱۷-۱) منجر می‌شود. دوم اینکه برای یک حجم خالی از بار، پتانسیل در هر جایی درون حجم (یعنی یک جواب از معادله‌ی لاپلاس) در رابطه‌ی (۳۶-۱)، برحسب پتانسیل و مشتق عمودی آن تنها روی سطح مربوط به آن حجم بیان می‌شود. این نتیجه‌ی نسبتاً تعجب‌آور جوابی برای یک مسئله‌ی مقدار مرزی نیست بلکه تنها یک رابطه‌ی انتگرالی است، چراکه مشخص کردن اختیاری هر دو کمیت Φ و $\frac{\partial\Phi}{\partial n}$ (شرایط مرزی کوشی)، یک مشخص کردن بیش از حد برای این مسئله است. این موضوع با جزئیات در بخش‌های بعدی اثبات شده است که در آن شگردهایی که جواب‌هایی را برای شرایط مرزی مناسب به دست می‌دهند، با استفاده از قضیه‌ی گرین (۳۵-۱) تعمیم یافته‌اند.

۹-۱ یکتایی جواب با شرایط مرزی دیریکله یا نیومن

برای اطمینان از اینکه یک جواب منحصر به فرد (جوابی که از لحاظ فیزیکی توجیه شده باشد) درون ناحیه‌ی کراندار وجود داشته باشد چه نوعی از شرایط مرزی برای معادله‌ی پواسن (یا لاپلاس) مناسب است؟ تجربه‌ی فیزیکی ما را به این اعتقاد سوق می‌دهد که مشخص بودن پتانسیل روی یک سطح بسته (یعنی سیستمی از رساناها که در پتانسیل‌های مختلف نگه داشته شده‌اند) معرف یک مسئله‌ی یکتا یا منحصر به فرد است. این مسئله، یک مسئله‌ی دیریکله یا شرایط مرزی دیریکله نامیده می‌شود. به‌طور مشابه موجه به نظر می‌رسد که مشخص کردن میدان الکتریکی (یعنی مشتق عمودی پتانسیل) در هر جایی روی سطح (که متناظر با یک چگالی بار سطحی مشخص است) نیز معرف یک مسئله‌ی منحصر به فرد باشد. تعیین مشتق عمودی، به‌عنوان شرط مرزی نیومن نامیده می‌شود. حال برای اثبات این توقع‌ها با استفاده از اتحاد اول گرین [رابطه‌ی (۳۴-۱)] اقدام می‌کنیم.

* چون $\frac{1}{|x-x'|}$ داخل حجم V خوش رفتار نیست، ممکن است خواننده از اینکه (۳۶-۱) با روشی غیرقانونی به دست آمده است شاکلی باشد. می‌توان مشکل را با استفاده از یک فرآیند حدی (همانند بخش قبل) و یا با مستثنی کردن یک کره‌ی کوچک حول نقطه‌ی آزاردهنده‌ی $x = x'$ اصلاح کرد. در نهایت نتیجه همان رابطه‌ی (۳۶-۱) است.

می‌خواهیم منحصر به فرد بودن جواب معادله‌ی پواسن $\nabla^2 \Phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$ را درون حجم V (که تحت هر یک از شرایط مرزی دیریکله یا نیومن روی سطح کراندار بسته‌ی S قرار دارد) نشان دهیم. بالعکس فرض می‌کنیم که دو جواب Φ_1 و Φ_2 وجود داشته باشند که شرایط مرزی مشابهی را برآورده می‌کنند. فرض کنید

$$U = \Phi_2 - \Phi_1 \quad (۳۷-۱)$$

بنابراین درون حجم V ، $\nabla^2 U = 0$ است و روی سطح S ، برای شرایط مرزی دیریکله و نیومن به ترتیب $U = 0$ و $\frac{\partial U}{\partial n} = 0$ هستند. از اتحاد اول گرین (۳۴-۱) با $\phi = \psi = U$ درمی‌یابیم که

$$\int_V (U \nabla^2 U + \nabla U \cdot \nabla U) d^3x = \oint_S U \frac{\partial U}{\partial n} da \quad (۳۸-۱)$$

با توجه به خواص مشخص U ، این رابطه برای هر دو نوع شرط مرزی به رابطه‌ی زیر منجر می‌شود

$$\int |\nabla U|^2 d^3x = 0$$

این رابطه $\nabla U = 0$ را ایجاب می‌کند. در نتیجه درون حجم V ، U ثابت است. برای شرایط مرزی دیریکله، روی سطح S ، $U = 0$ است، به طوری که درون حجم V ، $\Phi_1 = \Phi_2$ بوده و جواب منحصر به فرد خواهد بود. به طور مشابه برای شرایط مرزی نیومن، جدا از یک ثابت جمعی اختیاری بی‌اهمیت، جواب منحصر به فرد است.

از سمت راست رابطه‌ی (۳۸-۱) این نکته واضح است که یک جواب منحصر به فرد نیز برای یک مسئله‌ی با شرایط مرزی آمیخته وجود دارد. (یعنی شرایط دیریکله روی بخشی از سطح S و نیومن روی بخش باقیمانده).

خواهیم دید که برای معادله‌ی پواسن، جوابی که در آن هم Φ و هم $\frac{\partial \Phi}{\partial n}$ به صورت اختیاری روی یک مرز بسته (یعنی شرایط مرزی کوشی) مشخص شده باشند وجود ندارد، چرا که جواب‌های منحصر به فردی برای شرایط مرزی دیریکله و نیومن به صورت مجزا وجود دارد ولی در حالت کلی با هم سازگار نیستند. می‌توانیم این موضوع را با کمک رابطه‌ی (۳۶-۱) نیز اثبات کنیم. با مقادیر اختیاری Φ و $\frac{\partial \Phi}{\partial n}$ که روی طرف سمت راست این رابطه [(۳۶-۱)] اعمال شوند، می‌توان نشان داد که مقادیر $\nabla \Phi(\mathbf{x})$ (وقتی \mathbf{x} به سطح نزدیک می‌شود) در حالت کلی با مقادیر مرزی فرضی ناهماهنگ‌اند. مسئله‌ی اینکه آیا شرایط مرزی کوشی روی یک سطح باز معرف یک مسئله‌ی الکترواستاتیکی منحصر به فرد باشد یا خیر به بحث پیش‌تری، نسبت به آنچه در اینجا به آن پرداختیم نیاز دارد.

خواننده می‌تواند برای یک بحث دقیق‌تر از این معادلات به مورس و فشباخ^۱ (بخش ۶-۲ صفحات [Partial Differential Equation in Phys. & Chemistry] ۶۹۲ - ۷۰۶) یا به سامر فلد

1) Morse and Feshbach

مراجعه کند. نتیجه اینکه مسائل الکترواستاتیک تنها با شرایط مرزی دیریکله یا نیومن روی یک سطح بسته مشخص می‌شوند (البته بخشی از سطح یا تمام آن می‌تواند در بینهایت باشد).

۱۰-۱ حل رسمی مسئله مقدار مرزی الکترواستاتیک با تابع گرین

حل معادله‌ی پواسن یا لاپلاس در یک حجم محدود V (با هر یک از شرایط مرزی دیریکله یا نیومن روی سطح کراندار S) را می‌توان توسط قضیه‌ی گرین (۱-۳۵) و توابعی که بنابراین قضیه، توابع گرین نامیده می‌شوند به‌دست آورد.

در به‌دست آوردن نتیجه‌ی (۱-۳۶) - البته نه به‌عنوان یک جواب - تابع ψ را به‌صورت $\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}$ انتخاب می‌کنیم. این تابع، پتانسیل ناشی از یک چشمه‌ی بار واحد است که معادله‌ی زیر را برآورده می‌کند

$$\nabla'^2 \left(\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right) = -4\pi\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \quad (31-1)$$

تابع $\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}$ ، تنها یکی از رده‌ی توابعی است که به متغیرهای \mathbf{x} و \mathbf{x}' بستگی دارد که توابع گرین نامیده می‌شوند و رابطه‌ی (۱-۳۱) را نیز برآورده می‌کنند. به‌طور کلی

$$\nabla'^2 G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = -4\pi\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \quad (39-1)$$

که در آن

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} + F(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \quad (40-1)$$

همراه با تابع F که معادله‌ی لاپلاس را درون حجم V به‌صورت زیر برآورده می‌کند

$$\nabla'^2 F(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = 0 \quad (41-1)$$

در مواجهه‌ی با مسئله‌ی برآورده شدن شرایط مرزی مشخص روی Φ یا $\frac{\partial\Phi}{\partial n}$ می‌توانیم کلید مسئله را با بررسی نتیجه‌ی (۱-۳۶) بیابیم. همان‌گونه که تاکنون نیز اشاره کردیم، فقط یک جواب نیست که نوع صحیحی از شرایط مرزی را برآورده می‌کند، چراکه هم Φ و هم $\frac{\partial\Phi}{\partial n}$ در انتگرال سطحی حضور دارند و این نهایت درجه‌ی یک رابطه‌ی انتگرالی برای Φ است. با توجه به مفهوم تعمیم‌یافته‌ی یک تابع گرین و آزادی اضافه‌ی موجود در آن [از طریق تابع $F(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ امکان اینکه بتوانیم قضیه‌ی گرین را با $\psi = G(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ استفاده کرده و $F(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ را برای حذف یکی از دو انتگرال سطحی (برای به‌دست آوردن نتیجه‌ای که تنها شامل شرایط مرزی دیریکله یا نیومن باشد) انتخاب کنیم مطرح می‌شود. البته اگر جزء به‌جزء تابع $G(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ مورد نیاز به شکل دقیق شرایط مرزی وابسته باشد، روش فوق عمومیت کمتری خواهد داشت.

همان طوری که بی‌درنگ نیز ملاحظه خواهیم کرد این وابستگی لازم نیست و $G(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ ، شرایط مرزی نسبتاً ساده‌ای را روی سطح S برآورده می‌کند.

با توجه به قضیه‌ی گرین (۳۵-۱)، $\phi = \Phi$ و $[\psi = G(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ و خواص مشخص مربوط به تابع G در (۳۹-۱) به دست آوردن تعمیمی از (۳۶-۱) کار ساده‌ای است

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \rho(\mathbf{x}') G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') d^3x' + \frac{1}{4\pi} \oint_S \left[G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \frac{\partial \Phi'}{\partial n} - \Phi(\mathbf{x}') \frac{\partial G(\mathbf{x}, \mathbf{x}')}{\partial n'} \right] da' \quad (۴۲-۱)$$

آزادی موجود در تعریف G [در (۴۰-۱)] به این معنی است که می‌توانیم انتگرال سطحی را طوری به انجام برسانیم که فقط به نوع شرایط مرزی انتخابی وابسته باشد. به این ترتیب برای شرایط مرزی دیریکله نیاز به روابط زیر داریم

$$G_D(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = 0 \quad \text{برای } \mathbf{x}' \text{ روی } S \quad (۴۳-۱)$$

بنابراین جمله‌ی اول در انتگرال سطحی در رابطه‌ی (۴۲-۱) صفر می‌شود و جواب عبارت است از

$$\phi(\mathbf{x}') = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \rho(\mathbf{x}') G_D(\mathbf{x}, \mathbf{x}') d^3x' - \frac{1}{4\pi} \oint_S \Phi(\mathbf{x}') \frac{\partial G_D}{\partial n'} da' \quad (۴۴-۱)$$

برای شرایط مرزی نیومن باید دقیق‌تر باشیم. به نظر می‌رسد انتخاب درست شرط مرزی روی $G(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ به صورت زیر باشد

$$\frac{\partial G_N}{\partial n'}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = 0 \quad \text{برای } \mathbf{x}' \text{ روی } S$$

چراکه این شرایط مرزی، جمله‌ی دوم در انتگرال سطحی در (۴۲-۱) را صفر می‌کنند که این مطلوب ما است. اما کاربرد قضیه‌ی گوس برای (۳۹-۱) نشان می‌دهد که

$$\oint \frac{\partial G}{\partial n'} da' = -4\pi$$

در نتیجه ساده‌ترین شرط مرزی مجاز روی G_N عبارت است از

$$\frac{\partial G_N}{\partial n'}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = -\frac{4\pi}{S} \quad \text{برای } \mathbf{x}' \text{ روی } S \quad (۴۵-۱)$$

که در آن S مساحت کل مربوط به سطح مرزی است. در این صورت جواب عبارت است از

$$\Phi(\mathbf{x}) = \langle \Phi \rangle_S + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \rho(\mathbf{x}') G_N(\mathbf{x}, \mathbf{x}') d^3x' + \frac{1}{4\pi} \oint \frac{\partial \Phi}{\partial n'} G_N da' \quad (۴۶-۱)$$

که در آن $S(\Phi)$ مقدار میانگین پتانسیل روی تمام سطح است.

مسئله‌ی مرسوم نیومن، موسوم به مسئله‌ی بیرونی است که در آن حجم V با دو سطح محدود می‌شود، که یکی بسته و متناهی و دیگری در بینهایت قرار دارد. بنابراین مساحت سطح S بینهایت است؛ شرط مرزی (۴۵-۱) به صورت همگن درمی‌آید و مقدار میانگین $S(\Phi)$ صفر می‌شود.

اشاره می‌کنیم که توابع گرین، شرایط مرزی ساده‌ی (۴۳-۱) یا (۴۵-۱) را که به شکل دقیق مقادیر مرزی دیریکله (یا نیومن) وابسته نیستند برآورده می‌کنند. حتی با این اوصاف بیشتر اوقات تعیین $G(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ به جهت وابستگی‌اش به شکل سطح S نسبتاً مشکل است (البته اگر غیرممکن نباشد). با یک چنین مسأله‌ی در فصول ۲ و ۳ مواجه خواهیم شد.

خاصیت تقارنی ریاضی $G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = G(\mathbf{x}', \mathbf{x})$ را می‌توان برای توابع گرین که شرط مرزی دیریکله‌ی (۴۳-۱) را برآورده می‌کنند با قضیه‌ی گرین اثبات کرد [با $\phi = G(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ و $\psi = G(\mathbf{x}', \mathbf{y})$ که در آن \mathbf{y} متغیر انتگرال‌گیری است]. چون تابع گرین، به شکل تابعی از یکی از متغیرهایش پتانسیل ناشی از یک چشمه‌ی نقطه‌ای واحد است، لذا تقارن فقط تعویض‌پذیری فیزیکی چشمه و نقطه‌ی مشاهده را نشان می‌دهد. برای شرایط مرزی نیومن تقارن اتوماتیک نیست، اما می‌تواند به صورت یک لازمه‌ی جداگانه اعمال شود^۱. به عنوان اظهارنظر مهم نهایی، به معنی فیزیکی $\frac{F(\mathbf{x}, \mathbf{x}')}{4\pi\epsilon_0}$ اشاره می‌کنیم. این رابطه یک جواب معادله‌ی لاپلاس برای درون حجم V است و بنابراین پتانسیل را (که ناشی از سیستم بارهایی است که در خارج از حجم V قرار گرفته‌اند) نشان می‌دهد. وقتی این پتانسیل را با پتانسیل ناشی از یک بار نقطه‌ای در نقطه‌ی چشمه‌ی \mathbf{x}' ترکیب کنیم می‌توانیم آن را به صورت پتانسیل ناشی از یک توزیع خارجی از بارهایی تصور کنیم که برای برآورده شدن شرایط مرزی همگن با پتانسیل صفر روی سطح S (یا مشتق عمودی صفر) انتخاب شده‌اند.

چون پتانسیل در نقطه‌ی \mathbf{x} روی سطح، ناشی از بار نقطه‌ای فوق، به مکان بار چشمه بستگی دارد، لذا توزیع خارجی بار $F(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ نیز باید به "پارامتر" \mathbf{x}' وابسته باشد. از این جهت ملاحظه می‌کنیم که روش تصاویر (که قرار است در فصل ۲ بحث کنیم) یک معادل فیزیکی برای تعیین $F(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ برای برآوردن شرایط مرزی (۴۳-۱) یا (۴۵-۱) است. برای مسئله‌ی دیریکله، همراه با رساناها، $\frac{F(\mathbf{x}, \mathbf{x}')}{4\pi\epsilon_0}$ را می‌توان به عنوان پتانسیل ناشی از توزیع بار سطحی القایی روی رساناها (در نتیجه حضور یک بار نقطه‌ای در نقطه‌ی چشمه‌ی \mathbf{x}') نیز تعبیر نمود.

۱۱-۱ انرژی پتانسیل الکترواستاتیک و چگالی انرژی؛ ظرفیت

در بخش ۵-۱ نشان داده شد که حاصل ضرب پتانسیل اسکالر در بار یک شیء نقطه‌ای را می‌توانیم به عنوان انرژی پتانسیل تعبیر کنیم. به طور دقیق‌تر، اگر بار نقطه‌ای q_i را درون ناحیه‌ای از میدان‌های الکتریکی

1) K.-J. Kim & J. D. Jackson, Am. J. Phys. 61 (12), 1144-1146 (1993)

جایگزیده که با پتانسیل اسکالر Φ (که در بینهایت صفر می‌شود) توصیف می‌شوند، از بینهایت تا نقطه‌ی \mathbf{x}_i بیاوریم، کار انجام شده روی بار (و از اینرو انرژی پتانسیل آن) با رابطه‌ی زیر مشخص می‌شود

$$W_i = q_i \Phi(\mathbf{x}_i) \quad (۴۷-۱)$$

می‌توان چنین تصور کرد که پتانسیل Φ با آرایشی از $(n-1)$ بار ($j = 1, 2, \dots, n-1$) در مکان‌های \mathbf{x}_j به‌وجود آمده است. به این ترتیب

$$\Phi(\mathbf{x}_i) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{q_j}{|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|} \quad (۴۸-۱)$$

طوری‌که انرژی پتانسیل ناشی از بار q_i عبارت است از

$$W_i = \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{q_j}{|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|} \quad (۴۹-۱)$$

انرژی پتانسیلی کل مربوط به تمامی بارها، ناشی از تمامی نیروهای مؤثر بین آن‌ها، عبارت است از

$$W = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \sum_{j < i}^n \frac{q_i q_j}{|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|} \quad (۵۰-۱)$$

همان‌گونه که با ساده‌ترین کار یعنی با جمع هر بار به‌طور متوالی، می‌توانیم این نتیجه را ملاحظه کنیم. یک شکل متقارن‌تر را می‌توانیم با جمع بدون محدودیت روی i و j و سپس تقسیم نتیجه بر عدد ۲ به‌صورت زیر بنویسیم

$$W = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \sum_j \frac{q_i q_j}{|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|} \quad (۵۱-۱)$$

این نکته را می‌توان استنباط کرد که جملات $i = j$ (جملات "خود انرژی" بینهایت) در جمع دوگانه‌ی فوق حذف می‌شوند. برای یک توزیع بار متصل (با به‌طور کلی با استفاده از توابع دلتای دیراک $(\delta-1)$) انرژی پتانسیل شکل زیر را به خود می‌گیرد

$$W = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint \frac{\rho(\mathbf{x})\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x d^3x' \quad (۵۲-۱)$$

رابطه‌ی دیگری که معادل با $(۵۲-۱)$ است را می‌توان با اشاره به اینکه یکی از انتگرال‌های موجود در $(۵۲-۱)$ عیناً همان پتانسیل اسکالر $(۱۷-۱)$ است به‌دست آورد. بنابراین

$$W = \frac{1}{4} \int \rho(\mathbf{x})\Phi(\mathbf{x})d^3x \quad (۵۳-۱)$$

معادلات (۵۱-۱)، (۵۲-۱) و (۵۳-۱) انرژی پتانسیل الکترواستاتیک را برحسب مکان بارها بیان می‌کنند و بنابراین به برهم‌کنش بین بارها از طریق نیروهای کولونی تأکید می‌کنند. یک روش بسیار سودمند دیگر، تأکید بر میدان الکتریکی و تعبیر انرژی است (وقتی در میدان الکتریکی اطراف بارها ذخیره می‌شود). برای به دست آوردن این روش، از معادله‌ی پواسن برای حذف چگالی بار [از رابطه‌ی (۵۳-۱)] استفاده می‌کنیم

$$W = -\frac{\varepsilon_0}{4} \int \Phi \nabla^2 \Phi d^3x$$

انتگرال‌گیری به روش جزء‌به‌جزء منجر به نتیجه‌ی زیر می‌شود

$$W = \frac{\varepsilon_0}{4} \int |\nabla \Phi|^2 d^3x = \frac{\varepsilon_0}{4} \int |\mathbf{E}|^2 d^3x \quad (54-1)$$

که در آن انتگرال‌گیری روی تمام فضا گرفته می‌شود.

در (۵۴-۱) تمام اشاره‌های صریح ممکن به بارها صورت گرفته است و انرژی به صورت انتگرال مربع میدان الکتریکی بر روی تمام فضا بیان شده است. این موضوع به طور طبیعی به شناسایی انتگرالده به عنوان چگالی انرژی w منجر می‌شود

$$w = \frac{\varepsilon_0}{4} |\mathbf{E}|^2 \quad (55-1)$$

این رابطه برای چگالی انرژی به صورت شهودی نیز قابل قبول است، چراکه نواحی با میدان‌های بالا باید انرژی قابل ملاحظه‌ای داشته باشند. احتمالاً یک معما در مورد (۵۵-۱) وجود داشته باشد و آن این است که چگالی انرژی یک کمیت مثبت است. در نتیجه انتگرال حجمی آن لزوماً غیرمنفی است. به نظر می‌رسد که این موضوع با فرضمان از (۵۱-۱) که انرژی پتانسیل مربوط به دو بار مختلف علامه منفی است، متناقض باشد. دلیل این تناقض واضح این است که روابط (۵۴-۱) و (۵۵-۱) شامل سهم‌های "خود انرژی" برای چگالی انرژی هستند، در حالی که جمع دوگانه در (۵۱-۱) خود انرژی را در خود ندارد. برای بررسی این مسئله دو بار نقطه‌ای q_1 و q_2 را در نظر بگیرید که همانند شکل (۸-۱) در \mathbf{x}_1 و \mathbf{x}_2 قرار گرفته‌اند. میدان الکتریکی در نقطه‌ی P با مختصات \mathbf{x} عبارت است از

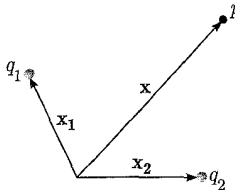
$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1(\mathbf{x} - \mathbf{x}_1)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_1|^3} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_2(\mathbf{x} - \mathbf{x}_2)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_2|^3}$$

طوری که چگالی انرژی (۵۵-۱) عبارت است از

$$32\pi^2\varepsilon_0 w = \frac{q_1^2}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_1|^4} + \frac{q_2^2}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_2|^4} + 2 \frac{q_1 q_2 (\mathbf{x} - \mathbf{x}_1) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_2)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_1|^3 |\mathbf{x} - \mathbf{x}_2|^3} \quad (56-1)$$

به‌وضوح اولین دو جمله سهم‌های "خود انرژی" هستند. برای نشان دادن اینکه جمله‌ی سوم نتیجه‌ی مناسبی را برای پتانسیل برهم‌کنشی ارائه می‌کند روی کل فضا انتگرال‌گیری می‌کنیم

$$W_{\text{int}} = \frac{q_1 q_2}{16\pi^2 \epsilon_0} \int \frac{(x - x_1) \cdot (x - x_2)}{|x - x_1|^3 |x - x_2|^3} d^3x \quad (57-1)$$



شکل ۸-۱:

تغییر متغیر انتگرال‌گیری به $\rho = \frac{(x - x_1)}{|x - x_2|}$ منجر به رابطه‌ی زیر می‌شود

$$W_{\text{int}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{|x_1 - x_2|} \frac{1}{4\pi} \int \frac{\rho \cdot (\rho + n)}{\rho^3 |\rho + n|^3} d^3\rho \quad (58-1)$$

که در آن n یک بردار یکانی در جهت $x_1 - x_2$ است. با استفاده از این حقیقت که

$$\frac{(\rho + n)}{|\rho + n|^3} = -\nabla_\rho \left(\frac{1}{|\rho + n|} \right)$$

به راحتی می‌توان نشان داد که انتگرال بدون بعد دارای مقدار 4π است، طوری که انرژی برهم‌کنشی به مقدار مورد انتظار منجر خواهد شد. نیروی مؤثر بین اجسام باردار را می‌توانیم با محاسبه‌ی تغییر در انرژی الکترواستاتیکی کل سیستم، تحت جابه‌جایی‌های مجازی کوچک، به دست آوریم. مثال‌هایی از این مورد را در مسائل مورد بحث قرار داده‌ایم. برای نمایش انرژی به صورتی که به‌وضوح نشان‌دهنده‌ی عواملی باشد که با تغییر در آرایش دستگاه تغییر می‌کنند و حتی آن‌هایی که ثابت می‌مانند، بایستی دقت بیشتری صورت گیرد. به‌عنوان مثالی ساده، نیرو بر واحد مساحت، روی سطح یک رسانا با چگالی بار سطحی $\sigma(x)$ را محاسبه می‌کنیم. در همسایگی نزدیک این سطح چگالی انرژی عبارت است از

$$w = \frac{\epsilon_0}{2} |\mathbf{E}|^2 = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} \quad (59-1)$$

حال اگر جابه‌جایی کوچک Δx را به طرف خارج برای المان سطحی Δa از سطح رسانای فوق در نظر بگیریم، انرژی الکترواستاتیک به اندازه‌ای که برابر است با حاصل ضرب چگالی انرژی w در حجم

محصول شده $\Delta x \Delta a$ کاهش می یابد

$$\Delta w = -\frac{\sigma^2 \Delta a \Delta x}{2\varepsilon_0} \quad (۶۰-۱)$$

این بدان معنی است که نیرویی به طرف خارج بر واحد سطح فوق وارد می شود که اندازه ی آن در سطح رسانا برابر است با $w = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}$. این نتیجه به طور طبیعی (البته با دقتی که برای حذف میدان الکتریکی ناشی از خود المان چگالی بار سطحی صورت می گیرد) با گرفتن حاصل ضرب چگالی بار سطحی و میدان الکتریکی به دست می آید.

برای دستگاهی از n رسانا، هر کدام با پتانسیل V_i و بار کل Q_i ($i = 1, 2, \dots, n$)، می توان انرژی پتانسیل الکترواستاتیک را در فضای غیرتهی برحسب پتانسیل ها به تنهایی و کمیت های هندسی مشخصی که ضرایب ظرفیت نامیده می شوند، بیان کرد. برای یک آرایش مشخص از رساناها بستگی تابعی خطی پتانسیل به چگالی بار ایجاد می کند که پتانسیل رسانای i ام را بتوان به صورت زیر نوشت

$$V_i = \sum_{j=1}^n P_{ij} Q_j \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

که در آن P_{ij} بستگی به هندسه ی رساناها دارد. این n معادله را می توانیم به گونه ای وارونه کنیم که بار روی رسانای i ام را برحسب تمام پتانسیل ها نتیجه دهد

$$Q_i = \sum_{j=1}^n C_{ij} V_j \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (۶۱-۱)$$

ضرایب C_n ، ضرایب ظرفیت یا ضرایب ظرفیت خازن نامیده می شوند. در حالی که C_{ij} ها به ازای $i \neq j$ ضرایب القا هستند. بنابراین ظرفیت یک رسانا عبارت است از بار کل روی رسانا وقتی در پتانسیل واحد قرار گیرد و تمامی رساناهای دیگر در پتانسیل صفر نگه داشته شوند. گاهی اوقات ظرفیت یک سیستم از رساناها را نیز می توان تعریف کرد. برای مثال ظرفیت دو رسانا که حامل بارهای مساوی و مخالف هستند (در حضور سایر رساناهای با پتانسیل صفر) به صورت نسبت بار روی یک رسانا به اختلاف پتانسیل بین آنها تعریف می شود. معادلات (۶۱-۱) را می توان برای بیان ظرفیت برحسب ضرایب C_{ij} مورد استفاده قرار داد. انرژی پتانسیل (۵۳-۱) برای دستگاهی از رساناها عبارت است از

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n Q_i V_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n C_{ij} V_i V_j \quad (۶۲-۱)$$

رابطه‌ی انرژی برحسب پتانسیل‌های V_i و ضرایب C_{ij} یا برحسب بارهای Q_i و ضرایب P_{ij} ، به‌کارگیری روش‌های وردشی را برای به‌دست آوردن مقادیر تقریبی ظرفیت امکان‌پذیر می‌کند. براساس روش بخش بعد، می‌توان نشان داد که روش‌هایی وجود دارند که حدود بالا و پایین را روی C_{ij} ارائه می‌دهند.

روش‌های محاسباتی سرعت بالا استفاده از توابع آزمایشی یا گمانه‌ای (یا حدسی) را که از چندین پارامتر تشکیل شده‌اند امکان‌پذیر می‌کند. تأمل بیش‌تر راجع به این تکنیک برای محاسبه‌ی ظرفیت‌ها به مسائل انتهای این فصل و فصول بعد واگذار شده است.

۱۲-۱ روش وردشی برای حل معادله‌های لاپلاس و پواسن

روش‌های وردشی در بسیاری از حوزه‌های فیزیک کلاسیک و کوانتوم نقش‌های برجسته‌ای را ایفا می‌کنند. این روش‌ها تکنیک‌هایی رسمی برای استخراج "معادلات حرکت" و نیز روش‌هایی عملی برای به‌دست آوردن جواب‌های تقریبی (البته اغلب دقیق) برای مسائل را مهیا می‌کنند که از روش‌های دیگر مستقل‌اند. تخمین‌های مربوط به فرکانس‌های تشدید مشددهای^۱ اکوستیکی و ویژه مقادیر انرژی اتمی از جمله‌ی مواردی هستند که سریع به‌خاطر می‌آیند. این مفهوم دور از دسترس که دستگاه‌های فیزیکی در حالت تعادل دارای گنجایش انرژی کمینه هستند، به ملاحظات مربوط به تابع‌های انرژی‌گونه^۲ تعمیم پیدا می‌کند. به‌عنوان مثال تابع زیر را در نظر بگیرید

$$I[\psi] = \frac{1}{2} \int_V \nabla \psi \cdot \nabla \psi d^3x - \int_V g \psi d^3x \quad (۶۳-۱)$$

که در آن $\psi(\mathbf{x})$ درون حجم و روی سطح S آن (که امکان دارد خودش از چندین سطح جداگانه تشکیل شده باشد) خوش‌رفتار است. $g(\mathbf{x})$ یک تابع "چشمه" و بدون تکنیکی مشخص درون حجم V است. حال تغییر مرتبه‌ی اول در این تابع را (وقتی ψ به $\psi + \delta\psi$ تغییر می‌کند) مورد بررسی قرار می‌دهیم، که در آن اصلاح $\delta\psi(x)$ در داخل حجم V بینهایت کوچک است. اختلاف $\delta I = I[\psi + \delta\psi] - I[\psi]$ عبارت است از

$$\delta I = \int_V \nabla \psi \cdot \nabla(\delta\psi) d^3x - \int_V g \delta\psi d^3x + \dots \quad (۶۴-۱)$$

جمله‌ی صرف‌نظرشده جمله‌ای نیمه‌مثبت و معین است و برحسب $\delta\psi$ از مرتبه‌ی دوم. استفاده از اتحاد اول گرین همراه با $\psi = \psi$ و $\psi = \delta\psi$ به رابطه‌ی زیر منجر می‌شود

$$\delta I = \int_V [-\nabla^2 \psi - g] \delta\psi d^3x + \oint_S \delta\psi \frac{\partial \psi}{\partial n} da \quad (۶۵-۱)$$

مشروط بر اینکه روی سطح مرزی S ، $\delta = 0$ باشد (طوری که انتگرال سطحی صفر شود). تغییر مرتبه‌ی اول در $I[\psi]$ صفر خواهد شد در صورتی که $\psi(x)$ رابطه‌ی زیر را برآورده کند

$$\nabla^2 \psi = -g \quad (۶۶-۱)$$

با یادآوری این جمله‌ی حذف شده در (۶۴-۱) نیمه مثبت و معین است ملاحظه می‌کنیم که $I[\psi]$ یک مینیمم مانا خواهد بود اگر، ψ در معادله‌ی "پواسن گونه‌ای" در ناحیه‌ی درون حجم V صدق کرده و انحراف‌های $\delta\psi$ نیز روی مرز صفر شود.

با تبدیل $\psi \rightarrow \Phi$ و $g \rightarrow \frac{\rho}{\epsilon_0}$ کمیته‌سازی تابعک، "معادله‌ی حرکت" پتانسیل الکترواستاتیک را در حضور یک چگالی بار و در حضور شرایط مرزی دیریکله، نتیجه می‌دهد (Φ روی سطح S مشخص است و بنابراین روی سطح $\delta\Phi = 0$ است).

استخراج معادله‌ی پواسن از تابعک وردشی جنبه‌ی رسمی دارد. به همان اندازه مهم، موضوع طبیعت مانای اکستریم $I[\psi]$ است که یک روش عملی را برای جواب تقریبی $\psi(x)$ امکان‌پذیر می‌کند. تابع گمانه‌ی انعطاف‌پذیر $\psi(x) = A\Psi(x, \alpha, \beta, \dots)$ را به گونه‌ای انتخاب می‌کنیم که به ثابت بهنجارش A و تعدادی دیگر از پارامترهای α, β, \dots بستگی داشته و طوری درست شده باشد که شرایط مرزی مشخصی را روی سطح S برآورده کند. تابع Ψ می‌تواند مجموعی از جملات باشد با پارامترهایی به عنوان ضریب، یا تک‌تابعی از چندین پارامتر. لذا می‌توان آن را با دیدی که از شکل مورد انتظار برای جواب داریم انتخاب کنیم.

(شهود در اینجا نقش‌آفرین است!) محاسبه‌ی $I[\psi]$ ، تابع $I(A, \alpha, \beta, \dots)$ را مشخص می‌کند. حال پارامترها را برای تعیین اکستریم (دقیقاً مینیمم) $I(A, \alpha, \beta, \dots)$ تغییر می‌دهیم. با پارامترهای بهینه‌ای، "جواب گمانه‌ای" بهترین تقریب ممکن برای جواب واقعی است (با شکل تابعک خاص انتخاب شده). برای معادله‌ی لاپلاس، ثابت بهنجارش با مقادیر مرزی دیریکله‌ی مربوط به ψ تعیین می‌شود. برای معادله‌ی پواسن این ثابت با $g(x)$ (قدرت چشمه) و نیز مقادیر مرزی روی S تعیین می‌شود. برای شرایط مرزی نیومن تابعکی متفاوت ضروری است. فرض کنید که شرایط مرزی روی ψ با $f(s)$ $\left. \frac{\partial \psi}{\partial n} \right|_S = f(s)$ مشخص شوند که در آن s تعیین‌کننده‌ی نقطه‌ای بر روی سطح S است. تابعک مناسب عبارت است از

$$I[\psi] = \frac{1}{2} \int_V \nabla \psi \cdot \nabla \psi d^3x - \int_V g \psi d^3x - \oint_S f \psi da \quad (۶۷-۱)$$

مراحل مشابهی همچون قبل با تغییر $\psi \rightarrow \psi + \delta\psi$ منجر به اختلاف مرتبه‌ی اول در تابعک‌ها می‌شود

$$\delta I = \int_V [-\nabla^2 \psi - g] \delta \psi d^3x + \oint_S \left(\frac{\partial \psi}{\partial n} - f(s) \right) \delta \psi da \quad (۶۸-۱)$$

این لازمه که δI مستقل از $\delta\psi$ صفر می‌شود ایجاب می‌کند که

$$\nabla^2 \psi = -g \quad (\text{درون } V) \quad \text{و} \quad \frac{\partial \psi}{\partial n} = f(s) \quad (\text{روی } S) \quad (۶۹-۱)$$

مجدداً این تابع یک مینیمم مانا برای ψ می‌باشد که برآورده‌کننده‌ی (۱-۶۹) است. دقیقاً همان‌گونه که در بالا برای شرایط مرزی دیریکله توصیف کردیم، جواب‌های تقریبی را می‌توان با استفاده از توابع گمانه که شرایط مرزی نیومن را برآورده کنند پیدا نمود.

به‌عنوان کاربرد ساده‌ای از معادله‌ی پواسن، مسئله‌ی دوبعدی یک استوانه‌ی دایروی توخالی با شعاع واحد و با چگالی چشمه‌ی داخلی $g(\rho) = g(x)$ ، (دارای تقارن سمتی و مستقل از z) که روی محور z مرکزیت یافته است را در نظر بگیرید. پتانسیل در $\rho = 1$ صفر می‌شود. معادله‌ی حرکت برای ψ (تابعی از تنها ρ) در مختصات قطبی عبارت است از

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \psi}{\partial \rho} \right) = -g(\rho) \quad (۷۰-۱)$$

برای توابع گمانه، چندجمله‌ای‌های محدودی را برحسب توان‌های $(1 - \rho)$ و ρ در نظر می‌گیریم. یک تابع سه پارامتری از نوع اول عبارت است از

$$\Psi_1 = \alpha_1(1 - \rho) + \beta_1(1 - \rho)^2 + \gamma_1(1 - \rho)^3 \quad (۷۱-۱)$$

این انتخاب ممکن است طبیعی به نظر آید، چراکه به‌طور اتوماتیک شرط مرزی در $\rho = 1$ را برآورده می‌کند، اما دارای نقضی است که دقت نمایش آن را از ψ نسبت به سری توانی برحسب ρ ، کم‌تر می‌کند. دلیل این کار این است که اگر چگالی چشمه‌ی g در مبدأ خوش‌رفتار و محدود باشد، قانون گوس نشان می‌دهد که ψ در آنجا دارای یک ماکزیمم یا یک مینیمم (با شیب صفرشونده) خواهد بود. شروط فوق هم در مبدأ و هم در $\rho = 1$ توسط یک تابع گمانه‌ی سه پارامتری برحسب توان‌های ρ ، برآورده می‌شوند

$$\Psi_2 = \alpha\rho^2 + \beta\rho^3 + \gamma\rho^4 - (\alpha + \beta + \gamma) \quad (۷۲-۱)$$

در حالت کلی انتظار داریم این تابع گمانه تقریب بهتری برای ψ نسبت به Ψ_1 باشد (برای همان تعداد پارامتر وردشی). [البته می‌توانستیم برای به‌دست آوردن رفتاری مناسب در مبدأ، قید $\alpha_1 + 2\beta_1 + 3\gamma_1 = 0$ را روی (۷۱-۱) اعمال کنیم، اما این کار تعداد پارامترها را از سه به دو کاهش می‌داد]. به‌راحتی نشان داده می‌شود که انتگرال تابع (۱-۶۳) برای Ψ_2 به‌صورت زیر است

$$\frac{1}{2\pi} I[\Psi_2] = \left[\frac{1}{2}\alpha^2 + \frac{6}{5}\alpha\beta + \frac{4}{3}\alpha\gamma + \frac{3}{4}\beta^2 + \frac{12}{5}\beta\gamma + \gamma^2 \right] - [e_2\alpha + e_2\beta + e_2\gamma] \quad (۷۳-۱)$$

که در آن $e_n = \int_0^1 g(\rho)(\rho^n - 1)\rho d\rho$

انتگرال Ψ نیز دارای شکلی مشابه با (۷۳-۱) است (اما با ضرایب متفاوت). همان طور که در بالا توصیف شد، با مساوی صفر قرار دادن مشتق‌های جزئی نسبت به پارامترهای α, β, γ به دنبال یک اکستریم از (۷۳-۱) هستیم. سه معادله‌ی خطی جبری جفت شده، "بهترین" مقادیر را ارائه می‌دهند

$$\begin{aligned}\alpha &= 225e_2 - 420e_3 + 210e_4 \\ \beta &= -420e_2 + \frac{2450}{3}e_3 - 420e_4 \\ \gamma &= 210e_2 - 420e_3 + \frac{441}{2}e_4\end{aligned}\quad (74-1)$$

این مقادیر را می‌توانستیم در (۷۳-۱)، [برای به دست آوردن $\min[\psi_2]$ به عنوان یک تابع نه چندان روشن از e_n] اعمال کنیم. آن وقت در می‌یافتیم که گروهی "جنبشی" (گروه اول) مساوی نصف گروهی "پتانسیل" (گروه دوم) بوده و از لحاظ علامت نیز مخالف با آن است که این خود، مشخصه‌ی اکستریم بودن است.

برای جلوتر رفتن بایستی $g(\rho)$ را مشخص کنیم. نتایج برای بهترین توابع گمانه‌ای Ψ_1 و Ψ_2 در شکل ۹-۱، برای چگالی چشمه‌ی زیر نشان داده شده است

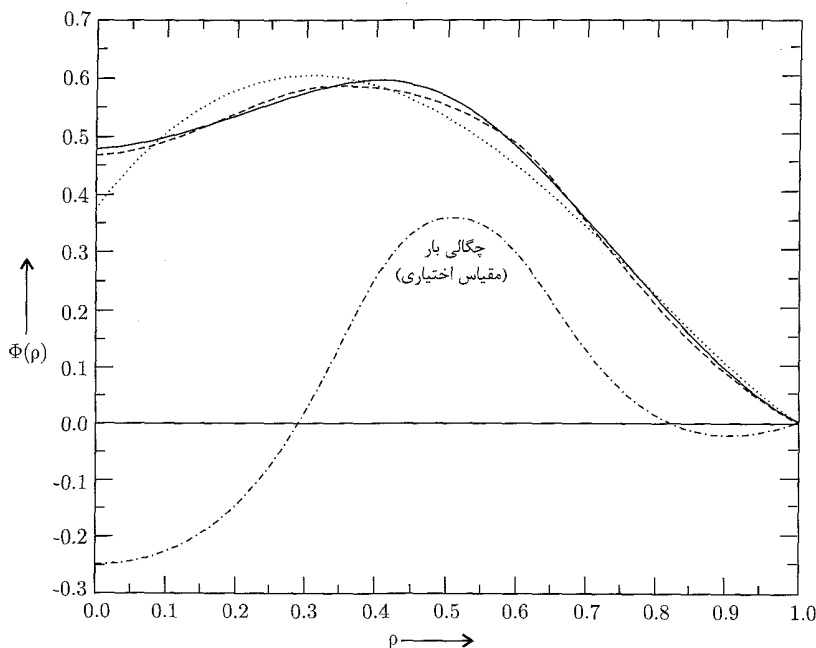
$$g(\rho) = -5(1-\rho) + 10^4 \rho^5(1-\rho)^5 \quad (75-1)$$

انتخاب چشمه اختیاری است و به گونه‌ای انتخاب می‌شود که پتانسیلی را که کاملاً بی‌شکل نباشد ارائه دهد. بهترین پارامترها برای ψ_2 عبارتند از، $\alpha = 2,915$ ، $\beta = -7,031$ ، $\gamma = 3,642$. انتگرال وردشی دارای مقدار $I[\Psi_2]_{\min} = -1,5817$ است؛ در مقایسه با $-1,6017$ $I[\psi]_{\text{exact}}$. دقت کنید که تابع گمانه‌ی ψ برای $\rho < 0,3$ به گونه‌ی نسبتاً بدی ناموفق از کار در می‌آید، چرا که شیب صفرشونده در $\rho = 0$ را در نظر نمی‌گیرد. با این وجود تابع فوق برای $I[\Psi_2]_{\min}$ مقدار $-1,5136$ را ارائه می‌دهد که تا اندازه‌ای بدتر از Ψ_2 است (۵,۵٪ خطا).

غیر حساس بودن $I[\psi]$ به خطا در تابع گمانه، هم قدرت و هم ضعف روش وردشی را نشان می‌دهد. اگر اصل فوق برای تخمین مقادیر ویژه (وابسته به مقدار مربوط به $I[\psi]$) مورد استفاده قرار گیرد، خوب عمل می‌کند. اگر به عنوان روشی برای تخمین یک جواب $\Psi \approx \psi$ مورد استفاده واقع شود، می‌تواند به گونه‌ای بد (حداقل در بخش‌هایی از فضای آرایش) ناموفق باشد.

خواننده از رابطه‌ی (۷۰-۱) تشخیص خواهد داد که یک چگالی چشمه‌ی چندجمله‌ای، منجر به یک جواب چندجمله‌ای دقیق برای ψ خواهد شد، اما در اینجا ایده‌ی اصلی بررسی روش وردشی است و نه اثبات رده‌ای از جواب‌های صریح.

توضیح بیشتر به مسائل انتهای این فصل و فصول بعدی واگذار می‌شود.



شکل ۱-۹: مقایسه‌ی جواب دقیق $\Psi(\rho)$ (منحنی توپر) با دو تقریب وردشی برای پتانسیل Ψ (منحنی نقطه‌ای) و Ψ_2 (منحنی خط‌چین). چگالی بار (۱-۷۵) با منحنی نقطه - خط نشان داده شده است (مقیاس اختیاری).

۱-۱۳ روش واهلش^۱ برای مسائل الکترواستاتیک دوبعدی

روش واهلش یک طرح یا روش عددی تکراری (که گاهی روش تفاضل محدود تکراری نیز نامیده می‌شود) برای حل معادله‌ی لاپلاس یا پواسن در دوبعد است. در اینجا ما تنها ایده‌های اساسی و ارتباط آن را با روش وردشی نشان می‌دهیم. در ابتدا معادله‌ی لاپلاس با شرایط مرزی دیریکله را در ناحیه‌ی دوبعدی S و مسیر مرزی C بررسی می‌کنیم. فرض می‌کنیم ناحیه‌ی S ، توسط یک شبکه‌ی مربعی با فاصله‌ی شبکه‌ای h ، پوشش یافته باشد (و مسیر مرزی C با یک زنجیره‌ی مرزی پله‌ای از مکان‌های شبکه‌ای در امتداد C تقریب یافته باشد). متغیرهای مستقل اعداد صحیح (i, j) هستند که مکان‌ها را مشخص می‌کنند و متغیرهای وابسته مقادیر گمانه‌ای $\psi(i, j)$ در هر مکان. مقادیر پتانسیل روی مکان‌های مرزی مشخص فرض شده‌اند. برای اثبات طبیعت وردشی این روش و برای مشخص کردن طرح تکرار، همان‌گونه که در شکل ۱-۱۰ الف نشان داده شده است، انتگرال تابعی $I[\psi]$ را روی S به صورت جمع روی دامنه‌هایی کوچک با مساحت h^2 در نظر می‌گیریم. مقادیر گمانه‌ای مربوط به پتانسیل را ثابت در نظر می‌گیریم. حال آنکه مقدار در مرکز هر زیر مساحت^۲ یک کمیت وردشی است که باید بهینه شود. فاصله شبکه‌ای به قدری کوچک است که به

1) Relaxation method 2) Subarea

ما امکان می‌دهد مشتق‌ها را مثلاً در ربع شمال شرقی (ربع اول) از زیر مساحت، با روابط زیر تقریب بزنیم

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)_{NE} = \frac{1}{h}(\psi_E - \psi_o); \quad \left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)_{NE} = \frac{1}{h}(\psi_n - \psi_o)$$

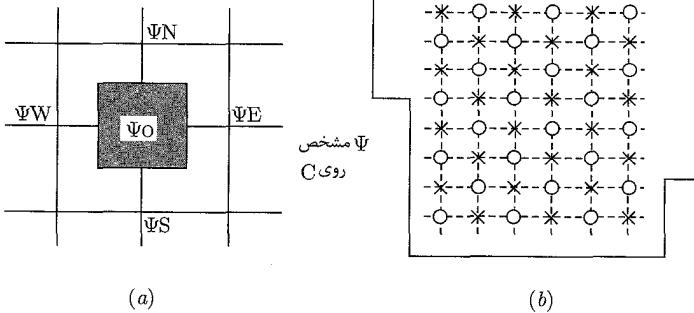
و همین‌طور برای سه ربع دیگر.

انتگرال تابعی روی ربع شمال شرقی (ربع اول) عبارت است از

$$\begin{aligned} I_{NE} &= \frac{1}{\Delta} \int_0^{\frac{h}{\Delta}} dx \int_0^{\frac{h}{\Delta}} dy \left[\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^2 \right] \\ &\approx \frac{1}{\Delta} [(\psi_o + \psi_N)^2 + (\psi_o - \psi_E)^2] \end{aligned} \quad (76-1)$$

انتگرال کامل روی کل زیر فضا (ناحیه‌ی سایه‌دار) به‌وضوح عبارت است از

$$I \approx \frac{1}{\Delta} [(\psi_o - \psi_N)^2 + (\psi_o - \psi_E)^2 + (\psi_o - \psi_S)^2 + (\psi_o - \psi_W)^2] \quad (77-1)$$



شکل ۱-۱۰: (الف) تصویر بزرگ‌شده‌ی یکی از "زیرمساحت‌ها" در انتگرال تابعی (ناحیه‌ی سایه‌دار). مقادیر گمانه‌ای مربوط به پتانسیل در مکان‌های همسایه با $\psi_N, \psi_S, \psi_E, \psi_W$ نشان‌دار شده‌اند، در حالی‌که این مقدار در مرکز زیر مساحت ψ_o است. (ب) یک تکرار ممکن، جایگزینی مقادیر گمانه‌ای در مکان‌های شبکه‌ای (O) با میانگین مقادیر در مکان‌های اطراف (X) است.

کمینه‌سازی این انتگرال نسبت به ψ_o مقدار بهینه زیر را نتیجه می‌دهد

$$(\psi_o)_{\text{بهینه}} = \frac{1}{4}(\psi_N + \psi_E + \psi_S + \psi_W) \quad (78-1)$$

انتگرال فوق کمینه می‌شود اگر ψ_o مساوی با میانگین مقادیر در نقاط "ضربی" باشد^۱.

1) Cross point

حال کل انتگرال تابعی (یعنی، مجموع انتگرال‌ها روی تمام زیرمساحت‌ها) را در نظر می‌گیریم. در ابتدا مجموعه‌ای از $\psi(i, j)$ ‌ها را حدس و سپس انتگرال تابعی $I[\psi]$ را توسط جمع جملاتی به صورت (۱-۷۷) تخمین می‌زنیم. سپس روی شبکه رفته و نیمی از مقادیر را که با دوایر در شکل (۱-۱۰) الف، نشان داده شده‌اند با میانگین مربوط به نقاط (نقاط ضربی) اطراف آن‌ها جایگزین می‌کنیم. مجموعه‌ی جدید مقادیر گمانه‌ای $\psi(i, j)$ ، به‌وضوح انتگرال تابعی $I[\psi]$ را بیش‌تر از مجموعه‌ی مقادیر اصلی کمینه خواهد نمود؛ مجموعه‌ی جدید به جواب صحیح نزدیک‌تر خواهد بود. عملاً نیازی به میانگین‌گیری برای تنها بیش‌تر از نیمی از نقاط وجود ندارد - دقیقاً، این یک تکرار برای نیمی از زیرمساحت‌ها در فرآیند مربوط به شکل (۱-۱۰) الف بود.

اصلاحات زیادی وجود دارد که می‌تواند صورت گیرد. یک اصلاح مهم در این مورد مربوط به میانگین‌گیری است. ما می‌توانستیم به‌جای مقادیر "ضربی" میانگین مقادیر را در گوشه‌های مربع بزرگ موجود در شکل (۱-۱۰) الف در نظر بگیریم؛ یا می‌توانستیم یک ترکیب خطی از ایندو را داشته باشیم. با بسط سری تیلور هر تابع خوش‌رفتار $F(x, y)$ ، می‌توان نشان داد که یک میانگین وزنی خاص به‌صورت

$$\langle\langle F(x, y) \rangle\rangle \equiv \frac{1}{5} \langle F \rangle_c + \frac{1}{5} \langle F \rangle_s \quad (79-1)$$

که در آن میانگین‌های "ضربی" و "مربعی" عبارتند از

$$\langle F(x, y) \rangle_c = \frac{1}{4} [F(x+h, y) + F(x, y+h) + F(x-h, y) + F(x, y-h)]$$

$$\langle F(x, y) \rangle_s = \frac{1}{4} [F(x+h, y+h) + F(x+h, y-h) \quad (الف 80-1)$$

$$+ F(x-h, y+h) + F(x-h, y-h)] \quad (ب 80-1)$$

و رابطه‌ی زیر را نتیجه خواهند داد

$$\langle\langle F(x, y) \rangle\rangle = F(x, y) + \frac{1}{10} h^2 \nabla^2 F + \frac{1}{40} h^4 \nabla^2 (\nabla^2 F) + O(h^6) \quad (81-1)$$

در رابطه‌ی (۸۱-۱) لاپلاسین‌های تابع F در (x, y) تعیین شده‌اند. در صورتی‌که $F(x, y)$ یک جواب برای معادله‌ی لاپلاس باشد، میانگین‌گیری وزنی روی هشت مکان شبکه‌ای مجاور در (۷۹-۱)، تابع F را در مرکز (با تصحیح‌هایی تنها از مرتبه‌ی h^6) مشخص خواهد کرد. به‌جای رابطه‌ی (۷۸-۱) که مشابه با، ۱-۸۰ الف است، یک طرح تکرار بهتر، تابع $\psi_{\text{new}}(i, j) = \langle\langle \psi(i, j) \rangle\rangle + O(h^6)$ را مورد استفاده قرار می‌دهد. با هر یک از میانگین‌گیری‌های "ضربی" یا "مربعی" به‌طور مجزا، خطا از $O(h^4)$ است. افزایش دقت در کار با $\langle\langle \psi \rangle\rangle$ به هزینه‌ای به اندازه‌ی دو برابر بزرگی محاسبه برای هر مکان شبکه‌ای نیاز دارد، اما برای دقتی

مشابه، مکان‌های شبکه‌ای به مراتب کم‌تری مورد نیازند: $\langle\langle N \rangle\rangle = O(\langle N \rangle^{\frac{2}{3}})$ که در آن $\langle\langle N \rangle\rangle$ تعداد مکان‌های مورد نیاز با $\langle\langle \psi \rangle\rangle$ است و $\langle N \rangle$ تعداد متناظر (مورد نیاز) با میانگین "ضربی" یا "مربعی".

معادله‌ی (۸۱-۱) در کاربرد برای معادله‌ی پواسن $\nabla^2 \psi = -g$ دارای مزیتی اضافه است. جملاتی از مرتبه‌ی h^2 و h^4 را می‌توان مستقیماً برحسب چگالی مشخص بار و ساده‌ترین تقریب برای لاپلاسیان آن بیان کرد. نشان دادن این نکته که مقدار جدید تابع گمانه در (i, j) توسط رابطه‌ی زیر تولید می‌شود آسان است

$$\psi_{\text{new}} = \langle\langle \psi(i, j) \rangle\rangle + \frac{h^2}{\epsilon_0} g(i, j) + \frac{h^2}{\epsilon_0} \langle g(i, j) \rangle_c + O(h^6) \quad (82-1)$$

که در آن $\langle g \rangle_c$ میانگین "ضربی" مربوط به g [مطابق با ۸۰-۱ الف] است.

یک روش اساسی برای "حل عددی تکراری" معادله‌ی لاپلاس یا پواسن در دو بعد با شرایط مرزی دیریکله به صورت زیر است،

۱. یک شبکه‌ی مربعی با فاصله‌ی شبکه‌ای h انتخاب می‌شود و سپس مکان‌های شبکه‌ای (شامل مکان‌های موجود روی مرز) با یک روش خاص برحسب می‌خورند [که آن را در اینجا به صورت (i, j) مشخص می‌کنیم].

۲. مقادیر مربوط به پتانسیل در مکان‌های مرزی در یک جدول پتانسیلی (در تمام مکان‌ها) وارد می‌شوند.

۳. حدسی برای مقادیر در تمام مکان‌های درونی (که $\psi_{\text{old}}(i, j)$ نامیده می‌شود) صورت می‌گیرد. یک مقدار ثابت در هر مکان ساده‌ترین حدس است. این مقادیر به جدول یا آرایه‌ی مقادیر "اولیه" اضافه می‌شوند.

۴. اولین سیکل تکرار یکی یکی، با حرکتی اصولی روی مکان‌های شبکه‌ای شروع می‌شود و سپس محاسبه $\langle\langle \Phi(i, j) \rangle\rangle$ با رابطه‌ی (۷۹-۱) یا یکی از میانگین‌ها در رابطه‌ی (۸۰-۱) انجام می‌شود. این کمیت [یا (۸۲-۱) برای معادله‌ی پواسن] به صورت $\psi_{\text{new}}(i, j)$ در یک جدول از مقادیر "جدید" مربوط به پتانسیل در هر مکان، وارد می‌شود. دقت کنید که مکان‌های نزدیک مرز از مقادیر مرزی مشخص شده بهره‌مند می‌شوند و بنابراین مقادیر $\langle\langle \psi \rangle\rangle$ ی آن‌ها احتمالاً در ابتدا به مقادیر نهایی (نسبت به مقادیر مربوط به مکان‌های غیرسطحی در درون) پتانسیل نزدیک‌تر باشند. با انجام هر تکرار، پتانسیل از سمت مرزها به درون دقت پیدا می‌کند.

۵. به مجرد اینکه برای تمامی مکان‌های درونی اقدام صورت گرفته باشد، مجموعه‌ی $\psi_{\text{old}}(i, j)$ با مجموعه‌ی $\psi_{\text{old}}(i, j)$ عوض شده و سیکل تکرار مجدداً شروع می‌شود.

۶. تکرارها تا هنگامی که یک سطح مطلوب از دقت به دست آید ادامه می‌یابند. برای مثال تکرارها را می‌توان تا موقعی که مقدار مطلق تفاوت بین ψ_{old} و ψ_{new} کم‌تر از یک مقدار از پیش تعیین شده در هر مکان داخلی شود، ادامه داد.

طرح فوق که عیناً نقشه‌ی کلی آن ارائه شد، طرح "تکرار ژاکوبی" نامیده می‌شود. این طرح در طی هر تکرار (در مکان‌های شبکه‌ای) به دو آرایه از مقادیر مربوط به پتانسیل نیاز دارد. یک طرح بهتر که "تکرار

گوس - سیندل“ نامیده می‌شود تغییر اندکی را اعمال می‌کند؛ به محض اینکه $\psi_{\text{new}}(i, j)$ تعیین شد ψ_{old} را با $\psi_{\text{new}}(i, j)$ عوض می‌کنیم. این بدان معنی است که در طی یک فرآیند “تکرار” بلافاصله از مقادیر اصلاح شده بهره‌مند می‌شویم. نوعاً در هر مکان شبکه‌ای مشخص، $\langle\langle\Psi\rangle\rangle$ بسته به مسیر روی شبکه توسط نیمی از مقادیر قدیمی و نیمی از مقادیر جدید ساخته می‌شود. در اینجا امکان اصلاحات زیاد دیگری نیز وجود دارد - در این رابطه به کتاب؛ Numerical Recipes Press et al رجوع کنید و یا تعدادی از مراجع که در انتهای این فصل آمده‌اند. روش واهلس همانگونه که در بخش (۱-۱۴) توصیف شده است برای مسائل میدان مغناطیسی نیز قابل استفاده است.

مراجع و خواندنی‌های پیشنهادی

از نقطه نظر ریاضیات، موضوع توابع دلتا به سادگی اما با دقت زیاد توسط

Lighthill

Dennerly and Kryzwicki

مورد بحث قرار گرفته است.

برای بحث در مورد انواع مختلف معادلات دیفرانسیل جزئی، و شرایط مرزی مناسب برای هر کدام

مراجع زیر را ملاحظه کنید

Morse and Feshbach, Chapter 6

Sommerfeld, *Partial Differential Equations in Physics*, Chapter II

Courant and Hilbert, Vol II, Chapters III-VI

نظریه‌ی عمومی توابع گرین با جزئیات توسط

Freidman, Chpater 3

Morse and Feshbach, Chapter 7

مورد بحث قرار گرفته است.

نظریه‌ی عمومی الکترواستاتیک به‌گونه‌ای گسترده در بسیاری از کتاب‌های قدیمی‌تر بررسی شده است.

صرف نظر از بعضی علامت‌گذاری‌های با سبک و سیاق قدیمی، افرا برجسته‌ای که در این مورد بررسی را

انجام داده‌اند عبارتند از

Maxwell, Vol 1, Chapters II and IV

Jeands, Chapters II, VI, VII

Kellogg

از میان بسیاری از کتاب‌های جدید، می‌شود از بحث نظریه‌ی کلی الکترواستاتیک توسط

Stratton, Chpater III, and Parts of Chapter II

خوانندگان علاقه‌مند به کاربرد روش‌های وردشی در مسائل الکترومغناطیس می‌توانند به مراجع زیر مراجعه کنند

Cairo and Kahan

Collin, Chapter 4

Sadiku, Chapter 4

و جهت روش‌های ریاضی پر قدرت و دقیق کتاب

Polya and Szegő

مراجع کلاسیک برای روش‌های واهلس، دو کتاب R. V. Southwell زیر هستند

Relaxation Method in Engineering Science, Oxford University Press, Oxford

(1940).

Relaxation Method in Theoretical Physics, Oxford University Press, Oxford

(1946).

فیزیکدانان خیلی با جلد دوم راحتند، اما بسیاری از موضوعات اساسی در جلد اول وجود دارد. تعدادی

از مراجع مدرن در مورد روش واهلس و سایر روش‌های عددی عبارتند از

Sadiku

Zhou

مسائل

۱-۱ قضیه‌ی گوس [و در صورت لزوم رابطه‌ی (۱-۲۱)] را برای اثبات موارد ذیل مورد استفاده قرار دهید،

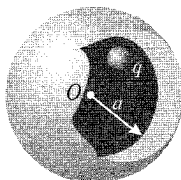
(الف) هرگونه بار اضافی که روی یک رسانا گذاشته شود، بایستی به‌طور کامل روی سطح آن قرار گیرد.

(یک رسانا طبق تعریف، شامل بارهایی است که قادر به حرکت آزادانه تحت تأثیر میدان‌های

الکتریکی اعمال شده هستند.)

(ب) یک رسانای توخالی بسته، درونش را از میدان‌های ناشی از بارهای بیرونی محافظت می‌کند

اما بیرونش را نمی‌تواند از میدان‌های ناشی از بارهایی که در درون آن قرار گرفته‌اند، حفظ کند.



شکل: باری در درون یک پوسته‌ی رسانا

ج) میدان الکتریکی در سطح یک رسانا عمود بر سطح و دارای اندازه‌ی $\frac{\sigma}{\epsilon_0}$ است، که در آن σ چگالی بار بر واحد مساحت روی سطح فوق است.

۲-۱) تابع دلتای دیراک در سه بعد را می‌توان به صورت حد ناسره‌ی تابع گوسی زیر هنگامی که $\alpha \rightarrow 0$ میل می‌کند، در نظر گرفت:

$$D(\alpha, x, y, z) = (\sqrt{\pi})^{-3} \alpha^{-3} \exp \left[-\frac{1}{2\alpha^2} (x^2 + y^2 + z^2) \right]$$

سیستم مختصات عام متعامدی را در نظر بگیرید که با سطوح $u = \text{cte}$ ، $v = \text{cte}$ و $w = \text{cte}$ و با المان‌های طول $\frac{dw}{u}$ ، $\frac{dv}{v}$ و $\frac{du}{w}$ در سه امتداد عمود بر هم مشخص می‌شود. با بررسی حد تابع گوسی بالا نشان دهید که:

$$\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \delta(u - u') \delta(v - v') \delta(w - w'). UVW$$

دقت کنید که وقتی $\alpha \rightarrow 0$ میل می‌کند، برای فاصله‌ی بین نقاط در نمای تابع گوسی تنها لازم است المان طولی بینهایت کوچکی را مورد استفاده قرار دهیم.

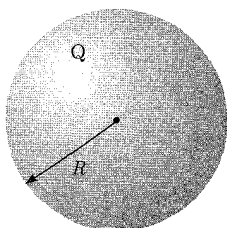
۳-۱) با استفاده از توابع دلتای دیراک در مختصات مناسب، توزیع‌های بار داده شده در زیر را به صورت چگالی‌های بار سه‌بعدی $\rho(\mathbf{r})$ بیان کنید.

الف) در مختصات کروی بار Q به‌طور یکنواخت روی یک پوسته‌ی کروی با شعاع R توزیع شده است.

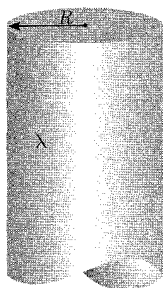
ب) در مختصات استوانه‌ای بار بر واحد طول λ به‌طور یکنواخت روی یک سطح استوانه‌ای با شعاع b توزیع شده است.

ج) در مختصات استوانه‌ای بار Q به‌طور یکنواخت روی یک دیسک دایروی تخت با شعاع R و ضخامت قابل اغماض پخش شده است.

د) مشابه قسمت (ج) اما با استفاده از مختصات کروی.



(الف)



(ب)



(ج)

۴-۱ سه کره‌ی باردار با شعاع a ، یکی رسانا، یکی دارای چگالی بار یکنواخت درون حجم خود، و یکی دارای چگالی بار متقارن کروی که به‌طور شعاعی به‌صورت r^n ($n > -3$) تغییر می‌کند، هر یک دارای بار کل Q هستند. قضیه‌ی گوس را برای به‌دست آوردن میدان‌های الکتریکی هم در درون و هم در بیرون از هر کره مورد استفاده قرار دهید. رفتار میدان‌ها را به‌صورت تابعی از شعاع برای دو کره‌ی اول، و برای کره‌ی سوم با $n = -2, +2$ ترسیم کنید.

۵-۱ پتانسیل میانگین‌گیری‌شده‌ی زمانی مربوط به یک اتم هیدروژن خنثی با رابطه‌ی زیر مشخص می‌شود:

$$\phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^{-\alpha r}}{r} \left(1 + \frac{\alpha r}{2}\right)$$

که در آن q اندازه‌ی بار الکترون و $\frac{a_0}{4} = \alpha^{-1}$ ؛ که a_0 شعاع اتم بوهر است. توزیع باری را بیابید که این پتانسیل را به‌وجود می‌آورد (هم برای توزیع بار پیوسته و هم توزیع بار ناپیوسته) و نتیجه را از لحاظ فیزیکی تفسیر کنید. ۶-۱ خازن ساده وسیله‌ای است که از دو رسانای عایق‌بندی شده که در مجاورت یکدیگر قرار می‌گیرند، تشکیل می‌شود. اگر بارهای مساوی و مخالف روی رساناها قرار گیرند، یک اختلاف پتانسیل مشخص بین آن‌ها به‌وجود خواهد آمد. نسبت بار موجود روی یک رسانا به اندازه‌ی اختلاف پتانسیل بین رساناها، ظرفیت نامیده می‌شود (که در سیستم واحدهای SI برحسب فاراد اندازه‌گیری می‌شود). با استفاده از قانون گوس، ظرفیت را در موارد زیر محاسبه کنید.

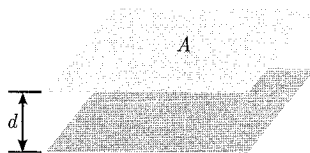
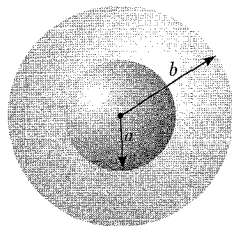
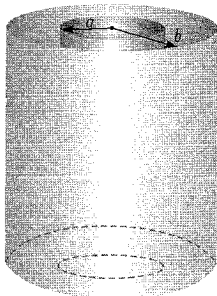
(الف) دو ورقه‌ی رسانای تخت بزرگ با مساحت A که در فاصله‌ی کوچک d از یکدیگر قرار گرفته‌اند.

(ب) دو کره‌ی رسانای هم‌مرکز با شعاع‌های a و b ($b > a$).

(ج) دو استوانه‌ی رسانای هم‌مرکز به‌طول l ، که در مقایسه با شعاع آن‌ها یعنی a و b بزرگ است ($b > a$).

(د) قطر داخلی رسانای بیرونی، در یک کابل هم‌محور پر شده از هوا، که رسانای مرکزی آن سیمی

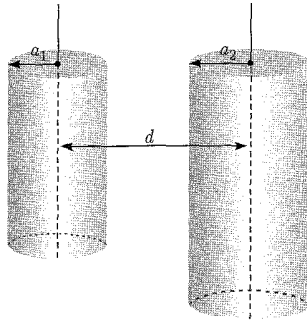
استوانه‌ای با قطر ۱mm است، برای دو ظرفیت $\frac{F}{m}$ 3×10^{-11} و $\frac{F}{m}$ 3×10^{-12} .



۷-۱ دو رسانای استوانه‌ای بلند، با شعاع‌های a_1 و a_2 با هم موازی‌اند، و با فاصله‌ی d که در مقایسه با هر یک از شعاع‌ها بزرگ است، از هم جدا شده‌اند. نشان دهید که ظرفیت بر واحد طول این سیستم به‌طور

تقریبی با رابطه‌ی زیر مشخص می‌شود:

$$C \approx \pi \epsilon_0 \left(\ln \frac{d}{a} \right)^{-1}$$



که در آن a میانگین هندسی دو شعاع است. به‌طور تقریب، چه سیم پیمانه‌ای (قطر را برحسب میلی‌متر بیان کنید) برای ایجاد یک خط انتقال دو سیمی با ظرفیت $\left(\frac{F}{m} \right) 10^{-11} \times 1.2$ لازم است، اگر فاصله‌ی جدایی بین سیم‌ها 0.5cm ، 1.5cm و 5cm باشد؟

۸-۱ الف) برای سه نوع خازن موجود در مسئله ۶-۱ (خازن مسطح، خازن کروی، خازن استوانه‌ای) انرژی الکتروستاتیکی کل را محاسبه و آن را به روشی دیگر برحسب اختلاف پتانسیل بین رساناها و بارهای مساوی و مخالف Q و $-Q$ که روی رساناها قرار گرفته‌اند، محاسبه کنید.

ب) چگالی انرژی میدان الکتروستاتیک را در هر کدام از حالت‌ها به‌صورت تابعی از مختصات خطی مناسب ترسیم کنید.

۹-۱ نیروی جاذبه‌ی بین رساناها را در خازن مسطح با صفحات موازی (مسئله ۶-۱ الف) و خازن استوانه‌ای موازی (مسئله ۷-۱) برای حالت‌های زیر محاسبه کنید:

الف) بارهای ثابت روی هر رسانا

ب) اختلاف پتانسیل ثابت بین رساناها

۱۰-۱ قضیه‌ی مقدار میانگین را ثابت کنید:

برای فضای خالی از بار، اندازه‌ی پتانسیل الکتروستاتیک در هر نقطه، مساوی میانگین پتانسیل روی سطح کره‌ای است با هر شعاع که روی آن نقطه مرکزیت یافته باشد.

۱۱-۱ با استفاده از قضیه‌ی گوس ثابت کنید که در سطح یک رسانای باردار خمیده، مشتق عمودی میدان الکتریکی با رابطه‌ی زیر مشخص می‌شود:

$$\frac{1}{E} \frac{\partial E}{\partial n} = - \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$$

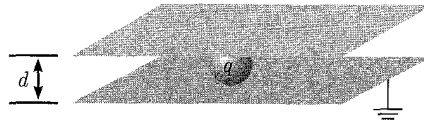
که در آن R_1 و R_2 شعاع‌های اصلی انحناهای سطح هستند.

۱۲-۱ قضیه‌ی تقابل گرین را اثبات کنید:

اگر ϕ پتانسیل ناشی از چگالی بار حجمی ρ درون حجم V و چگالی بار سطحی σ روی سطح رسانای (S) محدودکننده‌ی حجم V باشد، در عین اینکه ψ' پتانسیل ناشی از توزیع‌های دیگر ρ' و σ' است، خواهیم داشت:

$$\int_v \rho \phi' dv + \int_A \sigma \phi' dA = \int_v \rho' \phi dv + \int_v \sigma' \phi dA$$

۱۳-۱ دو صفحه‌ی رسانای موازی بینهایت و متصل به زمین، با فاصله‌ی d از یکدیگر جدا شده‌اند. بار نقطه‌ای q بین این صفحات قرار گرفته است. قضیه‌ی تقابل گرین را برای اثبات اینکه بار القایی کل روی یکی از صفحات مساوی با $(-q)$ برابر فاصله‌ی عمودی نسبی بار نقطه‌ای از صفحه‌ی دیگر است، مورد استفاده قرار دهید. (توجه: به‌عنوان مسئله‌ی الکتروستاتیکی مقایسه‌ای برای خودتان، با همان سطوح، مسئله‌ای را انتخاب کنید که چگالی‌های بار و پتانسیل روی آن‌ها مشخص بوده و ساده باشند.)



۱۴-۱ ترکیب‌های متقارن و پادمتقارن تابع گرین الکتروستاتیکی $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ از بخش ۱-۱۰ را در نظر بگیرید:

$$S(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{V} [G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + G(\mathbf{r}', \mathbf{r})] \quad (\text{متقارن})$$

$$A(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{V} [G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - G(\mathbf{r}', \mathbf{r})] \quad (\text{پاد متقارن})$$

نشان دهید که در داخل حجم V داریم:

$$\nabla'^2 A = 0$$

آن‌گاه قضیه‌ی گرین را با در نظر گرفتن $\phi = S$ و $\psi = \Phi$ و همچنین $\phi = \Phi$ و $\psi = A$ برای به‌دست آوردن روابطی مشابه با (۴۲-۱) به‌کار بگیرید.

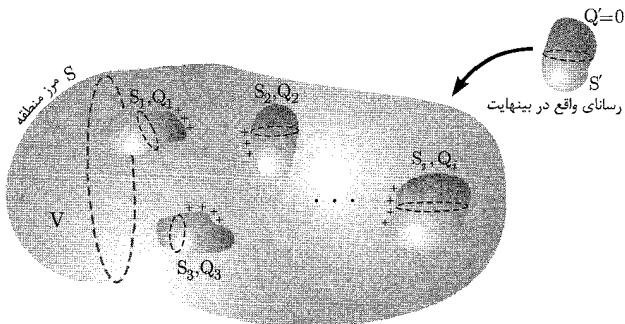
$$(42-1) : \phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_v \rho(\mathbf{r}') G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dv' + \frac{1}{4\pi} \oint_A \left[G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial \phi(\mathbf{r}')}{\partial n} - \phi(\mathbf{r}') \frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n'} \right] da'$$

نشان دهید که برای دو شرط مرزی دیریکله یا نیومن، تابع گرین پادمتقارن هیچ سهمی در پتانسیل ندارد. (شکل پادمتقارن باید برای شرایط مرزی دیریکله صفر شود - بخش ۱-۱۰ را ملاحظه کنید - اما امکان

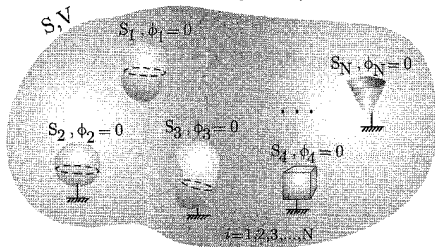
دارد برای شرایط مرزی نیومن صفر نشود. گرچه نتیجه‌ی به‌دست آمده در اینجا نشان می‌دهد که ممکن است کسی تابع گرین نیومن را متقارن‌سازی بکند و یا این کار را انجام ندهد، که در هر حال انجام آن اختیاری است. برای یک مثال صریح مسئله‌ی ۳-۲۶ را ملاحظه کنید.)
 ۱۵-۱ قضیه‌ی تامسون را ثابت کنید:

اگر تعدادی از سطوح در مکان ثابتی نگه‌داشته شوند و بار کل مشخصی روی هر سطح قرار گیرد، در این صورت وقتی بارها به‌گونه‌ای قرارگیرند که هر سطح یک سطح هم‌پتانسیل باشد، آن‌گاه انرژی الکتروستاتیک در ناحیه‌ی محدود شده توسط این سطوح یک مینیمم مطلق خواهد بود.
 ۱۶-۱ قضیه‌ی ذیل را ثابت کنید:

اگر یک تعداد سطوح رسانا همراه با یک بار کلی مشخص روی هر کدام، در مکانی ثابت نگه‌داشته شوند، در این صورت وارد کردن رسانای عایق‌بندی‌شده‌ی بدون بار به درون ناحیه‌ی محدودشده توسط سطوح فوق، انرژی الکتروستاتیک را پایین می‌آورد.



۱۷-۱ حجم V در خلاء توسط سطح S محدود شده است. درون حجم V ، چند سطح رسانای مجزا از هم قرار دارند به طوری که یکی از رساناها تحت پتانسیل واحد، و سایر رساناها در پتانسیل صفر قرار گرفته‌اند.



الف) نشان دهید که ظرفیت یک رسانا با رابطه‌ی زیر مشخص می‌شود:

$$C = \epsilon_0 \int_V |\nabla \phi|^2 dv$$

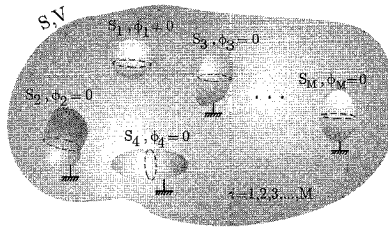
که در آن $\phi(\mathbf{r})$ جواب پتانسیل است.

ب) نشان دهید که ظرفیت الکتریکی واقعی C ، همواره کوچک‌تر یا مساوی با کمیت زیر است:

$$C[\psi] = \epsilon_0 \int_V |\nabla\psi|^2 dv$$

که در آن ψ عبارت است از هر تابع حدسی‌ای که بتواند شرایط مرزی روی سطح رساناها را برآورده نماید. این یک اصل وردشی برای ظرفیت الکتریکی است که یک حد بالا را نتیجه می‌دهد.

۱۸-۱ آرایشی از رساناهای $s_1, s_2, \dots, s_i, \dots$ را در نظر بگیرید که در شرایط خلاء درون حجم V که توسط سطح مرزی خارجی S محدود شده است، قرار گرفته‌اند. به جز s_1 ، بقیه‌ی رساناهای $s_2, s_3, \dots, s_i, \dots$ در پتانسیل صفر نگه داشته شده‌اند.



الف) نشان دهید که پتانسیل $\phi(\mathbf{r})$ در هر نقطه درون حجم V و بر روی هر یک از سطوح s_i را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint_{s_i} \sigma_1(\mathbf{r}') G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') ds'$$

که در آن $\sigma_1(\mathbf{r}')$ چگالی بار سطحی روی رسانای s_1 است و $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ پتانسیل تابع گرین مربوط به یک بار نقطه‌ای در حضور تمام سطوحی است که در پتانسیل صفر نگه داشته شده‌اند (ولی با عدم حضور s_1). همچنین نشان دهید که انرژی الکتروستاتیکی عبارت است از:

$$W = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint_{s_1} ds \oint_{s_1} ds' \sigma_1(\mathbf{r}) G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \sigma_1(\mathbf{r}')$$

که در آن انتگرال‌های سطحی روی سطح s_1 هستند.

ب) نشان دهید که رابطه‌ی وردشی زیر:

$$C^{-1}[\sigma] = \frac{\oint_{s_1} ds \oint_{s_1} ds' \sigma(\mathbf{r}) G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \sigma(\mathbf{r}')}{4\pi\epsilon_0 \left[\oint_{s_1} \sigma(\mathbf{r}') ds \right]^2}$$

با یک تابع انتگرال‌پذیر اختیاری $\sigma(\mathbf{r})$ که روی S_1 تعریف شده است، برای تغییرات کوچک σ (جدا از σ_1)، مانا است. قضیه‌ی تامسون را برای اثبات این‌که وارونه‌ی $C^{-1}[\sigma]$ حد پایینی را برای ظرفیت واقعی رسانای S_1 ارائه می‌دهد، مورد استفاده قرار دهید.

۱۹-۱ یک خازن استوانه‌ای را در نظر بگیرید که از دو استوانه‌ی رسانای هم‌مرکز به طول L و شعاع قاعده‌ی a و b تشکیل شده است، به طوری که $b > a$ بوده و طول رساناها در مقایسه با شعاع قاعده‌ها یعنی a و b بزرگ هستند. برای این خازن استوانه‌ای حد بالای وردشی برای ظرفیت الکتریکی را مطابق قسمت (ب) مسئله‌ی (۱۷-۱) یعنی:

$$C[\psi] = \epsilon_0 \int_V |\nabla\psi|^2 dv$$

را با تابع حدسی ساده‌ی $\psi_1(\rho) = \frac{b-\rho}{b-a}$ تعیین کنید.

نتیجه‌ی وردشی فوق را با نتیجه‌ی دقیق آن به‌ازای $3, 2, 1.5$ مقایسه کنید. روند نتیجه‌ی به‌دست آمده‌ی خود را برحسب شکل تابعی ψ_1 توضیح دهید. یک تابع حدسی اصلاح‌شده توسط کالین مورد بحث قرار گرفته است (صفحات ۱۵۲-۱۵۱ متن اصلی کتاب الکترودینامیک جکسون؛ بخش ۳-۴) ۲۰-۱ در تخمین ظرفیت یک آرایش از رساناهای مشخص اغلب مقایسه با ظرفیت‌های شناخته‌شده مفید است. دو آرایش n رسانا را در نظر بگیرید که در آن، رسانا در پتانسیل صفر نگه داشته شده‌اند و مشابه‌اند ولی رسانایی که می‌خواهیم ظرفیت آن را بدانیم متفاوت است. به‌ویژه فرض کنید رسانای موجود در یک آرایش دارای سطح بسته S_1 و در آرایش دیگر دارای سطح S'_1 باشد، (با S'_1 که به‌طور کامل درون S_1 است) (الف) اصل اکسترمم بخش ۱-۱۲ و اصل وردشی مسئله ۱-۱۷ را برای اثبات اینکه ظرفیت C' رسانای با سطح S'_1 ، کوچک‌تر یا مساوی ظرفیت C رسانای با سطح S_1 است (که S'_1 را احاطه کرده است) مورد استفاده قرار دهید. (ب) برای ظرفیت یک مکعب رسانا به ضلع a ، حدود بالا و پایینی را تعیین کنید. حدودتان و هم‌چنین میانگین آن‌ها را با مقدار عددی $C \approx 0.655(4\pi\epsilon_0 a)$ مقایسه کنید. (ج) اگر یکی از سیم‌ها با یک سیم با سطح مقطع مربعی (که ضلع آن مساوی قطر سیم باشد) جایگزین شود تا چه اندازه تخمین می‌زنید که ظرفیت بر واحد طول سیستم دو سیمه‌ی مسئله‌ی ۱-۷ تغییر کند؟ (بزرگ‌تر یا کوچک‌تر؟)

۲۱-۱ یک مسئله‌ی پتانسیلی دوبعدی متشکل از یک سطح مربعی واحد $(0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1)$ توسط سطوحی که در پتانسیل صفر نگه داشته شده‌اند محدود شده است. روی کل مربع یک چگالی بار یکنواخت با قدرت واحد (بر واحد طول در راستای محور z) وجود دارد.

(الف) اصل وردشی (۱-۶۳) را برای تعیین بهترین مقدار ثابت A برای معادله‌ی پواسن، با تابع گمانه‌ی “وردشی” $\Psi(x, y) = A.x(1-x).y(1-y)$ ، به‌کار بگیرید.

ب) حل دقیق (سری آلبرت) این مسئله عبارت است از: [مسئله‌ی ۲-۱۵ و ۲-۱۶ را ملاحظه کنید]

$$\epsilon_0 \Phi(x, y) = \frac{16}{\pi^2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\sin[(2m+1)\pi x]}{(2m+1)^2} \left\{ 1 - \frac{\cosh \left[(2m+1)\pi \left(y - \frac{1}{2} \right) \right]}{\cosh \left[(2m+1)\frac{\pi}{2} \right]} \right\}$$

به‌ازای $y = 0.25$ و $y = 0.75$ ، جواب وردشی ساده‌ی مربوط به قسمت الف را همراه با جواب دقیق به‌صورت تابعی از x ترسیم و این دو را با هم مقایسه کنید.

۲۲-۱ محاسبات واهلشی^۲ دوبعدی عموماً مکان‌های روی یک شبکه‌ی مربعی با فاصله‌ی بین شبکه‌ای $\delta x = \delta y = h$ ، (و برجسب مکان‌ها را توسط (i, j) ، که در آن i و j اعداد صحیح هستند) و $x_i = ih + x_0 = jh + y_0$ ، را مورد استفاده قرار می‌دهد. مقدار پتانسیل در (i, j) را می‌توان با میانگین مقادیر در مکان‌های مجاور تقریب زد. [قضیه‌ی مربوط به توابع هارمونیک را به‌یاد آورید] در مورد میانگین چه؟ الف) اگر تابع $F(x, y)$ یک تابع خوش - رفتار اما نه لزوماً هارمونیک، در همسایگی مبدأ باشد با بسط صریح سری تیلور نشان دهید که جمع "مقاطع"^۳

$$S_c = F(h, 0) + F(0, h) + F(-h, 0) + F(0, -h)$$

را می‌توان به‌صورت زیر بیان نمود

$$S_c = 4F(0, 0) + h^2 \nabla^2 F + \frac{h^4}{12} (F_{xxxx} + F_{yyyy}) + O(h^6)$$

ب) به‌طور مشابه نشان دهید که جمله‌ی "مربعی"

$$S_s = F(h, h) + F(-h, h) + F(-h, -h) + F(h, -h)$$

را می‌توان به‌صورت زیر بیان کرد

$$S_s = 4F(0, 0) + 2h^2 \nabla^2 F - \frac{h^4}{3} (F_{xxxx} + F_{yyyy}) + \frac{h^4}{4} \nabla^2 (\nabla^2 F) + O(h^6)$$

در اینجا F_{xxxx} ، مشتق جزئی چهارم F نسبت به x است که در $x = 0$ ، $y = 0$ و غیره تعیین شده است. اگر $\nabla^2 F = 0$ باشد، میانگین‌های $\frac{S_s}{4}$ و $\frac{S_c}{4}$ هر کدام مقدار مربوط به $F(0, 0)$ را

درست تا مرتبه‌ی شامل h^3 ارائه می‌کنند، دقت کنید که می‌توان با تشکیل میانگین "اصلاح شده‌ی" زیر به یک بهبود دست یافت

$$\tilde{S} = \frac{1}{\delta} \left[S_c + \frac{1}{4} S_s \right]$$

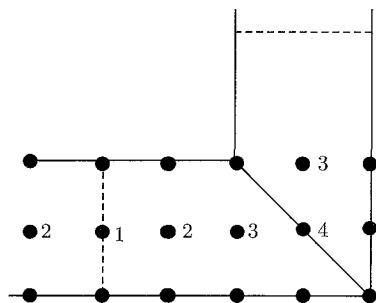
که در آن

$$\tilde{S} = F(\circ, \circ) + \frac{3}{10} h^2 \nabla^2 F + \frac{h^4}{40} \nabla^2 (\nabla^2 F) + O(h^6)$$

اگر $\nabla^2 F = 0$ باشد، آنگاه \tilde{S} ، $F(\circ, \circ)$ را درست تا مرتبه‌ی شامل h^5 ارائه می‌دهد. جهت به دست آوردن دقتی مشابه برای معادله‌ی پواسن، می‌توان چگالی بار و پایین‌ترین مرتبه‌ی لاپلاسیان آن را وارد نمود.

۲۳-۱ یک خط انتقال از یک رسانای بلند راست با یک ناحیه‌ی مربعی توخالی در درونش، همراه با یک رسانای مربعی با یک چهارم مساحت ناحیه‌ی توخالی که در فضای خالی مرکزیت یافته، و با لبه‌هایی که به موازات وجوه درونی رسانای بیرونی هستند، تشکیل شده است.

اگر پتانسیل رساناها تا مقادیر متفاوتی بالا برده شود، پتانسیل و میدان الکتریکی در فضای بین آن‌ها یک تقارن هشت‌گانه را نشان می‌دهد؛ واحد اصلی در شکل همراه این مسئله شرح داده شده است. خاصیت روش واهلش در تعیین خواص مربوط به خط انتقال را می‌توان با یک محاسبه‌ی ساده نشان داد.



شکل ۲۳-۱:

الف) با استفاده از تنها چهار نقطه‌ی درونی که در شکل نشان داده شده است، معادله‌ی واهلش مربوط به هر نقطه را برای طرح‌های میانگین‌گیری "مقاطع" و "اصلاح شده" (که در مسئله ۲۲-۱ تعریف شده است) بنویسید، اگر رسانای درونی دارای $V = 100$ و رسانای بیرونی دارای $\Phi = 0$

باشد. با انجام هر فرآیند تکرار واهلش، یا حل مجموعه‌ی معادلات جبری برای هر طرح، تخمین‌های مربوط به پتانسیل در هر یک از چهار نقطه‌ی مربوط به این دو طرح را بیابید.

(ب) از نتایج مربوط به قسمت الف، بهترین تخمینی (یا تخمین‌هایی) را که می‌توانید، برای ظرفیت بر واحد طول مربوط به خط انتقال فوق انجام دهید.

(ج) (انتخابی) با استفاده از ابزارهای محاسباتی مورد نظرتان، محاسبه‌ی واهلش را با نصف فضای شبکه‌ای (۲۱ نقطه‌ی داخلی) تکرار و نتیجه را با نتایج قبلی مقایسه کنید. جواب: [با توجه به یک محاسبه‌ی عددی دقیق]

$$\Phi_1 = 48,877, \quad \Phi_2 = 47,187, \quad \Phi_3 = 38,347, \quad \Phi_4 = 19,817$$

$$C = 10,23 \text{ e.F/m}$$

۲۴-۱ حل مسئله‌ی معادله‌ی پواسن دوبعدی مسئله‌ی ۱-۲۱ [یک مربع واحد با پتانسیل صفر روی مرز و یک چگالی بار واحد ثابت در ناحیه داخل] را با روش واهلش بررسی کنید. $h = 0,25$ را انتخاب کنید، طوری که نه مکان داخلی وجود داشته باشد. تقارن موجود را برای کاهش تعداد مکان‌های مورد لزوم به سه مکان، در $(0,25, 0,25)$ ، $(0,5, 0,25)$ و $(0,5, 0,5)$ مورد استفاده قرار دهید. با چنین مکان‌های کمی، انجام تکرارها با یک تکه‌ی کاغذ و یک ماشین حساب جیبی ساده است، ولی در هر صورت موافق دلخواهتان عمل کنید.

الف) با شروع از $\Phi = 10$ در تمام سه مکان درونی "شبکه‌ی اصلاح‌شده" میانگین‌گیری مربوط به مسئله‌ی ۱-۲۲ و طرح تکرار ساده ژاکوبین را مورد استفاده قرار دهید. آیا حداقل شش تکرار (ترجیحاً هشت یا ده تا) وجود دارد؟

(ب) روش تکرار را با همان مقادیر شروع، اما با استفاده از روش تکرار گوس - سیدل بازگو کنید؟

(ج) دو مجموعه از نتایج مربوط به هر تکرار را برحسب عدد تکرار ترسیم و آن‌ها را با مقادیر دقیق

$$4\pi\epsilon_0 \cdot \Phi(0,25, 0,25) = 0,5691, \quad 4\pi\epsilon_0 \cdot \Phi(0,5, 0,25)$$

$$= 0,7205, \quad 4\pi\epsilon_0 \cdot \Phi(0,5, 0,5) = 0,9258$$

مقایسه کنید. تفسیری در مورد آهنگ همگرایی و دقت نهایی ارائه کنید.

فصل ۲

مسائل مقدار مرزی در الکترواستاتیک: ۱

مسائل زیادی در الکترواستاتیک داریم که در آن‌ها پتانسیل یا چگالی بار سطحی روی سطوح مرزی مشخص‌اند. حل رسمی یک چنین مسائلی در بخش ۱-۱۵ با استفاده از توابع گرین نشان داده شد. در وضعیت‌های تجربی (یا حتی در تقریب‌های نسبتاً ایده‌آل در این وضعیت‌ها) کشف تابع گرین صحیح گاهی ساده است و گاهی نه. در نتیجه یک تعداد روش برای مسائل مقدار مرزی در الکترواستاتیک بسط و تعمیم یافته‌اند که بعضی از آن‌ها به مقدار بسیار کمی به روش تابع گرین ارتباط دارند.

در این فصل سه نوع از این تکنیک‌های خاص را مورد بررسی قرار خواهیم داد

۱. روش تصاویر که از هر نظر به استفاده از توابع گرین وابسته شده است.

۲. بسط برحسب توابع متعامد؛ روشی که مستقیماً از معادله‌ی دیفرانسیل به دست آمده و از ساختار مستقیم یک تابع گرین نسبتاً مجزا است.

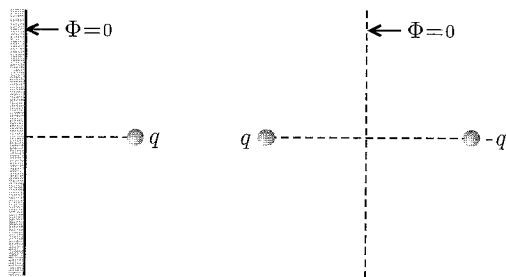
۳. مقدمه‌ای بر آنالیز المان محدود (FEA)، که شامل رده‌ی وسیعی از روش‌های عددی است.

حذف عمده‌ای که در این فصل صورت گرفته است استفاده از تکنیک‌های متغیر مختلط، از جمله نگاشت‌های همدیس، برای بحث روی مسائل دوبعدی است. موضوع فوق مهم است اما فقدان جا و وجود بحث‌های کامل در جاهای دیگر دلیلی برای فقدان آن است. خواننده‌ی علاقه‌مند می‌تواند به مراجعی که در انتهای این فصل قرار داده شده است مراجعه نماید.

۱-۲ روش تصاویر

روش تصاویر با مسئله‌ی یک یا چند بار نقطه‌ای در حضور سطوح مرزی ارتباط دارد. برای مثال در رساناهایی که یا زمین شده‌اند و یا در پتانسیل ثابتی نگه داشته شده‌اند این روش به‌کار می‌آید. تحت شرایط معین (و البته مساعد) ممکن است از هندسه‌ی وضعیت چنین استنباط شود که تعداد کمی از بارهای با اندازه مقتضی، که به‌گونه‌ای مناسب در خارج از ناحیه‌ی موردنظر قرار گرفته باشند، بتوانند شرایط مرزی لازم را شبیه‌سازی کنند. این بارها، بارهای تصویری نامیده می‌شوند، و تعویض مسئله‌ی اصلی همراه با مرزهای آن، با ناحیه‌ای گسترده از بارهای تصویری اما بدون وجود مرزهای فوق، روش تصاویر نامیده می‌شود. بارهای تصویری باید در خارج از حجم موردنظر قرار بگیرند، چراکه پتانسیل مربوط به آن‌ها باید جواب معادله‌ی لاپلاس در داخل این حجم باشد؛ "انتگرال خاص" در اینجا (یعنی جواب معادله‌ی پواسن) با جمع پتانسیل ناشی از بارهای داخل حجم فوق به‌وجود می‌آید.

یک مثال ساده (همان‌طور که در شکل ۱-۲ نشان داده شده است) عبارت است از یک بار نقطه‌ای که در جلوی یک صفحه‌ی رسانای بینهایت با پتانسیل صفر قرار دارد. واضح است که این مسئله معادل است با مسئله‌ی یک بار اصلی و یک بار مختلف‌العلامه و مساوی با بار اصلی که در نقطه‌ی تصویر آینه‌ای، در پشت صفحه‌ی تعریف شده توسط مکان رسانا، قرار گرفته است.



شکل ۱-۲: جواب با روش تصاویر. مسئله اصلی در سمت چپ و مسئله‌ی تصویری معادل آن در سمت راست.

۲-۲ بار نقطه‌ای در حضور یک کره‌ی رسانای زمین شده

به‌عنوان مثالی از روش تصاویر، مسئله‌ی شکل ۲-۲ را در نظر می‌گیریم که در آن بار نقطه‌ای q در مکان y (نسبت به مبدأیی که حول آن کره‌ی رسانا با پتانسیل صفر و شعاع a مرکزیت یافته است) قرار دارد. پتانسیل $\Phi(x)$ را به‌گونه‌ای جستجو می‌کنیم که برای آن $\Phi(|x| = a) = 0$ باشد. با توجه به تقارن موجود واضح است که بار تصویری q' (با فرض اینکه تنها یک تصویر لازم باشد) روی شعاع واصل از مبدأ به بار q قرار خواهد گرفت. اگر بار q را در خارج از کره در نظر بگیریم مکان بار تصویری در فاصله y' درون کره

قرار خواهد گرفت. به این ترتیب پتانسیل ناشی از بارهای q و q' عبارت است از

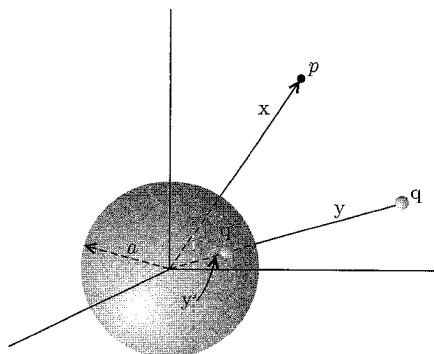
$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{x} - \mathbf{y}|} + \frac{q'}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{x} - \mathbf{y}'|} \quad (1-2)$$

حال باید تلاش کنیم که q' و $|\mathbf{y}'|$ را طوری انتخاب کنیم که پتانسیل در $|\mathbf{x}| = a$ صفر شود. اگر \mathbf{n} بردار یکانی در جهت \mathbf{x} باشد و \mathbf{n}' بردار یکانی در جهت \mathbf{y} ؛ در این صورت خواهیم داشت

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 |x\mathbf{n} - y\mathbf{n}'|} + \frac{q'}{4\pi\epsilon_0 |x\mathbf{n} - y'\mathbf{n}'|} \quad (2-2)$$

اگر x را در جمله اول به بیرون فاکتورگیری کنیم و y' را نیز در جمله دوم، در این صورت پتانسیل در $x = a$ به صورت زیر درمی آید

$$\Phi(x = a) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 a \left| \mathbf{n} - \frac{y}{a} \mathbf{n}' \right|} + \frac{q'}{4\pi\epsilon_0 y' \left| \mathbf{n}' - \frac{a}{y'} \mathbf{n} \right|} \quad (3-2)$$



شکل ۲-۲: کره‌ای رسانا به شعاع a ، بار q و بار تصویری q'

از ظاهر فرمول (۳-۲) ملاحظه می‌کنیم که انتخاب‌های

$$\frac{q}{a} = -\frac{q'}{y'} \quad , \quad \frac{y}{a} = \frac{a}{y'}$$

به‌ازای تمام مقادیر ممکنه‌ی $\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}' = 0$ ، $\Phi(x = a) = 0$ را داریم. بنابراین اندازه و مکان بار تصویری عبارت است از

$$q' = -\frac{a}{y} q \quad , \quad y' = \frac{a^2}{y} \quad (4-2)$$

اشاره می‌کنیم که وقتی بار q به کره نزدیک‌تر شود، بار تصویری از لحاظ اندازه بزرگ‌تر شده و از مرکز کره نیز دورتر می‌شود. وقتی q دقیقاً بیرون از سطح کره قرار داشته باشد بار تصویری مساوی و مختلف‌العلامه با بار اصلی است و دقیقاً زیر سطح قرار خواهد گرفت.

حال که بار تصویری پیدا شد، می‌توانیم به مسئله‌ی اصلی بار q در بیرون از یک کره‌ی رسانای زمین‌شده برگردیم و اثرات مختلف آن را بررسی کنیم. چگالی بار القایی واقعی روی سطح کره را می‌توانیم با مشتق عمودی Φ روی سطح محاسبه کنیم

$$\sigma = -\epsilon_0 \left. \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right|_{x=a} = -\frac{q}{4\pi a^2} \left(\frac{a}{y} \right) \frac{1 - \frac{a^2}{y^2}}{\left(1 + \frac{a^2}{y^2} - 2\frac{a}{y} \cos \gamma \right)^{\frac{3}{2}}} \quad (5-2)$$

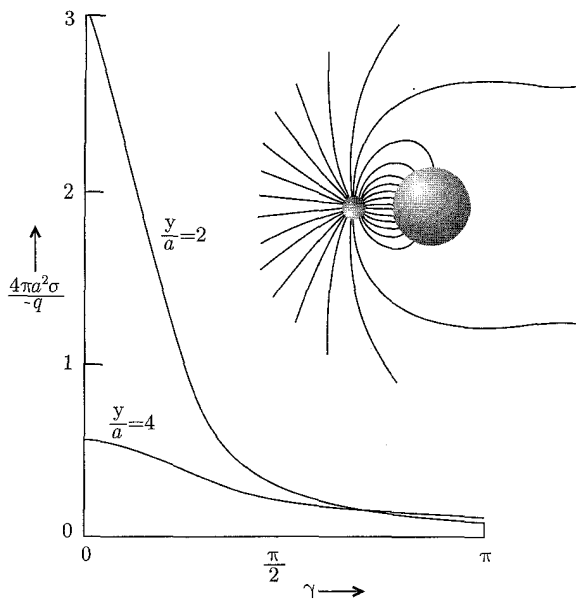
که در آن γ زاویه‌ی بین x و y است. چگالی بار در شکل ۲-۳ برحسب واحدهای $\left(-\frac{q}{4\pi a^2} \right)$ نشان داده شده و به‌صورت تابعی از γ برای دو مقدار $\frac{y}{a}$ رسم شده است. تمرکز بار روی شکل در جهت بار نقطه‌ای q است به‌خصوص برای $\frac{y}{a} = 2$. نشان دادن اینکه بار القایی کل روی کره، مساوی اندازه‌ی بار تصویری است (که باید هم باشد) طبق قانون گوس با انتگرال‌گیری مستقیم کار ساده‌ای است. نیروی وارد بر بار q را می‌توان با روش‌های مختلفی محاسبه نمود. یک راه (البته ساده‌ترین راه) نوشتن بلافاصله‌ی نیروی بین بار q و با تصویری q' است. فاصله‌ی بین این دو بار عبارت است از: $y - y' = y \left(1 - \frac{a^2}{y^2} \right)$. بنابراین نیروی جاذبه طبق قانون کولن عبارت است از

$$|F| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{a^2} \left(\frac{a}{y} \right)^2 \left(1 - \frac{a^2}{y^2} \right)^{-2} \quad (6-2)$$

برای فواصل جدایی بزرگ نیروی فوق یک قانون عکس مکعبی است، اما نزدیک کره این نیرو با عکس مربع فاصله‌ی جدایی از سطح کره متناسب است.

روش دیگر برای به‌دست آوردن این نیرو، محاسبه‌ی نیروی کل وارد بر سطح کره است. نیروی وارد بر هر المان سطحی da عبارت است از $\left(\frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} \right) da$ ، که در آن σ همان‌گونه که در شکل ۲-۴ نیز نشان داده شده است، با رابطه‌ی (۵-۲) مشخص می‌شود. اما از تقارن موجود واضح است که تنها، مؤلفه‌ی موازی بردار شعاعی از مرکز کره تا بار q در نیروی کل سهم است. بنابراین نیروی کل مؤثر بر کره [مساوی و مخالف با نیروی وارد بر بار q] با انتگرال زیر مشخص می‌شود

$$|F| = \frac{q^2}{32\pi^2\epsilon_0 a^2} \left(\frac{a}{y} \right)^2 \left(1 - \frac{a^2}{y^2} \right)^2 \int \frac{\cos \gamma}{\left(1 + \frac{a^2}{y^2} - 2\frac{a}{y} \cos \gamma \right)^{\frac{3}{2}}} d\Omega \quad (7-2)$$



شکل ۳-۲: چگالی بار سطحی القایی σ روی کره‌ای زمین‌شده با شعاع a ، نتیجه‌ی حضور بار نقطه‌ای q است که در فاصله y خارج از مرکز کره قرار دارد. σ برحسب واحدهای $\frac{-q}{4\pi a^2}$ و به صورت تابعی از مکان زاویه‌ای γ ، نسبت به یک طرف شعاع بار برای مقادیر $4a$ و $2a$ ، رسم شده است. تصویر اضافی خطوط نیرو را برای $y = 2a$ نشان می‌دهد.

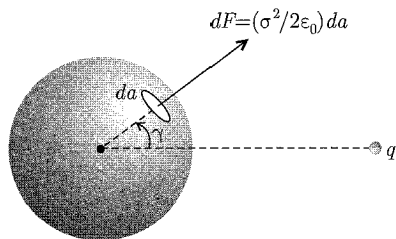
که انتگرال‌گیری بی‌درنگ (۲-۶) را نتیجه می‌دهد.

کل بحث ما براساس درک اینکه بار نقطه‌ای q در خارج از کره قرار دارد استوار بوده است. در واقع نتایج فوق به‌طور مساوی برای بار q در داخل کره نیز به‌کار می‌روند. تنها تغییر لازم، تغییر در چگالی بار سطحی (۲-۵) است که در آن مشتق عمودی در خارج از رسانا، با یک تغییر در علامت به‌طور شعاعی به طرف داخل خواهد بود. خواننده می‌تواند با یادآوری اینکه در اینجا $y \leq a$ است تمام فرمول‌ها را مجدداً بازنویسی کند. توزیع‌های زاویه‌ای بار سطحی مشابه توزیع‌های مربوطه در شکل ۳-۲ هستند. اما به‌وضوح اندازه‌ی بار سطحی القایی کل $-q$ است (مستقل از y).

۳-۲ بار نقطه‌ای در حضور یک کره‌ی رسانای باردار عایق‌بندی‌شده

در بخش قبل مسئله‌ی یک بار نقطه‌ای q را در نزدیکی یک کره‌ی زمین‌شده بررسی کردیم و در آنجا ملاحظه کردیم که یک چگالی بار سطحی روی کره القا می‌شود. مقدار کل این بار $q' = \frac{aq}{y}$ بود و روی سطح طوری توزیع شده بود که تحت تأثیر تمام نیروهای وارده در حالت تعادل باشد.

اگر بخواهیم مسئله‌ی یک کره‌ی رسانای عایق‌بندی‌شده، با بار کل Q را در حضور یک بار نقطه‌ای q



شکل ۴-۲:

بررسی کنیم، می‌توانیم جواب پتانسیل را با برهم‌نهی خطی بنا کنیم. با یک حس تجربی می‌توانیم برای شروع کار، یک کره‌ی رسانای زمین‌شده را در نظر بگیریم (با بار q' که روی سطح آن توزیع شده باشد). سپس سیم زمین را جدا کرده و باری به اندازه‌ی $(Q - q')$ به کره اضافه می‌کنیم. این کار تغییر بار کل روی کره را تا مقدار Q موجب می‌شود.

برای پیدا کردن پتانسیل فقط اشاره می‌کنیم که بار افزوده‌شده‌ی $(Q - q')$ خودش را به‌طور یکنواخت روی سطح توزیع می‌کند چراکه نیروی الکترواستاتیک ناشی از بار نقطه‌ای q توسط بار q' تعدیل می‌شود. بنابراین پتانسیل ناشی از بار افزوده‌شده‌ی $(Q - q')$ حداقل برای نقاط خارج از کره، مشابه پتانسیل یک بار نقطه‌ای است که در مبدأ مختصات قرار گرفته باشد.

پتانسیل در اینجا برهم‌نهی از پتانسیل (۱-۲) و پتانسیل ناشی از بار نقطه‌ای $(Q - q')$ در مبدأ مختصات است

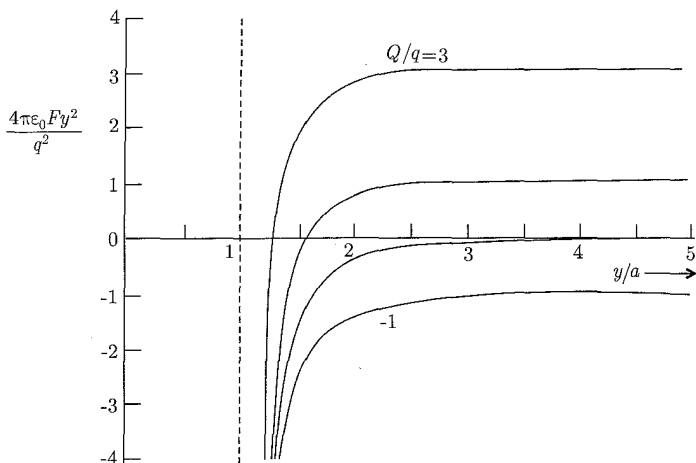
$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{a}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} - \frac{aq}{y \left| \mathbf{x} - \frac{a^2}{y^2} \mathbf{y} \right|} + \frac{Q + \frac{a}{y}q}{|\mathbf{x}|} \right] \quad (۸-۲)$$

نیروی وارد بر بار q را می‌توان به‌طور مستقیم از قانون کولن نوشت. جهت این نیرو در امتداد بردار شعاعی به بار q است و مقدار آن عبارت است از

$$\mathbf{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{y^2} \left[Q - \frac{qa^3(2y^2 - a^2)}{y(y^2 - a^2)} \right] \frac{\mathbf{y}}{y} \quad (۹-۲)$$

در حد $a \gg y$ ، این نیرو همان قانون معمول کولن برای نیروی بین دو جسم باردار کوچک است. اما در فواصل نزدیک به کره، نیروی فوق به جهت توزیع بار القایی روی سطح کره، نیاز به اصلاح دارد. شکل (۵-۲) این نیرو را به‌صورت تابعی از فاصله برای نسبت‌های مختلف $\frac{Q}{q}$ نشان می‌دهد.

این نیرو برحسب واحدهای $\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 y^2}$ بیان می‌شود؛ مقادیر مثبت (منفی) متناظر با نیروی دافعه (جاذبه) هستند. اگر کره‌ی موردنظر مخالف q باردار رویا بدون بار شود نیرو در هر صورت برای تمام فواصل جاذبه‌ای خواهد



شکل ۲-۵: نیروی وارد بر بار نقطه‌ای q ، ناشی از یک کره‌ی رسانای عایق‌بندی‌شده با شعاع a که حامل بار کل Q است. مقادیر مثبت به معنی وجود دافعه و مقادیر منفی به معنی وجود جاذبه هستند. بستگی مجانبی این نیرو درجه‌بندی شده است. $\frac{4\pi\epsilon_0 F y^2}{q^2}$ بر حسب $\frac{y}{a}$ ، برای مقادیر $1, 0, 1, 3$ ، رسم شده است، صرف نظر از مقدار Q ، نیرو در فواصل نزدیک به خاطر بار سطحی القایی همواره جاذبه‌ای است.

بود. گرچه اگر علامت بار Q مشابه با بار q باشد، نیرو در فواصل بسیار نزدیک جاذبه‌ای خواهد شد. در حد $Q \gg q$ یعنی در $y \simeq a \left(1 + \frac{1}{4} \sqrt{\frac{q}{Q}} \right)$ نقطه‌ی صفر نیرو (نقطه‌ی تعادل ناپایدار) خیلی نزدیک به کره است. دقت کنید که مقدار مجانبی نیرو به مجرد اینکه بار q در فاصله‌ای حدود چند برابر شعاع از کره قرار بگیرد به دست خواهد آمد.

این مثال یک خاصیت کلی را به نمایش می‌گذارد و آن این است که چرا بار اضافی در روی یک سطح، به جهت دافعه‌ی متقابل بارهای مجزا از هم، به صورت آنی از سطح جدا نمی‌شوند. به محض اینکه جزئی از بار از سطح جدا شود، نیروی تصویری تمایل به جذب این جزء به عقب خواهد داشت. البته اگر کار به اندازه‌ی کافی باشد می‌توان بار را از سطح جدا کرد. بخش عمده‌ای از تابع کار یک فلز درست همان کار انجام شده بر علیه نیروی تصویری جاذبه‌ای برای جدا کردن یک الکترون از سطح فلز است.

۲-۴ بار نقطه‌ای نزدیک یک کره‌ی رسانا در پتانسیل ثابت

مسئله‌ی دیگری که می‌توان به راحتی مورد بحث قرار داد، مسئله‌ی یک بار نقطه‌ای نزدیک یک کره‌ی رساناست که در پتانسیل ثابت V نگه داشته شده است. این پتانسیل مشابه پتانسیل یک کره‌ی باردار است با این تفاوت که بار $(Q - q')$ در مرکز، با یک بار به اندازه‌ی (Va) جایگزین شده است. این موضوع را می‌توان از رابطه‌ی (۲-۸) نیز ملاحظه نمود، چرا که در $|x| = a$ اولین دو جمله حذف و جمله آخر چنانکه

لازم نیز هست مساوی با V خواهد بود. بدین ترتیب پتانسیل عبارت است از

$$\Phi(x) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q}{|x-y|} - \frac{aq}{y \left| x - \frac{a^2}{y^2} y \right|} \right] + \frac{Va}{|x|} \quad (10-2)$$

نیروی وارد بر بار q ناشی از کره‌ی فوق با پتانسیل ثابت، عبارت است از

$$F = \frac{q}{y^2} \left[Va - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qay^2}{(y^2 - a^2)^2} \right] \frac{y}{y} \quad (11-2)$$

برای مقادیر متناظر با $\frac{Q}{q}$ و $\frac{4\pi\epsilon_0 Va}{q}$ ، این نیرو بسیار شبیه نیروی مربوط به کره‌ی باردار نشان داده شده در

شکل ۵-۲ است، گرچه نزدیک شدن به مقدار مجانبی $\left(\frac{Va}{y^2}\right)$ بسیار تدریجی است. برای $Va \gg q$ نقطه‌ی تعادل ناپایدار دارای مکان تعادلی، $y \simeq a \left(1 + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{a}{4\pi\epsilon_0 Va}}\right)$ است.

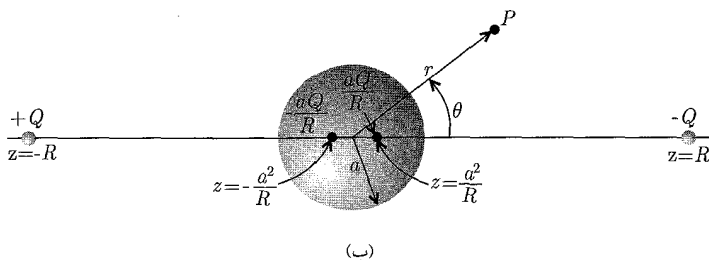
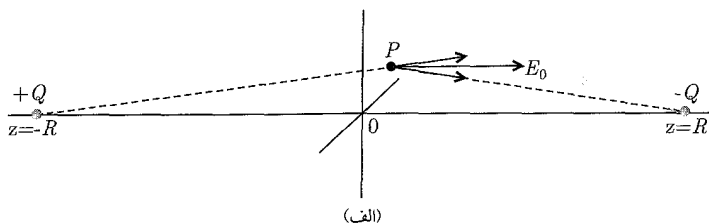
۵-۲ کره‌ی رسانا در یک میدان الکتریکی یکنواخت با روش تصاویر

به‌عنوان یک مثال نهایی از روش تصاویر، کره‌ای رسانا با شعاع a را در یک میدان الکتریکی یکنواخت E_0 در نظر می‌گیریم. می‌توان چنین تصور کرد که یک میدان یکنواخت توسط بارهای مثبت و منفی مناسبی که در بینهایت قرار گرفته‌اند ایجاد می‌شود. برای مثال همان‌گونه که در شکل ۲-۶ الف نیز نشان داده شده است، اگر دو بار $\pm Q$ در مکان‌های $Z = \mp R$ قرار داشته باشند، در این صورت در یک ناحیه در نزدیکی مبدأ که ابعادش در مقایسه با R بسیار کوچک است یک میدان الکتریکی تقریباً ثابت $E_0 \simeq \frac{2Q}{4\pi\epsilon_0 R^2}$ به موازات محور z خواهیم داشت. در حالت حدی وقتی، $Q, R \rightarrow \infty$ میل می‌کند با $\frac{Q}{R^2}$ ثابت، این تقریب دقیق خواهد شد.

حال اگر یک کره‌ی رسانا با شعاع a در مبدأ قرار گیرد، پتانسیل همان پتانسیل ناشی از بارهای $\pm Q$

خواهد بود که در $\mp R$ قرار دارند و تصاویر آن‌ها نیز یعنی $\mp \frac{Qa}{R}$ در $\frac{a^2}{R}$

$$\Phi = \frac{\frac{Q}{4\pi\epsilon_0}}{(r^2 + R^2 + 2rR \cos \theta)^{\frac{1}{2}}} - \frac{\frac{Q}{4\pi\epsilon_0}}{(r^2 + R^2 - 2rR \cos \theta)^{\frac{1}{2}}} - \frac{\frac{aQ}{4\pi\epsilon_0}}{R \left(r^2 + \frac{a^2}{R^2} + \frac{2a^2 r}{R} \cos \theta \right)^{\frac{1}{2}}} + \frac{\frac{aQ}{4\pi\epsilon_0}}{R \left(r^2 + \frac{a^2}{R^2} - \frac{2a^2 r}{R} \cos \theta \right)^{\frac{1}{2}}} \quad (12-2)$$



شکل ۶-۲: کره‌ای رسانا در یک میدان الکتریکی یکنواخت با روش تصاویر

که در آن Φ برحسب مختصات کروی نقطه‌ی مشاهده بیان شده است. در دو جمله‌ی اول طبق فرض R بسیار بزرگ‌تر از r است. بنابراین می‌توانیم رادیکال‌ها را پس از فاکتورگیری از R^2 بسط دهیم. به‌طور مشابه در جملات سوم و چهارم نیز می‌توانیم r^2 را فاکتورگیری کرده و سپس بسط را انجام دهیم. نتیجه عبارت است از

$$\Phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[-\frac{2Q}{R^2} r \cos\theta + \frac{2Q}{R^2} \frac{a^3}{r^2} \cos\theta \right] + \dots \quad (۱۳-۲)$$

که در آن جملات صرف‌نظر شده در حد $R \rightarrow \infty$ صفر می‌شوند. در آن حد، میدان یکنواخت $\frac{2Q}{4\pi\epsilon_0 R^2}$ اعمال شده خواهد بود، طوری‌که پتانسیل عبارت است از

$$\Phi = -E_0 \left(r - \frac{a^3}{r^2} \right) \cos\theta \quad (۱۴-۲)$$

البته جمله‌ی اول $(-E_0 z)$ دقیقاً پتانسیل یک میدان الکتریکی یکنواخت E_0 است که می‌تواند مستقیماً به‌جای دو جمله اول در (۱۲-۲) نوشته شود. دومی پتانسیل ناشی از چگالی بار سطحی القایی یا به‌طور معادل بارهای تصویری است. دقت کنید که بارهای تصویری تشکیل یک دو قطبی با شدت $D = \frac{Qa}{R} \times \frac{2a^2}{R} = 4\pi\epsilon_0 E_0 a^3$ را می‌دهند. چگالی بار سطحی القایی عبارت است از

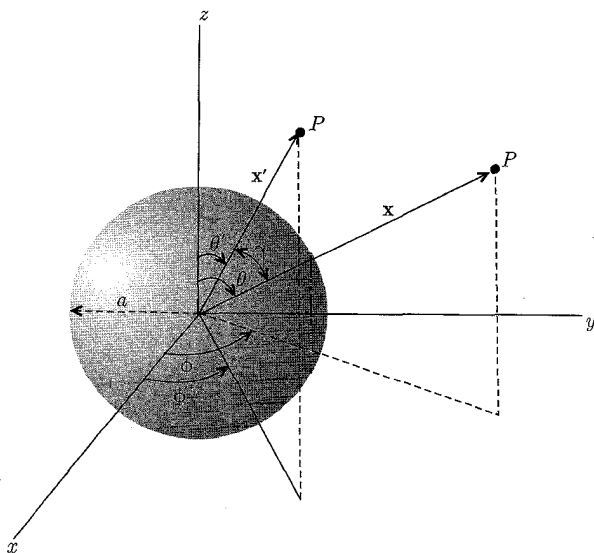
$$\sigma = -\epsilon_0 \frac{\partial \Phi}{\partial r} \Big|_{r=a} = 3\epsilon_0 E_0 \cos\theta \quad (۱۵-۲)$$

اشاره می‌کنیم که انتگرال سطحی مربوط به این چگالی بار صفر می‌شود، طوری که هیچ اختلافی بین یک کره زمین شده و یک کره‌ی عایق‌بندی شده وجود نخواهد داشت.

۶-۲ تابع گرین برای کره؛ جواب عمومی برای پتانسیل

در بخش‌های قبل، مسئله‌ی یک کره‌ی رسانا در حضور یک بار نقطه‌ای با روش تصاویر مورد بحث قرار گرفت. همان‌گونه که در بخش (۱-۱۰) نیز خاطر نشان شد، پتانسیل ناشی از یک چشمه‌ی واحد و تصویر آن (یا تصاویر آن‌ها)، که به‌گونه‌ای انتخاب شده باشند تا شرایط مرزی همگنی را برآورده کنند، دقیقاً همان توابع گرین $۱-۴۳$ یا $۱-۴۵$ است که مناسب شرایط مرزی دیریکله یا نیومن هستند. در $G(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ متغیر \mathbf{x}' به مکان P' چشمه‌ی واحد اشاره دارد، در حالی که متغیر \mathbf{x} مربوط به نقطه‌ی P است که در آنجا پتانسیل مورد محاسبه قرار می‌گیرد. این مختصات و کره‌ی مورد نظر در شکل (۲-۷) نشان داده شده‌اند. برای شرایط مرزی دیریکله روی کره‌ای به شعاع a ، تابع گرین تعریف شده از طریق رابطه‌ی (۱-۳۹) برای چشمه‌ای واحد و تصویر آن توسط رابطه‌ی (۲-۱)، $[\text{با } q \rightarrow 4\pi\epsilon_0]$ ، و رابطه (۲-۴) مشخص می‌شود. با تبدیل متغیرها به‌طور مناسب، تابع گرین زیر را به دست می‌آوریم

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} - \frac{a}{x' \left| \mathbf{x} - \frac{a^2}{x'^2} \mathbf{x}' \right|} \quad (۲-۱۶)$$



شکل ۲-۷:

این رابطه را می‌توان برحسب مختصات کروی به صورت زیر نوشت

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \frac{1}{(x^2 + x'^2 - 2xx' \cos \gamma)^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{\left(\frac{x^2 x'^2}{a^2} + a^2 - 2xx' \cos \gamma \right)^{\frac{1}{2}}} \quad (17-2)$$

که در آن γ زاویه‌ی بین \mathbf{x} و \mathbf{x}' است.

تقارن در متغیرهای \mathbf{x} و \mathbf{x}' در رابطه‌ی (۱۷-۲) واضح است، به همین‌گونه است شرط $G = 0$ ، اگر هر یک از مقادیر \mathbf{x} و \mathbf{x}' روی سطح کره قرار داشته باشند.

برای حل (۱-۴۴) از معادله‌ی پواسن، نه تنها به G بلکه به $\frac{\partial G}{\partial n'}$ نیز احتیاج داریم. با یادآوری اینکه \mathbf{n}' عمود یکنانی به سمت خارج از حجم موردنظر است (یعنی به طرف داخل و در امتداد \mathbf{x}' به طرف مبدأ) داریم

$$\left. \frac{\partial G}{\partial n'} \right|_{x'=0} = - \frac{(x^2 - a^2)}{a(x^2 + a^2 - 2ax \cos \gamma)^{\frac{3}{2}}} \quad (18-2)$$

[دقت کنید که این رابطه اساساً همان چگالی بار سطحی القایی (۲-۵) است]. بنابراین حل معادله‌ی لاپلاس در بیرون از یک کره‌ی با پتانسیل مشخص روی سطح آن، طبق رابطه‌ی (۱-۴۴) عبارت است از

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi} \int \Phi(a, \theta', \phi') \frac{a(x^2 - a^2)}{(x^2 + a^2 - 2ax \cos \gamma)^{\frac{3}{2}}} d\Omega' \quad (19-2)$$

که در آن $d\Omega'$ ، المان زاویه‌ی فضایی در نقطه (a, θ', ϕ') است

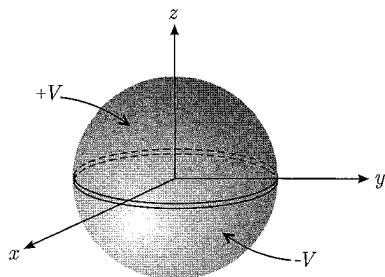
$$\cos \gamma = \cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \cos(\phi - \phi')$$

برای مسئله‌ی درونی، مشتق عمودی به‌طور شعاعی به سمت خارج است طوری‌که علامت $\frac{\partial G}{\partial n'}$ مخالف با علامت رابطه‌ی (۱۸-۲) است. این مسئله معادل با جایگزینی عامل $(a^2 - x^2)$ به جای $(x^2 - a^2)$ در (۱۹-۲) است. برای یک مسئله با یک توزیع بار، باید انتگرال مناسب در (۱-۴۴) با تابع گرین (۲-۱۷) را به (۱۹-۲) اضافه کنیم.

۷-۲ کره‌ی رسانا با نیم‌کره‌هایی در پتانسیل‌های مختلف

به‌عنوان مثالی از حل (۲-۱۹) برای پتانسیل در خارج از کره‌ای با مقادیر مشخص پتانسیل روی سطح آن، کره‌ای رسانا با شعاع a که از دو لایه‌ی نیم‌کره‌ی ساخته شده است را مورد بررسی قرار می‌دهیم که با یک حلقه‌ی عایق کوچک از یکدیگر جدا شده‌اند. نیم‌کره‌ها در پتانسیل‌های مختلفی نگه داشته شده‌اند. کافی

است پتانسیل‌ها را به صورت $\pm V$ در نظر بگیرید، چراکه پتانسیل‌های اختیاری را می‌توان با برهم‌نهی جواب برای یک کره‌ی در پتانسیل ثابت روی کل سطح آن، به انجام رسانید. حلقه‌ی عایق همان‌گونه که در شکل ۸-۲ نشان داده شده است، در صفحه $z = 0$ قرار دارد، با نیم‌کره‌ی بالا (پایین) در پتانسیل V ($-V$).



شکل ۸-۲:

از (۱۹-۲) جواب برای $\Phi(x, \theta, \phi)$ با یک تغییر متغیر مناسب (در انتگرال دوم) $(\theta' \rightarrow \pi - \theta', \phi' \rightarrow \phi' + \pi)$ با انتگرال زیر مشخص می‌شود

$$\Phi(x, \theta, \phi) = \frac{V}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\phi' \left\{ \int_0^1 d(\cos \theta') - \int_{-1}^0 d(\cos \theta') \right\} \frac{a(x^2 - a^2)}{(a^2 + x^2 - 2ax \cos \gamma)^{3/2}} \quad (20-2)$$

این رابطه را می‌توان به صورت زیر محاسبه نمود

$$\Phi(x, \theta, \phi) = \frac{Va(x^2 - a^2)}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\phi' \int_0^1 d(\cos \theta') [(a^2 + x^2 - 2ax \cos \gamma)^{-3/2} - (a^2 + x^2 + 2ax \cos \gamma)^{-3/2}] \quad (21-2)$$

به خاطر بستگی پیچیده‌ی $\cos \gamma$ به زوایای (θ', ϕ') و (θ, ϕ) ، معادله‌ی (۲۱-۲) را نمی‌توان در حالت کلی به صورت بسته انتگرال‌گیری نمود.

به عنوان یک حالت خاص، پتانسیل را روی محور z مثبت بررسی می‌کنیم. بدین ترتیب چون $\sin \theta = 0$ است در نتیجه $\cos \gamma = \cos \theta'$ انتگرال‌گیری فوق‌مقدماتی است و می‌توان نشان داد که پتانسیل به صورت زیر است

$$\Phi(z) = V \left[1 - \frac{(z^2 - a^2)}{z\sqrt{z^2 + a^2}} \right] \quad (22-2)$$

در $z = a$ این رابطه چنانکه لازم است به $\Phi = V$ کاهش می‌یابد، در حالی که در فواصل بزرگ به طور مجانبی به صورت $\Phi \simeq \frac{3Va^2}{2z^2}$ پیش می‌رود.

در غیاب یک رابطه‌ی بسته برای انتگرال‌های موجود در (۲۱-۲)، می‌توانیم مخرج را به صورت سری توانی بسط دهیم و از آن جمله به جمله انتگرال بگیریم. با فاکتورگیری $(a^2 + x^2)$ از هر مخرج، به دست می‌آوریم

$$\Phi(x, \theta, \phi) = \frac{Va(x^2 - a^2)}{2\pi(x^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} \int_0^{2\pi} d\phi' \int_0^1 d(\cos \theta') [(1 - 2\alpha \cos \gamma)^{-\frac{3}{2}} - (1 + 2\alpha \cos \gamma)^{-\frac{3}{2}}] \quad (23-2)$$

که در آن $\alpha = \frac{ax}{(a^2 + x^2)}$. ملاحظه می‌کنیم که در بسط رادیکال‌ها، تنها توان‌های فرد $\alpha \cos \gamma$ ظاهر می‌شوند

$$[(1 - 2\alpha \cos \gamma)^{-\frac{3}{2}} - (1 + 2\alpha \cos \gamma)^{-\frac{3}{2}}] = 6\alpha \cos \gamma + 35\alpha^3 \cos^3 \gamma + \dots \quad (24-2)$$

حال لازم است توان‌های فرد $\cos \gamma$ را روی $d\phi' d(\cos \theta')$ انتگرال‌گیری کنیم

$$\begin{cases} \int_0^{2\pi} d\phi' \int_0^1 d(\cos \theta') \cos \gamma = \pi \cos \theta \\ \int_0^{2\pi} d\phi' \int_0^1 d(\cos \theta') \cos^3 \gamma = \frac{\pi}{4} \cos \theta (3 - \cos^2 \theta) \end{cases} \quad (25-2)$$

اگر (۲۴-۴) و (۲۵-۲) در (۲۳-۲) قرار بگیرند، پتانسیل به شکل زیر درمی‌آید

$$\Phi(x, \theta, \phi) = \frac{3Va^2}{2x^2} \left(\frac{x^3(x^2 - a^2)}{(x^2 + a^2)^{\frac{5}{2}}} \right) \cos \theta \left[1 + \frac{35}{24} \frac{a^2 x^2}{(a^2 + x^2)^2} (3 - \cos^2 \theta) + \dots \right] \quad (26-2)$$

اشاره می‌کنیم که تنها توان‌های فرد $\cos \theta$ ظاهر می‌شوند، چنانکه با توجه به تقارن مسئله نیز این مورد لازم است. اگر پارامتر بسط، به جای α^2 ، $\left(\frac{a^2}{x^2}\right)$ باشد، سری شکل زیر را به خود خواهد گرفت

$$\Phi(x, \theta, \phi) = \frac{3Va^2}{2x^2} \left[\cos \theta - \frac{7a^2}{12x^2} \left(\frac{5}{2} \cos^3 \theta - \frac{3}{2} \cos \theta \right) + \dots \right] \quad (27-2)$$

برای مقادیر بزرگ $\frac{x}{a}$ ، این بسط سریعاً همگرا می‌شود، و بنابراین نمایش مفیدی برای پتانسیل است. حتی برای $\left(\frac{x}{a}\right) = 5$ ، جمله‌ی دوم در این سری تنها از مرتبه‌ی ۲٪ است. به راحتی ثابت می‌شود که برای $\cos \theta = 1$ ، رابطه‌ی (۲۷-۲) با بسط (۲۲-۲) برای پتانسیل روی محور سازگاری دارد. [انتخاب ویژه‌ی عوامل زاویه‌ای در (۲۷-۲) با تعاریف چندجمله‌ای‌های لژاندر دیکته می‌شود. این دو عامل، در حقیقت $P_1(\cos \theta)$ و $P_3(\cos \theta)$ هستند و بسط پتانسیل، بسطی برحسب چندجمله‌ای‌های لژاندر از توان‌های فرد است. این موضوع را به روشی اصولی در بخش ۳-۳ ثابت می‌کنیم]. ملاحظات بیش‌تر در مورد هر دو مسئله‌ی درونی و بیرونی مربوط به دو نیم‌کره، در مسئله‌ی ۲۲-۲ یافت می‌شود.

۸-۲ توابع متعامد و بسط‌ها

نمایش جواب‌های مسائل پتانسیلی (یا هر مسئله‌ی ریاضی فیزیکی دیگری) با بسط برحسب توابع متعامد، یک روش پر قدرت را تشکیل داده است، طوری که این روش می‌تواند برای رده‌ی بزرگی از مسائل مورد استفاده قرار گیرد. مجموعه‌ی متعامد خاص انتخاب شده بستگی به تقارن‌ها یا تقارن‌های نزدیک مورد بحث دارد. جهت یادآوری خواص عمومی توابع متعامد و بسط برحسب آن‌ها، بازه‌ی (a, b) برای متغیر ξ را با یک مجموعه از توابع مختلط یا حقیقی $U_n(\xi)$, $n = 1, 2, \dots$ که روی بازه‌ی (a, b) انتگرال‌پذیر مجذوری و متعامداند، در نظر می‌گیریم. شرط تعامد روی توابع $U_n(\xi)$ با رابطه‌ی زیر بیان می‌شود

$$\int_a^b U_n^*(\xi) U_m(\xi) d\xi = 0, \quad m \neq n \quad (28-2)$$

اگر $n = m$ باشد انتگرال غیر صفر است. فرض می‌کنیم توابع فوق بهنجار شده باشند طوری که این انتگرال واحد باشد، در این صورت توابع فوق راست هنجار نامیده شده و رابطه‌ی زیر را برآورده می‌کنند

$$\int_a^b U_n^*(\xi) U_m(\xi) d\xi = \delta_{mn} \quad (29-2)$$

تابع اختیاری $f(\xi)$ که روی بازه‌ی (a, b) انتگرال‌پذیر مجذوری است را می‌توان به صورت یک سری از توابع راست هنجار $U_n(\xi)$ بسط داد. اگر تعداد جملات این سری محدود باشد (مثلاً N)، داریم

$$f(\xi) \leftrightarrow \sum_{n=1}^N a_n U_n(\xi) \quad (30-2)$$

در این صورت می‌توانیم به دنبال “بهترین” انتخاب برای ضرایب a_n بگردیم، طوری که “بهترین” نمایش را برای تابع $f(\xi)$ به دست آوریم. اگر “بهترین” به صورت کمینه‌سازی خطای مربعی میانگین M_N تعریف شود

$$M_N = \int_a^b \left| f(\xi) - \sum_{n=1}^N a_n U_n(\xi) \right|^2 d\xi \quad (31-2)$$

در این صورت نشان دادن اینکه ضرایب توسط رابطه‌ی

$$a_n = \int_a^b U_n^*(\xi) f(\xi) d\xi \quad (32-2)$$

داده می‌شوند کار آسانی است که در آن شرط راست هنجاری (۲۹-۲) مورد استفاده قرار گرفته است. این رابطه، نتیجه استاندارد برای ضرایب در بسط یک تابع راست هنجار است.

اگر تعداد N جمله موجود در سری $(۲-۳)$ بزرگ‌تر و بزرگ‌تر در نظر گرفته شوند، به‌طور شهودی انتظار داریم که نمایش ما از سری $f(\xi)$ بهتر و بهتر شود. شهودمان در صورتی صحیح است که مجموعه‌ی توابع راست هنجار کامل باشد. کامل بودن با این لازمه تعریف می‌شود که یک تعداد متناهی از N جمله وجود داشته باشد، به‌طوری‌که برای $N > N_0$ ، خطای مربعی میانگین M_N را بتوان از هر کمیت مثبت اختیاری کوچکی کوچک‌تر کرد. در این صورت گفته می‌شود نمایش سری

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n U_n(\xi) = f(\xi) \quad (۳۳-۲)$$

با a_n که توسط $(۲-۳۲)$ مشخص می‌شود، در میانگین به $f(\xi)$ همگرا است. فیزیکدانان عموماً کار بفرنج اثبات کامل بودن یک مجموعه‌ی مشخص از توابع را به ریاضیدانان واگذار می‌کنند. اثبات شده است که تمامی مجموعه‌ی توابع راست هنجار، که به‌طور معمول در ریاضی فیزیک مطرح می‌شوند، کامل هستند. سری $(۲-۳۲)$ را می‌توان مجدداً با استفاده از شکل صریح $(۲-۳۲)$ برای ضرایب a_n به‌صورت زیر نوشت

$$f(\xi) = \int_a^b \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} U_n^*(\xi') U_n(\xi) \right\} f(\xi') d\xi' \quad (۳۴-۲)$$

چون این رابطه نشان‌دهنده‌ی هر نوع تابعی از $f(\xi)$ روی بازه (a, b) است، واضح است که مجموع جمله‌های دو خطی $U_n^*(\xi') U_n(\xi)$ بایستی تنها در همسایگی $\xi = \xi'$ موجود باشد. در حقیقت این موضوع باید واقعیت داشته باشد که

$$\sum_{n=1}^{\infty} U_n^*(\xi') U_n(\xi) = \delta(\xi' - \xi) \quad (۳۵-۲)$$

این تساوی رابطه‌ی بستاری یا رابطه‌ی تمامیت نامیده می‌شود. رابطه‌ی فوق مشابه شرط راست هنجاری $(۲-۲۹)$ است، به‌جز اینکه نقش متغیر اتصالی ξ و اندیس انحصالی n با هم عوض شده‌اند. مشهورترین توابع متعامد، توابع سینوسی و کسینوسی هستند، و بسط برحسب آن‌ها یک سری فوریه است. اگر بازه تغییرات x ، $\left(-\frac{a}{4}, \frac{a}{4}\right)$ باشد، توابع راست هنجار عبارتند از

$$\sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{\sqrt{2}\pi m x}{a}\right), \quad \sqrt{\frac{a}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{2}\pi m x}{a}\right)$$

که در آن m یک عدد صحیح نامنفی بوده و به‌ازای $m = 0$ ، تابع کسینوسی $\frac{1}{\sqrt{a}}$ است. سری معادل با $(۲-۳۳)$ به‌طور معمول به‌صورت زیر نوشته می‌شود

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{a}} A_0 + \sum_{m=1}^{\infty} \left[A_m \cos\left(\frac{\sqrt{2}\pi m x}{a}\right) + B_m \sin\left(\frac{\sqrt{2}\pi m x}{a}\right) \right] \quad (۳۶-۲)$$

که در آن

$$A_m = \frac{1}{a} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} f(x) \cos\left(\frac{2\pi mx}{a}\right) dx \quad (37-2)$$

$$B_m = \frac{1}{a} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} f(x) \sin\left(\frac{2\pi mx}{a}\right) dx$$

اگر بازه‌ی فوق با مجموعه‌ی راست هنجاری که دارای بیش از یک بعد است پوشش داده شود، فرمول‌های (۲۸-۲) - (۳۳-۲) تعمیم‌های واضحی خواهند داشت. فرض کنید فضا دوبعدی است و در حالی که متغیر η دارای بازه‌ی (c, d) است متغیر ξ روی بازه‌ی (a, b) تغییر کند. توابع راست هنجار در هر بعد، $U_n(\xi)$ و $V_m(\eta)$ هستند. در این صورت بسط یک تابع اختیاری $f(\xi, \eta)$ عبارت است از

$$f(\xi, \eta) = \sum_n \sum_m a_{nm} U_n(\xi) V_m(\eta) \quad (38-2)$$

که در آن

$$a_{nm} = \int_a^b d\xi \int_c^d d\eta U_n^*(\xi) V_m^*(\eta) f(\xi, \eta) \quad (39-2)$$

اگر بازه‌ی (a, b) بینهایت شود، امکان دارد مجموعه‌ی توابع متعامد $U_n(\xi)$ به جای یک مجموعه‌ی شمارش‌پذیر، به صورت پیوستاری از توابع درآیند. در این صورت علامت دلتای کرونکر در (۲۹-۲) به صورت یک تابع دلتای دیراک درمی‌آید. یک مثال مهم در این مورد انتگرال فوریه است. با مجموعه‌ی راست هنجار توابع نمایی مختلط

$$U_m(x) = \frac{1}{\sqrt{a}} e^{i\left(\frac{2\pi mx}{a}\right)} \quad (40-2)$$

روی بازه‌ی $(-\frac{a}{2}, \frac{a}{2})$ ، همراه با بسط

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{a}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} A_m e^{i\left(\frac{2\pi mx}{a}\right)} \quad (41-2)$$

که در آن

$$A_m = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} e^{-i\left(\frac{2\pi mx'}{a}\right)} f(x') dx' \quad (42-2)$$

شروع کرده و سپس فرض کنید این بازه بینهایت شود ($a \rightarrow \infty$). در عین حال با تبدیل

$$\left. \begin{aligned} \frac{\sqrt{2\pi}m}{a} &\rightarrow k \\ \sum_m &\rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} dm = \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dk \\ A_m &\rightarrow \sqrt{\frac{\sqrt{2\pi}}{a}} A(k) \end{aligned} \right\} \quad (43-2)$$

بسط منتهی معادل با (۴۱-۲)، انتگرال فوریه است

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{\sqrt{2\pi}}} \int_{-\infty}^{\infty} A(k) e^{ikx} dk \quad (44-2)$$

که در آن

$$A(k) = \frac{1}{\sqrt{\sqrt{2\pi}}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ikx} f(x) dx \quad (45-2)$$

شرط تعامد عبارت است از

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(k-k')x} dx = \delta(k - k') \quad (46-2)$$

در حالی که رابطه‌ی تمامیت^۱ عبارت است از

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik(x-x')} dk = \delta(x - x') \quad (47-2)$$

این انتگرال‌های آخر، نمایش‌های مناسبی از یک تابع دلتا هستند. در (۴۴-۲) - (۴۷-۲) به هم‌ارزی کامل دو متغیر پیوسته‌ی x و k اشاره کردیم.

۹-۲ جداسازی متغیرها؛ معادله‌ی لاپلاس در مختصات قائم

معادلات دیفرانسیل جزئی ریاضی فیزیک اغلب به‌گونه‌ای مناسب با روشی به نام جداسازی متغیرها حل می‌شوند. در این فرآیند اغلب مجموعه‌های متعامدی از توابع را به‌وجود می‌آوریم که مفید هستند. مشخص شده است که معادلات شامل عملگر لاپلاسی سه‌بعدی در یازده سیستم مختصات مختلف جداپذیرند (مورس و فشباخ، صفحه ۶۵۵-۹۰۵ را ملاحظه کنید). ما تنها سه نوع از این مختصات را با تمام جزئیات مورد بحث قرار می‌دهیم. قائم، کروی و استوانه‌ای - با شروع از ساده‌ترین آن‌ها یعنی مختصات قائم کار را آغاز می‌کنیم. معادله‌ی لاپلاس در مختصات قائم عبارت است از

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0 \quad (48-2)$$

1) Completeness relation

با این فرض که بتوانیم پتانسیل را با حاصل ضرب سه تابع، هر کدام برای یک مختصه نشان دهیم می‌توان یک جواب برای این معادله‌ی دیفرانسیل جزئی برحسب سه معادله‌ی دیفرانسیل معمولی که تماماً به یک صورت هستند پیدا کرد

$$\Phi(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z) \quad (۴۹-۲)$$

جای‌گذاری در (۴۸-۲) و تقسیم نتیجه‌ی حاصل بر (۴۹-۲) نتیجه می‌دهد

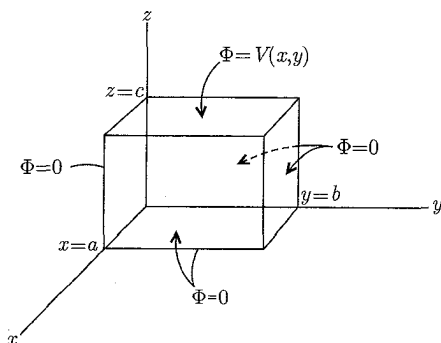
$$\frac{1}{X(x)} \frac{d^2 X}{dx^2} + \frac{1}{Y(y)} \frac{d^2 Y}{dy^2} + \frac{1}{Z(z)} \frac{d^2 Z}{dz^2} = 0 \quad (۵۰-۲)$$

که در آن مشتق‌های کلی جایگزین مشتق‌های جزئی شده‌اند، چراکه هر جمله تنها شامل یک تابع از یک متغیر است. اگر (۵۰-۲) برای مقادیر اختیاری از مختصات مستقل صادق باشد، هر کدام از این سه جمله باید به‌طور جداگانه ثابت باشند

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} &= -\alpha^2 \\ \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} &= -\beta^2 \\ \frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} &= +\gamma^2 \end{aligned} \right\} \quad (۵۱-۲)$$

که در آن

$$\alpha^2 + \beta^2 = \gamma^2$$



شکل ۹-۲: جعبه‌ی مستطیلی توخالی با پنج وجه که در پتانسیل صفر قرار دارند، در حالیکه وجه ششم ($z = c$) دارای پتانسیل مشخص $\Phi = V(x, y)$ است.

اگر به طور اختیاری α^2 و β^2 را مثبت انتخاب کنیم، در این صورت جواب‌های سه معادله‌ی دیفرانسیل معمولی (۵۱-۲) عبارتند از $e^{\pm i\alpha x}$ ، $e^{\pm i\beta y}$ و $e^{\pm\sqrt{\alpha^2+\beta^2}z}$.

بدین ترتیب پتانسیل (۴۹-۲) را می‌توان از حاصل ضرب جواب‌ها به صورت زیر بنا کرد

$$\Phi = e^{\pm i\alpha x} e^{\pm i\beta y} e^{\pm\sqrt{\alpha^2+\beta^2}z} \quad (52-2)$$

در این مرحله α و β کاملاً اختیاری هستند. در نتیجه (۵۲-۲) با برهم‌نهی خطی، رده‌ی بسیار بزرگی از جواب‌ها را برای معادله‌ی لاپلاس نمایش می‌دهد. برای تعیین α و β ، لازم است شرایط مرزی خاصی روی پتانسیل وضع شود. به عنوان مثال همان‌گونه که در شکل ۹-۲ نشان داده شده است، یک جعبه‌ی مستطیلی با ابعاد (a, b, c) در جهت‌های (x, y, z) را در نظر بگیرید. تمام سطوح جعبه در پتانسیل صفر نگه داشته شده‌اند به جز سطح $z = c$ که در پتانسیل $V(x, y)$ قرار دارد. پیدا کردن پتانسیل در هر جا در داخل جعبه ضروری است. با شروع از این لازمه که برای $x = 0$ ، $y = 0$ و $z = 0$ ، $\Phi = 0$ است، ملاحظه‌ی اینکه شکل‌های لازم برای X ، Y و Z به صورت زیرند کار ساده‌ای است

$$\left. \begin{aligned} X &= \sin \alpha x \\ Y &= \sin \beta y \\ Z &= \sinh(\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} z) \end{aligned} \right\} \quad (53-2)$$

برای داشتن $\Phi = 0$ در $x = a$ و $y = b$ باید داشته باشیم $\alpha a = n\pi$ و $\beta b = m\pi$. با توجه به تعاریف زیر

$$\left. \begin{aligned} a_n &= \frac{n\pi}{a} \\ \beta_m &= \frac{m\pi}{b} \\ \gamma_{nm} &= \pi \sqrt{\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2}} \end{aligned} \right\} \quad (54-2)$$

می‌توانیم پتانسیل جزئی Φ_{nm} را به‌گونه‌ای بنویسیم که تمام شرایط مرزی را به غیر از یک شرط برآورده کند

$$\Phi_{nm} = \sin(\alpha_n x) \sin(\beta_m y) \sinh(\gamma_{nm} z) \quad (55-2)$$

پتانسیل را می‌توان برحسب این Φ_{nm} ‌ها، با ضرایب اختیاری اولیه (که جهت برآوردن شرط مرزی نهایی باید انتخاب شود) بسط داد

$$\Phi(x, y, z) = \sum_{n,m=1}^{\infty} A_{nm} \sin(\alpha_n x) \sin(\beta_m y) \sinh(\gamma_{nm} z) \quad (56-2)$$

تنها شرط مرزی $\Phi = V(x, y)$ در $z = c$ باقی می ماند

$$V(x, y) = \sum_{n,m=1}^{\infty} A_{nm} \sin(\alpha_n x) \sin(\beta_m y) \sinh(\gamma_{nm} c) \quad (57-2)$$

این رابطه دقیقاً یک سری فوری‌ی دوگانه برای تابع $V(x, y)$ است. در نتیجه ضرایب A_{nm} توسط رابطه‌ی زیر مشخص می‌شوند

$$A_{nm} = \frac{4}{ab \sinh(\gamma_{nm} c)} \int_0^a dx \int_0^b dy V(x, y) \sin(\alpha_n x) \sin(\beta_m y) \quad (58-2)$$

اگر جعبه‌ی مستطیلی روی تمام شش وجه، دارای پتانسیل‌هایی متفاوت با صفر باشد جواب لازم برای پتانسیل در داخل جعبه را می‌توان با یک برهم‌نهی خطی از شش جواب، که هر کدام برای یک وجه است به دست آورد، (معادل با (۵۶-۲) و (۵۸-۲)). مسئله‌ی حل معادله‌ی پواسن، یعنی پتانسیل درون جعبه‌ای با یک توزیع بار داخلی، با شرایط مرزی مشخص روی سطح، طبق روابط (۴۳-۱) و (۴۴-۱) نیاز به ساختن تابع گرین مناسبی دارد. بحث راجع به این موضوع را مادامی که معادله‌ی لاپلاس در مختصات کروی و استوانه‌ای را مورد بحث قرار دهیم به تعویق خواهیم افکند. برای این لحظه تنها اشاره می‌کنیم که جواب ارائه شده توسط (۵۶-۲) و (۵۸-۲) معادل با انتگرال سطحی در جواب تابع گرین (۴۴-۱) است.

۱۰-۲ یک مسئله‌ی پتانسیلی دوبعدی؛ جمع یک سری فوریه

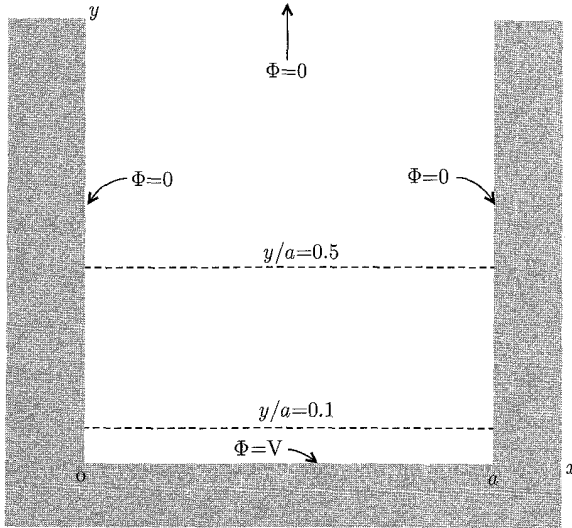
حال به طور خلاصه، حل معادله‌ی لاپلاس دوبعدی را با روش جداسازی متغیرها در مختصات دکارتی مورد بررسی قرار می‌دهیم. منظورمان از مسائل دوبعدی آنهایی هستند که در آن‌ها می‌توان پتانسیل را مستقل از یکی از مختصات، مثلاً z فرض کرد. این موضوع معمولاً تنها یک تقریب است، اما می‌تواند تا دقت بالایی واقعیت داشته باشد، همان‌گونه که در یک خط انتقال یکنواخت بلند نیز اینگونه است. اگر پتانسیل مستقل از z باشد، جواب‌های اساسی در بخش قبل، به حاصل ضرب‌های

$$e^{\pm i\alpha x} e^{\pm \alpha y}$$

کاهش می‌یابند. که در آن α می‌تواند هر ثابت حقیقی یا مختلطی باشد. اعمال شرایط مرزی روی پتانسیل تعیین خواهد کرد که چه مقادیری از α مجاز شمرده می‌شود و نیز تعیین‌کننده‌ی شکل لازم در برهم‌نهی خطی جواب‌های مختلف است.

یک مسئله‌ی ساده که می‌تواند در تبیین روش جداسازی متغیرها و همچنین برقراری ارتباط در استفاده از متغیرهای مختلط مورد استفاده قرار گیرد، در شکل ۱۰-۲ نشان داده شده است. پتانسیل در ناحیه‌ی $0 \leq x \leq a$ و $0 \leq y \leq b$ مدنظر است که تحت شرایط مرزی به‌گونه‌ای قرار دارد که در $x = a$ و

$\Phi = 0, x = 0$ است، در حالی که در $y = 0$ به ازای $0 \leq x \leq a$ $\Phi = V$ بوده و برای مقادیر بزرگ y ، $\Phi \rightarrow 0$ میل می‌کند. بررسی جواب‌های اساسی نشان می‌دهد که α حقیقی است و اینکه برای داشتن پتانسیل صفر در $x = a$ و $x = 0$ به ازای تمام مقادیر y ، و نیز وقتی که $y \rightarrow \infty$ میل می‌کند ترکیب‌های خطی مناسب به صورت $e^{-\alpha y} \sin(\alpha x)$ هستند، با $\left(a = \frac{n\pi}{\alpha}\right)$.



شکل ۲-۱۰: مسئله‌ی پتانسیلی دوبعدی.

بنابراین ترکیب خطی جواب‌هایی که شرایط مرزی را روی سه سطح از چهار سطح مرزی برآورده می‌کنند عبارت است از

$$\Phi(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \exp\left(-\frac{n\pi y}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \quad (۵۹-۲)$$

ضرایب A_n با این لازمه که برای $0 \leq x \leq a$ و $y = 0$ $\Phi = V$ است تعیین می‌شوند. همان طوری که در بخش (۸-۲) نیز بحث شد، ضرایب فوریه عبارتند از

$$A_n = \frac{۲}{a} \int_0^a \Phi(x, 0) \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) dx \quad (۶۰-۲)$$

با $\Phi(x, 0) = V$ درمی‌یابیم که

$$A_n = \frac{۴V}{\pi n} \begin{cases} ۱ & \text{برای } n \text{ فرد} \\ ۰ & \text{برای } n \text{ زوج} \end{cases}$$

بنابراین پتانسیل $\Phi(x, y)$ به صورت زیر تعیین می‌شود

$$\Phi(x, y) = \frac{4V}{\pi} \sum_{\text{فرد } n} \frac{1}{n} \exp\left(-\frac{n\pi y}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \quad (۶۱-۲)$$

برای مقادیر کوچک y ، بسیاری از جملات موجود در این سری برای اینکه یک تقریب دقیق را ارائه کنند لازم‌اند. اما برای $y \geq \frac{a}{\pi}$ ، واضح است که تنها چند جمله‌ی اول قابل ملاحظه است. پتانسیل به سرعت به شکل حدی خود (که توسط جمله‌ی اول داده می‌شود) میل می‌کند

$$\Phi(x, y) \rightarrow \frac{4V}{\pi} \exp\left(-\frac{\pi y}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \quad (۶۲-۲)$$

به‌عنوان یک جمله‌ی معترضه اشاره می‌کنیم که این رفتار کلی مستقل از اینکه آیا $\Phi(x, 0)$ یک ثابت باشد یا نباشد، مشخصه‌ی تمامی مسائل مقدار مرزی از این نوع است، مشروط بر اینکه جمله‌ی اول در این سری غیرصفر باشد. ضریب A_1 در (۶۰-۲) متفاوت خواهد بود، اما صرف‌نظر از پیچیدگی‌های $\Phi(x, 0)$ ، رفتار آرام جواب مجانبی برحسب x برای $y \geq a$ شروع می‌شود. این موضوع به صورت کتی برای مثال حاضر در شکل (۱۱-۲) نشان داده شده است که در آن پتانسیل در امتداد دو خط بریده‌ی $\frac{y}{a} = 0, 1, 0, 5$ در شکل ۱۰-۲ رسم شده است. منحنی‌های توپر نشان‌دهنده‌ی پتانسیل دقیق هستند و منحنی‌های بریده مبین اولین جمله‌ی در (۶۲-۲). نزدیک به مرز $\left(\frac{y}{a} = 0, 1\right)$ منحنی‌ها به‌طور قابل ملاحظه‌ای متفاوتند، اما در حال حاضر برای $\frac{y}{a} = 0, 5$ ، شکل مجانبی تقریبی عالی است. سری‌های فوری‌ی زیادی وجود دارند که برای به‌دست دادن یک جواب به صورت بسته، می‌توان آن‌ها را جمع زد. سری (۶۱-۲) یکی از آن‌هاست. در اینجا به صورت زیر اقدام می‌کنیم.

با ملاحظه‌ی اینکه؛ $\sin \theta = \text{Im}(e^{i\theta})$ ، که در آن Im نماینده قسمت موهومی است، ملاحظه می‌کنیم که (۶۱-۲) را می‌توان به صورت زیر نوشت

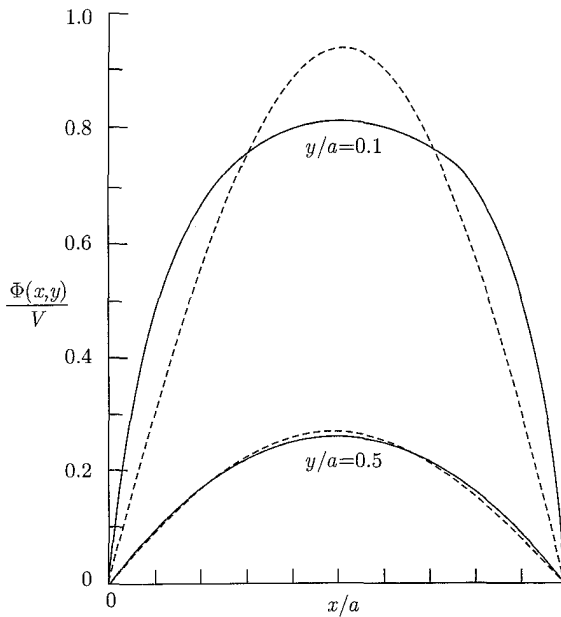
$$\Phi(x, y) = \frac{4V}{\pi} \text{Im} \sum_{\text{فرد } n} \frac{1}{n} e^{\left(\frac{in\pi}{a}\right)(x+iy)}$$

با توجه به تعریف

$$Z = e^{\left(\frac{i\pi}{a}\right)(x+iy)} \quad (۶۳-۲)$$

می‌توان رابطه‌ی فوق را به شکل معنی‌داری به صورت زیر نوشت

$$\Phi(x, y) = \frac{4V}{\pi} \text{Im} \sum_{\text{فرد } n} \frac{Z^n}{n} \quad (۶۴-۲)$$



شکل ۱۱-۲: پتانسیل‌ها در $\frac{y}{a} = 0,1, 0,5$ (در امتداد خطوط بریده از شکل ۱۰-۲) به صورت توابعی از $\frac{x}{a}$.
 منحنی‌های توپر، جواب‌های دقیق هستند و منحنی‌های بریده مبین اولین جمله در حل سری (۶۱-۲).

در این لحظه احتمالاً بتوانیم بسط* زیر را بیاد آوریم

$$\ln(1 + Z) = Z - \frac{1}{2} \ln Z^2 + \frac{1}{3} Z^3 - \frac{1}{4} Z^4 + \dots$$

به‌وضوح

$$\sum_{\text{فرد } n} \frac{Z^n}{n} = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+Z}{1-Z} \right)$$

و

$$\Phi(x, y) = \frac{2V}{\pi} \text{Im} \left[\ln \left(\frac{1+Z}{1-Z} \right) \right]$$

از آنجا که قسمت موهومی یک لگاریتم مساوی فاز شناسی آن است

$$\frac{1+Z}{1-Z} = \frac{(1+Z)(1-Z^*)}{|1-Z|^2} = \frac{1-|Z|^2 + 2i \text{Im} Z}{|1-Z|^2}$$

* به‌طور مکرر مشاهده می‌کنیم که؛ $\frac{1}{(1-Z)}$ $\sum_{n=0}^{\infty} Z^n = \frac{1}{(1-Z)}$ در این صورت $\left(\frac{d}{dZ} \right) \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{Z^n}{n} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} Z^n = \frac{1}{(1-Z)}$ انتگرال‌گیری نتیجه می‌دهد؛ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{Z^n}{n} = -\ln(1-Z)$

بدین ترتیب فاز شناسه‌ی این لگاریتم عبارت است از: $\tan^{-1} \left[2 \operatorname{Im} \frac{Z}{(1 - |Z|^2)} \right]$.

با توجه به شکل صریح جایگزین شده‌ی z در (۶۳-۲) مشخص می‌شود که پتانسیل به صورت زیر درمی‌آید

$$\Phi(x, y) = \frac{2V}{\pi} \tan^{-1} \left(\frac{\sin \frac{\pi x}{a}}{\sinh \frac{\pi y}{a}} \right) \quad (۶۵-۲)$$

که شاخه‌ای از منحنی مماس متناظر با زاویه‌ای است که بین 0° و $\frac{\pi}{4}$ قرار دارد. سری نامتناهی (۶۱-۲) به شکل بسته‌ی صریح (۶۵-۶) تبدیل یافته است. ممکن است خواننده بخواهد برآورده شدن شرایط مرزی، و اینکه شکل مجانبی (۶۲-۲) از یک روش ساده ناشی می‌شود را اثبات نماید.

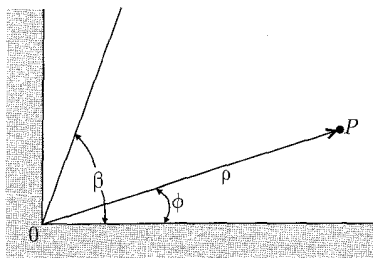
پتانسیل (۶۴-۲) همراه با Z ، که با رابطه‌ی (۶۳-۲) مشخص شده است، به وضوح به توابعی از یک متغیر مختلط ارتباط می‌یابد. این ارتباط نتیجه‌ی مستقیمی از این واقعیت است که قسمت حقیقی یا موهومی یک تابع تحلیلی به عنوان نتیجه‌ای از معادلات کوشی ریمان، معادله‌ی لاپلاس در دو بعد را برآورده می‌کند. همان‌طور که در ابتدای این فصل نیز بدان اشاره شد، از بحث روی روش متغیر مختلط صرف نظر کردیم، نه به خاطر اینکه این موضوع بی‌اهمیت است، بلکه به جهت فقدان جا و اینکه بحث‌های کاملاً مناسبی در جاهای دیگر وجود دارند. تعدادی از این منابع در انتهای این فصل آورده شده‌اند. روش‌های جمع سری فوریه با مثال‌های متعدد در کالین^۱ (ضمیمه‌ی A-۶) مورد بررسی قرار گرفته است.

۱۱-۲ میدان‌ها و چگالی‌های بار در گوشه‌های دوبعدی و در امتداد لبه‌ها

در بسیاری از وضعیت‌های عملی، حداقل در مقیاس کوچک، همانند تلاقی بین دو صفحه‌ی رسانا، سطوح (رسانا) به طریقی کنار هم قرار می‌گیرند که بتوان تقریب زد. لبه‌های جعبه‌ی نشان داده شده در شکل (۹-۲) یک مثال از این نوع است که گوشه‌ها در $x = 0$ ، $y = 0$ ، و دیگری در شکل ۲-۱۰ که گوشه‌ها در $x = a$ و $y = 0$ قرار گرفته‌اند. بنابراین داشتن آگاهی از چگونگی رفتار میدان‌های پتانسیل و چگالی‌های بار سطحی در همسایگی یک چنین ”گوشه‌ها“ یا ”لبه‌هایی“ مفید است. برای اینکه بتوانیم به آن‌ها (گوشه‌ها یا لبه‌ها) جهت درک رفتار میدان‌ها به صورت تابعی منحصراً از خواص ”گوشه“ (و نه با جزئیات آریابه‌بندی کلی مسئله) به قدر کافی دقیق نگاه کنیم، فرض می‌کنیم که ”گوشه‌ها“ بینهایت عمیق هستند.

وضعیت کلی در دو بعد در شکل ۲-۱۲ نشان داده شده است. دو صفحه‌ی رسانا تحت زاویه β یکدیگر را قطع می‌کنند. فرض شده است که صفحه‌ها در پتانسیل V نگه داشته شده‌اند.

دور از میدا و جاهایی که در شکل نشان داده نشده است احتمالاً رساناها یا آرایش‌های دیگری از بارها وجود دارند که مسئله‌ی پتانسیلی فوق را به‌گونه‌ای منحصربه‌فرد مشخص می‌کنند. از آنجایی که به رفتار



شکل ۲-۱۲: تقاطع دو صفحه‌ی رسانا با زاویه‌ی گشودگی β ، که معرف یک گوشه در دو بعد است.

تابعی میدان‌ها و غیره در نزدیکی مبدأً علاقه‌مندیم (و نه به مقادیر مطلق آن)، لذا تا سرحد امکان رفتار نامشخص “دوردست” را رها می‌کنیم.

هندسه‌ی شکل ۲-۱۲ استفاده از مختصات قطبی را به جای دکارتی پیشنهاد می‌کند. معادله‌ی لاپلاس در دو بعد برحسب مختصات قطبی (ρ, ϕ) عبارت است از

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi^2} = 0 \quad (66-2)$$

با استفاده از روش جداسازی متغیرها جایگزینی زیر را انجام می‌دهیم

$$\Phi(\rho, \phi) = R(\rho)\Psi(\phi)$$

پس از ضرب در $\frac{\rho^2}{\Phi}$ ، معادله‌ی فوق منجر می‌شود به

$$\frac{\rho}{R} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dR}{d\rho} \right) + \frac{1}{\Psi} \frac{d^2 \Psi}{d\phi^2} = 0 \quad (67-2)$$

چون دو جمله‌ی معادله‌ی بالا به‌طور جداگانه به ترتیب توابعی از ρ و ϕ هستند، لذا هر کدام بایستی برابر با مقدار ثابتی باشند

$$\frac{\rho}{R} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dR}{d\rho} \right) = \nu^2, \quad \frac{1}{\Psi} \frac{d^2 \Psi}{d\phi^2} = -\nu^2 \quad (68-2)$$

جواب‌ها برای این معادلات عبارتند از

$$\begin{cases} R(\rho) = a\rho^\nu + b\rho^{-\nu} \\ \Psi(\phi) = A \cos(\nu\phi) + B \sin(\nu\phi) \end{cases} \quad (69-2)$$

برای وضعیت خاص $\nu = 0$ ، جواب‌ها عبارتند از

$$\begin{cases} R(\rho) = a_0 + b_0 \ln \rho \\ \psi(\phi) = A_0 + B_0 \phi \end{cases} \quad (70-2)$$

این‌ها، همان اجزاء سازنده‌ای هستند که با آن‌ها پتانسیل را با برهم‌نهی خطی بنا می‌کنیم. در اینجا به حل عمومی معادله‌ی لاپلاس در دو بعد، وقتی ناحیه تغییرات زاویه سمتی به‌طور کامل مجاز باشد، اشاره می‌کنیم، گرچه این‌کار برای هدف کنونی ما اساسی هم نیست، چنانکه برای مثال، این مورد برای پتانسیل بین دو سطح استوانه‌ای $\rho = a$ و $\rho = b$ (که پتانسیل روی آن به‌صورت تابعی از ϕ مشخص شده است) مطرح می‌شود. در صورتی که هیچ محدودیتی روی ϕ نباشد، لازم است برای اطمینان از تک مقدار بودن، پتانسیل یک عدد صحیح مثبت، منفی و یا صفر باشد. علاوه بر این به‌ازای $\nu = 0$ ، ثابت B_0 در (70-2) باید به‌دلیلی مشابه، صفر شود. بنابراین جواب عمومی به‌صورت زیر است

$$\Phi(\rho, \phi) = a_0 + b_0 \ln \rho + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \rho^n \sin(n\phi + \alpha_n) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \rho^{-n} \sin(n\phi + \beta_n) \quad (71-2)$$

در صورتی که مبدأ درون حجمی قرارگیرد که در آن هیچ باری موجود نیست، تمام b_n ها صفر شده و تنها توان‌های ثابت و مثبت ρ ظاهر می‌شوند. در صورتی که مبدأ خارج از حجم فوق واقع شود، b_n می‌تواند مخالف با صفر باشد. به‌ویژه، همان‌گونه که به‌خوبی مشخص است، جمله‌ی لگاریتمی هم‌ارز با یک بار خطی روی محوری با چگالی بار بر واحد طول $\lambda = -2\pi\epsilon_0 b_0$ است.

برای وضعیت شکل (72-2)، زاویه‌ی سمتی به ناحیه‌ی $0 \leq \phi \leq \beta$ محدود می‌شود. شرایط مرزی عبارتند از اینکه؛ به‌ازای تمام مقادیر $\rho \geq 0$ ، وقتی $\phi = 0$ و $\phi = \beta$ هستند، $\Phi = V$ است. این موضوع ایجاب می‌کند که در (70-2)، $b_0 = B_0 = 0$ و در (72-2) $A_0 = 0$ و $b = 0$ باشد. علاوه بر این، موضوع فوق ایجاب می‌کند که ν طوری انتخاب شود که به‌ازای آن $\sin(\nu\beta) = 0$ شود. بنابراین

$$\nu = \frac{m\pi}{\beta}, \quad m = 1, 2, \dots$$

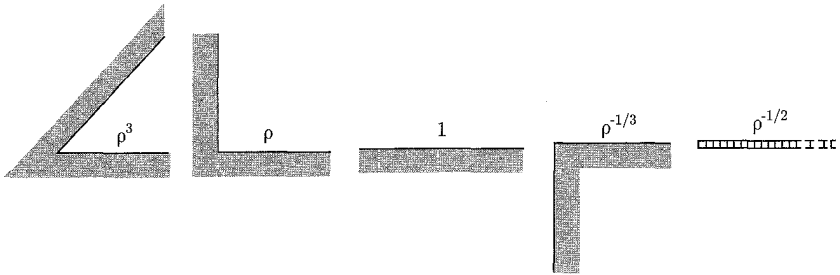
و جواب عمومی به‌صورت زیر درمی‌آید

$$\phi(\rho, \phi) = V + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \rho^{\frac{m\pi}{\beta}} \sin\left(\frac{m\pi\phi}{\beta}\right) \quad (72-2)$$

ضرایب تاکنون معین نشده‌ی a_m بستگی به پتانسیل در نواحی دور از گوشه در $\rho = 0$ دارند. چون سری شامل توان‌های مثبت $\rho^{\frac{\pi}{\beta}}$ است، لذا برای ρ های به‌قدر کافی کوچک، فقط جمله‌ی اول در این سری

اهمیت خواهد داشت*. بدین ترتیب نزدیک $\rho = 0$ ، پتانسیل به طور تقریب برابر است با

$$\Phi(\rho, \phi) \simeq V + a_1 \rho^{\frac{\pi}{\beta}} \sin\left(\frac{\pi\phi}{\beta}\right) \quad (۷۳-۲)$$



شکل ۱۳-۲: تغییر چگالی بار سطحی (و میدان الکتریکی) با فاصله ρ از "گوشه" یا لبه برای زاویه‌های گشودگی،

$$\beta = \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi$$

مؤلفه‌های میدان الکتریکی عبارتند از

$$\left. \begin{aligned} E_\rho(\rho, \phi) &= \frac{-\partial\Phi}{\partial\rho} \simeq \frac{-\pi a_1}{\beta} \rho^{\left(\frac{\pi}{\beta}\right)^{-1}} \sin\left(\frac{\pi\phi}{\beta}\right) \\ E_\phi(\rho, \phi) &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial\Phi}{\partial\phi} \simeq \frac{-\pi a_1}{\beta} \rho^{\left(\frac{\pi}{\beta}\right)^{-1}} \cos\left(\frac{\pi\phi}{\beta}\right) \end{aligned} \right\} \quad (۷۴-۲)$$

چگالی‌های بار سطحی در $\phi = 0$ و $\phi = \beta$ مساوی هستند و به طور تقریب عبارتند از

$$\sigma(\rho) = \varepsilon_0 E_\phi(\rho, 0) \simeq -\frac{\varepsilon_0 \pi a_1}{\beta} \rho^{\left(\frac{\pi}{\beta}\right)^{-1}} \quad (۷۵-۲)$$

مؤلفه‌های میدان و چگالی بار سطحی، نزدیک $\rho = 0$ ، تماماً با فاصله به صورت $\rho^{\left(\frac{\pi}{\beta}\right)^{-1}}$ تغییر می‌کنند. این وابستگی به ρ ، برای چند حالت خاص در شکل (۱۳-۲) نشان داده شده است. برای یک گوشه بسیار عمیق (مقدار کوچک β) توان ρ بسیار بزرگ می‌شود. اصولاً در یک چنین گوشه‌ای هیچ باری جمع نمی‌شود. برای $\beta = \pi$ (یک سطح تخت) کمیت‌های میدان همان‌گونه که به طور شهودی نیز واضح است مستقل از ρ درمی‌آیند. وقتی $\beta > \pi$ باشد، گوشه‌ی دویعدی به صورت یک لبه درآمد و میدان و چگالی (* در اینجا یک فرض ضروری در مورد شرایط مرزی دور انجام می‌دهیم و آن اینکه، این شرایط مرزی به‌گونه‌ای باشند که ضرایب a_1 صفر نباشد. به طور معمول این موضوع هیچ مدخلیتی ندارد، اما تقارن‌های خاصی ممکن است a_1 یا حتی a_2 و غیره را صفر کنند. مثال‌های غیرمعمول فوق بایستی به طور جداگانه مورد بحث قرار گیرند.

بار سطحی وقتی $\rho \rightarrow 0$ میل کند، تکین می‌شوند. برای $\beta = 2\pi$ (لبهی یک ورقه‌ی نازک) تکینگی به صورت $\rho^{-\frac{1}{2}}$ است. برای این مورد هنوز انتگرال‌گیری امکان‌پذیر است طوری که بار موجود در یک مسافت محدود نسبت به لبه محدود است، اما این موضوع ایجاب می‌کند که شدت میدان‌ها در لبه‌های ورقه‌های رسانا بسیار بزرگ شوند (یا در حقیقت، برای هر آرایشی که در آن $\beta > \pi$ باشد).

ملاحظات الکترواستاتیکی دوبعدی قبل، برای هر وضعیت سه‌بعدی دیگری، حتی با میدان‌های متغیر با زمان نیز به‌کار می‌روند. اگر طول لبه‌ی یک لبه‌ی تیز متناهی باشد (همانند لبه‌ی یک مکعب دور از یک گوشه) در این صورت در فواصل به‌قدر کافی نزدیک به لبه می‌توان از تغییرات پتانسیل در طول لبه صرف‌نظر کرد. گرچه ممکن است ضریب a_1 در (۲-۷۵) با فاصله در طول لبه تغییر کند، با این وجود ملاحظات دوبعدی فوق به‌کار گرفته می‌شوند. به‌طور مشابه، مباحث الکترواستاتیک حتی برای میدان‌های متغیر با زمان نیز معتبرند.

نکته در اینجا این است که با بستگی زمانی، طول دیگری یعنی طول موج وارد بحث می‌شود، و به شرط اینکه با فواصل دور از لبه (که در مقایسه با یک طول موج کوچک باشند) و همچنین سایر فواصل سروکار داشته باشیم، رفتار میدان‌ها به رفتار الکترواستاتیک و مگنتواستاتیک کاهش پیدا می‌کند.

برای مثال در پراش امواج مایکروویو توسط یک سوراخ در یک ورقه‌ی رسانای نازک، وقتی $\rho \rightarrow 0$ میل می‌کند، میدان‌ها به صورت $\rho^{-\frac{1}{2}}$ تکین می‌شوند، که در آن ρ فاصله از مرز حفره است، و این واقعیت در هر نوع حل دقیقی از مسئله‌ی پراش بایستی به حساب آورده شود.

رفتار تکینگی میدان‌ها نزدیک لبه‌های تیز، دلیلی برای مؤثر بودن برق‌گیرهاست. در وضعیت ایده‌آلی که در اینجا بحث شد، وقتی $\rho \rightarrow 0$ میل می‌کند، قدرت میدان بدون هیچ‌گونه محدودیتی افزایش می‌یابد، اما برای یک ورقه به ضخامت d ، با لبه‌ای که به شکل هموار گرد شده است، می‌توان چنین استنباط کرد که قدرت میدان در سطح متناسب با $d^{-\frac{1}{2}}$ خواهد شد. برای مقدار به‌قدر کافی کوچک d این قدرت می‌تواند بسیار بزرگ باشد. در خلأ مطلق یک چنین قدرت‌هایی از میدان امکان‌پذیرند؛ هرچند که در هوا، اگر قدرت میدان از یک مقدار مشخص تجاوز کند، شکست الکتریکی و متعاقب آن تخلیه الکتریکی اتفاق خواهد افتاد (بسته به شکل دقیق الکتروود، نزدیکی آن به سایر الکتروودها و غیره، اما برای هوا در شرایط دما و فشار عادی (NTP) این میدان متجاوز از حدود $10^6 \times 2.5$ است و گاهی حتی تا ۴ برابر).

در رعد و برق‌هایی^۱ با اختلاف پتانسیل‌های بالا بین زمین و ابرهای رگباری^۲، در ابتدا در اطراف یک لبه‌ی رسانای تیز زمین‌شده، یا بهتر، در اطراف یک نقطه (بخش ۳-۴ را ملاحظه کنید) شکست الکتریکی اتفاق می‌افتد و سپس عبور تخلیه‌ی الکتریکی صاعقه از یک انتهای مسیر رسانای تیز (در هوا) و در امتداد آن صورت می‌گیرد.

۱۲-۲ مقدمه‌ای بر آنالیز المان محدود در الکترواستاتیک

آنالیز المان محدود (FEA) شامل نوعی از روش‌های عددی برای حل مسائل مقدار مرزی در فیزیک و مهندسی است. در اینجا تنها مقدمه‌ای از ایده‌های اساسی را، با استفاده از روش گالرگین^۱ برای مسائل الکترواستاتیکی دوبعدی، به صورت یک مثال مطرح می‌کنیم. تعمیم این مورد به سه بعد، به طور خلاصه در انتها صورت گرفته است.

خواننده‌ای که مقدمه‌ای عمیق‌تر را می‌خواهد می‌تواند به مراجع؛ بینز^۲، لارنس و ترابریج^۳، ایدا و باتسوز^۴، سادیکو^۵، استرانگ^۶ یا زوو^۷ مراجعه کند.

معادله‌ی پواسن $-\nabla^2 \psi = g$ را در یک ناحیه‌ی دوبعدی R ، با شرایط مرزی دیریکله روی منحنی مرزی C در نظر بگیرید. انتگرال صفرشونده‌ی زیر را بنا می‌کنیم

$$\int_R [\phi \nabla^2 \psi + g \phi] dx dy = 0 \quad (۷۶-۲)$$

که در آن $\phi(x, y)$ یک تابع آزمایشی است که برای این لحظه تنها به صورت "پیوسته‌ی قطعه‌ای" در R و صفرشونده روی منحنی C تعریف می‌شود. استفاده از اتحاد اول گرین روی جمله‌ی اول در بالا منجر می‌شود به

$$\int_R [\nabla \phi \cdot \nabla \psi - g \phi] dx dy = 0 \quad (۷۷-۲)$$

چون ϕ روی C صفر می‌شود، لذا انتگرال سطحی نیز صفر خواهد شد.

روش گالرگین شامل اولین تقریب از جواب مورد نظر $\psi(x, y)$ است (با یک بسط محدود برحسب جملات یک مجموعه $\phi_{ij}(x, y)$ از توابع مستقل خطی جایگزیده) و با حفظ تنها، جملات موجود در یک همسایگی محدود از $x = x_i, y = y_j$. برای مشخص شدن موضوع، ناحیه‌ی R را تصور می‌کنیم که با یک شبکه‌ی مربعی، با فاصله‌ی شبکه‌ای h پوشش یافته است. در این صورت یک انتخاب ممکنه برای $\phi_{ij}(x, y)$ عبارت است از

$$\phi_{ij}(x, y) = \left(1 - \frac{|x - x_i|}{h}\right) \left(1 - \frac{|y - y_j|}{h}\right) \quad (۷۸-۲)$$

$|x - x_i| \leq h, |y - y_j| \leq h$ و در غیر این صورت $\phi_{ij}(x, y) = 0$ است. جمع تمام ϕ_{ij} ها روی شبکه‌ی مربعی برابر واحد است. البته انتخاب‌های دیگری نیز از توابع جایگزیده امکان پذیرند. انتخاب هرچه باشد اگر تعداد مکان‌های شبکه‌ای، شامل مرز، N_0 باشد، بسط $\psi(x, y)$ شکل زیر را به خود خواهد گرفت

$$\psi(x, y) \approx \sum_{k,l}^{(N_0)} \Psi_{kl}(x, y) \quad (۷۹-۲)$$

جدا از مقادیر مشخص مرزی، ضرایب ثابت Ψ_{kl} را می‌توان به صورت مقادیری تقریبی از $\psi(x_k, y_l)$ تصور کرد. اگر فاصله‌ی شبکه‌ای h به قدر کافی کوچک باشد، بسط (۲-۷۹) یک تقریب مدلل برای مقدار واقعی ψ خواهد بود، مشروط بر اینکه ضرایب به گونه‌ای مناسب انتخاب شده باشند.

گام دوم در روش گالرگین، انتخاب تابع آزمایشی ϕ در (۲-۷۷) است، تا تابع (i, j) ام، روی مجموعه‌ی بسط فوق، به طور متوالی (با i و j) روی تمام N مکان داخلی شبکه بگردد. معادله‌ی نوعی به دست آمده از (۲-۷۷) عبارت است از

$$\sum_{k,l}^{(N)} \Psi_{kl} \int_R \nabla \phi_{ij}(x, y) \cdot \nabla \phi_{kl}(x, y) dx dy = g(x_i, y_i) \int_R \phi_{ij}(x, y) dx dy \quad (۲-۸۰)$$

در حالی که انتگرال‌ها روی کل ناحیه‌ی R طوری نشان داده شده‌اند که ϕ_{ij} تنها در یک ناحیه‌ی کوچک حول مکان (x_i, y_i) دارای تکیه‌گاه است.

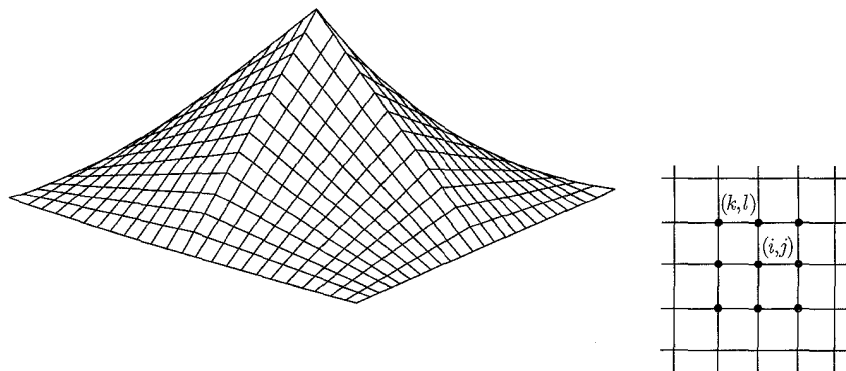
در (۲-۸۰) فرض شده است که $g(x, y)$ [روی مقیاس اندازه‌ی سلولی که باید در انتگرال موجود در سمت راست، (با مقدارش در مکان شبکه‌ای) تقریب زده شود] به اندازه‌ی کافی آرام تغییر می‌کند. همین که انتگرال‌ها شکل بگیرند، (۲-۸۰) به صورت یکی از N معادله‌ی جبری خطی غیرهمگن جفت شده برای N مجهول Ψ_{kl} درمی‌آید. همان‌طور که در شکل (۲-۱۴) برای تابع جایگزیده‌ی (۲-۷۸) نشان داده شده است، جفت‌شدگی بین Ψ_{kl} به تعداد کمی از مکان‌های نزدیک (x_i, y_j) ، محدود شده است. نشان دادن اینکه انتگرال‌های لازم برای توابع (۲-۷۸) به شکل زیر هستند، به صورت یک مسئله، واگذار شده است.

$$\int_R \phi_{ij}(x, y) dx dy = h^2 \quad (۲-۸۱)$$

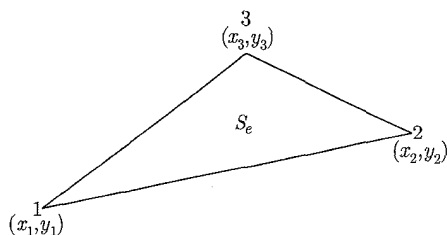
$$\int_R \nabla \phi_{ij}(x, y) \cdot \nabla \phi_{kl}(x, y) dx dy = \left\{ \begin{array}{c} ۱, ۳ \\ -۱, ۳ \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{برای}} \left\{ \begin{array}{ll} k = i, & l = j \\ k = i \pm ۱, & l = j \\ k = i, & l = j \pm ۱ \\ k = i \pm ۱, & l = j \pm ۱ \end{array} \right.$$

وقتی مکان (i, j) مجاور مرز باشد، سه یا چند جمله در طرف سمت چپ (۲-۸۰) وجود خواهد داشت که $(-۱, ۳)$ برابر مقادیر مرزی مشخص ψ هستند. این جملات را می‌توان به عنوان بخشی از ناهمسانی^۱ به طرف سمت راست انتقال داد.

اگر (۲-۸۰) را به صورت ماتریسی $\mathbf{K}\Psi = \mathbf{G}$ بنویسیم؛ با \mathbf{K} به عنوان یک ماتریس مربعی $N \times N$ و Ψ و \mathbf{G} به عنوان بردارهای N ستونی؛ در این صورت ماتریس \mathbf{K} تنها با تعداد کمی المان غیرصفر در هر سطر یا ستون، ماتریس "اسپارس"^۲ خواهد بود.



شکل ۲-۱۴: طرح $\phi_{ij}(x, y)$ در رابطه‌ی (۲-۷۸). مکان‌های شبکه‌ای که با یک نقطه در شبکه علامت‌دار شده‌اند، همان‌هایی هستند که با انتگرال‌های موجود در سمت چپ رابطه (۲-۸۰) برای تابع جایگزیده‌ی (۲-۷۸)، جفت شده‌اند.



شکل ۲-۱۵: واحد مثلثی پایه‌ی $e(1, 2, 3)$ با مساحت S_e برای FEA در دو بعد.

جواب معادله‌ی عملگری ماتریس فوق را می‌توان به سرعت با وارون‌سازی یک چنین ماتریس اسپارسی با روش‌های عددی خاص همراه نمود (Press et al را ملاحظه کنید). مثال ملموسی از این روش به مسائل انتهای این فصل واگذار شده است.

یک شبکه‌ی مربعی در بسیاری از مسائل بهینه نیست، چراکه ممکن است جواب در بعضی از قسمت‌های دامنه‌ی موردنظر، با سرعت بیش‌تری نسبت به سایر قسمت‌ها تغییر کند. در چنین ناحیه‌هایی حلقه‌ی ظریف‌تری را طلب می‌کنیم. یک روش FEA، با یک صورت کلی استاندارد (ژنریک) اما مجاز در اندازه‌های مختلف، دارای انعطاف بیش‌تری است و بنابراین بهتر خواهد بود. در اینجا مثلث مناسب را به‌صورت واحدی پایه در دو بعد، توصیف می‌کنیم.

فرض شده است که واحد مثلثی به اندازه‌ی کافی کوچک باشد، طوری‌که متغیر میدان، تغییرات کمی روی واحد فوق داشته باشد، به‌گونه‌ای که امکان تقریب زدن آن به‌صورت خطی در هر جهت وجود داشته باشد. واحد مثلثی پایه $e(1, 2, 3)$ در شکل ۲-۱۵ نشان داده شده است. در داخل این ناحیه متغیر میدان

را به صورت $\psi(x, y) \approx \psi_e(x, y) = A + Bx + Cy$ تقریب می‌زنیم. سه مقدار (ψ_1, ψ_2, ψ_3) در گره‌ها یا رئوس، ضرایب (A, B, C) را تعیین می‌کنند. هر چند که اصولی کردن این روش برای محاسبات عددی، با تعریف سه تابع شکل $N_j^{(e)}(x, y)$ ، (برای هر رأس یک تابع) مفید است، طوری که وقتی $x = x_j$ و $y = y_j = 1$ باشد $N_j^{(e)} = 1$ و در سایر رئوس $N_j^{(e)} = 0$ است. توابع شکل فوق برای واحد e در خارج از دامنه‌ی مثلثی صفر می‌شوند.

در نظر بگیرید؛ $N_i^{(e)} = a_1 + b_1x + c_1y$. بخواهید که

$$a_1 + b_1x_1 + c_1y_1 = 1$$

$$a_1 + b_1x_2 + c_1y_2 = 0$$

$$a_1 + b_1x_3 + c_1y_3 = 0$$

دترمینان D از ضرایب در سمت چپ عبارت است از

$$D = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} = (x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)$$

این دترمینان (D) ، تحت دوران‌های مثلث ناورد است؛ در حقیقت، $D = 2S_e$ است که در آن S_e مساحت مثلث است. ضرایب (a_1, b_1, c_1) عبارتند از

$$a_1 = \frac{1}{2S_e}(x_2y_3 - x_3y_2)$$

$$b_1 = \frac{1}{2S_e}(y_2 - y_3)$$

$$c_1 = \frac{-1}{2S_e}(x_2 - x_3)$$

سایر $N_j^{(e)}$ ها را می‌توان با جایگشت دورانی اندیس‌ها نوشت. N_i و ضرایب مربوط به آن‌ها از روابط ذیل پیروی می‌کنند

$$\sum_{i=1}^3 N_i^{(e)}(x, y) = 1 \quad ; \quad \sum_{i=1}^3 a_i = 1 \quad ; \quad \sum_{i=1}^3 b_i = 0 \quad ; \quad \sum_{i=1}^3 c_i = 0$$

$$a_j + b_j\bar{x}_e + c_j\bar{y}_e = \frac{1}{3} \quad (j = 1, 2, 3)$$

در اینجا $\bar{x}_e = \frac{(x_1 + x_2 + x_3)}{3}$ و $\bar{y}_e = \frac{(y_1 + y_2 + y_3)}{3}$ ، مختصات مرکزگرانی المان مثلثی e هستند. توابع شکل برای پایه‌های مثلثی پدیدآورنده‌ی ناحیه‌ی R را می‌توان در روش گالرگین به صورت مجموعه‌ی بسط مستقل خطی جایگزیده مورد استفاده قرار داد.

متغیر میدان $\psi(x, y)$ دارای بسط زیر است

$$\psi(x, y) \approx \sum_{f,j} \Psi_j^{(f)} N_j^{(f)}(x, y) \quad (۸۲-۲)$$

که در آن جمع روی تمام مثلث‌های f و رئوس هر کدام دور می‌زند. ثابت‌های $\Psi_j^{(f)}$ مقادیر مطلوب میدان در رئوس هستند. (اندیس‌گذاری زیادی در اینجا به وجود می‌آید، چراکه مثلث‌های مجاور دارای چند رأس به صورت مشترکند). اشاره‌ی به این نکته با ارزش است که، علی‌رغم جابه‌جایی از یک مجموعه از توابع شکل به مجموعه‌ی دیگر (در هنگام عبور نقطه $P(x, y)$ از یک مثلث به مثلث مجاور آن) تابع تعریف شده توسط طرف سمت راست (۸۲-۲) هنوز متصل است. به جهت خطی بودن توابع شکل، مقدار (۸۲-۲) (در امتداد ضلع مشترک دو مثلث در هر دو نمایش) در هر دو انتها دارای میانگین وزنی یکسانی هستند (و عدم وجود سهمی از توابع شکل برای رئوسی که مشترک نیستند).

به معادله‌ی پواسن با شرایط مرزی دیریکله و انتگرال صفرشونده‌ی (۷۷-۲) بازمی‌گردیم. با کمک بسط (۸۲-۲) برای $\psi(x, y)$ ، تابع آزمایشی $\phi(x, y) = N_i^{(e)}(x, y)$ را برای یک پایه‌ی خاص e و رأس i انتخاب می‌کنیم (تنها با اجتناب از رأس‌های روی مرز؛ چراکه به $\phi = 0$ روی C نیاز داریم). این انتخاب انتگرال فوق را [و نیز جمع موجود در (۸۲-۲)] به انتگرالی روی پایه خاص انتخاب‌شده تبدیل می‌کند، درست به همان شکلی که انتخاب تابع جایگزیده‌ی (۲-۸۰) انجام شد. این انتگرال با ناهمسانی انتقال‌یافته به سمت راست عبارت است از

$$\sum_{j=1}^3 \Psi_j^{(e)} \int_e \nabla N_i^{(e)} \cdot \nabla N_j^{(e)} dx dy = \int_e g N_i^{(e)} dx dy \quad (۸۳-۲)$$

اگر $g(x, y)$ روی پایه‌ی e تغییرات بسیار کمی داشته باشد، می‌توان آن را با مقدارش در مرکزگرانی مثلث یعنی $g_e \equiv g(\bar{x}_e, \bar{y}_e)$ تقریب زد و سپس آن را از انتگرال سمت راست خارج کرد. انتگرال باقیمانده عبارت است از

$$\int_e N_i^{(e)} dx dy = S_e (a_i + b_i \bar{x}_e + c_i \bar{y}_e) = \frac{1}{3} S_e \quad (۸۴-۲)$$

برای انتگرال سمت چپ در (۸۳-۲)، خطی بودن توابع شکل به معنی ثابت بودن انتگرالده است.

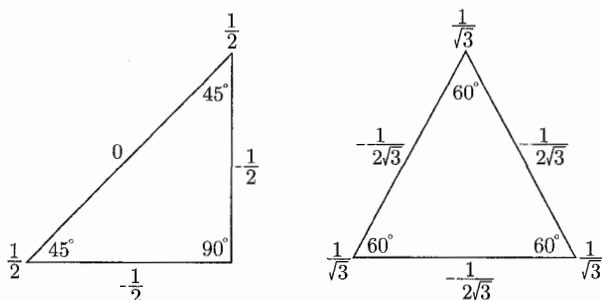
$$\frac{\partial N_i^{(e)}}{\partial x} = b_i \quad , \quad \frac{\partial N_i^{(e)}}{\partial y} = c_i$$

و تعریف می‌کنیم

$$K_{ij}^{(e)} = S_e (b_i b_j + c_i c_j) \quad (۸۵-۲)$$

ضرایب $k_{ij}^{(e)}$ ضرایب جفت‌شدگی بدون بعدی را برای مثلث e تشکیل می‌دهند. نشان دادن این نکته که ضرایب فوق به شکل مثلث بستگی دارند و نه به جهت‌گیری یا اندازه‌ی آن، کار ساده‌ای است. دو مثال

در شکل (۱۶-۲) نشان داده شده است، که در آن عناصر قطری $k_{ii}^{(e)}$ در رؤس متناظر (i) و عناصر غیرقطری $k_{ij}^{(e)}$ در امتداد خط واصل رأس i به رأس j قرار گرفته‌اند.



شکل ۱۶-۲: مثال‌هایی از ضرایب جفت‌شدگی مثلثی. ضرایب "قطری" در گوشه‌ها (رأس‌ها) هستند و ضرایب "غیرقطری" در طول اضلاع بین رؤس.

با کمک تعریف (۸۵-۲) در مورد ضرایب جفت‌شدگی، (۸۳-۲) به صورت زیر درمی‌آید

$$\sum_{j=1}^3 k_{ij}^{(e)} \Psi_j^{(e)} = \frac{S_e}{3} g_e \quad (i = 1, 2, 3) \quad (۸۶-۲)$$

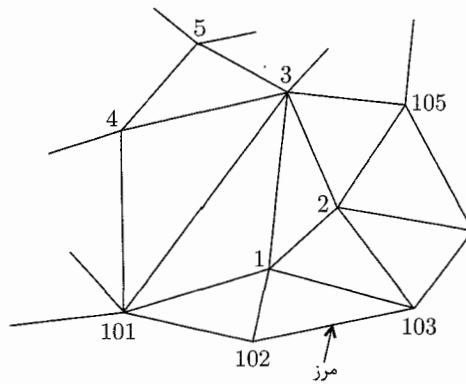
به‌ازای هر المان e ، سه معادله‌ی جبری وجود دارد، مگر این‌که ضلع (یا اضلاع) مثلث قسمتی از مرز را تشکیل دهد. سه معادله‌ی جفت‌شده‌ی فوق را می‌توان به صورت ماتریسی $\mathbf{K}^{(e)} \Psi^{(e)} = \mathbf{g}^{(e)}$ نوشت. اکنون باید نتیجه به دست آمده برای یک پایه را تعمیم دهیم تا تمامی پایه‌های مثلثی پدیدآورنده‌ی R را شامل شود. فرض کنید تعداد رؤس داخلی یا گره‌ها N و تعداد کل رؤس شامل مرز، N_0 باشد. گره‌های داخلی را با $1, 2, 3, \dots, N$ ، z ، و گره‌های مرزی را با $0, N+1, N+2, \dots, N_0$ برچسب‌گذاری کنید. حال ماتریس $\mathbf{k}^{(e)}$ را به صورت ماتریس \mathbf{K} ، بزرگ و بازاریابی کنید $(\mathbf{k}^{(e)} \rightarrow \mathbf{K})$ ، که در آن \mathbf{K} یک ماتریس $N \times N$ است همراه با سطرها و ستون‌هایی که با اندیس گره برچسب خورده‌اند. به‌طور مشابه، بردارهای N ستونی Ψ و \mathbf{G} را تعریف کنید. برای هر عنصر مثلثی در چرخش، عناصر $k_{ij}^{(e)}$ و $\frac{S_e g_e}{3}$ را به سطرها و ستون‌های مناسب \mathbf{K} و \mathbf{G} بیافزایید. نتیجه‌ی نهایی معادله‌ی ماتریسی زیر است

$$\mathbf{K}\Psi = \mathbf{G} \quad (۸۷-۲)$$

که در آن

$$\mathbf{K} = (k_{ij}) \quad \text{با} \quad k_{ii} = \sum_T k_{ii}^{(e)} \quad \text{و} \quad k_{ij} = \sum_E k_{ij}^{(e)} \quad i \neq j \quad (۸۸-۲)$$

$$G_i = \frac{1}{3} \sum_T S_e g_e - \sum_{j=N+1}^{N_0} k_{ij}^{(e)} \Psi_j^{(e)}$$



شکل ۲-۱۷: بخشی از آرایه‌ی عناصر (یا المان‌های) پدیدآورنده‌ی ناحیه‌ی R ، که فرض شده است دارای ۱۰۰ گره داخلی است.

جمع روی T به معنی جمع روی تمامی مثلث‌هایی است که به گره داخلی i مرتبطند؛ جمع روی E به معنی جمع روی تمامی مثلث‌هایی است با یک ضلع از گره داخلی i به گره داخلی j .
جمع نهایی در G_i گره‌هایی را شامل می‌شود که مستقیماً به گره‌های مرزی متصلند، با مقادیر مرزی مشخص ψ در آنجا، و مقادیر متناظر $k_{ij}^{(e)}$ (که در ماتریس \mathbf{K} حضور ندارند).

خواننده ممکن است چنین تصور کند که شکل (۲-۱۷) باید صحت (۲-۸۸) را مورد تأیید قرار دهد. دقیقاً همانند شبکه‌ی مربعی، ماتریس \mathbf{K} ، $N \times N$ یک ماتریس اسپارس متقارن و با عناصر قطری مثبت است.

همان‌گونه که قبلاً نیز ذکر شد، روش‌های مؤثر خاصی برای وارون کردن یک چنین ماتریس‌هایی، حتی اگر بسیار بزرگ هم باشند وجود دارد، تعمیم واضح مثلث به سه بعد در روش FEA برای ساختن هرم یعنی پایه‌ی اساسی مربوط به حجم، افزودن رأس دیگری در بیرون از این صفحه است. چهار تابع شکل $N_j^{(e)}(x, y, z)$ ، برای ارائه تقریبی متغیر میدان در درون هرم مورد استفاده قرار می‌گیرد. در این حالت جبر بیش‌تری وارد کار می‌شود، اما مفهوم همان مفهوم قبل است.

بحث‌مان تنها یک مقدمه‌ی ساده از آنالیز المان محدود است. انواع مختلف زیادی از این مورد در هر شاخه‌ای از فیزیک و مهندسی وجود دارد. آزمایشگاه‌های ملی و کمپانی‌های تجاری پکیج‌هایی ساخته‌اند: پواسن^۱ یکی از این پکیج‌ها است، که در آزمایشگاه ملی لارنس^۲ برکلی^۳ به همراه با آزمایشگاه ملی لیورمور^۴ آماده بهره‌برداری شد: توسکا^۵ و کارمن^۶ دو پکیج دیگر هستند که در آزمایشگاه رادفورد - آپلتون در بریتانیا مورد بهره‌برداری قرار گرفتند.

مراجع و خواندنی‌های پیشنهادی

روش تصاویر و تکنیک وارونگی در کتاب‌های بسیاری مورد بحث قرار گرفته‌اند. از این میان، بحث‌های بسیار گسترده یا بهتر آن‌هایی هستند که توسط

Jeans, Chapter VIII

Maxwell, Vol. 1, Chapter XI

Smythe, Chapters IV and V

انجام گرفته‌اند. استفاده کلاسیک از وارونگی^۱ توسط لرد کلوین^۲ (در ۱۸۴۷) برای به دست آوردن توزیع بار روی سطوح داخلی و خارجی یک جام کروی رسانای باردار نازک در

Kelvin, p. 186

Jeans, pp. 250-251

صورت گرفته است.

یک منبع دایرةالمعارف گونه واقعی در مورد مثال‌هایی از تمامی انواع، با دیاگرام‌های متعدد، عبارت است از کتاب ”دورانده“، به خصوص فصول III و IV. ”دورانده“ انعکاس را در صفحات ۱۱۴-۱۰۷ مورد بحث قرار داده است. متغیرهای مختلط و تکنیک‌های نگاشت همدیس، برای حل مسائل پتانسیلی دوبعدی توسط

Durand, Chapter X

Jeans, Chapter VIII, Section 306-337

Maxwell, Vol. 1, Chapter XII

Morse and Feshbach, pp. 443-453, 1215-1252

Smythe, Chapter IV, Sections 4.09-4.31P Thomson, Chapter 3

مورد بحث قرار گرفته است.

کتابی مفید با ریاضیاتی اندک در مورد نگاشت‌های همدیس عبارت است از

Bieberbach

علاوه بر این، کتاب‌های مهندسی زیادی وجود دارند که به این موضوع پرداخته‌اند، مثلاً

Gibbs

Rothe, Ollendorff, and Polhausen

بحث‌هایی مقدماتی، اما شفاف در مورد نظریه‌ی ریاضی سری و انتگرال‌های فوریه و بسط‌های متعامد را می‌توان در

Churchill

1) Inverstion 2) Lord Kelvin

Hildebrand, Chapter 5

پیدا نمود. یک بحث نسبتاً با سبک و سیاق قدیمی از انتگرال‌ها و سری‌های فوریه، اما با مسائل و مثال‌های متعدد، توسط

Byerly

ارائه شده است. نوشته‌ها در مورد روش‌های عددی وسیع بوده و در حال رشد هستند. یک مرجع راهنمای خوب برای نوشته‌های مناسب عبارت است از

Paul L. De Vries, Resource Letter CP-1: Computational Physics.

Am. J. Phys. **65**, 364-368 (1996)

علاوه بر کتاب‌هایی که در ابتدای بخش ۲-۱۲ قرار داشت، دوتای دیگر عبارتند از

P. Hammond and J. K. Sykulski, Engineering Electromagnetism, Physical Processes and Computation, Oxford University Press, New York (1994).

C. W. Steele, Numerical Computation of Electric and Magnetic Fields, Van Nostrand, New York (1987).

اولین مرجع از این مراجع حاوی یک بحث خلاصه ولی شفاف در مورد FEA در فصل ۷ خود است؛ دومی FEA و موضوعات مربوطه را با عمق بیشتری مورد بحث قرار داده است.

مسائل

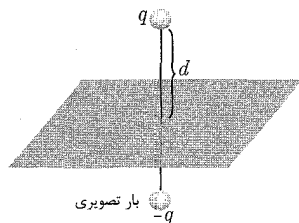
۱-۲ بار نقطه‌ای q را تا نقطه‌ای a به فاصله d از یک صفحه‌ی رسانای تخت بینهایت که در پتانسیل صفر قرار دارد جابه‌جا می‌کنیم. با استفاده از روش تصاویر بیابید

(الف) چگالی بار سطحی القایی را روی صفحه و آن را رسم کنید.

(ب) نیروی بین صفحه و بار را با استفاده از قانون کولن برای نیروی بین بار اصلی و تصویر آن.

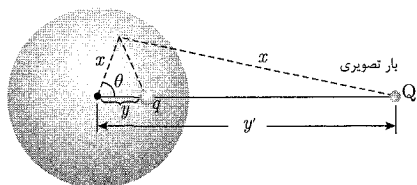
(ج) نیروی کل وارد بر صفحه را با انتگرال‌گیری از $\frac{\sigma^2}{4\epsilon_0}$ بر روی تمام صفحه.

(د) کار لازم را برای دور کردن بار q از مکانش تا بینهایت.



ه) انرژی پتانسیل بین بار q و تصویر آن را (جواب را با قسمت (د) مقایسه و بحث کنید).
 و) جواب را برای قسمت (د) برای یک الکترون که در ابتدا یک آنگستروم از صفحه فاصله دارد برحسب الکترون‌ولت به دست آورید.

۲-۲ با استفاده از روش تصاویر، مسئله‌ی یک بار نقطه‌ای q ، درون یک کره‌ی رسانای توخالی زمین‌شده و با شعاع داخلی a را مورد بحث قرار دهید.



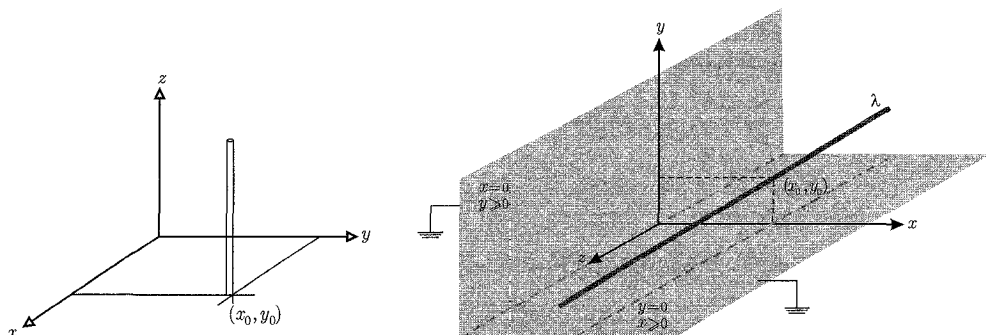
الف) پتانسیل را در داخل کره بیابید.

ب) چگالی بار سطحی القایی را تعیین کنید.

ج) اندازه و جهت نیروی وارد بر بار q را به دست آورید.

د) اگر کره تحت پتانسیل ثابت V قرار گیرد آیا تغییری در جواب مسئله وجود خواهد داشت؟ اگر کره دارای بار کلی Q روی سطوح داخلی و خارجی خود باشد چه؟

۳-۲ یک بار خطی راست با چگالی بار خطی ثابت λ در ربع اول و در نقطه‌ی (x_0, y_0) عمود بر صفحه‌ی $x - y$ قرار گرفته است. صفحات متقاطع $x = 0$ ، $y \geq 0$ و $y = 0$ ، $x \geq 0$ سطوح رسانای مرزی هستند که در پتانسیل صفر داشته شده‌اند. پتانسیل میدان‌ها و چگالی‌های سطحی را در ربع اول در نظر بگیرید.



شکل: تصویر مسئله از زاویه‌های مختلف

الف) پتانسیل به‌خوبی مشخص یک تک بار خطی در (x_0, y_0) عبارت است از

$$\Phi(x, y) = \left(\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \right) \ln \left(\frac{R^2}{r^2} \right)$$

که در آن $r^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2$ و R نیز یک ثابت است.

رابطه‌ای را برای پتانسیل این بار خطی در حضور صفحات متقاطع تعیین کنید. به صراحت اثبات کنید که پتانسیل و میدان الکتریکی مماسی روی سطوح مرزی صفر می‌شوند.

(ب) چگالی بار سطحی σ را روی صفحه‌ی $y = 0$ ، $x \geq 0$ تعیین کنید. $\frac{\sigma}{\lambda}$ را برحسب x برای $(x_0 = 2, y_0 = 1)$ ، $(x_0 = 1, y_0 = 1)$ و $(x_0 = 1, y_0 = 2)$ رسم کنید.

(ج) نشان دهید که بار کل روی صفحه‌ی $y = 0$ ، $x \geq 0$ (بر واحد طول در راستای z) عبارت است از

$$Q_x = -\frac{2}{\pi} \lambda \tan^{-1} \left(\frac{x_0}{y_0} \right)$$

بار کل روی صفحه‌ی $x = 0$ چیست؟

(د) نشان دهید که دور از مبدأ $[\rho_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$ و $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$] که در آن $\rho \gg \rho_0$ جملات مهم در این پتانسیل عبارتند از

$$\Phi \rightarrow \Phi_{\text{asym}} = \frac{4\lambda}{\pi\epsilon_0} \frac{(x_0 y_0)(xy)}{\rho^2}$$

مسئله را تفسیر کنید.

۴-۲ یک بار نقطه‌ای در فاصله‌ی $d > R$ از مرکز یک کره‌ی رسانای عایق‌بندی‌شده به شعاع R (که به اندازه‌ی مساوی با بار نقطه‌ای باردار شده است) قرار دارد.

الف) در چه فاصله‌ای از سطح کره (در داخل آن) بار نقطه‌ای به‌جای این‌که دفع شود توسط کره‌ی باردار جذب خواهد شد؟

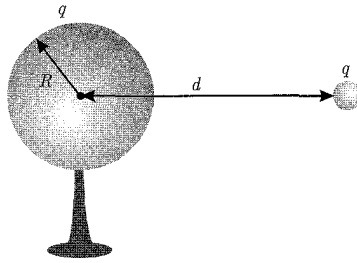
ب) وقتی بار نقطه‌ای در فاصله‌ی $a (= d - R)$ از سطح کره قرار گیرد، در صورتی که $a \ll R$ باشد مقدار حدی نیروی جاذبه چیست؟

ج) اگر بار روی کره دو برابر (نصف) بار نقطه‌ای باشد و بارها هم‌علامت باشند نتایج قسمت‌های الف) و ب) چیست؟

[جواب‌ها: الف) $0,6178$ ، $\frac{d}{R} - 1 = 0$ ، ب) $F = -q^2 / (16\pi\epsilon_0 a^2)$ ، یعنی همان نیروی تصویری،

(ج)

$$\left[\begin{array}{l} \text{برای } Q = 2q \rightarrow \frac{d}{R} - 1 = 0,4276 \\ \text{برای } Q = \frac{q}{2} \rightarrow \frac{d}{R} - 1 = 0,8823 \end{array} \right.$$



۵-۲ الف) نشان دهید که کار انجام شده برای بردن بار q از فاصله a تا بینهایت برخلاف نیروی معادله (۶-۲) از یک کره رسانای زمین شده عبارت است از

$$W = \frac{q^2 a}{4\pi\epsilon_0 (r^2 - a^2)}$$

این نتیجه را به پتانسیل الکتروستاتیک یعنی معادله (۳-۲) و بحث انرژی در بخش ۱۱-۱ ربط دهید.

ب) محاسبه کار انجام شده برای بردن بار q برخلاف نیروی معادله (۹-۲) را برای یک کره رسانای باردار عایق‌بندی شده تکرار کنید. نشان دهید که کار انجام شده عبارت است از

$$W = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q^2 a}{2(r^2 - a^2)} - \frac{q^2 a}{2r^2} - \frac{qQ}{r} \right]$$

این کار را به پتانسیل الکتروستاتیک معادله (۸-۲) و بحث انرژی بخش ۱۱-۱ ربط دهید.

۶-۲ مسئله الکتروستاتیک یک بار نقطه‌ای q در خارج از یک کره رسانای باردار عایق‌بندی شده معادل مسئله سه بار نقطه‌ایست، بار اصلی و دو بار دیگر که یکی از آن‌ها در مرکز کره جای گرفته است و دیگری (بار تصویری) در داخل کره موهومی جدید و روی خط واصل مرکز و بار اصلی. اگر بار نقطه‌ای q و کره با دو کره رسانا با شعاع‌های r_a و r_b و به ترتیب حامل بارهای کل Q_a و Q_b و با مراکز که با فاصله $d > r_a + r_b$ از هم قرار گرفته‌اند، جایگزین شوند، در این صورت یک هم‌ارزی بین این مسئله با یک مجموعه نامتناهی از بارها در داخل هر کره به وجود می‌آید که در آن یکی از بارها در مرکز کره و مجموعه‌ای از بارهای تصویری در امتداد خط واصل بین مراکز کره‌ها قرار می‌گیرند. بارها و مکان‌هایشان را می‌توان به‌طور متوالی با شروع از بار $q_a(1)$ در مرکز کره اول و متناظر با آن $q_b(1)$ در (مرکز) کره دوم تعیین کرد. بار $q_b(1)$ در کره اول دارای تصویر $q_a(2)$ است و بالعکس.

بار تصویری در داخل کره اول بار تصویری دیگری را در داخل کره دوم القا می‌کند و غیره و غیره. مجموع تمام بارها در داخل هر کره باید به میزانی باشد که مساوی Q_a یا Q_b شود. پتانسیل الکتروستاتیک در خارج از کره‌ها، نیروی بین کره‌ها و غیره را می‌توان با جمع سهم مربوط به تمام بارها به‌دست آورد.

الف) نشان دهید که بارها و مکانشان به طور متوالی توسط روابط زیر تعیین می شوند.

$$q_a(j) = -r_a q_b(j-1)/d_a(j-1), \quad x_a(j) = r_a^j/d_b(j-1)$$

$$d_a(j) = d - x_a(j)$$

$$q_b(j) = -r_b q_a(j-1)/d_a(j-1), \quad x_b(j) = r_b^j/d_a(j-1)$$

$$d_b(j) = d - x_b(j)$$

به ازای $j = 2, 3, 4, \dots$ همراه با؛ $d_a(1) = d_b(1) = d$ و $x_a(1) = x_b(1) = 0$

ب) بارهای تصویری و مکانشان و نیز پتانسیل روی کره‌ها و نیروی بین آن‌ها را به کمک یک برنامه‌ی کامپیوتری مناسب بیابید. [در هنگام محاسبه‌ی پتانسیل، آن را در مکان‌های مختلف روی هر کره تعیین کنید؛ مثلاً در صفحه‌ی استوا و در قطب مخالف کره‌ی دیگر. این کار امکان بررسی سطوح هم‌پتانسیل یک رسانا و نیز دقت در محاسبه را فراهم می‌کند].

ج) به عنوان مثال، برای دو کره با شعاع یکسان R که به طور مساوی باردار شده‌اند نشان دهید که نیروی بین آن‌ها وقتی تقریباً در تماس با یکدیگر هستند، 0.6189 برابر مقدار این نیرو در حالتی است که تمام بار روی هر کره و در مرکز آن متمرکز می‌شود. به صورت عددی و به وضوح با جمع به روش سری نشان دهید که ظرفیت دو کره‌ی رسانای مشابه که در تماس با یکدیگرند عبارت است از

$$\frac{C}{4\pi\epsilon_0 R} = 1.3863 \dots [= \ln 4]$$

J.A.Soules, Am.J.Phys 58, 1195 (1990)

مرجع:

۷-۲ یک مسئله پتانسیلی در نیم فضای تعریف شده توسط $z \geq 0$ ، همراه با شرایط مرزی دیریکله روی صفحه‌ی $z = 0$ (و در بینهایت) در نظر بگیرید.

الف) تابع گرین مناسب $G(x, x')$ را بنویسید.

ب) اگر پتانسیل روی صفحه‌ی $z = 0$ ، و درون دایره‌ای به شعاع a و به مرکزیت مبدأ به صورت $\Phi = V$ و در بیرون از دایره به صورت $\Phi = 0$ مشخص شده باشد، یک رابطه‌ی انتگرالی برای پتانسیل در نقطه‌ی P ، بر حسب مختصات استوانه‌ای (ρ, ϕ, z) ، بیابید.

ج) نشان دهید که در امتداد محور دایره، $(\rho = 0)$ ، پتانسیل با رابطه‌ی زیر مشخص می‌شود

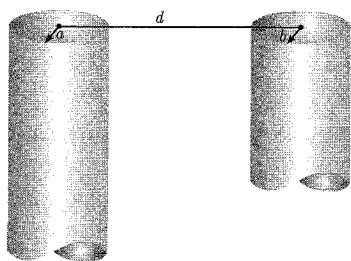
$$\Phi = V \left(1 - \frac{z}{\sqrt{a^2 + z^2}} \right)$$

(د) نشان دهید که در فواصل دور ($\rho^2 + z^2 \geq a^2$) پتانسیل را می‌توانیم به صورت یک سری توانی از $(\rho^2 + z^2)^{-1}$ بسط دهیم. هم‌چنین نشان دهید که جملات عمده‌ی این بسط عبارتند از

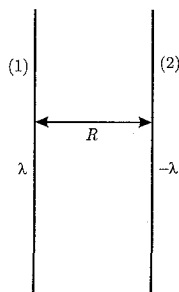
$$\Phi = \frac{Va^2}{2} \frac{z}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}} \left[1 - \frac{3a^2}{4(\rho^2 + z^2)} + \frac{5(3\rho^2 a^2 + a^4)}{8(\rho^2 + z^2)^2} + \dots \right]$$

اثبات کنید که نتایج قسمت‌های c و d در ناحیه‌ی مشترک اعتبارشان با هم هماهنگی دارند.

۸-۲ یک مسئله‌ی پتانسیلی دوبعدی با دو بار خطی موازی راست با چگالی‌های بار خطی مساوی و مخالف λ و $-\lambda$ داریم که در فاصله‌ی R از هم قرار گرفته‌اند.



(ب)



(الف)

(الف) با اثبات مستقیم نشان دهید که سطح پتانسیل ثابت V ، یک استوانه‌ی دایروی است (دایره در ابعاد عرضی) و مختصات محور این استوانه و شعاع آن را برحسب R ، λ و V بیابید.

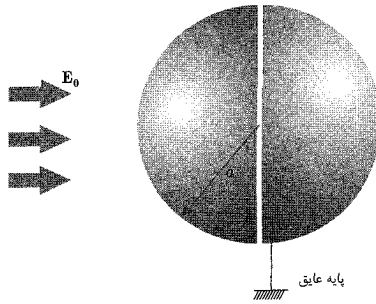
(ب) نتایج قسمت (الف) را برای نشان دادن این‌که ظرفیت (C) بر واحد طول برای دو رسانای استوانه‌ای دایروی راست با شعاع‌های a و b که در فاصله‌ی $d > a + b$ از هم قرار گرفته‌اند عبارت است از

$$C = \frac{2\pi\epsilon_0}{\cosh^{-1}\left(\frac{d^2 - a^2 - b^2}{2ab}\right)}$$

(ج) اثبات کنید که نتیجه‌ی به‌دست آمده برای ظرفیت C با جواب مسئله‌ی ۷-۱ در حد مقتضی هماهنگ است و تصحیح مرتبه‌ی غیرصفر بعدی را برحسب توان‌های $\frac{a}{d}$ و $\frac{b}{d}$ تعیین کنید.

(د) محاسبه‌ی ظرفیت بر واحد طول برای دو استوانه‌ی درون هم را تکرار کنید ($d < |b - a|$). نتیجه را برای استوانه‌های هم‌مرکز نیز بررسی کنید. ($d = 0$)

۹-۲ یک پوسته‌ی رسانای کروی عایق‌بندی‌شده با شعاع a در یک میدان الکتریکی یکنواخت \mathbf{E} قرار دارد. اگر این پوسته‌ی کروی توسط صفحه‌ای عمود بر میدان به دو نیم شود، نیرویی را که برای جلوگیری از جدایی نیم‌کره‌ها لازم است در حالت‌های زیر بیابید.



الف) اگر پوسته بدون بار باشد.

ب) اگر بار کل روی پوسته Q باشد.

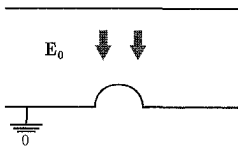
۲-۱۰ خازنی با صفحات بزرگ و موازی از دو ورقه‌ی رسانای تخت با فاصله‌ی D از هم ساخته شده است که یکی از صفحات دارای یک قوزک نیم کروی کوچک به شعاع a روی سطح داخلی خود است ($D \gg a$). رسانای دارای قوزک در پتانسیل صفر نگه داشته شده است و رسانای دیگر تحت پتانسیلی دیگر به‌گونه‌ای قرار دارد که دور از قوزک، میدان الکتریکی بین صفحات E_0 باشد.

الف) چگالی‌های بار سطحی را در یک نقطه‌ی اختیاری روی صفحه و روی قوزک محاسبه کرده و رفتار آن‌ها را به‌صورت تابعی از فاصله (یا زاویه) رسم کنید.

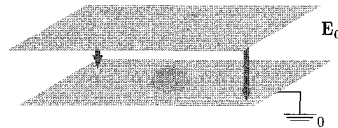
ب) نشان دهید که مقدار کل بار روی قوزک $3\pi\epsilon_0 E_0 a^2$ است.

ج) اگر به‌جای ورقه‌ی رسانای دیگر که در پتانسیل ثابت قرار دارد یک بار نقطه‌ای q مستقیماً بالای قوزک و در فاصله‌ی d از مرکز آن قرارگیرد، نشان دهید که بار القایی روی قوزک عبارت است از:

$$q' = -q \left[1 - \frac{d^2 - a^2}{d\sqrt{d^2 + a^2}} \right]$$



ب): حالت دوبعدی مسئله



الف): تصویر سه‌بعدی

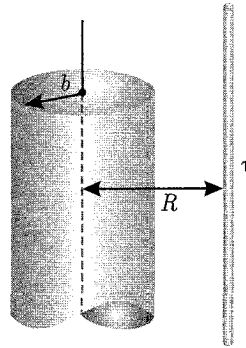
۲-۱۱ یک بار خطی با چگالی بار τ ، به موازات محور یک استوانه‌ی رسانا به شعاع b و در فاصله‌ی R از آن محور قرار گرفته است. پتانسیل رسانای استوانه‌ای ثابت است و پتانسیل در بینهایت هم صفر می‌شود.

الف) مکان و اندازه‌ی بار (یا بارهای) تصویری را بیابید.

ب) پتانسیل را در هر نقطه پیدا کنید طوری که شکل مجانبی آن در فواصل دور از استوانه را نیز شامل شود (این کار را در مختصات قطبی انجام دهید طوری که مبدأ مختصات روی محور استوانه باشد و جهت مثلاً محور x آن، از مبدأ به بار خطی باشد).

ج) چگالی بار سطحی القایی را تعیین و آن را به صورت تابعی از زاویه برحسب واحدهای $\frac{\tau}{2\pi b}$ (برای $\frac{R}{b} = 2, 4$) رسم کنید.

د) نیروی وارد بر بار خطی را به دست آورید.



۱۲-۲ با شروع از حل سری (۱۷-۲) برای مسئله پتانسیلی دوبعدی با پتانسیل مشخص روی سطح استوانه‌ای به شعاع b ، ضرایب را به صورت رسمی تعیین و آن‌ها را در سری فوق جایگزین کنید. سپس برای به دست آوردن پتانسیل در داخل استوانه، به صورت انتگرال پواسن

$$\Phi(\rho, \phi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Phi(b, \phi') \frac{b^2 - \rho^2}{b^2 + \rho^2 - 2b\rho \cos(\phi' - \phi)} d\phi'$$

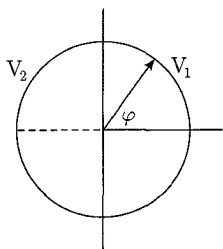
آن را جمع بزنید.

اگر پتانسیل در ناحیه‌ی فضایی محدود به استوانه و بینهایت، مطلوب باشد چه اصلاحاتی لازم می‌شود. ۱۳-۲ الف) دو نیمه‌ی یک استوانه رسانای توخالی بلند با شعاع داخلی b با یک شکاف طولی باریک از هم جدا شده و در پتانسیل‌های متفاوت V_1 و V_2 نگه داشته شده‌اند. نشان دهید که پتانسیل در داخل استوانه با رابطه‌ی زیر مشخص می‌شود

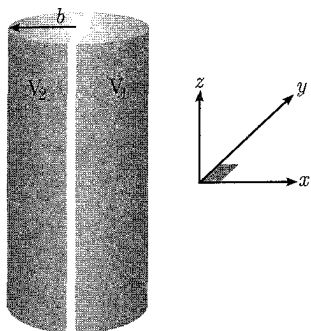
$$\Phi(\rho, \phi) = \frac{V_1 + V_2}{2} + \frac{V_1 - V_2}{\pi} \tan^{-1} \left(\frac{2b\rho}{b^2 - \rho^2} \cos \phi \right)$$

که در آن ϕ نسبت به صفحه‌ی عمود بر صفحه‌ای که از شکاف می‌گذرد اندازه گرفته می‌شود.

ب) چگالی بار سطحی روی هر نیمه‌ی استوانه را محاسبه کنید.



شکل (ب): دوبعدی



شکل (الف): سه بعدی

۱۴-۲ شکل دیگری از مسئله‌ی پتانسیلی دوبعدی قبل، مسئله‌ی یک استوانه‌ی رسانای توخالی بلند به شعاع b است که به چهار قسمت تقسیم‌بندی شده است و قطعات به صورت یک درمیان در پتانسیل‌های $+V$ و $-V$ نگه داشته شده‌اند.

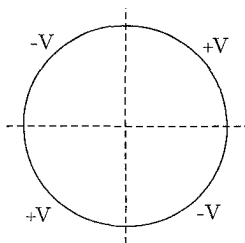
الف) با استفاده از روش سری (۲-۷۱) مسئله را حل و نشان دهید که پتانسیل در داخل استوانه عبارت است از

$$\Phi(\rho, \phi) = \frac{4V}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\rho}{b}\right)^{2n+2} \frac{\sin[(2n+2)\phi]}{2n+2}$$

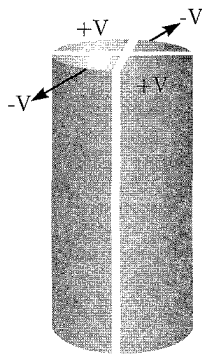
ب) سری را جمع بسته و نشان دهید که

$$\Phi(\rho, \phi) = \frac{2V}{\pi} \tan^{-1} \left(\frac{2\rho^2 b^2 \sin 2\phi}{b^4 - \rho^4} \right)$$

ج) خطوط میدان و هم‌پنین سطوح هم‌پتانسیل (هم‌پتانسیل‌ها) را رسم کنید.



شکل (ب): دوبعدی



شکل (الف): سه بعدی

۱۵-۲ الف) نشان دهید که تابع گرین مناسب برای شرایط مرزی دیریکله، برای ناحیهی مربعی دوبعدی $0 \leq x \leq 1$ و $0 \leq y \leq 1$ دارای بسطی به شکل زیر است

$$G(x, y; x', y') = 2 \sum_{n=1}^{\infty} g_n(y, y') \sin(n\pi x) \sin(n\pi x')$$

که در آن $g_n(y, y')$ رابطه‌ی زیر را برآورده می‌کند

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial y'^2} - n^2 \pi^2 \right) g_n(y, y') = -4\pi \delta(y' - y) \quad , \quad g_n(y, 0) = g_n(y, 1) = 0$$

ب) با در نظر گرفتن ترکیب‌های خطی مناسب برای $g_n(y, y')$ توسط $\sinh(n\pi y')$ و $\cosh(n\pi y')$ در دو ناحیهی $y' < y$ و $y' > y$ ، مطابق با شرایط مرزی و انفعال لازم در شیب توسط چشمه‌ی تابع دلتا نشان دهید که شکل صریح G عبارت است از

$$G(x, y; x', y') = 8 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \sinh(n\pi)} \sin(n\pi x) \sin(n\pi x') \\ \times \sinh(n\pi y_{<}) \sinh[n\pi(1 - y_{>})]$$

که در آن $y_{<}$ ($y_{>}$) مقدار کوچک‌تر (بزرگ‌تر) y و y' است.

۱۶-۲ یک پتانسیل دوبعدی، روی یک سطح مربعی واحد ($0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$) داریم که با "سطوحی" که در پتانسیل صفر قرار دارند محدود شده است. روی کل مربع، یک چگالی باریک‌نواخت (بر واحد طول در جهت z) با قدرت^۱ واحد وجود دارد. با استفاده از تابع گرین مسئله‌ی (۱۵-۲) نشان دهید که می‌توان جواب را به صورت زیر نوشت

$$\Phi(x, y) = \frac{4}{\pi^2 \epsilon_0} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\sin[(2m+1)\pi x]}{(2m+1)^2} \left\{ 1 - \frac{\cosh[(2m+1)\pi \left(y - \frac{1}{2}\right)]}{\cosh \left[(2m+1) \frac{\pi}{2} \right]} \right\}$$

۱۷-۲ الف) تابع گرین فضای آزاد $G(x, y; x', y')$ را برای الکتروستاتیک دوبعدی، با انتگرال‌گیری از $\frac{1}{R}$ نسبت به $(z' - z)$ بین حدود $\pm Z$ بنا کنید که در آن Z بسیار بزرگ در نظر گرفته می‌شود. نشان دهید که جدا از یک ثابت غیرضروری، تابع گرین را می‌توان به گونه‌ای دیگر به صورت زیر نوشت

$$G(x, y; x', y') = -\ln[(x - x')^2 + (y - y')^2] = -\ln[\rho^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho' \cos(\phi - \phi')]$$

1) strength

(ب) با جداسازی متغیرها در مختصات قطبی، به طور صریح نشان دهید که تابع گرین رامی توان در مختصات سمتی بر حسب سری فوریه به صورت زیر بیان کرد

$$G = \frac{1}{2\pi} \sum_{-\infty}^{\infty} e^{im(\phi - \phi')} g_m(\rho, \rho')$$

که در آن توابع گرین شعاعی رابطه‌ی زیر را برآورده می‌کنند

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho'} \left(\rho' \frac{\partial g_m}{\partial \rho'} \right) - \frac{m^2}{\rho'^2} g_m = -4\pi \frac{\delta(\rho - \rho')}{\rho}$$

دقت کنید که $g_m(\rho, \rho')$ برای مقدار ثابت ρ ، ترکیب خطی متفاوتی از جواب‌های معادله‌ی شعاعی همگن (۲-۶۸) برای $\rho' < \rho$ و برای $\rho' > \rho$ است؛ همراه با یک انفصال شیب در $\rho' = \rho$ که با چشمه‌ی تابع دلتا تعیین می‌شود.

(ج) جواب را کامل کنید و نشان دهید که تابع گرین فضای آزاد دارای بسط زیر است

$$G(\rho, \phi; \rho', \phi') = -\ln(\rho_{>}^2) + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \left(\frac{\rho_{<}}{\rho_{>}} \right)^m \times \cos[m(\phi - \phi')]$$

که در آن $\rho_{<} < \rho_{>}$ مقدار کوچک‌تر (بزرگ‌تر) ρ' و ρ است.

۲-۱۸ (الف) با یافتن جواب‌های مناسب برای معادله‌ی شعاعی قسمت (ب) از مسئله‌ی ۲-۱۷، تابع گرین را برای مسئله‌ی داخلی دیریکله، برای یک استوانه با شعاع a ($g_m(\rho, \rho' = a) = 0$) (۱-۴۰) را بیابید. ابتدا بسط سری منسوب به تابع گرین فضای آزاد مسئله‌ی (۲-۱۷) را بیابید. پس از آن نشان دهید که می‌توانیم آن را به صورت بسته‌ی زیر بنویسیم

$$G = \ln \left[\frac{\rho^2 \rho'^2 + b^4 - 2\rho\rho'b^2 \cos(\phi - \phi')}{b^2(\rho^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho' \cos(\phi - \phi'))} \right]$$

یا

$$G = \ln \left[\frac{(b^2 - \rho^2)(b^2 - \rho'^2) + b^2|\rho - \rho'|^2}{b^2|\rho - \rho'|^2} \right]$$

(ب) نشان دهید که جواب معادله‌ی لاپلاس با پتانسیل داده شده به صورت $\Phi(b, \phi)$ روی استوانه را می‌توان به صورت انتگرال پواسن مسئله ۲-۱۲ بیان نمود.

(ج) چه تغییراتی برای تابع گرین مسئله‌ی خارجی ($b < \rho < \infty$)، هم برای بسط فوریه و هم برای صورت بسته‌ی بالا، لازم داریم؟ [دقت کنید که عبارت تابع گرین خارجی به طور دقیق صحیح

نیست چرا که به ازای ρ یا $\rho' \rightarrow \infty$ این تابع صفر نمی شود. در وضعیت هایی که در آن پتانسیل به اندازه ی کافی سریع (به صورت $\rho \rightarrow \infty$) افت می کند، هیچ اشتباهی در استفاده از آن صورت نخواهد گرفت.

۱۹-۲ نشان دهید که تابع گرین دوبعدی برای شرایط مرزی دیریکله برای ناحیه ی مدور، $b \leq \rho \leq c$ (استوانه های هم مرکز) دارای بسطی به صورت زیر است

$$G = \frac{\ln\left(\frac{\rho_{<}^2}{b^2}\right) \ln\left(\frac{c^2}{\rho_{>}^2}\right)}{\ln\left(\frac{c^2}{b^2}\right)} + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos[m(\phi - \phi')]}{m \left[1 - \left(\frac{b}{c}\right)^{2m}\right]} \left(\rho_{<}^m - \frac{b^{2m}}{\rho_{<}^m}\right) \left(\frac{1}{\rho_{>}^m} - \frac{\rho_{>}^m}{c^{2m}}\right)$$

۲۰-۲ میدان های مرکزی چهار قطبی* الکتریکی دوبعدی برای شتاب دهنده های ذرات را می توان مجموعه ای از چهار بار خطی با چگالی های $\pm \lambda$ که به طور متقارن قرار گرفته باشند مدل سازی کرد. همان گونه که در شکل سمت چپ زیر نشان داده شده است (شکل سمت راست خطوط میدان الکتریکی را نشان می دهد) چگالی بار در دو بعد را می توان به صورت زیر بیان کرد

$$\sigma(\rho, \phi) = \frac{\lambda}{a} \sum_{n=0}^2 (-1)^n \delta(\rho - a) \delta\left(\phi - \frac{n\pi}{2}\right)$$

الف) با استفاده از بسط تابع گرین مسئله (۱۷-۲) نشان دهید که پتانسیل الکتروستاتیک عبارت است از

$$\Phi(\rho, \phi) = \frac{\lambda}{\pi \epsilon_0} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)} \left(\frac{\rho_{<}}{\rho_{>}}\right)^{2k+2} \cos[(2k+2)\phi]$$

ب) جواب قسمت الف) را به بخش حقیقی تابع مختلط زیر ربط دهید

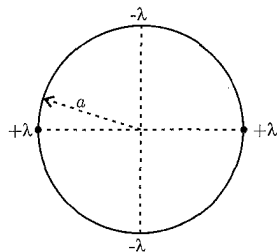
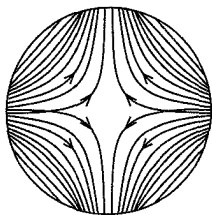
$$W(z) = \frac{2\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln \left[\frac{(z - ia)(z + ia)}{(z - a)(z + a)} \right]$$

$$z = x + iy = \rho e^{i\phi}$$

نظرتان را در مورد ارتباط این مسئله با مسئله ۳-۲ مطرح کنید.

ج) برای مؤلفه های دکارتی میدان الکتریکی در نزدیکی مبدأ روابطی را بیابید که بر حسب x و y بیان شده باشند. جملات $k=0$ و $k=1$ را در این بسط نگه دارید. برای $y=0$ ، اندازه ی نسبی سهم $k=1$ (قطب) در مقایسه با سهم جمله ی $k=0$ برای E_x (قطب یا چهار قطبی) چیست؟

*) quadrupole focusing "g" fields



۲۱-۲ از قضیه‌ی کوشی برای به دست آوردن جواب انتگرالی پواسن کمک بگیرید. قضیه‌ی کوشی بیان می‌کند که اگر $F(z)$ در یک ناحیه‌ی کراندار R که با یک منحنی بسته محدود شده است تحلیلی باشد در این صورت داریم

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_c \frac{F(z') dz'}{z' - z} = \begin{cases} F(z) & \text{داخل باشد} \\ 0 & \text{خارج باشد} \end{cases} \quad \text{اگر } z$$

توجه: ممکن است بخواهید انتگرالی را به انتگرال نقطه‌ی داخل دایره اضافه کنید که صفر می‌شود (وابسته به نقطه‌ی تصویر).

۲۲-۲ (الف) برای مثال لایه‌های نیم‌کره‌ای رسانا که به طور مخالف باردار شده‌اند (همانند شکل ۸-۲) نشان دهید که پتانسیل داخلی ($r < a$) روی محور z عبارت است از

$$\Phi_{\text{in}}(z) = V \frac{a}{z} \left[1 - \frac{(a^2 - z^2)}{a\sqrt{a^2 + z^2}} \right]$$

چند جمله‌ی اول بسط را برحسب توان‌های z به دست آورده و نشان دهید که آن چند جمله با جایگزینی‌های مناسب با (۲۷-۲) هماهنگ است.

(ب) از نتیجه‌ی قسمت (الف) و رابطه‌ی (۲۲-۲) نشان دهید که میدان الکتریکی شعاعی روی محور z مثبت برای $z > a$ عبارت است از

$$E_r(z) = \frac{Va^2}{(z^2 + a^2)^{3/2}} \left(3 + \frac{a^2}{z^2} \right)$$

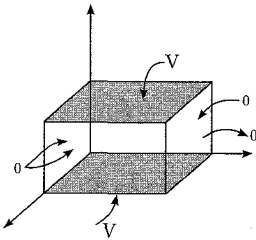
و برای $|z| < a$

$$E_r(z) = -\frac{V}{a} \left[\frac{3 + \left(\frac{a}{z}\right)^2}{\left(1 + \left(\frac{z}{a}\right)^2\right)^{3/2}} - \frac{a^2}{z^2} \right]$$

نشان دهید که رابطه‌ی دوم با مقدار، $E_r(\phi) = \frac{-3V}{2a}$ در مبدأً خوش رفتار است. نشان دهید که در $z = a$ (قطب شمال داخلی) دارای مقدار $\frac{V}{a}(\sqrt{2} - 1)$ است. نشان دهید که میدان شعاعی در قطب شمال خارجی دارای مقدار $\frac{V}{a}\sqrt{2}$ است.

(ج) خطوط میدان الکتریکی را با جهت مشخص هم برای نیم‌کره‌های رسانای داخلی و هم برای نیم‌کره‌های رسانای خارجی رسم کنید. طرحی از میدان الکتریکی شعاعی در امتداد محور z ، از $z = -2a$ تا $z = 2a$ تهیه کنید.

۲-۲۳ یک مکعب توخالی دارای دیواره‌های رسانایی است که با شش صفحه‌ی $x = 0, y = 0, z = 0, x = a, y = a, z = a$ تعریف شده است. دیواره‌های $z = 0$ و $z = a$ در پتانسیل ثابت V نگه داشته شده‌اند. چهار سطح دیگر در پتانسیل صفرند.



الف) پتانسیل $\Phi(x, y, z)$ را در هر نقطه در داخل مکعب بیابید.

ب) درست تا سه رقم با معنی پتانسیل را در مرکز مکعب به‌طور عددی تعیین کنید. به‌منظور رسیدن به این مرتبه از دقت، نگه داشتن چند جمله در این سری ضروری است؟ نتیجه‌ی عددی خود را با مقدار میانگین پتانسیل روی دیواره‌ها مقایسه کنید. مسئله ۲-۲۸ را ملاحظه کنید.

۲-۲۴ در ناحیه‌ی دوبعدی شکل ۲-۱۲، توابع زاویه‌ای مناسب برای شرایط مرزی دیریکله در $\phi = 0$ و $\phi = \beta$ عبارتند از

$$\Phi(\phi) = A_m \sin\left(\frac{m\pi\phi}{\beta}\right)$$

نشان دهید که رابطه‌ی تمامیت^۱ برای این توابع عبارت است از

$$\delta(\phi - \phi') = \frac{2}{\beta} \sum_{m=1}^{\infty} \sin\left(\frac{m\pi\phi}{\beta}\right) \sin\left(\frac{m\pi\phi'}{\beta}\right) \quad \text{برای } \phi < \beta, \phi' < \beta$$

۲-۲۵ دو صفحه‌ی رسانا در پتانسیل صفر، همانند شکل ۲-۱۲ با ساختن زاویه‌ی β بین خود یکدیگر را در امتداد محور z قطع می‌کنند. یک بار خطی واحد به موازات محور z بین صفحات در مکان (ρ', ϕ') قرار گرفته است.

1) Completeness relation

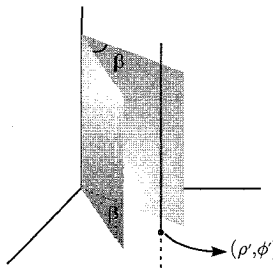
الف) نشان دهید که حاصل ضرب پتانسیل در $4\pi\epsilon_0$ در فضای بین صفحات، یعنی تابع گرین دیریکله $G(\rho, \phi; \rho', \phi')$ توسط سری نامتناهی زیر مشخص می‌شود

$$G(\rho, \phi; \rho', \phi') = 4 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \rho^{<} \frac{m\pi}{\beta} \rho^{>} \frac{-m\pi}{\beta} \sin\left(\frac{m\pi\phi}{\beta}\right) \sin\left(\frac{m\pi\phi'}{\beta}\right)$$

ب) توسط روش‌های متغیر مختلط یا روش‌های دیگر نشان دهید که می‌توان سری را برای به دست آوردن شکل بسته‌ی زیر جمع بست

$$G(\rho, \phi; \rho', \phi') = \ln \left\{ \frac{(\rho)^{\frac{\gamma\pi}{\beta}} + (\rho')^{\frac{\gamma\pi}{\beta}} - 2(\rho\rho')^{\frac{\pi}{\beta}} \cos\left[\pi\frac{(\phi + \phi')}{\beta}\right]}{(\rho)^{\frac{\gamma\pi}{\beta}} + (\rho')^{\frac{\gamma\pi}{\beta}} - 2(\rho\rho')^{\frac{\pi}{\beta}} \cos\left[\pi\frac{(\phi - \phi')}{\beta}\right]} \right\}$$

ج) اثبات کنید وقتی $\beta = \pi$ و $\beta = \frac{\pi}{4}$ است نتایج به دست آمده آشنا هستند.



۲۶-۲ همان طوری که در تصویر نشان داده شده است ناحیه‌ی دو بعدی $\rho \geq a, 0 \leq \phi \leq \beta$ با سطوحی رسانا در $\phi = \beta$ و $\rho = a, \phi = 0$ که در پتانسیل صفرند محدود شده است. پتانسیل با آرایشی از بارها و رساناهایی که تحت پتانسیل‌های ثابتی قرار دارند تعیین می‌شود.

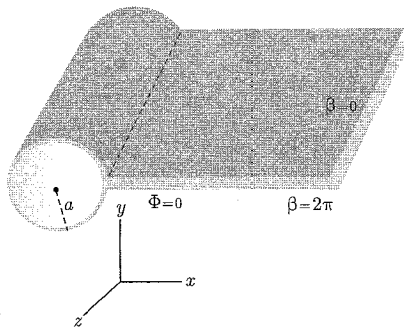
الف) جوابی برای پتانسیل $\Phi(\rho, \phi)$ بنویسید که شرایط مرزی برای مقادیر محدود ρ را برآورده کند.

ب) با حفظ تنها پایین‌ترین جملات غیرصفر، مؤلفه‌های E_ϕ و E_ρ میدان الکتریکی و نیز چگالی‌های بار سطحی $\sigma(\rho, \beta)$ ، $\sigma(\rho, 0)$ و $\sigma(a, \phi)$ روی سه سطح مرزی را محاسبه کنید.

ج) با در نظر گرفتن $\beta = \pi$ (یک رسانای تخت همراه با یک نیم استوانه با شعاع a بر روی آن) نشان دهید که دور از نیم استوانه، جملات با پایین‌ترین مرتبه‌ی بسط در قسمت (ب)، یک میدان الکتریکی یکنواخت عمود بر صفحه را ارائه می‌دهند. چگالی بار را روی نیم استوانه و در همسایگی آن رسم کنید. برای داشتن قدرت میدان الکتریکی ثابت در فواصل دور از صفحه

نشان دهید که کل بار روی نیم استوانه (در واقع بار در واحد طول در جهت z) دو برابر بزرگی باری است که در صورت عدم حضور نیم استوانه روی یک نوار به پهنای $2a$ قرار می‌داشت.

۲۷-۲ ناحیه‌ی گوه‌ای شکل دوبعدی مسئله‌ی (۲۶-۲) را با $\beta = 2\pi$ در نظر بگیرید. این مسئله متناظر است با یک ورقه‌ی نازک رسانای نیمه بینهایت روی محور x مثبت از $x = a$ تا بینهایت، همراه با یک استوانه‌ی رسانا به شعاع a که به لبه‌ی تیز آن بسته شده است.



الف) با استفاده از حل پایین‌ترین مرتبه، چگالی‌های بار سطحی را روی استوانه و روی قسمت بالا و پایین ورقه رسم کنید.

ب) بار کل روی استوانه را محاسبه کرده و آن را با عدم وجود کلی بار روی ورقه‌ی نزدیک استوانه مقایسه کنید. (به عبارتی تفاوت کلی در بار برای مقدار محدود a در مقایسه با $a = \infty$ ، با فرض این‌که چگالی بار دور از استوانه یکسان باشد).

۲۸-۲ یک حجم بسته با سطوح رسانایی که n وجه یک کثیرالوجه منتظم را تشکیل می‌دهند محصور شده است ($n = 4, 6, 8, 12, 20$). n سطح فوق در پتانسیل‌های V_i ، $i = 1, 2, \dots, n$ قرار گرفته‌اند. با ساده‌ترین روش ثابت کنید که می‌توان پتانسیل در مرکز این کثیرالوجه را میانگین پتانسیل روی n وجه در نظر گرفت. این مسئله با مسئله‌ی ۲-۲۳ ب ارتباط دارد و حاوی تشابه جالبی با نتیجه‌ی مسئله‌ی ۱-۱۰ است. ۲۹-۲ با روش گالرکین^۱ برای یک شبکه‌ی مربعی دوبعدی با فضای بین شبکه‌ای h ، روابط (۲-۸۱) را برای توابع پایه "هرمی" جایگزیده‌ی

$$\phi_{ij}(x, y) = \left(1 - \frac{|x|}{h}\right) \left(1 - \frac{|y|}{h}\right) \quad \& \quad [|x| < h, |y| < h]$$

که در آن x و y از مکان (i, j) اندازه‌گیری شده‌اند. اثبات کنید که به‌ویژه

$$\int dx \int dy \phi_{i,j}(x, y) = h^2 \quad ; \quad \int dx \int dy \nabla \phi_{i,j} \cdot \nabla \phi_{i,j} = \frac{\hat{\Delta}}{3}$$

1) Galerkin

$$\int dx \int dy \nabla \phi_{i+1,j} \cdot \nabla \phi_{i,j} = -\frac{1}{3} \quad ; \quad \int dx \int dy \nabla \phi_{i,j+1} \cdot \nabla \phi_{i,j} = -\frac{1}{3}$$

$$\int dx \int dy \nabla \phi_{i+1,j+1} \cdot \nabla \phi_{i,j} = -\frac{1}{3}$$

۳۰-۲ با استفاده از نتایج مسئله‌ی ۲-۲۹، روش گالرکین را برای معادل انتگرالی معادله‌ی پواسن با پتانسیل صفر روی مرز [که برای شبکه‌ی مسئله ۱-۲۴ در زیر داده شده است]، همراه با سه مکان شبکه‌ای مستقل که در زیر آمده است به‌کار بگیرید

$$\int_V dx dy [\nabla \phi_{i,j} \cdot \nabla \psi - 4\pi\rho\phi_{i,j}] = 0 \quad \text{با} \quad \psi(x, y) = \sum_{i',j'=1}^N \psi_{i',j'} \phi_{i',j'}(x, y)$$

نشان دهید که با این کار سه معادله‌ی جفت شده برای مقادیر $\psi_{i,j}$ (ψ_1, ψ_2, ψ_3) به‌دست می‌آورد و این معادلات را برای یافتن تقریب‌های گالرکین برای پتانسیل در این مکان‌ها حل کنید. این مقادیر را با مقادیر دقیق و نتایج حاصل از تکرارهای مختلف در مسئله‌ی ۱-۲۴ ج مقایسه کنید.

پیوست فصل ۲

در این ضمیمه فرض شده است با آن دسته از دانشجویان تحصیلات تکمیلی روبرو هستیم که درس ریاضی فیزیک (مثلاً جورج آرفکن) را به خوبی فرا گرفته‌اند، لذا بعضی از فرمول‌ها از این جهت بدیهی فرض شده‌اند (دانشجویان می‌توانند به راحتی آن‌ها را قبول یا اثبات نمایند). بنابراین فرمول‌هایی که از پیچیدگی خاصی برخوردارند یا حل آن‌ها حوصله‌ی بسیار زیادی می‌طلبد، و همچنین نکاتی که معمولاً در کلاس‌های درس الکتروپدینامیک (به هر علت) از آن می‌گذرند، اثبات شده است (به خصوص در ضمیمه‌ی پیوست فصول ۲ و ۳ در آخر این کتاب). با پیوست‌های ارائه شده در این کتاب که در واقع مشکل اساسی الکتروپدینامیک ۱ است (۶ فصل اول) دانشجویان پیشرفته‌ی دوره‌ی لیسانس نیز می‌توانند (چه به عنوان کتابی پیشرفته‌تر از میلفورد و چه برای درس ریاضی فیزیک ۳) از این کتاب استفاده کنند.

۲-۲ بار نقطه‌ای در حضور یک کره‌ی رسانای متصل به زمین

در تصویر صفحه‌ی بعد فاصله‌ی بار q' تا نقطه‌ی o ، دارای مقدار y' است. طبق تعریف، پتانسیل ناشی از بار q ، و تصویر آن یعنی بار q' در نقطه‌ی P (در شکل) با مختصه‌ی برداری \mathbf{x} ، عبارت است از

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{q}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} + \frac{q'}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}'|} \right\} \quad (1-2)$$

کلاً در سیستم MKS پتانسیل ناشی از بار q در نقطه‌ی \mathbf{x} عبارت است از

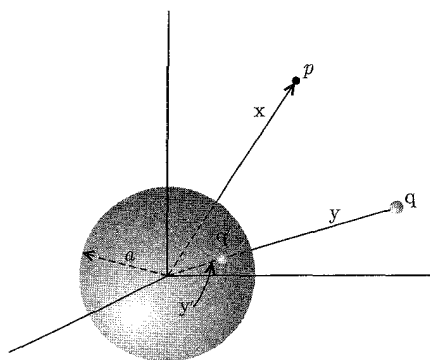
$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{x}|}$$

اگر بردار یکانی \mathbf{n} در جهت \mathbf{x} (در شکل ۲-۲) و بردار یکانی \mathbf{n}' در جهت \mathbf{y} باشند به راحتی داریم

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{q}{|\mathbf{x}\mathbf{n} - \mathbf{y}\mathbf{n}'|} + \frac{q'}{|\mathbf{x}\mathbf{n} - \mathbf{y}'\mathbf{n}'|} \right\} \quad (2-2)$$

از x (که روی سطح کره مقدارش a است) در جمله‌ی اول (درون آکولاد) و از y' در جمله‌ی دوم فاکتورگیری می‌کنیم. از شرط مرزی $\Phi(|\mathbf{x}| = a) = 0$ استفاده کرده [چراکه کره به زمین وصل شده و پتانسیل آن صفر است] و به رابطه زیر می‌رسیم

$$\Phi(x = a) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{q}{a \left| \mathbf{n} - \frac{\mathbf{y}}{a} \mathbf{n}' \right|} + \frac{q'}{y \left| \mathbf{n}' - \frac{a}{y'} \mathbf{n} \right|} \right\} = 0 \quad (3-2)$$



شکل ۱-۲: کره‌ای رسانا با شعاع a ، با بار q و بار تصویری q' .

جای دو جمله در عبارت دوم در مخرج فرمول قبل عوض شده است چراکه

$$|z - y| = |y - z|$$

رابطه‌ی (۳-۲) وقتی برقرار است که داشته باشیم: (با مقایسه)

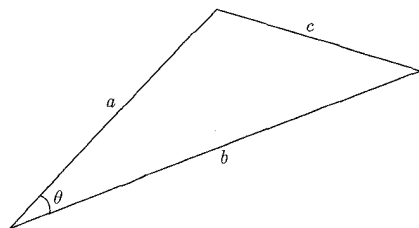
$$\frac{q}{a \left| \mathbf{n} - \frac{y}{a} \mathbf{n}' \right|} + \frac{q'}{y' \left| \mathbf{n}' - \frac{a}{y'} \mathbf{n} \right|} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \frac{q}{a} = -\frac{q'}{y'} \\ \frac{y}{a} = \frac{a}{y'} \end{cases}$$

یا

$$q' = -\frac{y'}{a} q, \quad y' = \frac{a^2}{y} \quad (۴-۲)$$

اگر زاویه‌ی بین \mathbf{n} و \mathbf{n}' را γ بنامیم (شکل زیر را ملاحظه کنید) طبق رابطه کسینوس‌ها در یک مثلث:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta$$



لذا برای شکل اصلی یعنی ۲-۲ داریم

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{q}{(x^2 + y^2 - 2xy \cos \gamma)^{\frac{1}{2}}} + \frac{q'}{(x^2 + y'^2 - 2xy' \cos \gamma)^{\frac{1}{2}}} \right\} \quad (۱-۴-۲)$$

حال به کمک روابط (۴-۲) و (۱-۴-۲)، چگالی بار القاشده روی سطح کره را به دست می آوریم

$$\sigma = -\varepsilon_0 \left. \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right|_{x=a} \quad (۲-۴-۲)$$

(دقت کنید که x در امتداد شعاع کره است)

$$\Rightarrow \sigma = -\frac{q}{4\pi a^2} \left(\frac{a}{y}\right) \frac{\left(1 - \frac{a^2}{y^2}\right)}{\left(1 + \frac{a^2}{y^2} - 2\frac{a}{y} \cos \gamma\right)^{\frac{3}{2}}} \quad (۵-۲)$$

نیروی وارد بر بار q از طرف کره‌ی رسانا برابر است با نیروی وارد بر بار q از طرف بار تصویری q' (طبق روش تصویر که تاکنون پذیرفته ایم).

لذا این نیرو عبارت است از

$$|\mathbf{F}| = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{qq'}{|y - y'|^2} = \frac{qq'}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{\left(y - \frac{a^2}{y}\right)^2} \quad (۱-۵-۲)$$

که در آن به جای y' از (۴-۲) مقدارش $\frac{a^2}{y}$ را قرار دادیم.

مجدداً با استفاده از رابطه‌ی (۴-۲) خواهیم داشت، (چون جمله آخر در سمت راست رابطه‌ی بالا

به صورت $\frac{1}{\left[y\left(1 - \frac{a^2}{y^2}\right)\right]^2}$ نوشته می شود که می توان از y^2 فاکتور گرفت)

$$|\mathbf{F}| = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q^2}{a^2} \left(\frac{a}{y}\right)^3 \left(1 - \frac{a^2}{y^2}\right)^{-2} \quad (۶-۲)$$

می توان با انتگرال گیری از رابطه‌ی شناخته شده‌ی $da \left(\frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}\right)$ نیز همین نتیجه را به دست آورد

$$d\mathbf{F} = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0} a^2 d\Omega \mathbf{r} \quad \left(d\Omega = \frac{da}{a^2}\right) \quad (۱-۶-۲)$$

با جایگذاری رابطه‌ی (۵-۲) یعنی σ در رابطه‌ی بالا داریم

$$|\mathbf{F}| = \frac{q^2}{32\pi^2\varepsilon_0 a^2} \left(\frac{a}{y}\right)^2 \left(1 - \frac{a^2}{y^2}\right)^2 \int \frac{\cos \gamma d\Omega}{\left(1 + \frac{a^2}{y^2} - 2\frac{a}{y} \cos \gamma\right)^3} \quad (۷-۲)$$

اما انتگرال

$$\int \frac{\cos \gamma d\Omega}{\left(1 + \frac{a^2}{y^2} - \frac{2a}{y} \cos \gamma\right)^{3/2}} = 2\pi \int_0^\pi \frac{\cos \gamma \sin \gamma d\gamma}{\left(1 + \frac{a^2}{y^2} - \frac{2a}{y} \cos \gamma\right)^{3/2}}$$

$$= 2\pi \int_{-1}^{+1} \frac{xdx}{(Ax+B)^{3/2}} \quad (1-7-2)$$

که در آن

$$A = \frac{-2a}{y} \quad \& \quad B = 1 + \frac{a^2}{y^2} \quad (2-7-2)$$

اگر با یک محاسبه سرراست و ساده، انتگرال موجود در رابطه‌ی (۱-۷-۳) را محاسبه کنیم، به راحتی رابطه‌ی (۲-۷-۲) به دست می‌آید.

$$\int \frac{xdx}{(Ax+B)^{3/2}} = \frac{-1}{A^2(Ax+B)} + \frac{B}{2A^2(Ax+B)^{3/2}} \quad (3-7-2)$$

۳-۲ بار نقطه‌ای در حضور کره‌ی رسانای باردار عایق‌بندی شده

اگر در ابتدا کره‌ی رسانا را به زمین وصل کنیم، با این کار باری به اندازه‌ی بار تصویری q' روی سطح آن القا می‌شود. اگر اتصال با زمین را قطع کنیم و سپس بار $Q - q'$ را به آن اضافه کنیم، در این صورت بار کل کره‌ی رسانا Q خواهد شد. بنابراین به پتانسیل رابطه‌ی (۱-۲) جمله‌ی مربوط به بار نقطه‌ای ($Q - q'$) واقع در مبدأ افزوده می‌شود

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} - \frac{aq}{y \left| \mathbf{x} - \frac{a^2}{y^2} \mathbf{y} \right|} + \frac{Q + \frac{a}{y}q}{|\mathbf{x}|} \right] \quad (8-2)$$

در این حالت، نیروی وارد بر q ، برآیند نیروی وارد بر آن از طرف بار q' ، واقع در \mathbf{y}' و بار $Q - q'$ واقع در مبدأ است، لذا

$$\mathbf{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{(Q - q')q}{y^2} \left(\frac{\mathbf{y}}{|\mathbf{y}|} \right) + \frac{q'q}{|\mathbf{y} - \mathbf{y}'|^2} \left(\frac{\mathbf{y}}{|\mathbf{y}|} \right) \right\} \quad (1-8-2)$$

با جایگذاری از رابطه‌ی (۴-۲) در (۱-۸-۲) خواهیم داشت

$$\mathbf{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ -\frac{q^2}{a^2} \left(\frac{a}{y} \right)^3 \frac{1}{\left(1 - \frac{a^2}{y^2} \right)^2} + \frac{\left(Q + \frac{a}{y}q \right) q}{y^2} \right\} \frac{\mathbf{y}}{|\mathbf{y}|} \quad (2-8-2)$$

برداری یکانی در جهت \mathbf{y} است.

$$\mathbf{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{y^2} \left\{ Q - \frac{aq}{y} \left(-\frac{1}{\left(1 - \frac{a^2}{y^2}\right)^2} + 1 \right) \right\} \frac{\mathbf{y}}{|y|} \quad (3-8-2)$$

$$\mathbf{F} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 y^2} \left[Q - \frac{qa^2}{y} \left(\frac{2y^2 - a^2}{(y^2 - a^2)^2} \right) \right] \frac{\mathbf{y}}{y} \quad (9-2)$$

۴-۲ بار نقطه‌ای در مجاورت یک کره‌ی رسانا در پتانسیل ثابت

در این حالت، پتانسیل شامل سه جمله است، جمله‌ی اول مربوط به بار q ، جمله‌ی دوم مربوط به بار تصویری q' واقع در y' ، و جمله‌ی سوم مربوط به بار نقطه‌ای $(4\pi\epsilon_0 Va)$ واقع در مبدأ، لذا

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} - \frac{aq}{y \left| \mathbf{x} - \frac{a^2}{y^2} \mathbf{y} \right|} \right] + \frac{Va}{|\mathbf{x}|} \quad (10-2)$$

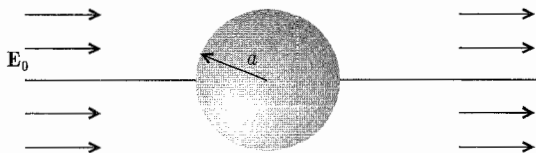
در این مورد، نیروی وارد بر بار q عبارت است از

$$\mathbf{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{(4\pi\epsilon_0 Va)q}{y^2} + \frac{qq'}{|y - y'|^2} \right] \frac{\mathbf{y}}{y} \quad (11-2)$$

با جایگذاری از (۴-۲) داریم

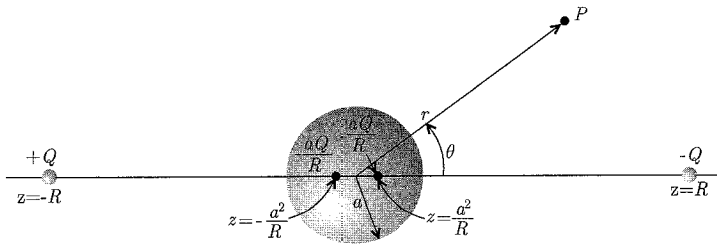
$$\mathbf{F} = \frac{q}{y^2} \left[Va - \frac{qay^2}{4\pi\epsilon_0 (y^2 - a^2)^2} \right] \frac{\mathbf{y}}{y} \quad (11-2)$$

۵-۲ کره‌ی رسانا در میدان الکتریکی یکنواخت با روش تصاویر



میدان الکتریکی یکنواخت را با دو بار $\pm Q$ واقع در $z = \mp R$ جایگزین می‌کنیم، در این صورت پتانسیل در بیرون از کره، مجموع پتانسیل حاصل از بارهای مذکور و پتانسیل حاصل از تصاویر آن‌ها (یعنی $\mp \frac{Qa}{R}$)

که در $z = \mp \frac{a^2}{R}$ واقعند) خواهد بود که عبارت است از



$$\Phi(r, \theta) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{1}{(r^2 + R^2 + 2Rr \cos \theta)^{1/2}} - \frac{1}{(r^2 + R^2 - 2Rr \cos \theta)^{1/2}} - \frac{a}{R \left(r^2 + \frac{a^2}{R^2} + \frac{2a^2 r}{R} \cos \theta \right)^{1/2}} + \frac{a}{R \left(r^2 + \frac{a^2}{R^2} - \frac{2a^2 r}{R} \cos \theta \right)^{1/2}} \right\} \quad (12-2)$$

حال اگر به کمک بسط: $(1+x)^n \approx 1+nx$ برای $x \ll 1$ ، جملات رابطه‌ی بالا را بسط دهیم خواهیم داشت

$$\begin{aligned} \pm (r^2 + R^2 \pm 2Rr \cos \theta)^{-1/2} &= \pm R^{-1} \left[1 + \frac{r^2}{R^2} \pm \frac{2r}{R} \cos \theta \right]^{-1/2} \\ &\approx \pm R^{-1} \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{r^2}{R^2} \pm \frac{2r}{R} \cos \theta \right) \right] \end{aligned} \quad (12-2)$$

$$\begin{aligned} \mp \frac{a}{R} \left[r^2 + \frac{a^2}{R^2} \pm \frac{2a^2 r}{R} \cos \theta \right]^{-1/2} &= \mp \frac{ar^{-1}}{R} \left[1 + \frac{a^2}{r^2 R^2} \pm \frac{2a^2}{Rr} \cos \theta \right]^{-1/2} \\ &\approx \mp \frac{ar^{-1}}{R} \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{a^2}{r^2 R^2} \pm \frac{2a^2}{Rr} \cos \theta \right) \right] \end{aligned} \quad (2-12-2)$$

با قرار دادن بسط‌های فوق در رابطه‌ی (۱۲-۲)، داریم

$$\Phi \cong \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{-2Q}{R^2} r \cos \theta + \frac{2Q}{R^2} \frac{a^2}{r^2} \cos \theta \right]; R \rightarrow \infty \quad (13-2)$$

با قرار دادن $E = \frac{2Q}{4\pi\epsilon_0 R^2}$ در حد $R, Q \rightarrow \infty$ ، داریم

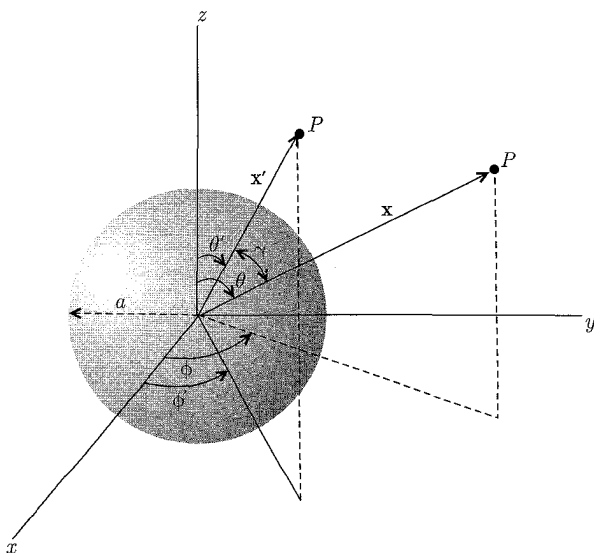
$$\Phi = -E \cdot \left(r - \frac{a^2}{r^2} \right) \cos \theta \quad (14-2)$$

بنابراین چگالی بار سطحی القایی طبق تعریف عبارت خواهد بود با

$$\sigma = -\epsilon_0 \left. \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right|_{r=a} = 3\epsilon_0 E \cdot \cos \theta \quad (15-2)$$

۶-۲ تابع گرین برای کره، حل عمومی پتانسیل

پتانسیل حاصل از یک بار نقطه‌ای واحد و تصویر آن، که شرایط مرزی مناسبی را برآورده می‌کند، همان تابع گرین مناسب برای شرایط مرزی دیریکله یا نیومن است. در تابع $G(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ متغیر \mathbf{x}' متعلق به مکان بار واحد و متغیر \mathbf{x} متعلق به نقطه‌ای است که پتانسیل در آنجا محاسبه می‌شود. این مختصات و کره‌ی مربوطه در شکل ۷-۲ نشان داده شده‌اند.



شکل ۷-۲:

بنابراین برای شرایط مرزی دیریکله روی کره‌ای به شعاع a ، پتانسیل حاصل از یک بار نقطه‌ای واحد $q = 1$ واقع در \mathbf{x}' و تصویر آن، $q' = -\frac{a}{x'}$ واقع در $\frac{a^2}{x'^2} \mathbf{x}$ عبارت است از

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} - \frac{a}{x' \left| \mathbf{x} - \frac{a^2}{x'^2} \mathbf{x}' \right|} \quad (۱۶-۲)$$

که از تبدیل $q \rightarrow 4\pi\epsilon_0$ در رابطه (۱-۲) به دست می‌آید.

رابطه‌ی (۱۶-۲) برحسب مختصات کروی، به صورت زیر نوشته می‌شود

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \frac{1}{(x^2 + x'^2 - 2xx' \cos \gamma)^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{\left(\frac{x^2 x'^2}{a^2} + a^2 - 2xx' \cos \gamma \right)^{\frac{1}{2}}} \quad (۱۷-۲)$$

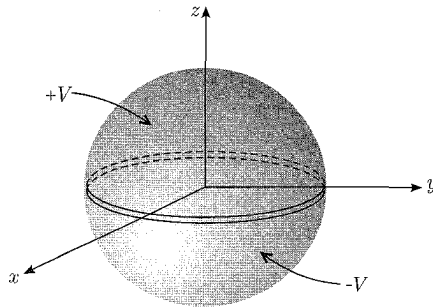
که در آن γ زاویه‌ی بین \mathbf{x} و \mathbf{x}' است. چون بردار یکانی عمود بر سطح و به طرف بیرون از ناحیه‌ی مورد نظر است، بنابراین برای ناحیه‌ی بیرون از کره، \mathbf{n}' در خلاف جهت \mathbf{x}' و به طرف مبدأ خواهد بود. بنابراین مشتق رابطه‌ی (۱۷-۲) با در نظر گرفتن علامت منفی مذکور عبارت است از

$$\frac{\partial G}{\partial n'} = - \frac{\partial G}{\partial x'} \Big|_{x'=a} = - \frac{(x^2 - a^2)}{a(x^2 + a^2 - 2ax \cos \gamma)^{\frac{3}{2}}} \quad (18-2)$$

لذا حل معادله‌ی لاپلاس در بیرون کره‌ای که پتانسیل روی سطح آن معلوم است طبق رابطه‌ی (۱-۴۴) به صورت زیر است

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi} \int \Phi(a, \theta', \phi') \frac{a(x^2 - a^2)}{(x^2 + a^2 - 2ax \cos \gamma)^{\frac{3}{2}}} d\Omega' \quad (19-2)$$

۷-۲ کره‌ی رسانای متشکل از دو نیم‌کره با پتانسیل‌های متفاوت



با استفاده از رابطه‌ی (۱-۴۴) برای پتانسیل در بیرون از کره داریم

$$\Phi(x, \theta, \phi) = - \frac{1}{4\pi} \oint_S \Phi(\mathbf{x}') \frac{\partial G_D}{\partial n'} da' \quad (1-19-2)$$

$$\begin{aligned} \Phi(\mathbf{x}) = & - \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\phi' \left\{ \int_0^{\frac{\pi}{2}} (+V) \frac{\partial G_D}{\partial n'} \sin \theta' d\theta' \right. \\ & \left. + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (-V) \frac{\partial G_D}{\partial n'} \sin \theta' d\theta' \right\} \quad (2-19-2) \end{aligned}$$

با جایگزینی از رابطه‌ی (۱۸-۲) در رابطه‌ی (۲-۱۹-۲) خواهیم داشت

$$\Phi(x, \theta, \phi) = \frac{-V}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\phi' \left\{ \int_0^{\pi} d(\cos \theta') \right.$$

$$- \int_{-1}^{\circ} d(\cos \theta') \left. \right\} \frac{a(x^2 - a^2)}{(a^2 + x^2 - 2ax \cos \gamma)^{\frac{3}{2}}} \quad (20-2)$$

با تبدیل $(\theta' \rightarrow \pi - \theta', \phi' \rightarrow \phi' + \pi)$ در انتگرال دوم و با استفاده از

$$\cos \gamma = \cos \theta \cdot \cos \theta' + \sin \theta \cdot \sin \theta' \cdot \cos(\phi - \phi')$$

خواهیم داشت

$$\Phi(x, \theta, \phi) = \frac{Va(x^2 - a^2)}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\phi' \int_0^1 d(\cos \theta') \{ (a^2 + x^2 - 2ax \cos \gamma)^{-\frac{3}{2}} - (a^2 + x^2 + 2ax \cos \gamma)^{-\frac{3}{2}} \} \quad (21-2)$$

به جهت وابستگی $\cos \gamma$ به (θ', ϕ') و (θ, ϕ) ، انتگرال‌های معادله‌ی (۲۱-۲) در حالت کلی ساده نیستند، ولی در حالت‌های خاصی می‌توان این انتگرال‌ها را محاسبه کرد.

مثلاً پتانسیل روی محور z با $(x = z, \theta = 0)$ را در نظر می‌گیریم. در این صورت $\cos \gamma = \cos \theta' = u$ و رابطه‌ی (۲۱-۲) به صورت زیر درمی‌آید

$$\Phi(z) = \frac{Va(z^2 - a^2)}{4} \int_0^1 du \{ (a^2 + z^2 - 2azu)^{-\frac{3}{2}} - (a^2 + z^2 + 2azu)^{-\frac{3}{2}} \} \quad (1-21-2)$$

اگر به کمک انتگرال زیر، انتگرال‌های رابطه‌ی (۱-۲۱-۲) را حل کنیم، رابطه‌ی (۲۲-۲) را به دست می‌آوریم

$$\int \frac{du}{[pu + q]^{\frac{3}{2}}} = \frac{-2}{p\sqrt{pu + q}} \quad (2-21-2)$$

$$\Phi(z) = V \left[1 - \frac{(z^2 - a^2)}{z\sqrt{z^2 + a^2}} \right] \quad (22-2)$$

در حالت کلی، وقتی انتگرال‌های رابطه‌ی (۲۱-۲) ساده نباشند، می‌توانیم انتگرال‌ده‌ها را برحسب سری توانی بسط داده و از آن جمله به جمله انتگرال بگیریم.

با فاکتورگیری از $(a^2 + x^2)$ و جایگزینی $\alpha = \frac{ax}{(a^2 + x^2)}$ داریم

$$\Phi(x, \theta, \phi) = \frac{Va(x^2 - a^2)}{4\pi(x^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} \int_0^{2\pi} d\phi' \int_0^1 d(\cos \theta') \{ [(1 - 2\alpha \cos \gamma)^{-\frac{3}{2}} - (1 + 2\alpha \cos \gamma)^{-\frac{3}{2}}] \} \quad (23-2)$$

در صورتی که انتگرالده‌های رابطه‌ی بالا را به کمک فرمول

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 \quad (1-23-2)$$

بسط دهیم، خواهیم داشت

$$[(1-2\alpha \cos \gamma)^{-\frac{3}{2}} - (1+2\alpha \cos \gamma)^{-\frac{3}{2}}] = 6\alpha \cos \gamma + 35\alpha^3 \cos^3 \gamma \quad (24-2)$$

با قرار دادن (24-2) در (23-2) و جایگزینی

$$\cos \gamma = \cos \theta \cdot \cos \theta' + \sin \theta \cdot \sin \theta' \cos(\phi - \phi')$$

در انتگرال‌گیری

$$\left\{ \int_0^{2\pi} d\phi' \int_0^1 d(\cos \theta') \cos \gamma = \pi \cos \theta \right. \\ \left. \int_0^{2\pi} d\phi' \int_0^1 d(\cos \theta') \cos^3 \gamma = \frac{\pi}{4} \cos \theta (3 - \cos^2 \theta) \right. \quad (25-2)$$

خواهیم داشت

$$\Phi(x, \theta, \phi) = \frac{3Va^2}{2x^2} \left(\frac{x^2(x^2 - a^2)}{(x^2 + a^2)^{\frac{5}{2}}} \right) \cos \theta \left[1 + \frac{35}{24} \frac{a^2 x^2}{(a^2 + x^2)^2} (3 - \cos^2 \theta) + \dots \right] \quad (26-2)$$

که آن را (26-2) می‌نامیم. به‌ازای مقادیر بزرگ x ، یعنی $x \gg a$ ، رابطه‌ی (26-2) به‌صورت زیر درمی‌آید

$$\Phi(x, \theta, \phi) = \frac{3Va^2}{2x^2} \left[\cos \theta - \frac{7a^2}{12x^2} \left(\frac{5}{2} \cos^3 \theta - \frac{3}{2} \cos \theta \right) + \dots \right] \quad (27-2)$$

۸-۲ توابع متعامد و بسط‌ها

مجموعه‌ی توابع حقیقی یا مختلط انتگرال‌پذیر و متعامد $U_n(\xi)$ ، ($n = 1, 2, \dots$)، با متغیر ξ را که در بازه‌ی (a, b) تعریف شده‌اند در نظر بگیرید. شرط تعامد این توابع به‌صورت زیر بیان می‌شود

$$\int_a^b U_n^*(\xi) U_m(\xi) d\xi = 0 \quad m \neq n \quad (28-2)$$

اگر $m = n$ باشد، انتگرال غیرصفر خواهد بود و با فرض بهنجارش توابع، این انتگرال مساوی یک خواهد شد، بنابراین

$$\int_a^b U_n^*(\xi) U_m(\xi) d\xi = \delta_{nm} \quad (29-2)$$

تابع اختیاری $f(\xi)$ که در بازه (a, b) انتگرال پذیر مجذوری باشد، قابلیت بسط، به صورت یک سری از توابع متعامد $U_n(\xi)$ را دارد. اگر تعامد جملات این سری محدود باشد، (مثلاً N جمله)

$$f(\xi) \leftrightarrow \sum_{n=1}^N a_n U_n(\xi) \quad (۳۰-۲)$$

بهترین نمایش تابع $f(\xi)$ برحسب توابع متعامد، با بهترین انتخاب از ضرایب a_n به دست می آید. این بهترین انتخاب با کمینه کردن خطای مربعی میانگین M_n به دست می آید

$$M_n = \int_a^b \left| f(\xi) - \sum_{n=1}^N a_n U_n(\xi) \right|^2 d\xi \quad (۳۱-۲)$$

برای کمینه کردن M_n به صورت زیر عمل می کنیم

$$\frac{\partial M_n}{\partial a_n} = \frac{\partial}{\partial a_n} \int_a^b \left[f(\xi) - \sum_{n=1}^N a_n U_n(\xi) \right] \left[f^*(\xi) - \sum_{n=1}^N a_n^* U_n^*(\xi) \right] d\xi = 0 \quad (۱-۳۱-۲)$$

$$\int_a^b \left(- \sum_{n=1}^N U_n(\xi) f^*(\xi) - \sum_{n=1}^N a_n^* U_n^*(\xi) \right) d\xi = 0 \quad (۲-۳۱-۲)$$

$$f^*(\xi) - \sum_{n=1}^N a_n^* U_n^*(\xi) = 0 \quad (۳-۳۱-۲)$$

$$\sum_{n=1}^N a_n^* U_n^*(\xi) = f^*(\xi) \quad (۴-۳۱-۲)$$

طرفین رابطه‌ی اخیر را در $U_m(\xi)$ ضرب و در بازه (a, b) انتگرال می گیریم

$$\sum_{n=1}^N a_n^* \delta_{nm} = \int_a^b U_m(\xi) f^*(\xi) d\xi \quad (۵-۳۱-۲)$$

$$a_m^* = \int_a^b U_m(\xi) f^*(\xi) d\xi \quad (۶-۳۱-۲)$$

$$a_m = \int_a^b U_m^*(\xi) f(\xi) d\xi \quad (۳۲-۲)$$

در اینجا از شرط تعامد (۲۹-۲) استفاده شده است.

با زیاد کردن تعداد جملات سری رابطیهی (۲-۳۰)، نمایش سری تابع $f(\xi)$ بهتر و بهتر می شود، بنابراین بهترین نمایش عبارت است از

$$f(\xi) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n U_n(\xi) \quad (۲-۳۳)$$

که در آن ضرایب a_n با رابطیهی (۲-۳۲) داده می شوند. با جایگذاری (۲-۳۲) در (۲-۳۳) خواهیم داشت

$$f(\xi) = \int_a^b \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} U_n^*(\xi') U_n(\xi) \right\} f(\xi') d\xi' \quad (۲-۳۴)$$

رابطیهی بالا وقتی صحیح است که

$$\sum_{n=1}^{\infty} U_n^*(\xi') U_n(\xi) = \delta(\xi' - \xi) \quad (۲-۳۵)$$

این درست همان رابطیهی تمامیت است.

سینوس و کسینوس، معروفترین توابع متعامدند که بسط برحسب آنها سری فوریه خواهد بود. در صورتی که محدوده تغییرات x بین $\left(-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right)$ باشد، توابع متعامد عبارتند از

$$\sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{2\pi m x}{a}\right) \quad \& \quad \sqrt{\frac{2}{a}} \cos\left(\frac{2\pi m x}{a}\right) \quad (۲-۳۵-۱)$$

که در آن m یک عدد صحیح نامنفی است. بسط یک تابع برحسب این توابع به صورت مرسوم زیر نوشته می شود

$$f(x) = \frac{1}{2} A_0 + \sum_{m=1}^{\infty} \left[A_m \cos\left(\frac{2\pi m x}{a}\right) + B_m \sin\left(\frac{2\pi m x}{a}\right) \right] \quad (۲-۳۶)$$

طوری که

$$\begin{cases} A_m = \frac{2}{a} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} f(x) \cos\left(\frac{2\pi m x}{a}\right) dx \\ B_m = \frac{2}{a} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} f(x) \sin\left(\frac{2\pi m x}{a}\right) dx \end{cases} \quad (۲-۳۷)$$

بحث بالا را می توان به ابعاد بالاتر نیز تعمیم داد. فرض کنید فضا دوبعدی است و متغیر ξ به بازه (a, b) و متغیر η به بازه (c, d) محدود باشد. اگر $U_n(\xi)$ و $V_m(\eta)$ توابع متعامد در هر یک از ابعاد باشند، بسط تابع اختیاری $f(\xi, \eta)$ عبارت خواهد بود با

$$f(\xi, \eta) = \sum_n \sum_m a_{nm} U_n(\xi) V_m(\eta) \quad (۲-۳۸)$$

طوری که

$$a_{nm} = \int_a^b d\xi \int_c^d d\eta U_n^*(\xi) V_m^*(\eta) f(\xi, \eta) \quad (۳۹-۲)$$

اگر بازه‌ی (a, b) به بی‌نهایت میل کند، ممکن است مجموعه‌ی توابع متعامد $U_n(\xi)$ به توابع پیوسته تبدیل شوند. در این صورت دلتای کرونکر در رابطه‌ی (۲۹-۲) به تابع دلتای دیراک تبدیل خواهد شد. یک مثال مهم برای این مورد، انتگرال فوریه است. با مجموعه‌ی توابع متعامد زیر در بازه‌ی $\left(-\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{a}{\sqrt{2}}\right)$ شروع می‌کنیم

$$U_m(x) = \frac{1}{\sqrt{a}} e^{i\left(\frac{\sqrt{2}\pi m x}{a}\right)} \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (۴۰-۲)$$

تابع $f(x)$ را برحسب این توابع بسط می‌دهیم

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{a}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} A_m e^{i\left(\frac{\sqrt{2}\pi m x}{a}\right)} \quad (۴۱-۲)$$

که در آن

$$A_m = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\frac{a}{\sqrt{2}}}^{+\frac{a}{\sqrt{2}}} e^{-i\left(\frac{\sqrt{2}\pi m x'}{a}\right)} f(x') dx' \quad (۴۲-۲)$$

با میل دادن بازه به بی‌نهایت ($a \rightarrow \infty$) و اعمال تبدیل‌های زیر

$$\begin{cases} \frac{\sqrt{2}\pi m}{a} \rightarrow k \\ \sum_m \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} dm = \frac{a}{\sqrt{2}\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk \\ A_m \rightarrow \sqrt{\frac{\sqrt{2}\pi}{a}} A(k) \end{cases} \quad (۴۳-۲)$$

بسط حاصل، انتگرال فوریه‌ی زیر است

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{\sqrt{2}\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} A(k) e^{ikx} dk \quad (۴۴-۲)$$

طوری که

$$A(k) = \frac{1}{\sqrt{\sqrt{2}\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} dx \quad (۴۵-۲)$$

شرط تعامد عبارت است از

$$\frac{1}{\sqrt{2}\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(k-k')x} dx = \delta(k - k') \quad (۴۶-۲)$$

در حالی که رابطه‌ی تمامیت عبارت است از

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik(x-x')} dk = \delta(x-x') \quad (۴۷-۲)$$

۹-۲ جداسازی متغیرها، معادله‌ی لاپلاس در مختصات دکارتی قائم

معادله‌ی لاپلاس چنانکه می‌دانید در مختصات قائم عبارت است از

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0 \quad (۴۸-۲)$$

جواب معادله را به صورت زیر در نظر می‌گیریم

$$\Phi(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z) \quad (۴۹-۲)$$

با قرار دادن این جواب در رابطه‌ی (۴۸-۲) و تقسیم آن بر رابطه‌ی (۴۹-۲) به نتیجه زیر می‌رسیم

$$\frac{1}{X(x)} \frac{d^2 X}{dx^2} + \frac{1}{Y(y)} \frac{d^2 Y}{dy^2} + \frac{1}{Z(z)} \frac{d^2 Z}{dz^2} = 0 \quad (۵۰-۲)$$

چون هر جمله تنها شامل یک تابع یک متغیره است، بنابراین هر یک از سه جمله‌ی رابطه‌ی (۵۰-۲) باید مقداری ثابت باشد یعنی

$$\begin{cases} \frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = -\alpha^2 \\ \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} = -\beta^2 \\ \frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} = \gamma^2 \end{cases} \quad (۵۱-۲)$$

به طوری که

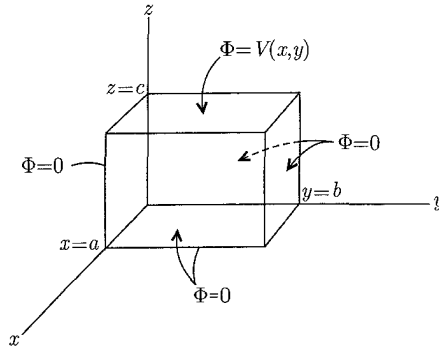
$$\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2 = 0 \quad (۱-۵۱-۲)$$

جواب‌های سه معادله‌ی دیفرانسیل معمولی (۵۱-۲)، به صورت $e^{\pm i\alpha x}$ ، $e^{\pm i\beta y}$ و $e^{\pm \gamma z}$ هستند. بنابراین

$$\Phi = e^{\pm i\alpha x} e^{\pm i\beta y} e^{\pm \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} z} \quad (۵۲-۲)$$

چون α و β کاملاً دلخواهند، لذا ترکیب‌های خطی از (۵۲-۲) دسته جواب‌های معادله‌ی لاپلاس هستند. برای تعیین α و β شرایط مرزی مشخصی روی پتانسیل اعمال می‌شود.

مثال: جعبه‌ی مکعب مستطیل



شکل ۲-۹:

جعبه‌ی شکل ۲-۹ را در نظر بگیرید، همه‌ی سطوح جعبه در پتانسیل صفرند، به جز سطح $z = c$ که با پتانسیل $V(x, y)$ مشخص شده است. هدف تعیین پتانسیل در درون جعبه است. شرط $\Phi = 0$ برای $x = 0$ ، $y = 0$ ، و $z = 0$ ، شکل مناسب X ، Y و Z را تعیین می‌کند

$$\begin{cases} X = \sin \alpha x \\ Y = \sin \beta y \\ Z = \sinh(\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} z) \end{cases} \quad (۵۳-۲)$$

برای داشتن $\Phi = 0$ در $x = a$ و $y = b$ ، باید، $\alpha a = n\pi$ و $\beta b = m\pi$ باشند. با توجه به تعریف

$$\begin{cases} \alpha_n = \frac{n\pi}{a} \\ \beta_m = \frac{m\pi}{b} \\ \gamma_{nm} = \pi \sqrt{\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2}} \end{cases} \quad (۵۴-۲)$$

پتانسیل جزئی Φ_{nm} عبارت است از

$$\Phi_{nm} = \sin(\alpha_n x) \cdot \sin(\beta_m y) \cdot \sinh(\gamma_{nm} z) \quad (۵۵-۲)$$

اگر پتانسیل را برحسب Φ_{nm} به صورت زیر بسط دهیم

$$\Phi(x, y, z) = \sum_{n,m=1}^{\infty} A_{nm} \sin(\alpha_n x) \cdot \sin(\beta_m y) \sinh(\gamma_{nm} z) \quad (۵۶-۲)$$

حال شرط $\Phi = V(x, y)$ در $z = c$ را اعمال می‌کنیم

$$V(x, y) = \sum_{n,m=1}^{\infty} A_{nm} \sin(\alpha_n x) \cdot \sin(\beta_m y) \sinh(\gamma_{nm} c) \quad (۵۷-۲)$$

اگر طرفین رابطه‌ی بالا را در $\sin(\alpha_{n'}x) \cdot \sin(\beta_{m'}y)$ ضرب کرده و سپس از رابطه‌ی تعامدی زیر استفاده کنیم

$$\int_0^a \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \cdot \sin\left(\frac{n'\pi x}{a}\right) dx = \frac{a}{2} \delta_{nn'} \quad (۱-۵۷-۲)$$

هم چنین انتگرال‌های روی x و y را به ترتیب در بازه‌های $(0, a)$ و $(0, b)$ حل کنیم، خواهیم داشت

$$\int_0^a dx \int_0^b dy V(x, y) \sin(\alpha_{n'}x) \sin(\beta_{m'}y) = \sum_{n, m=1}^{\infty} A_{nm} \left(\frac{a}{2} \delta_{nn'}\right) \left(\frac{b}{2}\right) \delta_{mm'} \sinh(\gamma_{nm}c) \quad (۲-۵۷-۲)$$

در این صورت طرف راست رابطه‌ی اخیر به صورت زیر ساده می‌شود

$$A_{n'm'} \left(\frac{ab}{4}\right) \sinh(\gamma_{n'm'}c) \quad (۳-۵۷-۲)$$

بنابراین ضرایب A_{nm} عبارتند از

$$A_{nm} = \frac{4}{ab \sinh(\gamma_{nm}c)} \int_0^a dx \int_0^b dy V(x, y) \sin(\alpha_n x) \sin(\beta_m y) \quad (۵۸-۲)$$

۱۰-۲ یک مسئله پتانسیلی دوبعدی

اگر پتانسیل مستقل از Z باشد، در این صورت جواب‌ها به صورت $e^{\pm i\alpha x} e^{\pm \alpha y}$ هستند

$$\left. \begin{array}{l} x = 0, x = a \\ \Phi = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow X(x) = \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \quad (۱-۵۸-۲)$$

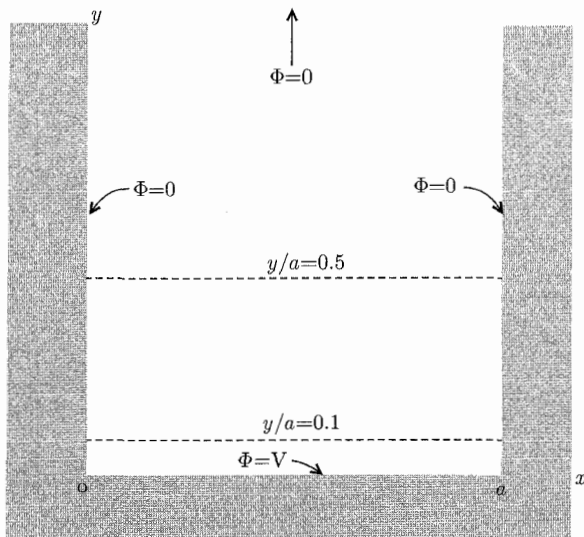
$$\left. \begin{array}{l} y \rightarrow \infty \\ \Phi \rightarrow 0 \end{array} \right\} \Rightarrow Y(y) = \exp\left(-\frac{n\pi y}{a}\right) \quad (۲-۵۸-۲)$$

بنابراین

$$\Phi(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \exp\left(-\frac{n\pi y}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \quad (۵۹-۲)$$

ضرایب A_n با شرط $\Phi = V$ برای $y = 0$ به دست می‌آیند

$$\Phi(x, 0) = V = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \quad (۱-۵۹-۲)$$



شکل ۲-۱۰: مسئله پتانسیلی دوبعدی

اگر طرفین رابطیه بالا را در $\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)$ ضرب و سپس از رابطیه تعامدی (۲-۵۷-۱) استفاده کنیم خواهیم داشت

$$A_n = \frac{2}{a} \int_0^a V \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) dx \quad (۲-۶۰)$$

$$A_n = \frac{2V}{a} \int_0^a \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) dx \quad (۲-۶۰-۱)$$

$$A_n = \frac{4V}{\pi n} \begin{cases} 1, & \text{برای } n \text{ فرد} \\ 0, & \text{برای } n \text{ زوج} \end{cases} \quad (۲-۶۰-۲)$$

بنابراین پتانسیل ناحیهی دوبعدی شکل ۲-۱۰ عبارت است از

$$\Phi(x, y) = \frac{4V}{\pi} \sum_n \frac{1}{n} \exp\left(-\frac{n\pi y}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \quad (۲-۶۱)$$

برای مقادیر بزرگ y ($y \geq \frac{a}{\pi}$)، پتانسیل به شکل مجانبی که با جملهی اول رابطیهی (۲-۶۱) داده می‌شود نزدیک خواهد شد

$$\Phi(x, y) \rightarrow \frac{4V}{\pi} \exp\left(-\frac{\pi y}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \quad (۲-۶۲)$$

تعداد زیادی از سری‌های فوریه را می‌توان با جمع زدن به شکل‌های فشرده‌تری نیز نوشت. سری رابطی (۶۱-۲) یکی از آن‌ها است. چون $\sin \theta = \text{Im}(e^{i\theta})$ است، لذا رابطی (۶۱-۲) را چنین می‌نویسیم

$$\Phi(x, y) = \frac{4V}{\pi} \text{Im} \sum_{\text{فرد } n} \frac{1}{n} e^{\left(\frac{in\pi}{a}\right)(x+iy)} \quad (۱-۶۲-۲)$$

با توجه به تعریف $Z = e^{\left(\frac{i\pi}{a}\right)(x+iy)}$ ، خواهیم داشت

$$\Phi(x, y) = \frac{4V}{\pi} \text{Im} \sum_{\text{فرد } n} \frac{Z^n}{n} \quad (۶۳-۲)$$

به کمک بسط‌های زیر

$$\text{Ln}(\pm Z) = \pm Z - \frac{1}{2}Z^2 \pm \frac{1}{3}Z^3 - \frac{1}{4}Z^4 + \dots \quad (۱-۶۳-۲)$$

و

$$\text{Ln}(1+Z) - \text{Ln}(1-Z) = \text{Ln}\left(\frac{1+Z}{1-Z}\right) = 2Z + \frac{2}{3}Z^3 + \dots$$

و

$$\frac{1}{2} \text{Ln}\left(\frac{1+Z}{1-Z}\right) = \sum_{\text{فرد } n} \frac{Z^n}{n} \quad (۲-۶۳-۲)$$

خواهیم داشت

$$\Phi(x, y) = \frac{2V}{\pi} \text{Im} \left[\text{Ln}\left(\frac{1+Z}{1-Z}\right) \right] \quad (۶۴-۲)$$

چون بخش موهومی لگاریتمی با فاز شناسه‌اش برابر است، یعنی

$$\text{Ln}(x+iy) = \text{Ln}(\sqrt{x^2+y^2} e^{i \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)}) = \text{Ln}(\sqrt{x^2+y^2}) + i \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) \quad (۱-۶۴-۲)$$

به عبارت دیگر

$$\text{Im}[\text{Ln}(x+iy)] = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) \quad (۲-۶۴-۲)$$

بنابراین با در نظر گرفتن

$$\frac{1+Z}{1-Z} = \frac{(1+Z)(1-Z^*)}{|1-Z|^2} = \frac{1-|Z|^2 + 2i \text{Im}Z}{|1-Z|^2} \quad (۳-۶۴-۲)$$

داریم

$$\operatorname{Im} \left[\operatorname{Ln} \left(\frac{1+Z}{1-\bar{Z}} \right) \right] = \tan^{-1} \left[\frac{2\operatorname{Im}Z}{(1-|Z|^2)} \right] \quad (۴-۶۴-۲)$$

با قرار دادن $Z = e^{\left(\frac{i\pi}{a}\right)(x+iy)}$ ، رابطه‌ی بسته‌ای برای پتانسیل به صورت زیر به دست می‌آوریم

$$\Phi(x, y) = \frac{2V}{\pi} \tan^{-1} \left(\frac{\sin \frac{\pi x}{a}}{\sinh \frac{\pi y}{a}} \right) \quad (۴-۶۵-۲)$$

۲-۱۱ میدان‌ها و چگالی‌های بار در گوشه‌های دوبعدی و در امتداد لبه‌ها

فصل مشترک دو صفحه، یک گوشه‌ی دوبعدی را مشخص می‌کند. شکل ۲-۱۲ را که در آن صفحات در پتانسیل V نگه داشته شده‌اند در نظر بگیرید. با توجه به شکل ۲-۱۲ استفاده از مختصات قطبی (ρ, ϕ) نسبت به مختصات دکارتی قائم مناسب‌تر است. معادله‌ی لاپلاس در دو بعد در این مختصات قطبی عبارت است از

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi^2} = 0 \quad (۴-۶۶-۲)$$

با استفاده از روش جداسازی متغیرها و جایگزینی

$$\Phi(\rho, \phi) = R(\rho)\psi(\phi)$$

در (۴-۶۶-۲) و ضرب آن در $\frac{\rho^2}{\Phi}$ داریم

$$\frac{\rho}{R} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dR}{d\rho} \right) + \frac{1}{\psi} \frac{d^2 \psi}{d\phi^2} = 0 \quad (۴-۶۷-۲)$$

چون هر یک از جملات رابطه‌ی بالا تنها تابعی از یک متغیرند (جمله اول فقط تابعی از ρ و جمله دوم فقط تابعی از ϕ است) بنابراین هر کدام باید مقدار ثابتی باشند

$$\frac{\rho}{R} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dR}{d\rho} \right) = \nu^2, \quad \frac{1}{\psi} \frac{d^2 \psi}{d\phi^2} = -\nu^2 \quad (۴-۶۸-۲)$$

لذا جواب این معادلات عبارتند از

$$\begin{cases} R(\rho) = a\rho^\nu + b\rho^{-\nu} \\ \Psi(\phi) = A \cos(\nu\phi) + B \sin(\nu\phi) \end{cases} \quad (۴-۶۹-۲)$$

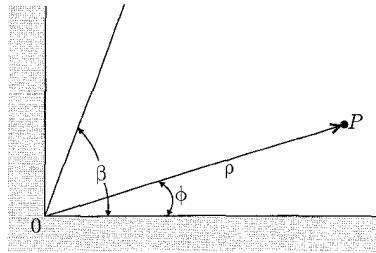
برای حالت خاص $\nu = 0$ ، جواب‌ها عبارتند از

$$\begin{cases} R(\rho) = a_0 + b_0 \ln \rho \\ \Psi(\phi) = A_0 + B_0 \phi \end{cases} \quad (۷۰-۲)$$

برای "تک‌مقداری" بودن پتانسیل، باید ضریب B_0 در رابطه‌ی (۷۰-۲) صفر باشد، بنابراین، جواب عمومی عبارت است از

$$\Phi(\rho, \phi) = a_0 + b_0 \ln \rho + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \rho^n \sin(n\phi + \alpha_n) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \rho^{-n} \sin(n\phi + \beta_n) \quad (۷۱-۲)$$

اگر مبدأ در ناحیه‌ای باشد که در آن هیچ باری وجود ندارد، در این صورت تمام ضرایب b_n صفرند، و تنها یک ثابت، یعنی a_0 و توان‌های مثبت ρ باقی می‌مانند. اگر مبدأ را از ناحیه‌ی موردنظر مستثنی کنیم، در این صورت ضرایب b_n می‌توانند غیرصفر باشند. جمله‌ی لگاریتمی با یک بار خطی با چگالی بار $\lambda = -2\pi\epsilon_0 b_0$ در واحد طول معادل است.



شکل ۱۲-۲:

برای شکل ۱۲-۲، زاویه‌ی سمتی به بازه‌ی $0 \leq \phi \leq \beta$ محدود است. شرایط مرزی عبارتند از

$$\Phi = V \quad ; \quad \begin{cases} \rho \geq 0 \\ \phi = 0 \quad \text{و} \quad \phi = \beta \end{cases} \quad (۱۲-۷۱-۲)$$

چون در مسئله باری خطی موجود نیست بنابراین $b_0 = 0$ است، و برای اینکه پتانسیل در $\phi = 0$ دارای یک مقدار V باشد، باید ضریب B_0 نیز صفر باشد. علاوه بر این برای اینکه پتانسیل در مبدأ ($\rho \rightarrow 0$) بی‌نهایت نشود، باید ضریب b نیز صفر باشد. بالاخره اینکه ν را به‌گونه‌ای انتخاب کنیم که $\sin(\nu\beta) = 0$ شود

$$\nu = \frac{m\pi}{\beta}, \quad m = 1, 2, \dots \quad (۲-۷۱-۲)$$

پس جواب عمومی به صورت زیر درمی آید

$$\Phi(\rho, \phi) = V + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \rho^{\frac{m\pi}{\beta}} \sin\left(\frac{m\pi\phi}{\beta}\right) \quad (۷۲-۲)$$

چون سری رابطه‌ی (۷۲-۲)، شامل توان‌های مثبت $\rho^{\frac{\pi}{\beta}}$ هستند، برای ρ های کوچک، تنها جمله‌ی اول سری مهم خواهد بود. بنابراین در نزدیکی مبدأ $\rho = 0$ است و پتانسیل به طور تقریبی عبارت خواهد بود با

$$\Phi(\rho, \phi) \simeq V + a_1 \rho^{\frac{\pi}{\beta}} \sin\left(\frac{\pi\phi}{\beta}\right) \quad (۷۳-۲)$$

برای مؤلفه‌های میدان الکتریکی خواهیم داشت

$$\begin{aligned} E_\rho(\rho, \phi) &= -\frac{\partial\Phi}{\partial\rho} \simeq -\frac{\pi a_1}{\beta} e^{\left(\frac{\pi}{\beta}\right)^{-1}} \sin\left(\frac{\pi\phi}{\beta}\right) \\ E_\phi(\rho, \phi) &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial\Phi}{\partial\phi} \simeq -\frac{\pi a_1}{\beta} \rho^{\left(\frac{\pi}{\beta}\right)^{-1}} \cos\left(\frac{\pi\phi}{\beta}\right) \end{aligned} \quad (۷۴-۲)$$

چگالی بار سطحی بر روی سطوح $\phi = \beta$ و $\phi = 0$ یکسان و به طور تقریبی عبارت است از

$$\sigma(\rho) = \varepsilon_0 E_n \Big|_{\phi=0} = \varepsilon_0 E_\phi(\rho, 0) \simeq -\frac{\varepsilon_0 \pi a_1}{\beta} e^{\left(\frac{\pi}{\beta}\right)^{-1}} \quad (۷۵-۲)$$

توجه کنید که وقتی $\beta > \pi$ باشد، کنج دوعدی تبدیل به یک لبه می‌شود که میدان و چگالی بار سطحی وقتی $\rho \rightarrow 0$ میل می‌کند، تکین خواهد شد.

۱۲-۲ مقدمه‌ای بر تحلیل المان محدود در الکترواستاتیک

در تحلیل المان محدود در اینجا فقط یک مقدمه از روش گالرگین برای مسائل دوعدی الکترواستاتیک آورده می‌شود.

معادله‌ی پواسن $\nabla^2 \psi = -g$ را در ناحیه‌ی دوعدی R با شرایط مرزی دیریکله روی منحنی مرزی C در نظر بگیرید. انتگرال صفرشونده‌ی زیر را بنا می‌کنیم

$$\int_R [\phi \nabla^2 \psi + g\phi] dx dy = 0 \quad (۷۶-۲)$$

که در آن $\phi(x, y)$ یک تابع آزمایشی (یا تابع آزمون) پاره‌پاره‌ی پیوسته (یا پله‌ای پیوسته یا قطعه‌ای پیوسته) در ناحیه‌ی R و صفرشونده روی منحنی C است. استفاده از اتحاد اول گرین روی جمله‌ی اول رابطه‌ی بالا منجر می‌شود به

$$\int_R [\nabla\phi \cdot \nabla\psi - g\phi] dx dy = 0 \quad (۷۷-۲)$$

به دلیل صفر بودن ϕ روی منحنی C ، انتگرال سطحی صفر خواهد شد. روش گالرگین شامل دو مرحله است، ابتدا جواب مورد نظر $\psi(x, y)$ را بر حسب توابع مستقل خطی و جایگزیده‌ی $\phi_{ij}(x, y)$ که تنها همسایگی محدود $x = x_i$ و $y = y_i$ را پوشش می‌دهد، بسط می‌دهیم. ناحیه‌ی R را به صورت شبکه‌ای مربعی با ثابت شبکه‌ای h تصور می‌کنیم، بنابراین یک انتخاب ممکن برای $\phi_{ij}(x, y)$ عبارت است از

$$\phi_{ij}(x, y) = \left(1 - \frac{|x - x_i|}{h}\right) \left(1 - \frac{|y - y_i|}{h}\right) \quad (78-2)$$

برای $|x - x_i| \leq h$ و $|y - y_i| \leq h$ ، و در جاهای دیگر $\phi_{ij}(x, y) = 0$. البته انتخاب توابع جایگزیده‌ی دیگری نیز ممکن است. انتخاب هرچه باشد اگر تعداد بخش‌های شبکه که شامل مرزها نیز می‌شود، N باشند، بسط $\psi(x, y)$ به صورت زیر درمی‌آید

$$\psi(x, y) \approx \sum_{K,l}^N \Psi \phi_{Kl}(x, y) \quad (79-2)$$

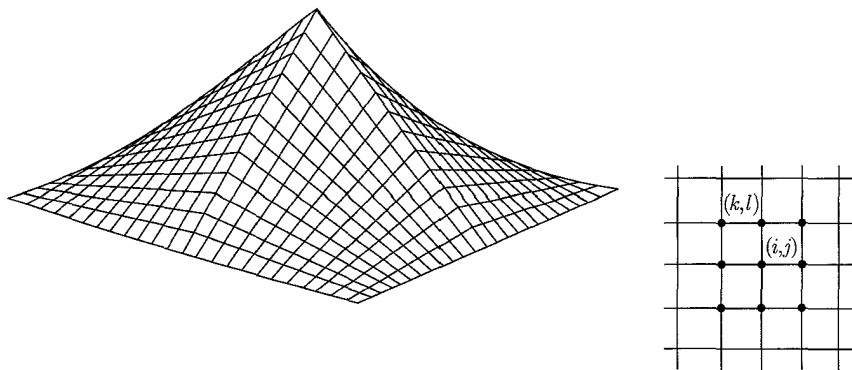
مرحله‌ی دوم روش گالرگین، انتخاب تابع ϕ_{ij} (یا i, j) بسط، ϕ_{ij} ، به عنوان تابع آزمون (یا تابع آزمایشی) ϕ در (77-2) و تکرار این عمل برای تمام قسمت‌های داخلی شبکه‌ی N با تغییر دادن متوالی i و j است. یکی از این معادلات نوعی از (77-2) به صورت زیر است

$$\sum_{K,l}^N \Phi_{Kl} \int_R \nabla \phi_{ij}(x, y) \cdot \nabla \phi_{Kl}(x, y) dx dy = g(x_i, y_i) \int_R \phi_{ij}(x, y) dx dy \quad (80-2)$$

در به دست آوردن سمت راست (80-2) فرض شده است که $g(x, y)$ تغییرات آرامی داشته باشد. بنابراین با مقدارش در x_i و y_i تقریب زده شده است. پس از گرفتن انتگرال‌های رابطه‌ی (80-2) این رابطه یکی از N معادله‌ی جفت شده‌ی غیرهمگن خطی برای N مجهول ψ_{Kl} خواهد شد. جفت شدگی بین ψ_{Kl} ‌ها به تعداد کمی از بخش‌های نزدیک به (x_i, y_i) (مطابق شکل 2-14) محدود است. انتگرال‌های لازم برای توابع (78-2) عبارتند از

$$\int_R \phi_{ij}(x, y) dx dy = h^2 \quad (81-2)$$

$$\int_R \nabla \phi_{ij}(x, y) \cdot \nabla \phi_{Kl}(x, y) dx dy = \left\{ \begin{array}{c} \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{array} \right\} \text{ برای } \left\{ \begin{array}{l} k = i, l = j \\ k = i \pm 1, l = j \\ k = i, l = j \pm 1 \\ k = i \pm 1, l = j \pm 1 \end{array} \right.$$



شکل ۲-۱۴:

انتگرال اول را محاسبه می‌کنیم

$$\begin{cases} |x - x_i| \leq h, & |y - y_i| \leq j \\ |X| \leq h, & |Y| \leq j \\ -h \leq X \leq h; & -h \leq Y \leq h \end{cases} \quad (۱-۸۱-۲)$$

$$\int_R \phi_{ij}(x, y) dx dy = \int_{-h}^h \int_{-h}^h \left(1 - \frac{|X|}{h}\right) \left(1 - \frac{|Y|}{h}\right) dX dY \quad (۲-۸۱-۲)$$

در اینجا از رابطه‌ی (۲-۷۸) استفاده شده است. اما

$$\int_{-h}^h \left(1 - \frac{|X|}{h}\right) dX = \int_{-h}^0 \left(1 + \frac{X}{h}\right) dX + \int_0^h \left(1 - \frac{X}{h}\right) dX = h \quad (۳-۸۱-۲)$$

بنابراین

$$\int_R \phi_{ij}(x, y) dx dy = h^2 \quad (۴-۸۱-۲)$$

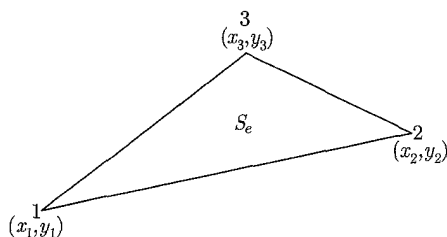
برای حل بقیه‌ی انتگرال‌های رابطه‌ی (۲-۸۱) نیز به همین روش عمل می‌شود.

اگر رابطه‌ی (۲-۸۰) را به شکل ماتریسی $\mathbf{K}\Psi = \mathbf{G}$ که در آن \mathbf{K} یک ماتریس $N \times N$ و Ψ و \mathbf{G} بردارهای N ستونی‌اند بنویسیم، ماتریس K یک ماتریس "اسپارس" با تعداد کمی عنصر غیرصفر در هر سطر و ستون خواهد شد.

جواب معادله‌ی عملگر ماتریسی به طریق وارون کردن ماتریس "اسپارس" یا استفاده از روش‌های عددی خاص به دست می‌آید.

یک شبکه‌ی مربعی در بسیاری از مسائل مناسب نیست، چراکه ممکن است جواب از یک قسمت از ناحیه‌ی موردنظر به قسمت دیگر آن بسیار سریع تغییر کند. بنابراین واحد پایه‌ی مثلثی را در اینجا توصیف می‌کنیم. عنصر مثلثی پایه‌ی $e(1, 2, 3)$ در شکل (۱۵-۲) نشان داده شده است. به‌طور تقریبی داریم

$$\psi(x, y) \approx \psi_e(x, y) = A + Bx + Cy \quad (۵-۸۱-۲)$$



شکل ۱۵-۲:

سه مقدار (ψ_1, ψ_2, ψ_3) در رأس‌ها، ضرایب (A, B, C) را تعیین می‌کنند. برای فرآیند محاسبه‌ی عددی سه تابع شکل $N_j^{(e)}(x, y)$ را برای هر یک از رأس‌ها به‌گونه‌ای که $N_j^{(e)} = 1$ و $x = x_i, y = y_i, N_j^{(e)} = 0$ در دیگر رأس‌ها شوند تعریف می‌کنیم. توابع شکل برای عنصر e بیرون از ناحیه‌ی مثلثی صفر می‌شود. $N_1^{(e)} = a_1 + b_1x + c_1y$ را در نظر بگیرید. داریم

$$a_1 + b_1x_1 + c_1y_1 = 1$$

$$a_1 + b_1x_2 + c_1y_2 = 0$$

$$a_1 + b_1x_3 + c_1y_3 = 0$$

دترمینان D ضریب سمت چپ عبارت است از

$$D = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} = (x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)$$

ثابت می‌کنیم $D = 2S_e$ ، که در آن S_e مساحت مثلث است

$$A(x_1, y_1) \quad , \quad B(x_2, y_2) \quad , \quad C(x_3, y_3)$$

$$AB = (x_2 - x_1, y_2 - y_1) \quad , \quad AC = (x_3 - x_1, y_3 - y_1)$$

$$S_e = \frac{1}{V} \mathbf{AB} \times \mathbf{BC} = \frac{1}{V} \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ (x_2 - x_1) & (y_2 - y_1) & 0 \\ (x_3 - x_1) & (y_3 - y_1) & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{V} \{((x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1))\hat{k}\}$$

$$S_e = \frac{1}{V} D \Rightarrow \boxed{D = 2S_e}$$

بنابراین ضرایب (a_1, b_1, c_1) به صورت زیر هستند

$$a_1 = \frac{1}{2S_e} (x_2 y_3 - x_3 y_2) \equiv \frac{1}{D} \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix}$$

$$b_1 = \frac{1}{2S_e} (y_2 - y_3) \equiv \frac{1}{D} \begin{vmatrix} 1 & y_2 \\ 1 & y_3 \end{vmatrix}$$

$$c_1 = \frac{-1}{2S_e} (x_2 - x_3)$$

$N_j^{(e)}$ های دیگر به کمک تبدیل دوری اندیس‌ها به راحتی نوشته می‌شوند. $N_j^{(e)}$ ها و ضرایب مربوطه روابط زیر را برآورده می‌کنند

$$\sum_{i=1}^3 N_i^{(e)}(x, y) = 1 \quad ; \quad \sum_{i=1}^3 a_i = 1 \quad ; \quad \sum_{i=1}^3 b_i = 0 \quad ; \quad \sum_{i=1}^3 c_i = 0$$

$$a_j + b_j \bar{x}_e + c_j \bar{y}_e = \frac{1}{3} \quad ; \quad (j = 1, 2, 3)$$

در اینجا $\bar{x}_e = \frac{(x_1 + x_2 + x_3)}{3}$ و $\bar{y}_e = \frac{(y_1 + y_2 + y_3)}{3}$ مختصات مرکزگرانی عنصر مثلثی e هستند.

توابع شکل برای اجزای مثلثی که ناحیه‌ی R را می‌پوشانند، به عنوان مجموعه‌ی مستقل خطی و جایگزیده‌ی بسط در روش گالرکین به کار می‌روند

$$\psi(x, y) \approx \sum_{f,j} \psi_j^{(f)} N_j^{(f)}(x, y) \quad (۸۲-۲)$$

جمع روی تمام مثلث‌ها و روی رأس‌های هر مثلث انجام می‌شود، ثابت‌های $\psi_j^{(f)}$ ، مقادیر موردنظر میدان در رأس‌ها هستند.

به معادله پواسن با شرایط مرزی دیریکله و انتگرال صفرشونده‌ی (۷۷-۲) برمی‌گردیم، با انتخاب توابع آزمون $\phi(x, y) = N_i^{(e)}(x, y)$ برای جزء خاص e و رأس i خواهیم داشت

$$\sum_{j=1}^3 \Psi_j^{(e)} \int_e \nabla N_i^{(e)} \cdot \nabla N_j^{(e)} dx dy = \int_e g N_i^{(e)} dx dy \quad (۸۳-۲)$$

که در آن از روابط (۷۷-۲) و (۸۲-۲) استفاده شده است.

اگر $g(x, y)$ روی جزء e به آرامی تغییر کند، به‌طور تقریبی $g_e \equiv g(\bar{x}_e, \bar{y}_e)$ است، و از زیر انتگرال بیرون می‌آید. انتگرال باقیمانده در سمت راست عبارت است از

$$\int_e N_i^{(e)} dx dy = S_e (a_i + b_i \bar{x}_e + c_i \bar{y}_e) = \frac{1}{3} S_e \quad (۸۴-۲)$$

برای انتگرال سمت چپ در (۸۳-۲)، به دلیل خطی بودن توابع شکل، انتگرالده یک مقدار ثابت است. با

$$\text{توجه به } b_i = \frac{\partial N_i^{(e)}}{\partial x} \text{ و } c_i = \frac{\partial N_i^{(e)}}{\partial y}, \text{ ضرایب زیر را تعریف می‌کنیم}$$

$$K_{ij}^{(e)} = S_e (b_i b_j + c_i c_j) \quad (۸۵-۲)$$

ضرایب $k_{ij}^{(e)}$ یک آرایه از ضرایب جفت‌شده‌ی بدون بعد برای مثلث e را تشکیل می‌دهند. این ضرایب به شکل مثلث بستگی دارند، اما از اندازه و سمت‌گیری آن مستقل هستند. به کمک رابطه‌ی (۸۵-۲) رابطه‌ی (۸۳-۲) به‌صورت زیر درمی‌آید

$$\sum_{j=1}^3 k_{ij}^{(e)} \Psi_j^{(e)} = \frac{S_e}{3} g_e = \frac{S_e}{3} g(\bar{x}_e, \bar{y}_e) \quad (۸۶-۲)$$

$$(i = 1, 2, 3)$$

برای هر جزء e ، سه معادله‌ی جبری وجود دارد، به استثنای موقعی که ضلع یا اضلاعی از مثلث بخشی از مرز را تشکیل دهند. سه معادله‌ی جفت‌شده به شکل ماتریسی به‌صورت زیر نوشته می‌شود

$$k^{(e)} \Psi_j^{(e)} = G^{(e)} \quad (۱-۸۶-۲)$$

اکنون نتیجه‌ی به‌دست آمده برای یک جزء را به‌گونه‌ای تعمیم می‌دهیم که شامل تمامی اجزای مثلثی که ناحیه‌ی R را می‌پوشانند بشود.

اگر تعداد رأس‌های داخلی N باشد، و تعداد کل رأس‌ها که شامل مرزها نیز می‌شود N_0 ، آنگاه رأس‌های داخلی را با اندیس‌های $1, 2, 3, \dots, N$ ، j ، و رأس‌های مرزی را با اندیس‌های $z = N + 1, N + 2, \dots, N_0$ برچسب می‌زنیم.

بنابراین به کمک ماتریس \mathbf{K} که از تعمیم ماتریس $k^{(e)}$ به دست می آید، و با توجه به تعریف بردارهای Ψ و G ، به نتیجه‌ی نهایی زیر می‌رسیم

$$\mathbf{K}\Psi = \mathbf{G} \quad (۸۷-۲)$$

طوری‌که

$$\mathbf{K} = (k_{ij}) \text{ با } k_{ii} = \sum_Y k_{ii}^{(e)} \quad \text{و} \quad k_{ij} = \sum_E k_{ij}^{(e)} \quad i \neq j$$

$$G_i = \frac{1}{3} \sum_T S_e g_e - \sum_{j=N+1}^{N_0} k_{ij}^{(e)} \Psi_j^{(e)} \quad (۸۸-۲)$$

برای جمع روی تمام مثلث‌هایی که به رأس داخلی i متصلند، از \sum_T و برای جمع روی تمام مثلث‌هایی با یک ضلع از رأس داخلی i به رأس داخلی j از \sum_E استفاده شده است.

فصل ۳

مسائل مقدار مرزی در الکترواستاتیک: ۲

در این فصل موضوع مسائل مقدار مرزی را ادامه داده‌ایم. ابتدا هندسه‌های کروی و استوانه‌ای مورد بررسی قرار گرفته‌اند و جواب‌های معادله‌ی لاپلاس به صورت بسط برحسب سری‌هایی از توابع راست هنجار مناسب نشان داده شده‌اند. در اینجا فقط نکات عمده‌ی مربوط به جواب‌های معادلات دیفرانسیل معمولی مختلفی را که از معادله‌ی لاپلاس با روش جداسازی متغیرها به دست می‌آیند ارائه کرده‌ایم. با این حال خواص توابع مختلف نیز به صورت خلاصه ارائه شده‌اند. مسئله‌ی ساختن توابع گرین برحسب توابع راست هنجار به طور طبیعی در هنگام حل معادله‌ی پواسن در هندسه‌های مختلف مطرح می‌شود. در این فصل مثال‌هایی روشن از توابع گرین را به دست آورده‌ایم و برای مسائل خاصی نیز به کار برده‌ایم و معادل بودن روش‌های مختلف در مسائل پتانسیلی را نیز مورد بحث قرار داده‌ایم.

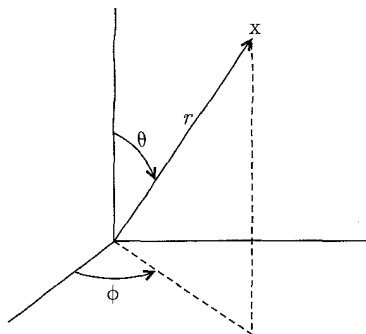
۱-۳ معادله‌ی لاپلاس در مختصات کروی

در مختصات کروی (r, θ, ϕ) در شکل ۱-۳، معادله‌ی لاپلاس را می‌توانیم به صورت زیر بنویسیم

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r\Phi) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi^2} = 0 \quad (1-3)$$

اگر برای پتانسیل، یک شکل حاصل ضربی در نظر بگیریم، در این صورت می‌توانیم آن را به صورت زیر بنویسیم

$$\Phi = \frac{U(r)}{r} P(\theta) Q(\phi) \quad (2-3)$$



شکل ۱-۳:

وقتی شکل حاصل ضربی فوق را در (۱-۳) جایگزین کنیم معادله زیر نتیجه می شود

$$PQ \frac{d^2 U}{dr^2} + \frac{UQ}{r^2 \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{dP}{d\theta} \right) + \frac{UP}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{d^2 Q}{d\phi^2} = 0$$

اگر رابطه‌ی بالا را در $\frac{r^2 \sin^2 \theta}{UPQ}$ ضرب کنیم، به دست می آوریم

$$r^2 \sin^2 \theta \left[\frac{1}{U} \frac{d^2 U}{dr^2} + \frac{1}{Pr^2 \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{dP}{d\theta} \right) \right] + \frac{1}{Q} \frac{d^2 Q}{d\phi^2} = 0 \quad (3-3)$$

با این کار بستگی ϕ ی این معادله در جمله‌ی آخر مجزا شد. لذا این جمله باید یک ثابت باشد که آن را $-m^2$ می نامیم

$$\frac{1}{Q} \frac{d^2 Q}{d\phi^2} = -m^2 \quad (4-3)$$

این معادله دارای جواب‌های زیر است

$$Q = e^{\pm im\phi} \quad (5-3)$$

اگر کل ناحیه‌ی سمتی را مجاز بدانیم، برای تک مقدار بودن Q ، m باید عددی صحیح باشد. با بررسی‌های مشابه، معادلات جداگانه‌ای نیز برای $P(\theta)$ و $U(r)$ به دست می آید

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{dP}{d\theta} \right) + \left[l(l+1) - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right] P = 0 \quad (6-3)$$

$$\frac{d^2 U}{dr^2} - \frac{l(l+1)}{r^2} U = 0 \quad (7-3)$$

که در آن $l(l+1)$ ثابت حقیقی دیگری است.

از شکل معادله‌ی شعاعی واضح است که یک تک‌توان از r (به‌جای یک سری توانی) آن را برآورده می‌کند. جواب به صورت

$$U = Ar^{l+1} + Br^{-l} \quad (۸-۳)$$

به‌دست می‌آید، اما l هم‌چنان تعیین نشده باقی می‌ماند.

۲-۳ معادله‌ی لژاندر و چندجمله‌ای‌های لژاندر

معادله‌ی θ برای $P(\theta)$ معمولاً به‌جای خود θ برحسب $x = \cos \theta$ بیان می‌شود. در این صورت این معادله شکل زیر را به‌خود می‌گیرد

$$\frac{d}{dx} \left[(1-x^2) \frac{dP}{dx} \right] + \left[l(l+1) - \frac{m^2}{1-x^2} \right] P = 0 \quad (۹-۳)$$

این معادله، معادله‌ی لژاندر تعمیم‌یافته نامیده می‌شود و جواب‌های آن توابع لژاندر وابسته هستند. قبل از بررسی (۹-۳)، جواب را با سری توانی، برای معادله‌ی دیفرانسیل لژاندر معمولی با $m^2 = 0$ ، مطرح می‌کنیم

$$\frac{d}{dx} \left[(1-x^2) \frac{dP}{dx} \right] + l(l+1)P = 0 \quad (۱۰-۳)$$

فرض می‌کنیم که کل ناحیه تغییرات $\cos \theta$ موردنظر باشد (شامل قطب‌های شمال و جنوب)، در این صورت باید جواب مطلوب، تک‌مقدار، متناهی و به این خاطر که یک پتانسیل فیزیکی را نشان می‌دهد در فاصله‌ی $-1 \leq x \leq 1$ پیوسته باشد. فرض می‌کنیم که بتوان جواب را با یک سری توانی به صورت

$$P(x) = x^n \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j \quad (۱۱-۳)$$

نمایش داد، که در آن پارامتری است که باید تعیین شود. وقتی این سری توانی را در (۱۰-۳) جایگزین کنیم سری زیر نتیجه می‌شود

$$\sum_{j=0}^{\infty} \{ (\alpha+j)(\alpha+j-1)a_j x^{\alpha+j-2} - [(\alpha+j)(\alpha+j+1) - l(l+1)] a_j x^{\alpha+j} \} = 0 \quad (۱۲-۳)$$

در این بسط، ضریب هر توانی از x باید به‌طور جداگانه صفر شود. به‌ازای $j=0$ ، درمی‌یابیم که

$$\left. \begin{aligned} \alpha(\alpha-1) &= 0 && \text{اگر } \alpha \neq 0 \text{ در این صورت} \\ \alpha(\alpha+1) &= 0 && \text{اگر } \alpha \neq -1 \text{ در این صورت} \end{aligned} \right\} \quad (۱۳-۳)$$

در حالی‌که برای یک مقدار کلی j ، داریم

$$a_{j+2} = \left[\frac{(\alpha+j)(\alpha+j+1) - l(l+1)}{(\alpha+j+1)(\alpha+j+2)} \right] a_j \quad (۱۴-۳)$$

با یک نگاه اجمالی به نظر می‌رسد دو رابطه‌ی (۳-۱۳) هم‌ارز باشند و اینکه کافی است یا a_0 یا a_1 (اما نه هر دو) مخالف صفر انتخاب شوند. با انجام انتخاب قبلی داریم $\alpha = 0$ یا $\alpha = 1$.

از (۳-۱۴) ملاحظه می‌کنیم که سری توانی فقط دارای توان‌های زوجی از x ($\alpha = 0$) یا فقط دارای توان‌های فردی از x ($\alpha = 1$) است.

برای هر یک از سری‌های $\alpha = 0$ یا $\alpha = 1$ ، امکان اثبات خواص زیر وجود دارد

- صرف‌نظر از مقدار l ، سری به‌ازای $1 < x^2$ همگرا می‌شود.

- سری در $x = \pm 1$ واگرا می‌شود مگر اینکه خاتمه یابد.

چون جوابی می‌خواهیم که در $x = \pm 1$ و نیز به‌ازای $1 < x^2$ متناهی باشد، لذا نیاز داریم که این سری خاتمه پیدا کند. چون α و l اعداد صحیح مثبت و یا صفری هستند، لذا رابطه‌ی بازگشتی (۳-۱۴) تنها اگر l یک عدد صحیح مثبت و یا صفر باشد خاتمه خواهد یافت. حتی پس از آن تنها یکی از دو سری در $x = \pm 1$ همگرا می‌شود. اگر l زوج (فرد) باشد در این صورت فقط سری $\alpha = 0$ ($\alpha = 1$) خاتمه خواهد یافت.* چندجمله‌ای‌ها به‌عنوان بالاترین توان x شان در هر حالتی دارای x^l هستند و بالاترین توان بعدی x^{l-2} است و غیره که تا مقدار $x^0(x)$ برای l زوج (فرد) پایین می‌رود. طبق قرارداد این چندجمله‌ای‌ها با دارا بودن مقدار واحد در $x = +1$ به‌نجار شده‌اند و چندجمله‌ای‌های لژاندر مرتبه‌ی l یعنی $P_l(x)$ نامیده می‌شوند. اولین چندجمله‌ای‌های لژاندر عبارتند از

$$\left. \begin{aligned} P_0(x) &= 1 \\ P_1(x) &= x \\ P_2(x) &= \frac{1}{2}(3x^2 - 1) \\ P_3(x) &= \frac{1}{2}(5x^3 - 3x) \\ P_4(x) &= \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3) \end{aligned} \right\} \quad (3-15)$$

(* برای مثال اگر $l = 0$ باشد، سری $\alpha = 1$ دارای یک ضریب کلی $a_j = \frac{a_0}{(j+1)}$ به‌ازای $j = 0, 2, 4, \dots$ و به این ترتیب سری عبارت است از

$$a_0 \left(x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \dots \right)$$

که دقیقاً a_0 برابر بسط سری توانی تابع

$$Q_0(x) = \frac{1}{2} \ln \frac{(1+x)}{(1-x)}$$

است که به‌وضوح در $x = \pm 1$ نیز واگرا می‌شود. برای هر مقداری از l ، تابع مشابه $Q_l(x)$ همراه با لگاریتم‌هایی در آن که به‌عنوان انباز (Partner) برای جواب چندجمله‌ای خوش‌رفتار، مطرح هستند. Magnus et al. را ملاحظه کنید (صفحه‌ی ff ۱۵۱). ویتاکر و واتسون (فصل XV) بحثی را با استفاده از توابع تحلیلی ارائه کرده‌اند.

با به انجام رساندن جواب‌های سری توانی (۳-۱۱) و (۳-۱۴) امکان به‌دست آوردن نمایشی فشرده از چندجمله‌ای‌های لژاندر وجود دارد که تحت عنوان فرمول ردیگز

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{dx^l} (x^2 - 1)^l \quad (3-16)$$

شناخته شده است [آرفکن را ببینید].

چندجمله‌ای‌های لژاندر در فاصله‌ی $1 \leq x \leq -1$ - مجموعه‌ای کامل و متعامد از توابع را تشکیل می‌دهند. برای اثبات تعامد می‌توانیم مستقیماً به معادله‌ی دیفرانسیل (۳-۱۰) متوسل شویم. معادله‌ی دیفرانسیل مربوط به $P_l(x)$ را می‌نویسیم، آن را در $P_{l'}(x)$ ضرب و سپس روی این فاصله انتگرال می‌گیریم

$$\int_{-1}^1 P_{l'}(x) \left\{ \frac{d}{dx} \left[(1 - x^2) \frac{dP_l}{dx} \right] + l(l+1)P_l(x) \right\} dx = 0 \quad (3-17)$$

با انتگرال‌گیری جمله‌ی اول، به روش جزءبه‌جزء به‌دست می‌آوریم

$$\int_{-1}^1 \left[(x^2 - 1) \frac{dP_l}{dx} \frac{dP_{l'}}{dx} + l(l+1)P_{l'}(x)P_l(x) \right] dx = 0 \quad (3-18)$$

حال اگر (۳-۱۸) را با تعویض l و l' دوباره بنویسیم و آن را از خود (۳-۱۸) کم کنیم، نتیجه‌ی کار شرط تعامدی زیر است

$$[l(l+1) - l'(l'+1)] \int_{-1}^1 P_{l'}(x)P_l(x) dx = 0 \quad (3-19)$$

به‌ازای $l \neq l'$ انتگرال موجود در این معادله باید صفر شود و به‌ازای $l = l'$ این انتگرال متناهی است. برای تعیین مقدار آن، استفاده از یک نمایش صریح از چندجمله‌ای‌های لژاندر یعنی فرمول ردیگز لازم است. در این صورت انتگرال به‌وضوح عبارت است از

$$N_l \equiv \int_{-1}^1 [P_l(x)]^2 dx = \frac{1}{2^{2l} (l!)^2} \int_{-1}^1 \frac{d^l}{dx^l} (x^2 - 1)^l \frac{d^l}{dx^l} (x^2 - 1)^l dx$$

l مرتبه انتگرال‌گیری به روش جزءبه‌جزء به نتیجه‌ی زیر منجر می‌شود

$$N_l = \frac{(-1)^l}{2^{2l} (l!)^2} \int_{-1}^1 (x^2 - 1)^l \frac{d^{2l}}{dx^{2l}} (x^2 - 1)^l dx$$

$2l$ مرتبه مشتق‌گیری از $(x^2 - 1)^l$ ، ثابت $(2l)!$ را نتیجه می‌دهد، طوری‌که

$$N_l = \frac{(2l)!}{2^{2l} (l!)^2} \int_{-1}^1 (1 - x^2)^l dx$$

انتگرال باقی مانده را می توان با صرف نیروی زیاد و البته با استقراء نیز انجام داد. انتگرالده را به صورت زیر می نویسیم

$$(1-x^2)^l = (1-x^2)(1-x^2)^{l-1} = (1-x^2)^{l-1} + \frac{x}{2l} \frac{d}{dx} (1-x^2)^l$$

به این ترتیب داریم

$$N_l = \left(\frac{2l-1}{2l} \right) N_{l-1} + \frac{(2l-1)!}{2^{2l}(l!)^2} \int_{-1}^1 x d[(1-x^2)^l]$$

انتگرال گیری به روش جزء به جزء در انتگرال آخر نتیجه می دهد

$$N_l = \left(\frac{2l-1}{2l} \right) N_{l-1} - \frac{1}{2l} N_l$$

یا

$$(2l+1)N_l = (2l-1)N_{l-1} \quad (20-3)$$

این نشان می دهد که $(2l+1)N_l$ مستقل از l است.

برای $l=0$ ، با $P_0(x) = 1$ ، داریم؛ $N_0 = 2$. بنابراین $N_l = \frac{2}{(2l+1)}$ ، و شرط تعامد را می توان

به صورت زیر نوشت

$$\int_{-1}^1 P_l(x) P_l(x) dx = \frac{2}{2l+1} \delta_{ll} \quad (21-3)$$

و توابع راست هنجار در راستای بخش (۸-۲) عبارتند از

$$U_l(x) = \sqrt{\frac{2l+1}{2}} P_l(x) \quad (22-3)$$

چون چند جمله ای های لژاندر، مجموعه ای متعامد از توابع را تشکیل می دهند، هر تابع $f(x)$ را می توان روی فاصله ای $-1 \leq x \leq 1$ - بر حسب آن ها بسط داد. نمایش سری لژاندر عبارت است از

$$f(x) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l P_l(x) \quad (23-3)$$

که در آن

$$A_l = \frac{2l+1}{2} \int_{-1}^1 f(x) P_l(x) dx \quad (24-3)$$

به عنوان مثال، تابع نشان داده شده در شکل (۲-۳) را در نظر بگیرید

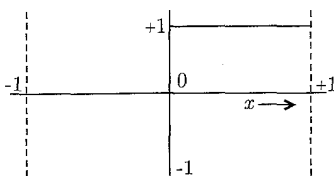
$$\left[\begin{array}{l} f(x) = +1 \quad x > 0 \text{ برای} \\ = -1 \quad x < 0 \text{ برای} \end{array} \right.$$

به این ترتیب

$$A_l = \frac{2l+1}{2} \left[\int_0^1 P_l(x) dx - \int_{-1}^0 P_l(x) dx \right]$$

از آنجائی که $P_l(x)$ حول $x = 0$ فرد (زوج) است [اگر l فرد (زوج) باشد] لذا فقط ضرایب l فرد مخالف صفر هستند. به این ترتیب برای l های فرد داریم

$$A_l = (2l+1) \int_0^1 P_l(x) dx \quad (25-3)$$



شکل ۲-۳:

با استفاده از فرمول ردیگز این انتگرال را می توان محاسبه کرد که منجر به نتیجه زیر می شود

$$A_l = \left(-\frac{1}{2}\right)^{\frac{(l-1)}{2}} \frac{(2l+1)(l-2)!!}{2 \left(\frac{l+1}{2}\right)!} \quad (26-3)$$

که در آن

$$(2n+1)!! = (2n+1)(2n-1)(2n-3)\dots \times 5 \times 3 \times 1$$

به این ترتیب سری $f(x)$ عبارت است از

$$f(x) = \frac{3}{2} P_1(x) - \frac{7}{8} P_3(x) + \frac{11}{16} P_5(x) - \dots \quad (27-3)$$

در بین چندجمله ای های لژاندر از مرتبه های مختلف، روابط بازگشتی مشخص در محاسبه ی انتگرال ها، تولید چندجمله ای های مرتبه ی بالاتر با استفاده از چندجمله ای های مرتبه ی پایین تر و غیره مفید هستند. کار راحتی است که از فرمول ردیگز نشان دهیم

$$\frac{dP_{l+1}}{dx} - \frac{dP_{l-1}}{dx} - (2l+1)P_l = 0 \quad (28-3)$$

می‌توان این نتیجه را با معادله‌ی دیفرانسیل (۳-۱۰) ترکیب کرد تا فرمول‌های بازگشتی متعددی را نتیجه دهد که بعضی از آن‌ها عبارت‌اند از

$$\begin{aligned} (l+1)P_{l+1} - (2l+1)xP_l + lP_{l-1} &= 0 \\ \frac{dP_{l+1}}{dx} - x\frac{dP_l}{dx} - (l+1)P_l &= 0 \quad (29-3) \\ (x^2-1)\frac{dP_l}{dx} - lP_l + lP_{l-1} &= 0 \end{aligned}$$

برای مثال استفاده از این فرمول‌های بازگشتی، محاسبه‌ی انتگرال زیر را در نظر بگیرید

$$I_l = \int_{-1}^1 xP_l(x)P_{l'}(x)dx \quad (30-3)$$

از اولین فرمول‌های بازگشتی (۳-۲۹)، یک رابطه برای $xP_l(x)$ به دست می‌آوریم. بنابراین (۳-۳۰) به صورت زیر درمی‌آید

$$I_l = \frac{1}{2l+1} \int_{-1}^1 P_{l'}(x)[(l+1)P_{l+1}(x) + lP_{l-1}(x)]dx$$

حال می‌توانیم انتگرال تعامدی (۳-۲۱) را برای نشان دادن اینکه این انتگرال به جز در $l' = l \pm 1$ در جاهای دیگر صفر می‌شود، به کار بگیریم، و همچنین اینکه برای این مقادیر داریم

$$\int_{-1}^1 xP_l(x)P_{l'}(x)dx = \begin{cases} \frac{2(l+1)}{(2l+1)(2l+3)}, & l' = l+1 \\ \frac{2l}{(2l-1)(2l+1)}, & l' = l-1 \end{cases} \quad (31-3)$$

در حقیقت این روابط نتیجه‌ای مشابه‌اند، با نقش‌های تبدیل یافته l و l' . با روشی مشابه، نشان دادن این نکته ساده است که

$$\int_{-1}^1 x^2 P_l(x)P_{l'}(x)dx = \begin{cases} \frac{2(l+1)(l+2)}{(2l+1)(2l+3)(2l+5)}, & l' = l+2 \\ \frac{2(2l^2+2l-1)}{(2l-1)(2l+1)(2l+3)}, & l' = l \end{cases} \quad (32-3)$$

که در آن فرض شده است، $l' \geq l$.

۳-۳ مسائل مقدار مرزی با تقارن سمتی

از شکل جواب معادله‌ی لاپلاس در مختصات کروی (۲-۳) ملاحظه می‌شود که برای مسئله‌ی دارای تقارن سمتی، در رابطه‌ی (۳-۵)، $m = 0$ است. این بدان معنی است که جواب عمومی برای یک چنین مسئله‌ای عبارت است از

$$\Phi(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} [A_l r^l + B_l r^{-(l+1)}] P_l(\cos \theta) \quad (۳۳-۳)$$

ضرایب A_l و B_l را می‌توانیم از شرایط مرزی تعیین کنیم. فرض کنید پتانسیل روی سطح کره‌ای به شعاع a به صورت $V(\theta)$ مشخص شده باشد و هدف به‌دست آوردن پتانسیل در ناحیه‌ی داخل کره باشد. در صورتی که باری در مبدأ نداشته باشیم، پتانسیل باید در آنجا متناهی باشد، لذا به‌ازای تمام l ها، $B_l = 0$ خواهد بود. ضرایب A_l با تعیین (۳۳-۳) روی سطح کره پیدا می‌شوند

$$V(\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l a^l P_l(\cos \theta) \quad (۳۴-۳)$$

این رابطه دقیقاً یک سری لژاندر از نوع (۲۳-۳) است طوری‌که ضرایب A_l عبارتند از

$$A_l = \frac{2l+1}{2a^l} \int_0^\pi V(\theta) P_l(\cos \theta) \sin \theta d\theta \quad (۳۵-۳)$$

برای مثال اگر $V(\theta)$ همان $V(\theta)$ ی بخش (۲-۷) باشد، همراه با دو نیم‌کره با پتانسیل‌های مساوی و مخالف، یعنی

$$V(\theta) = \begin{cases} +V, & (0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}) \\ -V, & (\frac{\pi}{2} < \theta \leq \pi) \end{cases}$$

در این صورت ضرایب با ضرایب موجود در (۳-۲۷) متناسبند. به این ترتیب پتانسیل در داخل کره عبارت است از

$$\Phi(r, \theta) = V \left[\frac{3}{2} \frac{r}{a} P_1(\cos \theta) - \frac{5}{8} \left(\frac{r}{a} \right)^3 P_3(\cos \theta) + \frac{11}{16} \left(\frac{r}{a} \right)^5 P_5(\cos \theta) \dots \right] \quad (۳۶-۳)$$

برای یافتن پتانسیل در خارج از کره تنها $\left(\frac{r}{a} \right)^l$ را با $\left(\frac{a}{r} \right)^{l+1}$ تعویض می‌کنیم. می‌توان ملاحظه کرد که پتانسیل منتجه همانند (۲-۲۷) است که با روش‌های دیگری به‌دست آمد.

سری (۳۳-۳) همراه با ضرایب خود که با شرایط مرزی تعیین شدند، بسط یکتایی از پتانسیل است. این یکتایی روش‌هایی را در به‌دست آوردن جواب مسائل پتانسیلی (از طریق اطلاعات مربوط به پتانسیل

در یک دامنه‌ی محدود و مشخص، یعنی روی محور تقارن، به دست می‌دهد. روی محور تقارن، (۳-۳۳) با $(z = r)$ به صورت زیر درمی‌آید

$$\Phi(z = r) = \sum_{l=0}^{\infty} [A_l r^l + B_l r^{-(l+1)}] \quad (۳۷-۳)$$

که برای z های مثبت معتبر است. برای z های منفی هر یک از جمله‌ها باید در l ضرب شود. فرض کنید با روش‌هایی بتوانیم پتانسیل $\Phi(z)$ را روی محور تقارن محاسبه کنیم. اگر این تابع پتانسیل را بتوانیم به صورت یک سری توانی از $z = r$ به شکل (۳۷-۳) با ضرایب مشخص بسط دهیم، در این صورت جواب برای پتانسیل در هر نقطه از فضا، با ضرب هر یک از توان‌های r^l و $r^{-(l+1)}$ در $P_l(\cos \theta)$ به دست می‌آید. با پذیرفتن ریسک، سر رفتن حوصله‌ی خواننده به مسئله‌ی نیم‌کره‌های با پتانسیل‌های مساوی و مخالف برمی‌گردیم. تا اینجا جواب سری توانی را با دو روش مختلف (۲-۲۷) و (۳-۳۶) به دست آوردیم. روشی را که اکنون بیان کردیم روش سوم در محاسبه‌ی پتانسیل است. برای یک نقطه روی محور، شکل بسته‌ی (۲-۲۲) را پیدا کرده‌ایم

$$\Phi(z = r) = V \left[1 - \frac{r^2 - a^2}{r\sqrt{r^2 + a^2}} \right]$$

این رابطه را می‌توانیم برحسب توان‌هایی از $\frac{a^2}{r^2}$ بسط دهیم

$$\Phi(z = r) = \frac{V}{\sqrt{\pi}} \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^{j-1} \frac{\left(2j - \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(j - \frac{1}{2}\right)}{j!} \left(\frac{a}{r}\right)^{2j}$$

مقایسه‌ی این رابطه با بسط (۳۷-۳) نشان می‌دهد که تنها مقادیر فرد l ($l = 2j - 1$) وارد شده‌اند. در نتیجه جواب معتبر برای تمام نقاط خارج از کره عبارت است از

$$\Phi(r, \theta) = \frac{V}{\sqrt{\pi}} \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^{j-1} \frac{\left(2j - \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(j - \frac{1}{2}\right)}{j!} \left(\frac{a}{r}\right)^{2j} P_{2j-1}(\cos \theta)$$

این جواب مشابه با جوابی است که در (۲-۲۷) و (۳-۳۶) به دست آوردیم. یک بسط مهم مربوط است به پتانسیل در نقطه‌ی x ناشی از بار نقطه‌ای واحد در x'

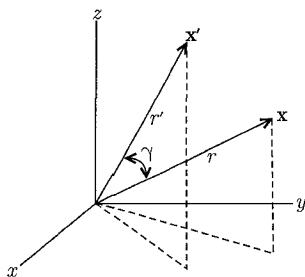
$$\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r_{<}^l}{r_{>}^{l+1}} P_l(\cos \gamma) \quad (۳۸-۳)$$

که در آن $r < r' < r$ مقدار کوچک تر (بزرگ تر) $|x|$ و $|x'|$ است و همان گونه که در شکل ۳-۳ نشان دادیم γ زاویه ی بین x و x' است. این موضوع را می توانیم با دوران محورها به گونه ای که x' در راستای محور z قرار گیرد نیز اثبات کنیم. در این صورت پتانسیل برآورده کننده ی معادله ی لاپلاس دارای تقارن سمتی است و می توان آن را به جز در نقطه ی $x = x'$ طبق (۳۳-۳) بسط داد

$$\frac{1}{|x - x'|} = \sum_{l=0}^{\infty} (A_l r^l + B_l r^{-(l+1)}) P_l(\cos \gamma)$$

اگر نقطه ی x روی محور z باشد طرف سمت راست رابطه ی بالا به (۳۷-۳) کاهش می یابد، در حالی که طرف سمت چپ به صورت زیر درمی آید

$$\frac{1}{|x - x'|} \equiv \frac{1}{(r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \gamma)^{\frac{1}{2}}}$$



شکل ۳-۳:

با انجام بسط درمی یابیم که برای نقطه ی x روی محور داریم

$$\frac{1}{|x - x'|} = \frac{1}{r'} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{r <}{r'} \right)^l$$

برای نقاط خارج از محور تنها کافی است طبق (۳۳-۳) و (۳۷-۳) هر یک از جمله ها را در $P_l(\cos \gamma)$ ضرب کنیم. با انجام این کار نتیجه عمومی (۳۸-۳) اثبات می شود. مثال دیگر پتانسیل ناشی از یک بار کلی q است که به صورت یکنواخت حول یک حلقه ی دایره ی به شعاع a توزیع شده است و همانند شکل (۴-۳) طوری قرار گرفته است که محورش روی محور z و مرکزش در $z = b$ است. پتانسیل در نقطه ی

P روی محور تقارن با $z = r$ ، دقیقاً برابر است با حاصل تقسیم $\frac{q}{4\pi\epsilon_0}$ بر فاصله ی AP

$$\Phi(z = r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{(r^2 + c^2 - 2cr \cos \alpha)^{\frac{1}{2}}}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 \quad \text{و} \quad \alpha = \tan^{-1} \left(\frac{a}{b} \right)$$

فاصله‌ی معکوس AP را می‌توانیم با استفاده از (۳۸-۳) بسط دهیم. به این ترتیب برای $r > c$ داریم

$$\Phi(z=r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{c^l}{r^{l+1}} P_l(\cos \alpha)$$

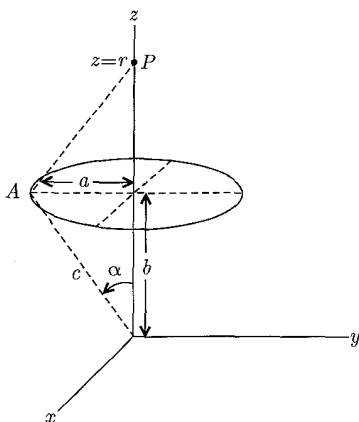
برای $r < c$ شکل متناظر عبارت است از

$$\Phi(z=r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r^l}{c^{l+1}} P_l(\cos \alpha)$$

حال پتانسیل در هر نقطه از فضا با ضرب هر عضو از این سری در $P_l(\cos \theta)$ به دست می‌آید

$$\Phi(r, \theta) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r^l}{r^{l+1}} P_l(\cos \alpha) P_l(\cos \theta)$$

که در آن $r < r < r$ مقدار کوچک‌تر (بزرگ‌تر) r و c است.



شکل ۳-۴: حلقه‌ای از بار با شعاع a و بار کلی q که مرکزش روی محور z و در $z = b$ قرار گرفته است.

۳-۴ رفتار میدان‌ها در یک حفره‌ی مخروطی یا نزدیک یک نقطه‌ی تیز

قبل از رجوع به مسائل مقدار مرزی بسیار پیچیده، یکی از آن‌ها را (با تقارن سمتی اما تنها با ناحیه‌ی محدودی

از θ) بررسی می‌کنیم. این مسئله یک مشابه سه‌بعدی از وضعیت بحث‌شده در بخش (۲-۱۱) است.

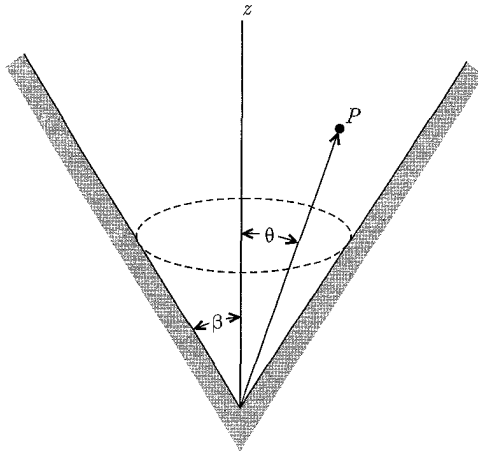
فرض کنید که ناحیه‌ی زاویه‌ای محدود $0 \leq \theta \leq \beta$ و $0 \leq \phi \leq 2\pi$ با یک سطح رسانای مخروطی،

همانند شکل (۳-۵)، کراندار شده باشد. برای $\beta < \frac{\pi}{2}$ می‌توان این ناحیه را به مثابه یک سوراخ مخروطی

عمیق در نظر گرفت که در رسانا ایجاد شده است.

برای $\beta > \frac{\pi}{4}$ ، این ناحیه از فضا عبارت است از ناحیه‌ای که یک رسانای مخروطی جهت‌دار را احاطه کرده است. مبحث بخش (۲-۳) برای معادله‌ی دیفرانسیل لژاندر نیاز به اصلاح دارد. با فرض وجود تقارن سمتی، رابطه‌ی (۳-۱۰) هنوز قابل استفاده است. اما اکنون به دنبال جواب‌هایی هستیم که روی ناحیه‌ی تغییرات، $x = \cos \theta$; $1 \geq x \geq \cos \beta$ متناهی و تک مقدار باشند.

علاوه بر این چون سطح رسانای $\theta = \beta$ در پتانسیل ثابتی قرار گرفته است (که می‌توان آن را صفر اختیار کرد) جواب برحسب $\cos \theta$ باید در $\theta = \beta$ صفر شود تا بدین وسیله شرایط مرزی را برآورده کند. چون در $x = 1$ به نظم احتیاج داریم لذا مناسب است به جای $x = 0$ یک بسط سری حول $x = 1$ انجام دهیم. درست همان طوری که این کار با (۳-۱۱) انجام شد.



شکل ۳-۵:

با معرفی متغیر

$$\xi = \frac{1}{4}(1-x)$$

معادله‌ی لژاندر (۳-۱۰) به صورت زیر درمی‌آید

$$\frac{d}{d\xi} \left[\xi(1-\xi) \frac{dP}{d\xi} \right] + \nu(\nu+1)P = 0 \quad (3-39)$$

که در آن برای جلوگیری از اشتباه l با ν عوض شده است جواب‌های شعاعی متناظر برای $\frac{U(r)}{r}$ در (۲-۳)، r^ν و $r^{-\nu-1}$ هستند. با یک جواب سری توانی به صورت

$$P(\xi) = \xi^\alpha \sum_{j=0}^{\infty} a_j \xi^j$$

در (۳-۳۹) جایگزین شود صفر شدن ضریب پایین‌ترین توان ξ لازم می‌دارد که $\alpha = 0$ باشد. به این ترتیب رابطه‌ی بازگشتی بین ضرایب متوالی در این سری عبارتند از

$$\frac{a_{j+1}}{a_j} = \frac{(j-\nu)(j+\nu+1)}{(j+1)^2} \quad (40-3)$$

با انتخاب $a_0 = 1$ برای بهنجارش جواب به واحد، در $\xi = 0$ ($\cos \theta = 1$)، نمایش سری زیر را خواهیم داشت

$$P_\nu(\xi) = 1 + \frac{(-\nu)(\nu+1)}{1!1!}\xi + \frac{(-\nu)(-\nu+1)(\nu+1)(\nu+2)}{2!2!}\xi^2 + \dots \quad (41-3)$$

در ابتدا می‌بینیم که اگر ν صفر یا یک عدد صحیح مثبت باشد این سری خاتمه می‌یابد. خواننده می‌تواند اثبات کند که به ازای $\nu = l = 0, 1, 2, \dots$ سری (۳-۴۱) دقیقاً همان چندجمله‌ای‌های لژاندر (۳-۱۵) است. برای ν که مساوی یک عدد صحیح نباشد (۳-۴۱) یک تعمیم است و یک تابع لژاندر نوع اول و از مرتبه‌ی ν نامیده می‌شود. سری (۳-۴۱) مثالی است از یک تابع فوق هندسی ${}_2F_1(a, b; c; z)$ که بسط سری آن عبارت است از

$${}_2F_1(a, b; c; z) = 1 + \frac{ab}{c} \frac{z}{1!} + \frac{a(a+1)b(b+1)}{c(c+1)} \frac{z^2}{2!} + \dots$$

مقایسه با (۳-۴۱) نشان می‌دهد که تابع لژاندر را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$P_\nu(x) = {}_2F_1\left(-\nu, \nu+1; 1; \frac{1-x}{2}\right) \quad (42-3)$$

در اینجا به متغیر معمول $x = \cos \theta$ بازگشته‌ایم. خواص توابع فوق هندسی به خوبی شناخته شده‌اند. (فصل ۵ از مورس^۲ و فشباخ^۳ را ملاحظه کنید. دنی^۴ و کریزی و یکی^۵، بخش‌های IV. ۱۸-۱۶ و ویتاکر^۶ و واتسون^۷ فصل XIV را ببینید). تابع لژاندر $P_\nu(x)$ در $x = 1$ و به ازای $|x| < 1$ منظم است اما در $x = -1$ تکین است مگر اینکه ν یک عدد صحیح باشد. بسته به مقدار ν ، این تابع دارای تعداد مشخصی صفر در ناحیه $|x| < 1$ است. چون چندجمله‌ای $P_l(x)$ ، l تا صفر به ازای $|x| < 1$ دارد، انتظار داریم که به ازای ν ‌های حقیقی، وقتی ν بزرگ و بزرگ‌تر می‌شود، صفرهای بیش‌تر و بیش‌تری مطرح شوند. علاوه بر این صفرهای فوق کمابیش به‌طور یکنواخت روی این فاصله توزیع شده‌اند. به‌ویژه وقتی ν افزایش می‌یابد اولین صفر به $x = 1$ نزدیک و نزدیک‌تر می‌شود.

جواب اصلی برای مسئله‌ی مقدار مرزی لاپلاس در شکل ۳-۵ عبارت است از

$$Ar^\nu P_\nu(\cos \theta)$$

که در آن $\nu > 0$ برای یک پتانسیل متناهی در مبدأ ضروری است. چون پتانسیل باید به ازای تمام مقادیر r در $\theta = \beta$ صفر شود، لازم است که

$$P_\nu(\cos \theta) = 0 \quad (۴۳-۳)$$

که یک شرط ویژه مقداری برای ν است. از آنچه در اینجا در مورد صفرهای P_ν بیان کردیم واضح است که (۴۳-۳) دارای تعداد نامتناهی جواب است، $\nu = \nu_k$ ($k = 1, 2, \dots$) که برحسب افزایش مرتبه مقدار آن‌ها را مرتب می‌کنیم.

به ازای $\nu = \nu_1$ ، $x = \cos \beta$ اولین صفر $P_{\nu_1}(x)$ است. به ازای $\nu = \nu_2$ ، $x = \cos \beta$ دومین صفر $P_{\nu_2}(x)$ است و همین طوری آخر. جواب کامل پتانسیل که در ناحیه $0 \leq \theta \leq \beta$ دارای تقارن سمتی است عبارت است از^۱

$$\Phi(r, \theta) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k r^{\nu_k} P_{\nu_k}(\cos \theta) \quad (۴۴-۳)$$

در جوهره‌ی بخش ۲-۱۱ به رفتار عمومی پتانسیل‌ها و میدان‌ها در همسایگی $r = 0$ علاقه‌مند شدیم و نه به جواب کامل با شرایط مرزی خاصی که در r ‌های بزرگ تحمیل شدند. به این ترتیب رفتار پتانسیل نزدیک $r = 0$ را با جمله‌ی اول در رابطه‌ی (۴۴-۳) تخمین می‌زنیم و می‌نویسیم

$$\Phi(r, \theta) \simeq Ar^\nu P_\nu(\cos \theta) \quad (۴۵-۳)$$

که در اینجا ν کوچک‌ترین ریشه‌ی (۴۳-۳) است. مؤلفه‌های میدان الکتریکی و چگالی بار سطحی روی رسانای مخروطی عبارتند از

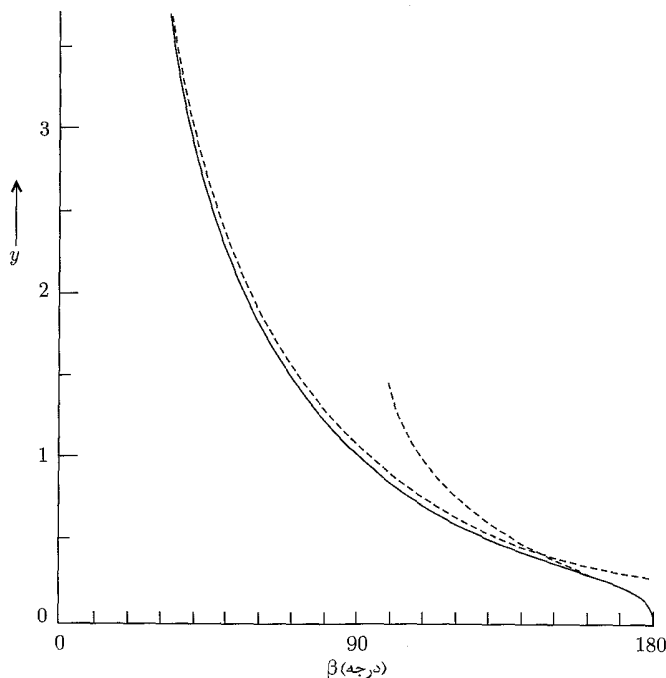
$$\left. \begin{aligned} E_r &= -\frac{\partial \Phi}{\partial r} \simeq -\nu Ar^{\nu-1} P_\nu(\cos \theta) \\ E_\theta &= -\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \simeq Ar^{\nu-1} \sin \theta P'_\nu(\cos \theta) \\ \sigma(r) &= -\frac{1}{4\pi} E_\theta \Big|_{\theta=\beta} \simeq -\frac{A}{4\pi} r^{\nu-1} \sin \beta P'_\nu(\cos \beta) \end{aligned} \right\} \quad (۴۶-۳)$$

در اینجا پریم روی P_ν نشان‌دهنده‌ی مشتق‌گیری نسبت به شناسه‌ی آن است. میدان‌ها و چگالی بار تماماً وقتی $r \rightarrow 0$ میل می‌کند به صورت $r^{\nu-1}$ تغییر می‌کنند. مرتبه‌ی ν برای اولین صفر $P_\nu(\cos \beta)$ به صورت تابعی از β به‌طور واضح به ازای $1 \ll \beta \ll 1$ و $1 \gg \nu$ در شکل ۳-۶ رسم شده است. یک رابطه‌ی

۱) تعامد توابع $P_{\nu_k}(\cos \theta)$ در فاصله‌ی $1 \leq x = \cos \beta \leq 1$ می‌توان به طریقی مشابه با $P_l(\cos \theta)$ نشان داد. (۱۷-۳) و (۱۹-۳) را ملاحظه کنید.

تقریبی برای ν در این دامنه را می‌توان از تقریب تابع بسل به دست آورد[†]

$$P_\nu(\cos \theta) \simeq J_0 \left((2\nu + 1) \sin \frac{\theta}{2} \right) \quad (47-3)$$



شکل ۶-۳: پارامتر مرتبه‌ی ν برای اولین صفر $P_\nu(\cos \beta)$ بر حسب β . ناحیه‌ی $0 < \beta < 90^\circ$ متناظر با یک حفره‌ی مخروطی است، در حالی‌که $90^\circ < \beta < 180^\circ$ مبین یک نقطه‌ی مخروطی است. نزدیک $r = 0$ میدان‌ها و چگالی بار سطحی متناسب با $r^{\nu-1}$ هستند. منحنی‌های نقطه‌چین روابط تقریبی (۴۸-۳) الف و (۴۸-۳) ب هستند.

که برای ν های بزرگ و $\theta < 1$ معتبر است. اولین صفر $J_0(x)$ در $x = 2,405$ است. این موضوع نتیجه می‌دهد که

$$\nu \simeq \frac{2,405}{\beta} - \frac{1}{2} \quad \text{الف (۴۸-۳)}$$

چون $|E|$ و σ به صورت $r^{\nu-1}$ تغییر می‌کنند، به وضوح وقتی $\beta \rightarrow 0$ میل می‌کند، در عمق یک سوراخ مخروطی شکل میدان‌هایی بسیار کوچک و با باری بسیار اندک وجود دارند. به ازای $\beta = \frac{\pi}{4}$ رسانای مخروطی شکل به صورت یک صفحه درمی‌آید. در اینجا همان‌طور که انتظار می‌رود $\nu = 1$ است و $\sigma \propto 1$ برای $\beta > \frac{\pi}{4}$ هندسه مسئله همان هندسه‌ی یک نقطه‌ی مخروطی است. در این صورت $\nu < 1$

[†] توابع بسل در بخش (۷-۳) بحث شده‌اند.

است و میدان نیز در $r = 0$ تکین. برای $\beta \rightarrow \pi$, $\nu \rightarrow 0$ میل می‌کند (ترجیحاً آرام). یک تقریب برای مقدار کوچک $(\pi - \beta)$ عبارت است از

$$\nu \simeq \left[2 \ln \left(\frac{2}{\pi - \beta} \right) \right]^{-1} \quad \text{ب (۴۸-۳)}$$

این نشان می‌دهد که برای 10° , $(\pi - \beta) \simeq 0.12$, $\nu = 0.12$ است. حتی برای 1° , $(\pi - \beta) \simeq 0.17$ نیز $\nu \simeq 0.12$ است. در هر حال برای یک نقطه‌ی مخروطی باریک، میدان نزدیک این نقطه به صورت $r^{-1+\varepsilon}$ تغییر می‌کند که در آن $\varepsilon \ll 1$ است. میدان‌های بسیار بزرگی حول این نقاط وجود دارد. روی خاصیت یک چنین نقاطی در میله‌های برق‌گیر در بخش ۱۱-۲ بحث شده است.

بحث گسترده‌ای از مسائل پتانسیلی از این نوع کلی توسط ار. ان. هال [J. Appl. Phys. 20 925 (1949)] صورت گرفته است که در آن نمودارهایی هم برای تعدادی از ریشه‌های ν_k ی رابطه‌ی (۳-۴۳)، به صورت تابعی از β آمده است.

۳-۵ توابع لژاندر وابسته و هماهنگ‌های گروهی $Y_{lm}(\theta, \phi)$

تاکنون با مسائل پتانسیلی دارای تقارن سمتی، با جواب‌هایی به صورت (۳-۳۳)، سروکار داشته‌ایم. مگر اینکه ناحیه‌ی تغییرات θ ، همانند بخش ۳-۴، محدود باشد که این شامل تنها چند جمله‌ای‌های لژاندر معمولی می‌شود. هرچند که مسئله‌ی پتانسیلی کلی می‌تواند تغییرات سمتی را به گونه‌ای دارا باشد که در (۳-۵) و (۳-۹)، $m \neq 0$ باشد. لذا در اینجا نیاز به تعمیم $P_l(\cos \theta)$ داریم؛ یعنی جواب (۳-۹) با l و m که هر دو اختیاری باشند. در روشی اساساً مشابه با توابع لژاندر معمولی می‌توانیم نشان دهیم که برای داشتن جواب‌های متناهی روی بازه‌ی $-1 \leq x \leq 1$ ، پارامتر l باید صفر یا یک عدد صحیح مثبت باشد و عدد صحیح m فقط می‌تواند مقادیر $l, (l-1), \dots, 0, \dots, -(l-1), -l$ را اختیار کند. جوابی که این خواص را داشته باشد تابع لژاندر وابسته $P_l^m(x)$ نامیده می‌شود. برای مقادیر مثبت m ، این تابع با فرمول* زیر تعریف می‌شود

$$P_l^m(x) = (-1)^m (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m}{dx^m} P_l(x) \quad \text{(۴۹-۳)}$$

در صورتی که فرمول ردیگز برای نمایش $P_l(x)$ استفاده شود یک تعریف معتبر برای هر دو مقدار مثبت و منفی m به دست می‌آید

$$P_l^m(x) = \frac{(-1)^m}{2^l l!} (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^{l+m}}{dx^{l+m}} (x^2-1)^l \quad \text{(۵۰-۳)}$$

* انتخاب شناسه برای $P_l^m(x)$ مربوط است به Magnus et al و E. U. Condon and G. H. Shortly in "theory of Atomic Spectra", Cambridge University Press (1993) برای عبارت واضح و فرمول بازگشتی، Magnus et al بخش ۴-۳ را ملاحظه کنید.

$P_l^{-m}(x)$ و $P_l^m(x)$ با هم متناسب اند، چرا که معادله‌ی دیفرانسیل (۳-۹) تنها به m^2 بستگی دارد و m یک عدد صحیح است. می‌توان نشان داد که

$$P_l^{-m}(x) = (-1)^m \frac{(l-m)!}{(l+m)!} P_l^m(x) \quad (۵۱-۳)$$

برای m ثابت، توابع $P_l^m(x)$ تشکیل یک مجموعه‌ی متعامد روی بازه‌ی $-1 \leq x \leq 1$ برای اندیس l می‌دهند. با روش‌هایی مشابه با توابع لژاندر رابطه‌ی تعامدی زیر را می‌توان به دست آورد

$$\int_{-1}^1 P_l^m(x) P_l^m(x) dx = \frac{2}{2l+1} \frac{(l+m)!}{(l-m)!} \delta_{ll} \quad (۵۲-۳)$$

جواب معادله‌ی لاپلاس به صورت حاصل ضربی از عوامل (مربوط به سه متغیر r, θ و ϕ) تفکیک شد. مناسب است در اینجا عوامل زاویه‌ای را با هم ترکیب و توابع راست هنجاری روی کره‌ی واحد بنا کنیم. ما این توابع را هماهنگ‌های کره‌ی خواهیم نامید، گرچه این اصطلاح عموماً برای جواب‌های معادله‌ی لژاندر تعمیم یافته‌ی (۳-۹) کنار گذاشته شده است. هماهنگ‌های کره‌ی ما گاهی در کتاب‌های قدیمی‌تر "هماهنگ‌های تسیرل" نامیده شده‌اند. توابع $Q_m(\phi) = e^{im\phi}$ با اندیس m روی بازه‌ی $0 \leq \phi \leq 2\pi$ تشکیل یک مجموعه‌ی کامل از توابع متعامد را می‌دهند. توابع $P_l^m(\cos \theta)$ با اندیس l ، به ازای هر مقداری از m روی بازه‌ی $-1 \leq \cos \theta \leq 1$ مجموعه‌ی مشابهی از توابع را تشکیل می‌دهند. بنابراین حاصل ضرب‌شان یعنی $P_l^m Q_m$ با دو اندیس l و m مجموعه‌ای کامل و متعامد را روی سطح کره‌ی واحد به وجود می‌آورند.

از شرط بهنجارش (۳-۵۲) واضح است که توابع بهنجارشده‌ی مناسبی که با $Y_{lm}(\theta, \phi)$ مشخص می‌شوند عبارتند از

$$Y_{lm}(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^m(\cos \theta) e^{im\phi} \quad (۵۳-۳)$$

از (۳-۵۱) ملاحظه می‌کنیم که

$$Y_{l,-m}(\theta, \phi) = (-1)^m Y_{lm}^*(\theta, \phi) \quad (۵۴-۳)$$

شرایط بهنجارش و تعامد عبارتند از

$$\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \sin \theta d\theta Y_{l'm'}^*(\theta, \phi) Y_{lm}(\theta, \phi) = \delta_{ll'} \delta_{m'm} \quad (۵۵-۳)$$

رابطه‌ی تمامیت* معادل با (۲-۳۵) عبارت است از

$$\sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l Y_{lm}^*(\theta', \phi') Y_{lm}(\theta, \phi) = \delta(\phi - \phi') \delta(\cos \theta - \cos \theta') \quad (۵۶-۳)$$

*) Completeness

برای چند مقدار کوچک l و $m \geq 0$ ، لیست زیر شکل صریحی از $Y_{lm}(\theta, \phi)$ را نمایش می دهد. برای مقادیر منفی m ، (۵۴-۳) را می توان مورد استفاده قرار داد.

هماهنگ های کروی $Y_{lm}(\theta, \phi)$

$$\begin{aligned}
 l = 0 \quad Y_{00} &= \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \\
 l = 1 \quad \begin{cases} Y_{11} &= -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta e^{i\phi} \\ Y_{10} &= \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta \end{cases} \\
 l = 2 \quad \begin{cases} Y_{22} &= \frac{1}{4} \sqrt{\frac{15}{2\pi}} \sin^2 \theta e^{2i\phi} \\ Y_{21} &= -\sqrt{\frac{15}{8\pi}} \sin \theta \cos \theta e^{i\phi} \\ Y_{20} &= \sqrt{\frac{5}{4\pi}} \left(\frac{3}{2} \cos^2 \theta - \frac{1}{2} \right) \end{cases} \\
 l = 3 \quad \begin{cases} Y_{33} &= -\frac{1}{4} \sqrt{\frac{35}{4\pi}} \sin^3 \theta e^{3i\phi} \\ Y_{32} &= \frac{1}{4} \sqrt{\frac{105}{2\pi}} \sin^2 \theta \cos \theta e^{2i\phi} \\ Y_{31} &= -\frac{1}{4} \sqrt{\frac{21}{4\pi}} \sin \theta (5 \cos^2 \theta - 1) e^{i\phi} \\ Y_{30} &= \sqrt{\frac{7}{4\pi}} \left(\frac{5}{2} \cos^3 \theta - \frac{3}{2} \cos \theta \right) \end{cases}
 \end{aligned}$$

دقت کنید که برای $m = 0$ داریم

$$Y_{l0}(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} P_l(\cos \theta) \quad (57-3)$$

یک تابع اختیاری $g(\theta, \phi)$ را می توانیم برحسب هماهنگ های کروی بسط دهیم

$$g(\theta, \phi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l A_{lm} Y_{lm}(\theta, \phi) \quad (58-3)$$

که در آن ضرایب عبارت اند از

$$A_{lm} = \int d\Omega Y_{lm}^*(\theta, \phi) g(\theta, \phi)$$

یک نکته‌ی مهم برای ما در بخش بعد، تعیین شکل بسط برای $\theta = 0$ است. با توجه به تعریف (۳-۵۷) درمی‌یابیم که

$$[g(\theta, \phi)]_{\theta=0} = \sum_{l=0}^{\infty} \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} A_{l0} \quad (۳-۵۹)$$

که در آن

$$A_{l0} = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} \int d\Omega P_l(\cos\theta) g(\theta, \phi) \quad (۳-۶۰)$$

تمام جملات موجود در این سری با $m \neq 0$ در $\theta = 0$ ، صفر می‌شوند. جواب کلی برای یک مسئله‌ی مقدار مرزی در مختصات کروی را می‌توان برحسب هماهنگ‌های کروی و توان‌هایی از r در تعمیمی از (۳-۳۳)، به صورت زیر نوشت

$$\Phi(r, \theta, \phi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l [A_{lm} r^l + B_{lm} r^{-(l+1)}] Y_{lm}(\theta, \phi) \quad (۳-۶۱)$$

در صورتی‌که پتانسیل روی یک سطح کروی مشخص شود، ضرایب را می‌توانیم با محاسبه‌ی (۳-۶۱) روی سطح و استفاده از (۳-۵۸) تعیین کنیم.

۳-۶ قضیه‌ی جمع* برای هماهنگ‌های کروی

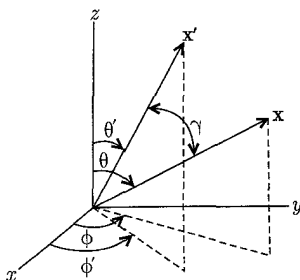
یک نتیجه‌ی ریاضی که به‌طور چشمگیری جالب توجه است و مورد استفاده قرار می‌گیرد قضیه‌ی جمع برای هماهنگ‌های کروی است. دو بردار مختصات \mathbf{x} و \mathbf{x}' به ترتیب با مختصات کروی (r, θ, ϕ) و (r', θ', ϕ') دارای زاویه‌ی γ بین خود هستند. آن چنانکه در شکل ۳-۷ نیز نشان داده شده است. قضیه‌ی جمع، مبین یک چند جمله‌ای لژاندر از مرتبه‌ی l است (در زاویه‌ی γ)، برحسب حاصل ضرب‌هایی از هماهنگ‌های کروی با زاویه‌های $\theta, \phi, \theta', \phi'$

$$P_l(\cos\gamma) = \frac{4\pi}{2l+1} \sum_{m=-l}^l Y_{lm}^*(\theta', \phi') Y_{lm}(\theta, \phi) \quad (۳-۶۲)$$

که در آن $\cos\gamma = \cos\theta \cos\theta' + \sin\theta \sin\theta' \cos(\phi - \phi')$

برای اثبات این قضیه، بردار \mathbf{x}' را در فضا ثابت فرض می‌کنیم. در این صورت $P_l(\cos\gamma)$ با زاویه‌های θ' و ϕ' به‌عنوان پارامتر، تابعی از زاویه‌های θ و ϕ است. می‌توانیم این تابع را به صورت سری (۳-۵۸) بسط دهیم

$$P_l(\cos\gamma) = \sum_{l'=0}^{\infty} \sum_{m=-l'}^l A_{l'm}(\theta', \phi') Y_{l'm}(\theta, \phi) \quad (۳-۶۳)$$



شکل ۷-۳:

مقایسه‌ی این رابطه با رابطه‌ی (۶۲-۳) نشان می‌دهد که تنها جملات با $l' = l$ ظاهر می‌شوند. برای ملاحظه‌ی علت این موضوع دقت کنید که اگر محورهای مختصات به‌گونه‌ای انتخاب شوند که x' روی محور z باشد، در این صورت γ همان زاویه‌ی قطبی معمول خواهد بود و $P_l(\cos \gamma)$ معادله‌ی زیر را برآورده می‌کند

$$\nabla'^2 P_l(\cos \gamma) + \frac{l(l+1)}{r^2} P_l(\cos \gamma) = 0 \quad (۶۴-۳)$$

که در آن ∇'^2 لاپلاسیانی است که به محورهای جدید منتسب می‌شود. حال اگر این محورها به وضعیت نشان داده شده در شکل (۷-۳) دوران کنند، خواهیم داشت $\nabla'^2 = \nabla^2$ و r هم بدون تغییر می‌ماند^۱. در نتیجه $P_l(\cos \gamma)$ هنوز هم معادله‌ای به شکل (۶۴-۳) را برآورده می‌کند، یعنی یک هارمونیک کروی از مرتبه‌ی l است. این بدان معنی است که $P_l(\cos \gamma)$ ترکیبی خطی از Y_{lm} هایی از تنها همان مرتبه است

$$P_l(\cos \gamma) = \sum_{m=-l}^l A_m(\theta', \phi') Y_{lm}(\theta, \phi) \quad (۶۵-۳)$$

که ضرایب $A_m(\theta', \phi')$ توسط

$$A_m(\theta', \phi') = \int Y_{lm}^*(\theta, \phi) P_l(\cos \gamma) d\Omega \quad (۶۶-۳)$$

مشخص می‌شوند.

برای تعیین این ضریب اشاره می‌کنیم که ممکن است طبق رابطه‌ی (۶۰-۳) چنین تصور شود که ضریبی

همچون $m' = 0$ در بسط تابع $Y_{lm}^*(\theta, \phi)$ $\sqrt{\frac{4\pi}{(2l+1)}} Y_{lm}^*(\theta, \phi)$ به صورت یک سری از $Y_{lm'}(\gamma, \beta)$ به محور

۱) اثبات اینکه تحت دوران $\nabla'^2 = \nabla^2$ است به‌گونه‌ای بسیار ساده از دقت به اینکه $\nabla \cdot \nabla \psi = \nabla^2 \psi$ یک ضرب

اسکالاری اپراتوری است و اینکه تمام حاصل‌ضرب‌های اسکالاری تحت دوران‌ها ناوردا هستند، به‌دست می‌آید.

پریم دار (۶۴-۳) منتسب می‌شود. بنابراین از (۵۹-۳) درمی‌یابیم که چون تنها یک مقدار از l حضور دارد، ضریب (۶۶-۳) عبارت خواهد بود با

$$A_m(\theta', \phi') = \frac{4\pi}{2l+1} \{Y_{lm}^*[\theta(\gamma, \beta), \phi(\gamma, \beta)]\}_{\gamma=0} \quad (67-3)$$

در حد $\gamma \rightarrow 0$ زاویه‌های (θ, ϕ) همانند (γ, β) به سمت (θ', ϕ') انتقال می‌یابند. به این ترتیب قضیه‌ی جمع (۶۲-۳) اثبات شد. گاهی اوقات این قضیه به جای Y_{lm} برحسب $P_l^m(\cos \theta)$ نوشته می‌شود که به این ترتیب دارای شکل زیر خواهد بود

$$P_l(\cos \gamma) = P_l(\cos \theta)P_l(\cos \theta') \\ + 2 \sum_{m=1}^l \frac{(l-m)!}{(l+m)!} P_l^m(\cos \theta)P_l^m(\cos \theta') \cos[m(\phi - \phi')] \quad (68-3)$$

اگر زاویه‌ی γ به سمت صفر میل کند "قاعده‌ی جمع" زیر برای مربع Y_{lm} نتیجه خواهد شد

$$\sum_{m=-l}^l |Y_{lm}(\theta, \phi)|^2 = \frac{2l+1}{4\pi} \quad (69-3)$$

قضیه‌ی جمع را می‌توانیم برای ارائه بسط (۳۸-۳) [که مربوط به پتانسیل در نقطه‌ی x است ناشی از بار واحدی در نقطه‌ی x'] به صریح‌ترین شکل آن مورد استفاده قرار دهیم. با جایگزینی (۶۲-۳) در (۳۸-۳) به دست می‌آوریم

$$\frac{1}{|x - x'|} = 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{1}{2l+1} \frac{r_{<}^l}{r_{>}^{l+1}} Y_{lm}^*(\theta, \phi) Y_{lm}(\theta, \phi) \quad (70-3)$$

معادله‌ی (۷۰-۳) پتانسیل را به صورت کاملاً فاکتورگیری شده‌ی l در مختصات x و x' ارائه می‌دهد. این معادله برای هر نوعی از انتگرال‌گیری روی چگالی‌های بار و غیره مفید است که در آن یک متغیر، مربوط به انتگرال‌گیری و دیگری مختصه‌ی نقطه‌ی مشاهده است. بهای پرداخت شده در اینجا این است که به جای یک تک جمله، یک جمع دوگانه داریم.

۷-۳ معادله‌ی لاپلاس در مختصات استوانه‌ای؛ توابع بسط

در مختصات استوانه‌ای (ρ, ϕ, z) در شکل ۸-۳ معادله‌ی لاپلاس شکل زیر را به خود می‌گیرد

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0 \quad (71-3)$$

جداسازی متغیرها با جایگزینی

$$\Phi(\rho, \phi, z) = R(\rho)Q(\phi)Z(z) \quad (۷۲-۳)$$

به انجام می‌رسد. با روش معمول این کار منجر به سه معادله‌ی دیفرانسیل معمولی زیر می‌شود

$$\frac{d^2 Z}{dz^2} - k^2 Z = 0 \quad (۷۳-۳)$$

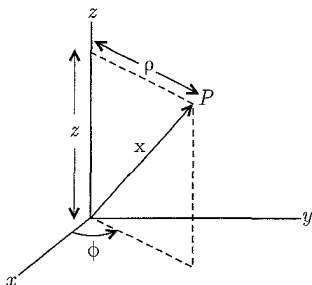
$$\frac{d^2 Q}{d\phi^2} + \nu^2 Q = 0 \quad (۷۴-۳)$$

$$\frac{d^2 R}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dR}{d\rho} + \left(k^2 - \frac{\nu^2}{\rho^2} \right) R = 0 \quad (۷۵-۳)$$

جواب دو معادله‌ی اول ابتدایی و ساده است

$$Z(z) = e^{\pm kz} \quad (۷۶-۳)$$

$$Q(\phi) = e^{\pm i\nu\phi}$$



شکل ۳-۸:

در هنگامی که کل زاویه‌ی سمتی مجاز است، برای تک مقدار بودن پتانسیل، ν بایستی یک عدد صحیح باشد. اما به استثنای چند شرط مرزی لازم در جهت z ، پارامتر k اختیاری است. در حال حاضر فرض می‌کنیم k حقیقی و مثبت باشد.

معادله‌ی شعاعی را می‌توان با تغییر متغیر $x = k\rho$ به یک صورت استاندارد درآورد. در این صورت معادله‌ی فوق به شکل زیر درمی‌آید

$$\frac{d^2 R}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dR}{dx} + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2} \right) R = 0 \quad (۷۷-۳)$$

این معادله، معادله‌ی بسل است و جواب‌های آن توابع بسل از مرتبه‌ی ν نامیده می‌شوند. اگر یک جواب سری توانی به صورت

$$R(x) = x^\alpha \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j \quad (78-3)$$

در نظر بگیریم، در این صورت درمی‌یابیم که

$$\alpha = \pm \nu \quad (79-3)$$

و

$$a_{2j} = -\frac{1}{4j(j+\alpha)} a_{2j-2} \quad (80-3)$$

به‌ازای $j = 1, 2, 3, \dots$ تمام توان‌های فرد x^j دارای ضرایب صفرند. فرمول بازگشتی را می‌توان برای به‌دست آوردن رابطه‌ی

$$a_{2j} = \frac{(-1)^j \Gamma(\alpha + 1)}{2^{2j} j! \Gamma(j + \alpha + 1)} a_0 \quad (81-3)$$

تکرار کرد. مرسوم است که ثابت a_0 را به صورت $a_0 = [2^\alpha \Gamma(\alpha + 1)]^{-1}$ انتخاب می‌کنند. در این صورت دو جواب عبارتند از

$$J_\nu(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j! \Gamma(j + \nu + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2j} \quad (82-3)$$

$$J_{-\nu}(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j! \Gamma(j - \nu + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2j} \quad (83-3)$$

این جواب‌ها، توابع بسل نوع اول و از مرتبه‌ی $\pm \nu$ نامیده می‌شوند. این سری به‌ازای تمام مقادیر متناهی x همگرا است. اگر ν یک عدد صحیح نباشد دو جواب $J_{\pm \nu}(x)$ یک جفت جواب مستقل خطی برای معادله‌ی بسل مرتبه‌ی دوم تشکیل می‌دهند. هرچند که اگر ν یک عدد صحیح باشد به‌خوبی مشخص است که جواب‌ها بستگی خطی دارند. درحقیقت برای یک عدد صحیح $\nu = m$ از نمایش این سری، می‌توان ملاحظه کرد که

$$J_{-m}(x) = (-1)^m J_m(x) \quad (84-3)$$

در نتیجه وقتی ν یک عدد صحیح باشد، لازم است جواب مستقل خطی دیگری هم پیدا کنیم. مرسوم است که حتی اگر ν یک عدد صحیح نباشد، جفت $J_{\pm \nu}(x)$ با $J_\nu(x)$ و $N_\nu(x)$ یعنی تابع نیومن (یا بسل نوع دوم) جایگزین شود

$$N_\nu(x) = \frac{J_\nu(x) \cos \nu\pi - J_{-\nu}(x)}{\sin \nu\pi} \quad (85-3)$$

برای وقتی که ν یک عدد صحیح نیست $N_\nu(x)$ به وضوح از $J_\nu(x)$ مستقل خطی است. در حد "عدد صحیح $\rightarrow \nu$ " می توان نشان داد که $N_\nu(x)$ هنوز نسبت به $J_\nu(x)$ استقلال خطی دارد و چنانکه انتظار می رود در بردارنده $\log x$ نیز هست. نمایش سری آن در کتاب های مرجع ارائه شده است.

توابع بسل از نوع سوم، توابع هنکل نامیده می شوند و به صورت ترکیب هایی خطی از $J_\nu(x)$ و $N_\nu(x)$ تعریف شده اند

$$\left. \begin{aligned} H_\nu^{(1)}(x) &= J_\nu(x) + iN_\nu(x) \\ H_\nu^{(2)}(x) &= J_\nu(x) - iN_\nu(x) \end{aligned} \right\} \quad (۸۶-۳)$$

توابع هنکل برای معادله ی بسل مجموعه ای پایه ای از جواب ها را تشکیل می دهند. دقیقاً همان طوری که $J_\nu(x)$ و $N_\nu(x)$ این کار را می کنند. توابع $J_\nu, N_\nu, H_\nu^{(1)}$ و $H_\nu^{(2)}$ تماماً فرمول های بازگشتی

$$\Omega_{\nu-1}(x) + \Omega_{\nu+1}(x) = \frac{2\nu}{x} \Omega_\nu(x) \quad (۸۷-۳)$$

$$\Omega_{\nu-1}(x) - \Omega_{\nu+1}(x) = 2 \frac{d\Omega_\nu(x)}{dx} \quad (۸۸-۳)$$

برآورده می کنند. که در آن $\Omega_\nu(x)$ یکی از توابع استوانه ای از مرتبه ی ν است. این روابط را می توان مستقیماً از نمایش سری (۸۲-۳) هم اثبات کرد.

برای استفاده های احتمالی در آینده، شکل حدی انواع مختلف توابع بسل به ازای مقادیر کوچک و بزرگ شناسه ی آن ها ارائه شده اند.

$$x \ll 1 \quad J_\nu(x) \rightarrow \frac{1}{\Gamma(\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \quad (۸۹-۳)$$

$$N_\nu(x) \rightarrow \begin{cases} \frac{2}{\pi} \left[\ln \left(\frac{x}{2}\right) + \gamma + 0,5772 \dots \right] & \nu = 0 \\ -\frac{1}{\pi} \Gamma(\nu) \left(\frac{x}{2}\right)^\nu & \nu \neq 0 \end{cases} \quad (۹۰-۳)$$

در این فرمول ها ν حقیقی و غیرمنفی در نظر گرفته شده است.

$$\left. \begin{aligned} x \gg 1, \nu \quad J_\nu(x) &\rightarrow \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos \left(x - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \\ N_\nu(x) &\rightarrow \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin \left(x - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \end{aligned} \right\} \quad (۹۱-۳)$$

گذار از رفتار کوچک x به شکل مجانبی بزرگ x در ناحیه ی $\nu \sim x$ اتفاق می افتد. از شکل های مجانبی (۹۱-۳) واضح است که هر تابع بسل دارای یک تعداد نامتناهی از ریشه هاست. در اینجا ما عمدتاً با

ریشه‌های $J_\nu(x)$ سروکار خواهیم داشت

$$J_\nu(x_{\nu n}) = 0 \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (92-3)$$

$x_{\nu n}$ n مین ریشه‌ی $J_\nu(x)$ است. به‌آزای چند مقدار اول از مقادیر اعداد صحیح ν ، سه ریشه‌ی اول عبارتند از

$$\nu = 0 \quad x_{0n} = 2,405, 5,520, 8,654, \dots$$

$$\nu = 1 \quad x_{1n} = 3,832, 7,016, 10,173, \dots$$

$$\nu = 2 \quad x_{2n} = 5,136, 8,417, 11,620, \dots$$

برای ریشه‌های بالاتر، فرمول مجانبی

$$x_{\nu n} \simeq n\pi + \left(\nu - \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{2}$$

دقت کافی را به ما می‌دهد (تا حداقل سه رقم). جداول مربوط به ریشه‌ها در مراجع

Jahnke, Emde and hösche, (P.194) & Abramowitz and Stegun (P.409)

ارائه شده است.

در پیدا کردن جواب بخش شعاعی معادله‌ی لاپلاس برحسب توابع بسل می‌توانیم این سؤال را مطرح کنیم که به چه خاطر توابع بسل یک مجموعه‌ی کامل متعامد از توابع را تشکیل می‌دهند. در اینجا ما تنها توابع بسل از نوع اول را در نظر می‌گیریم و نشان می‌دهیم که $\sqrt{\rho} J_\nu \left(x_{\nu n} \frac{\rho}{a}\right)$ برای مقادیر ثابت $\nu \geq 0$ ، $n = 1, 2, \dots$ تشکیل یک مجموعه‌ی متعامد روی بازه‌ی $0 \leq \rho \leq a$ می‌دهد. اثبات این موضوع را با معادله‌ی دیفرانسیلی که توسط $J_\nu \left(x_{\nu n} \frac{\rho}{a}\right)$ برآورده می‌شود شروع می‌کنیم

$$\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left[\rho \frac{dJ_\nu \left(x_{\nu n} \frac{\rho}{a}\right)}{d\rho} \right] + \left(\frac{x_{\nu n}^2}{a^2} - \frac{\nu^2}{\rho^2} \right) J_\nu \left(x_{\nu n} \frac{\rho}{a}\right) = 0 \quad (93-3)$$

اگر معادله‌ی فوق را در $\rho J_\nu \left(x_{\nu n} \frac{\rho}{a}\right)$ ضرب کرده و از 0 تا a انتگرال بگیریم، به‌دست می‌آوریم

$$\int_0^a J_\nu \left(x_{\nu n} \frac{\rho}{a}\right) \frac{d}{d\rho} \left[\rho \frac{dJ_\nu \left(x_{\nu n} \frac{\rho}{a}\right)}{d\rho} \right] d\rho + \int_0^a \left(\frac{x_{\nu n}^2}{a^2} - \frac{\nu^2}{\rho^2} \right) \rho J_\nu \left(x_{\nu n} \frac{\rho}{a}\right) J_\nu \left(x_{\nu n} \frac{\rho}{a}\right) d\rho = 0$$

انتگرالگیری به روش جزءبهجزء، همراه با صفر شدن $(\rho J_\nu, J_{\nu'})$ در $\rho = 0$ (برای $\nu \geq 0$) و $\rho = a$ منجر به نتیجه‌ی زیر می‌شود

$$-\int_0^a \rho \frac{dJ_\nu \left(x_{\nu n'} \frac{\rho}{a}\right)}{d\rho} \frac{dJ_\nu \left(x_{\nu n} \frac{\rho}{a}\right)}{d\rho} d\rho + \int_0^a \left(\frac{x_{\nu n}^2}{a^2} - \frac{\nu^2}{\rho^2}\right) \rho J_\nu \left(x_{\nu n'} \frac{\rho}{a}\right) J_\nu \left(x_{\nu n} \frac{\rho}{a}\right) d\rho = 0$$

حال اگر رابطه‌ی مشابهی را با تبدیل n و n' به یکدیگر بنویسیم و از هم کسر کنیم، شرط تعامدی زیر را به دست می‌آوریم

$$(x_{\nu n}^2 - x_{\nu n'}^2) \int_0^a \rho J_\nu \left(x_{\nu n'} \frac{\rho}{a}\right) J_\nu \left(x_{\nu n} \frac{\rho}{a}\right) d\rho = 0 \quad (94-3)$$

استفاده ماهرانه از این معادله‌ی دیفرانسیل و فرمول‌های بازگشتی (۸۷-۳) و (۸۸-۳) منجر به انتگرال پنججاری‌ش‌ی زیر می‌شود

$$\int_0^a \rho J_\nu \left(x_{\nu n'} \frac{\rho}{a}\right) J_\nu \left(x_{\nu n} \frac{\rho}{a}\right) d\rho = \frac{a^2}{\nu} [J_{\nu+1}(x_{\nu n})]^2 \delta_{n'n} \quad (95-3)$$

با در نظر گرفتن اینکه مجموعه‌ی توابع بسل کامل هستند می‌توانیم یک تابع اختیاری از ρ را روی بازه $0 \leq \rho \leq a$ به صورت یک سری فوریه بسل بسط دهیم

$$f(\rho) = \sum_{n=1}^{\infty} A_{\nu n} J_\nu \left(x_{\nu n} \frac{\rho}{a}\right) \quad (96-3)$$

که در آن

$$A_{\nu n} = \frac{2}{a^2 J_{\nu+1}^2(x_{\nu n})} \int_0^a \rho f(\rho) J_\nu \left(\frac{x_{\nu n} \rho}{a}\right) d\rho \quad (97-3)$$

استخراجی که از رابطه‌ی (۹۶-۳) صورت دادیم شامل محدودیت $\nu \geq 0$ است. در واقع این موضوع را می‌توان اثبات کرد که (۹۶-۳) به‌ازای تمام مقادیر $\nu \geq -1$ صادق است. بسط‌های (۹۶-۳) و (۹۷-۳)

همان سری‌های فوریه بسل معمول هستند و به‌ویژه برای توابعی که در $\rho = a$ صفر می‌شوند مناسبند (یعنی شرایط مرزی دیریکله‌ی همگن روی یک استوانه؛ بخش بعدی را ملاحظه کنید). اشاره خواهیم کرد

که بسط دیگری نیز برحسب یک سری از توابع $\sqrt{\rho} J_\nu \left(\frac{y_{\nu n} \rho}{a}\right)$ امکان‌پذیر است که در آن $y_{\nu n}$ ریشه‌ی

تمام معادله‌ی $\frac{dJ_\nu(x)}{dx} = 0$ است. دلیل این امر آن است که در اثبات متعامد بودن توابع، تمام آنچه

مذ نظر است این است که کمیت

$$\left[\rho J_\nu(k\rho) \left(\frac{d}{d\rho}\right) J_\nu(k'\rho) - \rho J_\nu(k'\rho) \left(\frac{d}{d\rho}\right) J_\nu(k\rho) \right]$$

در نقاط انتهایی $\rho = a$ و $\rho = 0$ صفر شود.

این لازمه با $\lambda = \frac{x\nu n}{a}$ یا $\lambda = \frac{y\nu n}{a}$ برآورده می شود که در آن $J_\nu(x\nu n) = 0$ و $J'_\nu(y\nu n) = 0$ یا خیلی کلی تر با $\rho \left(\frac{d}{d\rho} \right) J_\nu(k\rho) + \lambda J_\nu(k\rho) = 0$ در نقاط انتهایی با λ به عنوان یک ثابت مستقل از k . بسط بر حسب مجموعه $\sqrt{\rho} J_\nu \left(\frac{y\nu n \rho}{a} \right)$ مفید است به خصوص برای توابعی که شیبشان در $\rho = a$ صفر می شود (مسئله ۳-۱۱ را ملاحظه کنید).

یک سری فوریه بسط تنها نوعی از بسط سری است که در بردارنده ی توابع بسط است. برخی دیگر از احتمالات عبارتند از

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n J_{\nu+n}(z) \quad \text{سری نیومن:}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n J_{\nu+n}((\nu+n)z) \quad \text{سری کپتین*}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n J_\nu(nx) \quad \text{سری اسلومیلیج:}$$

خواننده می تواند برای بحثی دقیق در مورد خواص این سری ها به واتسون (فصل های ۱۶ تا ۱۹) مراجعه کند. سری کپتین در بحث حرکت کپلری سیارات و تابش بارهای متحرک سریع مطرح می شود (مسائل ۱۴-۱۴ و ۱۵-۱۴ را ملاحظه کنید).

قبل از اتمام بررسی خواص توابع بسط، اشاره می کنیم که اگر در جداسازی معادله ی لاپلاس، ثابت جدایی k^2 در (۳-۷۳) به صورت $-k^2$ در نظر گرفته می شود، در این صورت $Z(z)$ به صورت $\sin kz$ و $\cos kz$ و معادله ی مربوط به $R(\rho)$ هم به صورت زیر درمی آید

$$\frac{d^2 R}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dR}{d\rho} - \left(k^2 + \frac{\nu^2}{\rho^2} \right) R = 0 \quad (98-3)$$

با $k\rho = x$ این معادله به صورت زیر درمی آید

$$\frac{d^2 R}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dR}{dx} - \left(1 + \frac{\nu^2}{x^2} \right) R = 0 \quad (99-3)$$

جواب های این معادله، توابع بسط اصلاح شده نامیده می شوند. واضح است که این توابع دقیقاً توابع بسط با شناسه های موهومی خالص، هستند. انتخاب های معمول جواب های مستقل خطی، با $I_\nu(x)$ و $K_\nu(x)$ مشخص می شوند. آن ها (یعنی $I_\nu(x)$ و $K_\nu(x)$) توسط

$$I_\nu(x) = i^{-\nu} J_\nu(ix) \quad (100-3)$$

$$K_\nu(x) = \frac{\pi}{\Gamma} i^{\nu+1} H_\nu^{(1)}(ix) \quad (101-3)$$

تعریف می‌شوند و برای مقادیر حقیقی x و ν توابعی حقیقی هستند. صورت حدی آن‌ها برای x های کوچک و بزرگ با فرض $\nu \geq 0$ حقیقی، عبارت‌اند از

$$x \ll 1 \quad I_\nu(x) \rightarrow \frac{1}{\Gamma(\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \quad (102-3)$$

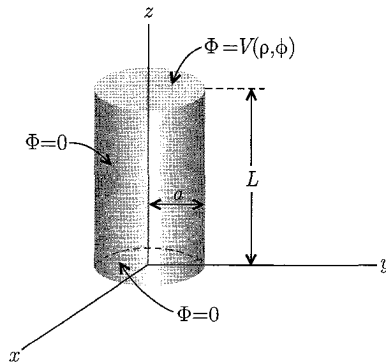
$$K_\nu(x) \rightarrow \begin{cases} -\left[\ln\left(\frac{x}{2}\right) + 0,5772\dots\right] & \nu = 0 \\ \frac{\Gamma(\nu)}{2} \left(\frac{2}{x}\right)^\nu & \nu \neq 0 \end{cases} \quad (103-3)$$

$$x \gg 1, \nu \quad I_\nu(x) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} e^x \left[1 + o\left(\frac{1}{x}\right)\right] \quad (104-3)$$

$$K_\nu(x) \rightarrow \sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{-x} \left[1 + o\left(\frac{1}{x}\right)\right] \quad (105-3)$$

۳-۸ مسائل مقدار مرزی در مختصات استوانه‌ای

جواب معادله‌ی لاپلاس در مختصات استوانه‌ای عبارت است از؛ $\Phi = R(\rho)Q(\phi)Z(z)$ ، که در آن عوامل مجزا در بخش قبل مشخص شدند. حال مسئله‌ی مقدار مرزی خاص نشان داده شده در شکل (۳-۹) را در نظر بگیرید. استوانه‌ی شکل دارای شعاع a و ارتفاع L است. سطوح بالایی و پایینی در $z = 0$ و $z = L$ قرار گرفته‌اند. پتانسیل روی سطح جانبی و ته این استوانه صفر است. در حالی که سطح بالایی دارای پتانسیل $\Phi = V(\rho, \phi)$ است. می‌خواهیم پتانسیل را در هر نقطه در داخل استوانه بیابیم.



شکل ۳-۹:

برای اینکه Φ تک‌مقدار باشد و در $z = 0$ صفر شود باید داشته باشیم

$$Q(\phi) = A \sin m\phi + B \cos m\phi$$

$$Z(z) = \sinh kz$$

که در آن $m = \nu$ یک عدد صحیح و k ثابتی است که باید آن را تعیین کنیم. اگر پتانسیل در $\rho = 0$ و $D = 0$ متناهی باشد، عامل شعاعی عبارت خواهد بود با

$$R(\rho) = C J_m(k\rho) + D N_m(k\rho)$$

این شرط که پتانسیل در $\rho = a$ صفر شود بدان معنی است که k می‌تواند تنها آن مقادیر خاصی را به خود بگیرد که در آن

$$k_{mn} = \frac{x_{mn}}{a} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

که در آن x_{mn} ریشه‌های $J_m(x_{mn} = 0)$ هستند.

با ترکیب تمام این شرایط درمی‌یابیم که صورت کلی جواب عبارت است از

$$\Phi(\rho, \phi, z) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} J_m(k_{mn}\rho) \sinh(k_{mn}z) \times (A_{mn} \sin m\phi + B_{mn} \cos m\phi) \quad \text{الف (۱۰۵-۳)}$$

در $z = L$ پتانسیل را به صورت $V(\rho, \phi)$ مشخص کردیم. بنابراین داریم

$$V(\rho, \phi) = \sum_{m,n} \sinh(k_{mn}L) J_m(k_{mn}\rho) (A_{mn} \sin m\phi + B_{mn} \cos m\phi)$$

این رابطه یک سری فوریه برحسب ϕ و یک سری بسط - فوریه برحسب ρ است. با توجه به (۳۷-۲) و (۹۷-۳) ضرایب عبارتند از

$$A_{mn} = \frac{\int_0^{2\pi} \int_0^a d\phi \int_0^a d\rho \rho V(\rho, \phi) J_m(k_{mn}\rho) \sin m\phi}{\pi^2 a^2 J_{m+1}^2(k_{mn}a)} \quad \text{ب (۱۰۵-۳)}$$

$$B_{mn} = \frac{\int_0^{2\pi} \int_0^a d\phi \int_0^a d\rho \rho V(\rho, \phi) J_m(k_{mn}\rho) \cos m\phi}{\pi^2 a^2 J_{m+1}^2(k_{mn}a)}$$

با این شرط که برای $m = 0$ را استفاده کنیم.

شکل خاصی از بسط (الف) با این شرط که پتانسیل در $z = 0$ برای مقدار اختیاری ρ (در $\rho = a$ مقدار اختیاری z) صفر می‌شود نوشته شده است. به‌ازای شرایط مرزی مختلف، بسط فوق شکل‌های متفاوتی را به‌خود می‌گیرد. یک مثال که در آن پتانسیل روی وجوه انتهایی صفر و روی سطح

جانبی $V(\phi, z)$ است همانند مسئله ۳-۹ به خواننده واگذار شده است. سری بسط فوری (۳-۱۰۵) برای یک بازه‌ی متناهی روی متغیر ρ یعنی $0 \leq \rho \leq a$ مناسب است. در صورتی که $a \rightarrow \infty$ میل کند، این سری به یک انتگرال تبدیل می‌شود، به طریقی که به طور کامل مشابه با گذار از یک سری مثلثاتی فوری به یک انتگرال فوری باشد. به این ترتیب اگر برای مثال پتانسیل در فضای خالی از بار، به ازای $z \geq 0$ متناهی باشد و وقتی $z \rightarrow \infty$ میل می‌کند صفر شود، صورت کلی جواب برای $z \geq 0$ باید به صورت زیر باشد

$$\Phi(\rho, \phi, z) = \sum_{m=0}^{\infty} \int_0^{\infty} dk e^{-kz} J_m(k\rho) [A_m(k) \sin m\phi + B_m(k) \cos m\phi] \quad (3-106)$$

اگر پتانسیل روی کل صفحه‌ی $z = 0$ به صورت $V(\rho, \phi)$ مشخص شده باشد ضرایب با رابطه‌ی زیر تعیین می‌شوند

$$V(\rho, \phi) = \sum_{m=0}^{\infty} \int_0^{\infty} dk J_m(k\rho) [A_m(k) \sin m\phi + B_m(k) \cos m\phi]$$

تغییر در ϕ دقیقاً یک سری فوری خواهد بود. در نتیجه ضرایب $A_m(k)$ و $B_m(k)$ به طور جداگانه با روابط انتگرالی زیر مشخص می‌شوند

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} V(\rho, \phi) \begin{Bmatrix} \sin m\phi \\ \cos m\phi \end{Bmatrix} d\phi = \int_0^{\infty} J_m(k'\rho) \begin{Bmatrix} A_m(k') \\ B_m(k') \end{Bmatrix} dk' \quad (3-107)$$

این معادله‌های انتگرالی نوع اول شعاعی را می‌توانیم به راحتی حل کنیم، چراکه این معادله‌ها "تبدیل‌های هنکل"^۱ هستند. برای هدفی که داریم رابطه‌ی انتگرالی

$$\int_0^{\infty} x J_m(kx) J_m(k'x) dx = \frac{1}{k} \delta(k' - k) \quad (3-108)$$

را می‌توانیم برای وارون کردن معادله‌های (۳-۱۰۷) مورد استفاده قرار دهیم. با ضرب طرفین رابطه‌ی فوق در $\rho J_m(k\rho)$ و انتگرال‌گیری روی ρ ، با کمک (۳-۱۰۸) درمی‌یابیم که ضرایب با انتگرال‌گیری روی مساحت کل صفحه‌ی $z = 0$ تعیین می‌شوند

$$\begin{Bmatrix} A_m(k) \\ B_m(k) \end{Bmatrix} = \frac{k}{m} \int_0^{\infty} d\rho \rho \int_0^{2\pi} d\phi V(\rho, \phi) J_m(k\rho) \begin{Bmatrix} \sin m\phi \\ \cos m\phi \end{Bmatrix} \quad (3-109)$$

مطابق معمول برای $m = 0$ ، باید عبارت $\frac{1}{\rho} B_0(k)$ را در سری (۳-۱۰۶) مورد استفاده قرار دهیم. در هنگام بحث روی موضوع بسط برحسب توابع بسط ملاحظه می‌کنیم که توابع $J_\nu(kx)$ به ازای مقدار ثابت

ν , $[\operatorname{Re}(\nu) > -1]$, یک مجموعه‌ی متعامد و کامل از توابع (برحسب k) را روی بازه‌ی $0 < x < \infty$ تشکیل می‌دهند.

به‌ازای هر مقداری از m (و ϕ و z ثابت) بسط برحسب k در (۳-۱۰۶) حالت خاصی از بسط زیر است

$$A(x) = \int_0^{\infty} \tilde{A}(k) J_{\nu}(kx) dk ; \text{ که در آن } \tilde{A}(k) = k \int_0^{\infty} x A(x) J_{\nu}(kx) dx \quad (۳-۱۱۰)$$

مثال مهمی از بسط در مختصات کروی با توابع بسط کروی $j_l(kr)$ ($l = 0, 1, 2, \dots$) مطرح می‌شود. برای هدف کنونی تنها تعریف

$$j_l(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} J_{l+\frac{1}{2}}(z) \quad (۳-۱۱۱)$$

را در نظر می‌گیریم. [جزئیات توابع بسط کروی را می‌توان در فصل ۹ پیدا نمود]. رابطه‌ی تعامدی (۳-۱۰۸) به‌وضوح به‌صورت زیر درمی‌آید

$$\int_0^{\infty} r^2 j_l(kr) j_l(k'r) dr = \frac{\pi}{2k^2} \delta(k - k') \quad (۳-۱۱۲)$$

رابطه‌ی تمامیت^۱ نیز دارای شکلی مشابه رابطه‌ی بالا است البته با تبدیل $k \rightarrow r$, $r \rightarrow k$ و $k' \rightarrow r'$. در این صورت بسط کروی بسط فوریه به‌ازای یک l مشخص عبارت است از

$$A(r) = \int_0^{\infty} \tilde{A}(k) j_l(kr) dk ; \text{ که در آن } \tilde{A}(k) = \frac{2k^2}{\pi} \int_0^{\infty} r^2 A(r) j_l(kr) dr \quad (۳-۱۱۳)$$

یک چنین بسط‌هایی برای موضوع افت جریان در محیط‌های رسانا یا "انتشار مغناطیسی وابسته به زمان" که برای آن‌ها تقارن زاویه‌ای ملاحظات را به یک یا چند مقدار l کاهش می‌دهد، مفید هستند. مسئله ۵-۳۵ و ۵-۳۶ را ملاحظه کنید.

۹-۳ بسط توابع گرین در مختصات کروی

برای کار با مسائلی که شامل توزیع‌های بار و نیز مقادیر مرزی برای پتانسیل هستند (یعنی جواب‌های معادله‌ی پواسن)، تعیین تابع گرین $G(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ که شرایط مرزی مربوطه را برآورده کند ضروری است. شرایط مرزی اغلب روی سطوح تعدادی سیستم مختصات جداپذیر مشخص شده‌اند (برای مثال، مرزهای استوانه‌ای یا کروی). بنابراین بیان تابع گرین به‌صورت یک سری از حاصل ضرب توابع که مختصات موجود در مسئله اقتضاء می‌کند، مناسب است.

1) Completeness relation

ابتدا نوع بسط موردنظر را با در نظر گرفتن مختصات کروی بررسی می‌کنیم. برای حالت عدم وجود سطوح مرزی (به جز در بینهایت) بسط تابع گرین (۳-۷) را تاکنون داشته‌ایم

$$\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} = 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{1}{r^{l+1}} \frac{r'^l}{r^{l+1}} Y_{lm}^*(\theta', \phi') Y_{lm}(\theta, \phi)$$

فرض کنید بخواهیم بسطی مشابه برای تابع گرین مناسب برای مسئله‌ی "خارجی"، همراه با یک مرز کروی در $r = a$ به دست آوریم. با استفاده از بسط (۳-۷) برای هر دو جمله‌ی موجود در (۲-۱۶) به دست می‌آوریم

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = 4\pi \sum_{l,m} \frac{1}{r^{l+1}} \left[\frac{r'^l}{r^{l+1}} - \frac{1}{a} \left(\frac{a^2}{rr'} \right)^{l+1} \right] Y_{lm}^*(\theta', \phi') Y_{lm}(\theta, \phi) \quad (3-114)$$

برای ملاحظه‌ی ساختار (۳-۱۱۴)، به‌گونه‌ای واضح، و برای اثبات اینکه تابع گرین فوق شرایط مرزی را برآورده می‌کند، عوامل شعاعی را به‌طور جداگانه برای $r < r'$ و $r > r'$ نمایش می‌دهیم

$$\left[\frac{r'^l}{r^{l+1}} - \frac{1}{a} \left(\frac{a^2}{rr'} \right)^{l+1} \right] = \begin{cases} \frac{1}{r'^{l+1}} \left[r^l - \frac{a^{2l+1}}{r^{l+1}} \right] & , r < r' \\ \left[r'^l - \frac{a^{2l+1}}{r'^{l+1}} \right] \frac{1}{r^{l+1}} & , r > r' \end{cases} \quad (3-115)$$

قبل از هر چیز اشاره می‌کنیم که برای هر کدام از مقادیر r یا r' که مساوی با a باشند، (چنانکه لازم است) عامل شعاعی صفر می‌شود. به‌طور مشابه وقتی r یا r' به سمت بینهایت میل می‌کنند، عامل شعاعی صفر خواهد شد. این عامل برحسب r و r' متقارن است. با در نظر گرفتن آن به‌صورت تابعی از r (برای r' ثابت) این عامل شعاعی دقیقاً ترکیبی خطی از جواب‌های r^l و $r^{-(l+1)}$ از بخش شعاعی (۳-۷) در معادله‌ی لاپلاس است. مسلماً این ترکیب خطی برای دو حالت $r < r'$ و $r > r'$ متفاوت است. دلیل این موضوع که در زیر روشن خواهد شد، به این حقیقت مربوط می‌شود که تابع گرین جواب معادله‌ی پواسن است همراه با ناهمسانی تابع دلتا.

حال که ساختار کلی بسط یک تابع گرین در مختصات جداپذیر را ملاحظه کردیم به ساختار نظام‌مند مربوط به یک چنین بسط‌هایی از اصول اولیه می‌پردازیم. یک تابع گرین برای یک مسئله‌ی پتانسیلی دیریکله، معادله‌ی

$$\nabla_x^2 G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = -4\pi \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \quad (3-116)$$

را برآورده می‌کند، که تحت تأثیر شرایط مرزی $G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = 0$ (برای هر کدام از مقادیر \mathbf{x} یا \mathbf{x}') روی سطح مرزی S است. برای سطوح مرزی کروی بسطی با شکل کلی (۳-۱۱۴) موردنظر ما است. برطبق

این نظر، از این واقعیت که تابع دلتا را می‌توان به صورت

$$\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = \frac{1}{r^2} \delta(r - r') \delta(\phi - \phi') \delta(\cos \theta - \cos \theta')$$

نوشت و اینکه رابطه‌ی تمامیت^۱ (۵۶-۳) را می‌توان برای نمایش توابع دلتای زاویه‌ای

$$\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = \frac{1}{r^2} \delta(r - r') \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l Y_{lm}^*(\theta', \phi') Y_{lm}(\theta, \phi) \quad (117-3)$$

مورد استفاده قرار داد بهره‌برداری می‌کنیم. در این صورت تابع گرین که به صورت تابعی از x در نظر گرفته شده است را می‌توان به صورت زیر بسط داد

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l A_{lm}(r|r', \theta', \phi') Y_{lm}(\theta, \phi) \quad (118-3)$$

جایگذاری (۱۱۷-۳) و (۱۱۸-۳) در (۱۱۶-۳) منجر به نتایج زیر می‌شود

$$A_{lm}(r|r', \theta', \phi') = g_l(r, r') Y_{lm}^*(\theta', \phi') \quad (119-3)$$

و

$$\frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} (r g_l(r, r')) - \frac{l(l+1)}{r^2} g_l(r, r') = -\frac{4\pi}{r^2} \delta(r - r') \quad (120-3)$$

ملاحظه می‌کنیم که تابع گرین شعاعی، معادله‌ی شعاعی همگن (۷-۳) را به ازای $r \neq r'$ برآورده می‌کند. بنابراین می‌توان آن را به صورت زیر نوشت

$$g_l(r, r') = \begin{cases} A r^l + B r^{-(l+1)} & r < r' & \text{به‌ازای} \\ A' r^l + B' r^{-(l+1)} & r > r' & \text{به‌ازای} \end{cases}$$

ضرایب A, B, A', B' و تابعی از r' هستند که بایستی توسط شرایط مرزی تعیین شوند. این لازمه توسط $\delta(r - r')$ در (۱۲۰-۳) و تقارن $g_l(r, r')$ برحسب r و r' ایجاب می‌شود. فرض کنید سطوح مرزی،

(۱) برای بیان $\delta(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \delta(x_1 - x'_1) \delta(x_2 - x'_2) \delta(x_3 - x'_3)$ برحسب مختصات (ξ_1, ξ_2, ξ_3) وابسته به (x_1, x_2, x_3) از طریق ژاکوبین $J(x_i, \xi_i)$ خاطر نشان می‌کنیم که کمیت با معنی در اینجا $\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') d^3x$ است. بنابراین

$$\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = \frac{1}{|J(x_i, \xi_i)|} \delta(\xi_1 - \xi'_1) \delta(\xi_2 - \xi'_2) \delta(\xi_3 - \xi'_3)$$

کره‌هایی هم‌مرکز در $r = a$ و $r = b$ باشند. برای x روی سطح، صفر شدن $G(x, x')$ ، صفر شدن $g_l(r, r')$ را برای $r = a$ و $r = b$ ایجاب می‌کند. در نتیجه $g_l(r, r')$ به صورت زیر درمی‌آید

$$g_l(r, r') = \begin{cases} A \left(r^l - \frac{a^{2l+1}}{r^{l+1}} \right), & r < r' \\ B' \left(\frac{1}{r^{l+1}} - \frac{r^l}{b^{2l+1}} \right), & r > r' \end{cases} \quad (۱۲۱-۳)$$

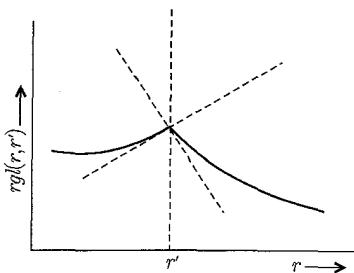
تقارن برحسب r و r' ایجاب می‌کند که ضرایب $A(r')$ و $B'(r')$ به‌گونه‌ای باشند که $g_l(r, r')$ را بتوان به صورت زیر نوشت

$$g_l(r, r') = C \left(r_l - \frac{a^{2l+1}}{r_{<}^{l+1}} \right) \left(\frac{1}{r_{>}^{l+1}} - \frac{r_{>}^l}{b^{2l+1}} \right) \quad (۱۲۲-۳)$$

که در آن $r_{<} < r_{>}$ مقدار کوچک‌تر (بزرگ‌تر) r و r' است. برای تعیین ثابت C ، باید تأثیر تابع دلتا را در $(۱۲۰-۳)$ بررسی کنیم. اگر دو طرف $(۱۲۰-۳)$ را در r ضرب کنیم و روی بازه‌ی از $r = r' - \varepsilon$ تا $r = r' + \varepsilon$ که در آن ε بسیار کوچک است انتگرال بگیریم، به دست می‌آوریم

$$\left\{ \frac{d}{dr} [r g_l(r, r')] \right\}_{r'+\varepsilon} - \left\{ \frac{d}{dr} [r g_l(r, r')] \right\}_{r'-\varepsilon} = -\frac{4\pi}{r'} \quad (۱۲۳-۳)$$

به این ترتیب همان‌طور که در شکل ۱۰-۳ نشان داده شده است یک ناپوستگی در شیب (در $r = r'$) وجود دارد.



شکل ۱۰-۳: ناپوستگی در شیب تابع شعاعی گرین.

برای $r_{>} = r$ و $r_{<} = r'$ به این ترتیب؛

$$\left\{ \frac{d}{dr} [r g_l(r, r')] \right\}_{r'+\varepsilon} = C \left(r'^l - \frac{a^{2l+1}}{r'^{l+1}} \right) \left[\frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r^l} - \frac{r^{l+1}}{b^{2l+1}} \right) \right]_{r=r'}$$

$$= -\frac{C}{r'} \left[1 - \left(\frac{a}{r'} \right)^{2l+1} \right] \left[l + (l+1) \left(\frac{r'}{b} \right)^{2l+1} \right]$$

به طور مشابه

$$\left\{ \frac{d}{dr} [rg_l(r, r')] \right\}_{r'=\varepsilon} = \frac{C}{r'} \left[l+1 + l \left(\frac{a}{r'} \right)^{2l+1} \right] \left[1 - \left(\frac{r'}{b} \right)^{2l+1} \right]$$

با جایگذاری این مشتق‌ها در (۱۲۳-۳) درمی‌یابیم که

$$C = \frac{4\pi}{(2l+1) \left[1 - \left(\frac{a}{b} \right)^{2l+1} \right]} \quad (124-3)$$

ترکیب (۱۲۴-۳)، (۱۲۲-۳)، (۱۱۹-۳) و (۱۱۸-۳) بسط تابع گرین را برای یک لایه‌ی کروی محدود به $r = a$ و $r = b$ نتیجه می‌دهد؛

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{Y_{lm}^*(\theta, \phi') Y_{lm}(\theta, \phi)}{(2l+1) \left[1 - \left(\frac{a}{b} \right)^{2l+1} \right]} \left(r_{<}^l - \frac{a^{2l+1}}{r_{<}^{2l+1}} \right) \left(\frac{1}{r_{>}^{l+1}} - \frac{r_{>}^l}{b^{2l+1}} \right) \quad (125-3)$$

برای حالت‌های خاص $a \rightarrow 0$ و $b \rightarrow \infty$ ، بسط‌های (۷۰-۳) و (۱۱۴-۳) را به ترتیب به دست می‌آوریم. برای مسئله "درونی" کره‌ای به شعاع b فقط فرض می‌کنیم $a \rightarrow 0$ میل می‌کند. در حالی که بسط برای یک کره‌ی منفرد به گونه‌ای بسیار ساده از روش حل تصویری به دست می‌آید، به دست آوردن نتیجه‌ی کلی (۱۲۵-۳) برای یک پوسته‌ی کروی با روش تصاویر نسبتاً مشکل است چراکه این مسئله شامل تعدادی نامتناهی از تصاویر است.

۱۰-۳ حل مسائل پتانسیلی با بسط تابع گرین کروی

حل عمومی معادله‌ی لاپلاس با مقادیر مشخص پتانسیل روی سطح مرزی عبارت است از (بخش ۱-۱) را ملاحظه کنید)

$$\Phi(x) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_v \rho(x') G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') d^3x' - \frac{1}{4\pi} \oint_s \Phi(x') \frac{\partial G}{\partial n'} da' \quad (126-3)$$

برای روشن شدن مسئله، پتانسیل را در داخل کره‌ای به شعاع b بررسی می‌کنیم. ابتدا هم‌ارزی انتگرال سطحی در (۱۲۶-۳) را با روش بخش (۵-۳)، معادلات (۶۱-۳) و (۵۸-۳) اثبات می‌کنیم. با $a = 0$

در (۱۲۵-۳)، مشتق عمودی محاسبه شده در $r' = b$ عبارت است از

$$\frac{\partial G}{\partial n'} = \frac{\partial G}{\partial r'} \Big|_{r'=b} = -\frac{4\pi}{b^2} \sum_{l,m} \left(\frac{r}{b}\right)^l Y_{lm}^*(\theta', \phi') Y_{lm}(\theta, \phi) \quad (127-3)$$

در نتیجه، حل معادله‌ی لاپلاس درون $r = b$ همراه با $\Phi = V(\theta', \phi')$ روی سطح، طبق (۱۲۶-۳) عبارت است از

$$\Phi(\mathbf{x}) = \sum_{l,m} \left[\int V(\theta', \phi') Y_{lm}^*(\theta', \phi') d\Omega' \right] \left(\frac{r}{b}\right)^l Y_{lm}(\theta, \phi) \quad (128-3)$$

برای حالتی که بررسی کردیم نسبت این جواب برای معادله لاپلاس مشابه رابطه‌ی (۶۱-۳) با (۵۸-۳) است. شکل سومی از جواب برای این کره نیز وجود دارد که انتگرال پواسن (۱۹-۲) نامیده می‌شود. هم‌ارزی این جواب با جواب بسط تابع گرین با این واقعیت به‌وجود آمده است که هر دو از رابطه‌ی کلی (۱۲۶-۳) و تابع گرین تصویری به‌دست آمده‌اند. اثبات صریح هم‌ارزی (۱۹-۲) و جواب سری (۶۱-۳) به مسائل واگذار خواهد شد.

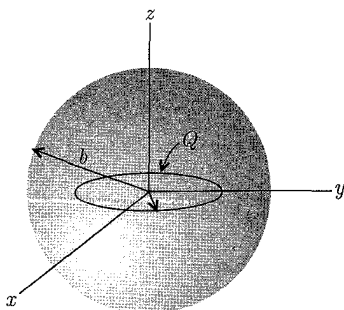
حال به جواب مسائلی می‌پردازیم که با بار توزیع شده در داخل یک حجم همراهند. به‌طوری که انتگرال حجمی در (۱۲۶-۳) نیز وارد بحث شود. کافی است مسائلی را بررسی کنیم که در آن‌ها پتانسیل روی سطوح مرزی صفر می‌شوند. با برهم‌نهی خطی یک جواب از معادله‌ی لاپلاس می‌توانیم جواب کلی را به‌دست آوریم. اولین مثال مربوط می‌شود به یک کره‌ی توخالی زمین‌شده با شعاع b ، همراه با یک حلقه‌ی متحدالمرکز از بار با شعاع a و بار کلی Q . حلقه‌ی بار همان‌گونه که در شکل (۱۱-۳) نشان داده شده است در صفحه‌ی $x - y$ قرار دارد.

چگالی بار حلقه را می‌توانیم به کمک توابع دلتا برحسب زاویه و شعاع به‌صورت زیر بنویسیم

$$\rho(\mathbf{x}') = \frac{Q}{4\pi a^2} \delta(r' - a) \delta(\cos \theta') \quad (129-3)$$

در انتگرال حجمی روی تابع گرین، به‌جهت تقارن سمتی، تنها جملاتی با $m = 0$ در (۱۲۵-۳) باقی می‌ماند. به این ترتیب با استفاده از (۵۷-۳) و با یادآوری اینکه در (۱۲۵-۳) $a \rightarrow 0$ میل می‌کند، درمی‌یابیم که

$$\begin{aligned} \Phi(x) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \rho(\mathbf{x}') G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') d^3x' \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \sum_{l=0}^{\infty} P_l(\cos \theta) r^l < \left(\frac{1}{r^l >} - \frac{r^l}{b^{2l+1}} \right) P_l(\cos \theta) \end{aligned} \quad (130-3)$$

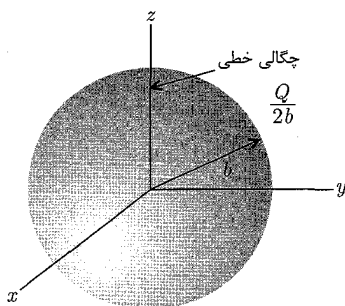


شکل ۱۱-۳: حلقه‌ی باری با شعاع a و بار کلی Q درون کره‌ی رسانای زمین‌شده‌ای با شعاع b .

که در آن $r < r >$ مقدار کوچک‌تر (بزرگ‌تر) r و a است. با استفاده از این واقعیت که؛ $P_{2n+1}(\theta) = 0$ است و اینکه $P_{2n}(\theta) = [(-1)^n (2n-1)!!] 2^n n!$ می‌توانیم (۱۳۰-۳) را به صورت زیر بنویسیم

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n-1)!!}{2^n n!} r_{<}^{2n} \left(\frac{1}{r_{>}^{2n+1}} - \frac{r_{>}^{2n}}{b^{2n+1}} \right) P_{2n}(\cos \theta) \quad (131-3)$$

در حد $b \rightarrow \infty$ ، ملاحظه می‌کنیم که (۱۳۰-۳) یا (۱۳۱-۳) به رابطه‌ی موجود در بخش ۳-۳ برای یک حلقه‌ی بار در فضای آزاد کاهش می‌یابد. نتیجه‌ی کنونی را می‌توانیم به صورت دیگری نیز با استفاده از رابطه‌ی انتهایی بخش ۳-۳ و تصاویر برای یک کره به دست آوریم.



شکل ۱۲-۳: با خطی یکنواخت با طول $2b$ و بار کلی Q درون کره‌ی رسانای زمین‌شده با شعاع b .

مثال دوم از چگالی‌های باری که در شکل (۱۲-۳) نشان داده شده است، مربوط می‌شود به یک کره‌ی توخالی زمین‌شده، همراه با یک بار خطی یکنواخت حاوی بار کلی Q که روی محور z بین قطب‌های شمال و جنوب کره قرار گرفته است. مجدداً با کمک توابع دلتا، چگالی بار حجمی را می‌توانیم به صورت زیر بنویسیم

$$\rho(\mathbf{x}') = \frac{Q}{2b} \frac{1}{2\pi r'^2} [\delta(\cos \theta' - 1) + \delta(\cos \theta' + 1)] \quad (132-3)$$

دو تابع دلتا بر حسب $\cos \theta$ ، متناظر با دو نیمه‌ی بار خطی در بالا و پایین صفحه‌ی xy هستند. عامل $2\pi r'^2$ در مخرج به ما اطمینان می‌دهد که اندازه‌ی چگالی بار ثابت و به اندازه‌ی $\frac{Q}{2b}$ است. با قرار دادن این چگالی در (۱۲۶-۳) به دست می‌آوریم

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 b} \sum_{l=0}^{\infty} [(P_l(1)) + P_l(-1)] P_l(\cos \theta) \int_0^b r'^l \left(\frac{1}{r'^{l+1}} - \frac{r^l}{b^{2l+1}} \right) dr' \quad (133-3)$$

این انتگرال را باید روی فواصل $0 \leq r' \leq r$ و $r \leq r' \leq b$ بشکنیم. در این صورت درمی‌یابیم که

$$\begin{aligned} \int_0^b &= \left(\frac{1}{r^{l+1}} - \frac{r^l}{b^{2l+1}} \right) \int_0^r r'^l dr' + r^l \int_r^b \left(\frac{1}{r'^{l+1}} - \frac{r^l}{b^{2l+1}} \right) dr' \\ &= \frac{(2l+1)}{l(l+1)} \left[1 - \left(\frac{r}{b} \right)^l \right] \end{aligned} \quad (134-3)$$

به‌ازای $l = 0$ نتیجه‌ی فوق نامعین است. با به‌کارگیری قاعده‌ی ال.هوپیتال برای تنها $l = 0$ داریم

$$\int_0^b = \lim_{l \rightarrow 0} \frac{\frac{d}{dl} \left[1 - \left(\frac{r}{b} \right)^l \right]}{\frac{d}{dl}(l)} = \lim_{l \rightarrow 0} \left[-\frac{d}{dl} e^{l \ln \left(\frac{r}{b} \right)} \right] = \ln \left(\frac{b}{r} \right) \quad (135-3)$$

این رابطه را می‌توانیم با انتگرال‌گیری مستقیم از (۱۳۳-۳) به‌ازای $l = 0$ ثابت کنیم. با استفاده از واقعیت $P_l(-1) = (-1)^l$ ، پتانسیل (۱۳۳-۳) را می‌توانیم به صورت زیر بنویسیم

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 b} \left\{ \ln \left(\frac{b}{r} \right) + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(4j+1)}{2j(2j+1)} \left[1 - \left(\frac{r}{b} \right)^{2j} \right] P_{2j}(\cos \theta) \right\} \quad (136-3)$$

حضور لگاریتم به‌ازای $l = 0$ به ما یادآوری می‌کند که پتانسیل در امتداد محور z واگرا است. این موضوع ناشی از حضور سری موجود در (۱۳۶-۳) است که به‌جز دقیقاً در $r = b$ به‌ازای $\cos \theta = \pm 1$ واگرا می‌شود. چیز عجیبی که لگاریتم [در (۱۳۶-۳)] دارد شناسه‌ی $\left(\frac{b}{r} \right)$ به‌جای $\left(\frac{b}{r} \sin \theta \right)$ است که در مسئله‌ی ۸-۳ عنوان شده است. چگالی بار سطحی روی کره‌ی زمین شده به‌سادگی از (۱۳۶-۳) با مشتق‌گیری به دست می‌آید

$$\sigma(\theta) = \epsilon_0 \frac{\partial \Phi}{\partial r} \Big|_{r=b} = -\frac{Q}{4\pi b^2} \left[1 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(4j+1)}{(2j+1)} P_{2j}(\cos \theta) \right] \quad (137-3)$$

جمله‌ی مهم در این رابطه نشان می‌دهد که بار القایی کل روی کره $-Q$ است، سایر جملات با انتگرال‌گیری روی سطح کره به سمت صفر میل می‌کنند.

۱۱-۳ بسط توابع گرین در مختصات استوانه‌ای

بسط پتانسیل یک بار نقطه‌ای واحد در مختصات استوانه‌ای مثال مفید دیگری از بسط توابع گرین را فراهم می‌کند. در اینجا گام‌های اولیه‌ای را در روشی به قدر کافی کلی برمی‌داریم تا این امکان را به ما بدهد که این روش را بتوانیم به سهولت برای یافتن توابع گرین مسائل پتانسیلی (با سطوح مرزی استوانه‌ای) بپذیریم و استفاده کنیم. نقطه‌ی شروع معادله برای تابع گرین است

$$\nabla_x^2 G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = -\frac{4\pi}{\rho} \delta(\rho - \rho') \delta(\phi - \phi') \delta(z - z') \quad (۱۳۸-۳)$$

که در آن تابع دلتا در مختصات استوانه‌ای بیان شده است. توابع دلتای ϕ و z را می‌توان برحسب توابع راست هنجار به صورت زیر نوشت

$$\left. \begin{aligned} \delta(z - z') &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ik(z-z')} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} dk \cos[k(z - z')] \\ \delta(\phi - \phi') &= \frac{1}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im(\phi-\phi')} \end{aligned} \right\} \quad (۱۳۹-۳)$$

تابع گرین را با روشی مشابه بسط می‌دهیم

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \frac{1}{2\pi^2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} dk e^{im(\phi-\phi')} \cos[k(z - z')] g_m(k, \rho, \rho') \quad (۱۴۰-۳)$$

در این صورت جایگذاری در (۱۳۸-۳) منجر به یک معادله برای تابع گرین شعاعی $g_m(k, \rho, \rho')$ می‌شود

$$\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dg_m}{d\rho} \right) - \left(k^2 + \frac{m^2}{\rho^2} \right) g_m = -\frac{4\pi}{\rho} \delta(\rho - \rho') \quad (۱۴۱-۳)$$

به‌ازای $\rho \neq \rho'$ این معادله دقیقاً همان معادله‌ی (۹۸-۳) برای توابع بسط اصلاح‌شده‌ی $I_m(k\rho)$ و $K_m(k\rho)$ است. فرض کنید $\psi_1(k\rho)$ ترکیبی خطی از I_m و K_m باشد طوری که شرایط مرزی مناسبی را به‌ازای $\rho < \rho'$ برآورده می‌کند و $\psi_2(k\rho)$ نیز یک ترکیب خطی مستقل باشد که شرایط مرزی مناسبی را به‌ازای $\rho > \rho'$ برآورده می‌کند. در این صورت تقارن تابع گرین برحسب ρ و ρ' ایجاب می‌کند که داشته باشیم

$$g_m(k, \rho, \rho') = \psi_1(k\rho_{<}) \psi_2(k\rho_{>}) \quad (۱۴۲-۳)$$

به‌نجارش حاصل ضرب $\psi_1 \psi_2$ با انفصال در شیبی تعیین می‌شود که با تابع دلتا در (۱۴۱-۳) بیان شده است

$$\left. \frac{dg_m}{d\rho} \right|_+ - \left. \frac{dg_m}{d\rho} \right|_- = -\frac{4\pi}{\rho} \quad (۱۴۳-۳)$$

که در آن $\left|_{\pm}$ به این معنی است که محاسبه در $\rho = \rho' \pm \varepsilon$ انجام شده است. از (۱۴۲-۳) واضح است که

$$\left[\frac{dg_m}{d\rho} \right]_{+} - \left[\frac{dg_m}{d\rho} \right]_{-} = k(\psi_1 \psi_2' - \psi_2 \psi_1') = kW[\psi_1, \psi_2] \quad (144-3)$$

که در آن پریم‌ها به معنی مشتق‌گیری نسبت به شناسه است و $W[\psi_1, \psi_2]$ رانسکین ψ_1 و ψ_2 است. معادله‌ی (۱۴۱-۳) از نوع اشتروم - لیوویل زیر است

$$\frac{d}{dx} \left[p(x) \frac{dy}{dx} \right] + g(x)y = 0 \quad (145-3)$$

و به خوبی مشخص شده است که رانسکین دو جواب مستقل خطی از یک چنین معادله‌ای با $\left[\frac{1}{p(x)} \right]$ متناسب است. از این رو امکان برآورده شدن (۱۴۳-۳) به ازای تمام مقادیر ρ' تضمین شده است. به وضوح باید بخواهیم بهنجارش حاصل ضرب $\psi_1 \psi_2$ به گونه‌ای باشد که رانسکین دارای مقدار زیر باشد

$$W[\psi_1(x), \psi_2(x)] = -\frac{4\pi}{x} \quad (146-3)$$

اگر سطوح مرزی نداشته باشیم باید $g_m(k, \rho, \rho')$ در $\rho = 0$ متناهی باشد و در $\rho \rightarrow \infty$ صفر شود. در نتیجه $\psi_1(k\rho) = AI_m(k\rho)$ و $\psi_2(k\rho) = K_m(k\rho)$. ثابت A باید از شرط رانسکین (۱۴۶-۳) تعیین شود. از آنجا که رانسکین به ازای تمام مقادیر x با $\frac{1}{x}$ متناسب است، بنابراین مهم نیست که کجا آن را تعیین می‌کنیم. با استفاده از شکل حدی (۱۰۲-۳) و (۱۰۳-۳) برای x های کوچک (یا (۱۰۴-۳)) برای x های بزرگ [درمی‌یابیم که

$$W[I_m(x), K_m(x)] = -\frac{1}{x} \quad (147-3)$$

طوری که $A = 4\pi$. بنابراین بسط $\frac{1}{|x - x'|}$ به صورت زیر درمی‌آید

$$\frac{1}{|x - x'|} = \frac{2}{\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} dk e^{im(\phi - \phi')} \cos[k(z - z')] I_m(k\rho_{<}) K_m(k\rho_{>}) \quad (148-3)$$

می‌توانیم این بسط را به طور کامل برحسب توابع حقیقی به صورت زیر می‌نویسیم

$$\frac{1}{|x - x'|} = \frac{4}{\pi} \int_0^{\infty} dk \cos[k(z - z')] \times \left\{ \frac{1}{4} I_0(k\rho_{<}) K_0(k\rho_{>}) + \sum_{m=1}^{\infty} \cos[m(\phi - \phi')] I_m(k\rho_{<}) K_m(k\rho_{>}) \right\} \quad (149-3)$$

تعدادی نتایج مفید ریاضی می‌توان از این بسط به‌دست آورد. اگر فرض کنیم $\circ \rightarrow x'$ میل کند، تنها جمله $m = 0$ باقی خواهد ماند و نمایش انتگرالی زیر را به‌دست می‌آوریم

$$\frac{1}{\sqrt{\rho^2 + z^2}} = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \cos kz K_0(k\rho) dk \quad (150-3)$$

اگر ρ^2 را در (150-3) با $R^2 = \rho^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho' \cos(\phi - \phi')$ عوض کنیم، در این صورت در طرف سمت چپ، فاصله‌ی معکوس $|x - x'|^{-1}$ یا $z' = 0$ را خواهیم داشت. یعنی دقیقاً رابطه‌ی (3-149) با $z' = 0$.

به این ترتیب مقایسه طرف‌های سمت راست (3-149) و (3-150) [که باید به‌ازای تمام مقادیر z صادق باشند] منجر به شناسایی رابطه‌ی زیر می‌شود

$$\begin{aligned} & K_0(k\sqrt{\rho^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho' \cos(\phi - \phi')}) \\ &= I_0(k\rho_{<})K_0(k\rho_{>}) + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \cos[m(\phi - \phi')] I_m(k\rho_{<})K_m(k\rho_{>}) \quad (151-3) \end{aligned}$$

در این نتیجه‌ی نهایی، می‌توانیم حد $\circ \rightarrow k$ را بگیریم و رابطه‌ای برای تابع گرین در مختصات قطبی (دو بعدی) به‌دست آوریم

$$\begin{aligned} & \ln \left(\frac{1}{\rho^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho' \cos(\phi - \phi')} \right) \\ &= 2 \ln \left(\frac{1}{\rho_{>}} \right) + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \left(\frac{\rho_{<}}{\rho_{>}} \right)^m \cos[m(\phi - \phi')] \quad (152-3) \end{aligned}$$

این نمایش را می‌توانیم به کمک یک ساختار اصولی از تابع گرین دو بعدی برای معادله‌ی پواسن (در راستای مراحل که منجر به (3-148) شدند) اثبات کنیم. مسئله 2-17 را ملاحظه کنید.

3-12 بسط ویژه توابع برای توابع گرین

روش دیگری برای به‌دست آوردن بسط توابع گرین، استفاده از ویژه توابع یک مسئله‌ی وابسته است. این روش خیلی به روش‌های بخش 3-9 و 3-11 نزدیک است. برای مشخص کردن منظورمان از ویژه توابع، یک معادله‌ی دیفرانسیل بیضوی را به صورت زیر در نظر می‌گیریم

$$\nabla^2 \psi(x) + [f(x) + \lambda] \psi(x) = 0 \quad (153-3)$$

اگر جواب‌های $\psi(x)$ ، برای برآوردن شرایط مرزی روی سطح S از حجم مورد نظر ضروری باشند، در این صورت (3-153) در حالت کلی جواب‌های خوش رفتاری نخواهد داشت (مگر برای مقادیر معینی از λ).

این مقادیر λ را که با λ_n مشخص می‌کنیم، ویژه مقادیر (یا مقادیر مشخصه) و جواب‌های $\psi_n(\mathbf{x})$ را نیز ویژه توابع می‌نامیم*. معادله‌ی دیفرانسیل ویژه مقادیری به صورت زیر نوشته می‌شود

$$\nabla^2 \psi_n(\mathbf{x}) + [f(\mathbf{x}) + \lambda_n] \psi_n(\mathbf{x}) = 0 \quad (۱۵۴-۳)$$

با روش‌هایی مشابه با آن‌هایی که برای اثبات متعامد بودن توابع بسط یا لژاندر مورد استفاده قرار گرفتند، می‌توان نشان داد که ویژه توابع فوق متعامدند.

$$\int_V \psi_m^*(\mathbf{x}) \psi_n(\mathbf{x}) d^3x = \delta_{mn} \quad (۱۵۵-۳)$$

که در آن ویژه توابع بهنجار فرض شده‌اند. طیف ویژه مقادیر λ_n ممکن است یک مجموعه‌ی منفصل یا پیوستاری از ویژه مقادیر و یا هر دو باشد. فرض می‌کنیم این مجموعه تمام ویژه‌ی توابع یک مجموعه‌ی کامل را تشکیل می‌دهند.

حال فرض کنید که بخواهیم تابع گرین را برای معادله‌ی زیر بیابیم

$$\nabla_x^2 G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') + [f(\mathbf{x}) + \lambda] G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = -4\pi\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \quad (۱۵۶-۳)$$

که در آن λ مساوی یکی از ویژه مقادیر λ_n (۱۵۴-۳) نباشد. علاوه بر این، فرض کنید تابع گرین دارای شرایط مرزی مشابه با ویژه توابع (۱۵۴-۳) باشد. در این صورت می‌توانیم تابع گرین را به شکل یک سری از ویژه توابع، به صورت زیر بسط دهیم

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \sum_n a_n(\mathbf{x}') \psi_n(\mathbf{x}) \quad (۱۵۷-۳)$$

جاگذاری در معادله‌ی دیفرانسیل برای تابع گرین منجر به نتیجه‌ی زیر می‌شود

$$\sum_m a_m(\mathbf{x}') (\lambda - \lambda_m) \psi_m(\mathbf{x}) = -4\pi\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \quad (۱۵۸-۳)$$

اگر دو طرف رابطه‌ی بالا را در $\psi_n^*(\mathbf{x})$ ضرب و روی حجم V انتگرال بگیریم شرط متعامد بودن (۱۵۵-۳)، طرف سمت چپ را به یک جمله کاهش می‌دهد و به دست می‌آوریم

$$a_n(\mathbf{x}') = 4\pi \frac{\psi_n^*(\mathbf{x}')}{\lambda_n - \lambda} \quad (۱۵۹-۳)$$

در نتیجه بسط ویژه تابعی مربوط به تابع گرین عبارت است از

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = 4\pi \sum_n \frac{\psi_n^*(\mathbf{x}') \psi_n(\mathbf{x})}{\lambda_n - \lambda} \quad (۱۶۰-۳)$$

(* خواننده‌ی آشنا با مکانیک موجی، (۱۵۳-۳) را به عنوان هم‌ارز معادله‌ی شرودینگر برای ذره در یک پتانسیل می‌داند.

برای یک طیف متصل، جمع با انتگرال عوض می‌شود.

با اختصاص ملاحظات بالا برای معادله‌ی پواسن، $f(x) = 0$ و $\lambda = 0$ را در (۳-۱۵۶) قرار می‌دهیم.

به‌عنوان مثال اول و اساساً بدیهی فرض می‌کنیم (۳-۱۵۴) معادله‌ی موج روی تمام فضا باشد

$$(\nabla^2 + k^2)\psi_k(\mathbf{x}) = 0 \quad (3-161)$$

با پیوستاری از ویژه مقادیر k^2 و ویژه توابع

$$\psi_k(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \quad (3-162)$$

این ویژه توابع دارای بهنجارش تابع دلتای زیر هستند

$$\int \psi_{\mathbf{k}'}^*(\mathbf{x}) \psi_{\mathbf{k}} d^3x = \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \quad (3-163)$$

در این صورت، طبق (۳-۱۶۰) تابع گرین فضای نامحدود دارای بسطی به‌صورت زیر است

$$\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} = \frac{1}{2\pi^2} \int d^3k \frac{e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x} - \mathbf{x}')}}{k^2} \quad (3-164)$$

این بسط همان نمایش انتگرال فوریه‌ی سه‌بعدی است.

به‌عنوان مثال دوم، تابع گرین را برای یک مسئله‌ی دیریکله درون جعبه‌ای مستطیلی در نظر بگیرید

که با شش صفحه‌ی $x = 0$ ، $y = 0$ ، $z = 0$ ، $x = a$ ، $y = b$ ، $z = c$ تعریف می‌شود. بسط باید

برحسب ویژه توابع معادله‌ی موج زیر انجام پذیرد

$$(\nabla^2 + k_{lmn}^2)\psi_{lmn}(x, y, z) = 0 \quad (3-165)$$

که در آن ویژه توابعی که روی تمام سطوح مرزی صفر می‌شوند عبارتند از

$$\psi_{lmn}(x, y, z) = \sqrt{\frac{8}{abc}} \sin\left(\frac{l\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right) \sin\left(\frac{n\pi z}{c}\right)$$

و

$$k_{lmn}^2 = \pi^2 \left(\frac{l^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} + \frac{n^2}{c^2} \right) \quad (3-166)$$

بنابراین بسط تابع گرین عبارت است از

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \frac{32}{\pi abc}$$

$$\times \sum_{l,m,n=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{l\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{l\pi x'}{a}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right) \sin\left(\frac{m\pi y'}{b}\right) \sin\left(\frac{n\pi z}{c}\right) \sin\left(\frac{n\pi z'}{c}\right)}{\frac{l^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} + \frac{n^2}{c^2}} \quad (۱۶۷-۳)$$

برای ربط بسط (۱۶۷-۳) به بسط‌های بخش ۳-۹ و ۳-۱۱ یعنی (۳-۱۲۵) برای مختصات کروی و (۳-۱۴۸) برای مختصات استوانه‌ای، بسط مشابهی را برای جعبه‌ی مستطیلی می‌نویسیم. اگر مختصات x و y را همانند (θ, ϕ) یا (ϕ, z) در حالت‌های شان تلقی کنیم، در عین اینکه مختصه‌ی z را هم به خاطر هدف خاصی جدا کنیم، تابع گرین زیر را به دست می‌آوریم

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \frac{16\pi}{ab} \sum_{lm=1}^{\infty} \sin\left(\frac{l\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{l\pi x'}{a}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right) \sin\left(\frac{m\pi y'}{b}\right) \times \frac{\sinh(K_{lm}z_{<}) \sinh[K_{lm}(c - z_{>})]}{K_{lm} \sinh(K_{lm}c)} \quad (۱۶۸-۳)$$

که در آن؛ $K_{lm} = \pi \left(\frac{l^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} \right)^{\frac{1}{2}}$. اگر (۱۶۷-۳) و (۱۶۸-۳) بخواهند مساوی باشند، باید قضیه به‌گونه‌ای باشد که جمع روی n در (۱۶۷-۳) دقیقاً نمایش سری فوریه روی بازه‌ی $(c, 0)$ [از تابع گرین یک‌بعدی برحسب z] باشد. در رابطه‌ی (۱۶۸-۳)

$$\frac{\sinh(K_{lm}z_{<}) \sinh[K_{lm}(c - z_{>})]}{K_{lm} \sinh(K_{lm}c)} = \frac{2}{c} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{n\pi z'}{c}\right)}{K_{lm}^2 + \left(\frac{n\pi}{c}\right)^2} \sin\left(\frac{n\pi z}{c}\right) \quad (۱۶۹-۳)$$

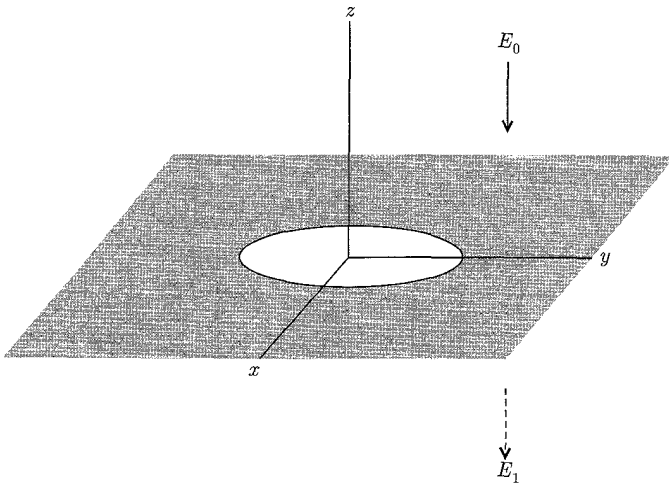
اثبات اینکه (۱۶۹-۳) نمایش صحیح فوریه است یا خیر به صورت یک تمرین به خواننده واگذار می‌شود. مثال‌های بیش‌تری از این روش در مسائل انتهایی فصل یافت می‌شود.

۳-۱۳ شرایط مرزی آمیخته، صفحه‌ی رسانا با یک سوراخ دایروی

مسائل پتانسیل که تاکنون در این فصل مورد بحث قرار گرفتند از نوع سستی آن بوده‌اند، که در آن شرایط مرزی روی کل سطح مرزی از یک نوع (معمولاً دیریکله) هستند. هرچند که در اثبات یکتایی جواب‌های معادله‌ی لاپلاس یا پواسن (بخش ۱-۱۹) به این نکته اشاره کردیم که شرایط مرزی آمیخته که در آن پتانسیل روی بخشی از مرز و مشتق عمودی آن روی مابقی آن مشخص شده باشد نیز به مسائل مقدار مرزی یکتای خوش تعریفی منجر می‌شوند. کتاب‌های درسی در هنگام انجام اثبات یکتایی تمایل دارند که تنها امکان وجود شرایط مرزی آمیخته را یادآوری کنند و از بیان یک چنین مسائلی در مباحث بعدی هم صرف‌نظر

می‌کنند. دلیل این موضوع نیز چنانکه خواهیم دید این است که کار کردن روی شرایط مرزی آمیخته بسیار مشکل‌تر از نوع عادی آن است.

برای بررسی مشکلات مورد مواجهه با شرایط مرزی آمیخته، مسئله‌ی یک صفحه‌ی رسانای نازک بینهایت زمین‌شده‌ای را در نظر می‌گیریم که یک سوراخ دایروی با شعاع a در آن ایجاد شده است (همراه با یک میدان الکتریکی که در فاصله‌ی دور از سوراخ عمود بر صفحه است و از لحاظ مقدار ثابت بوده و مقادیر متفاوتی در دو طرف صفحه دارد). هندسه‌ی مسئله در شکل ۳-۱۳ رسم شده است. صفحه در $z = 0$ قرار دارد؛ سوراخ روی مبدأ مختصات مرکزیت یافته است؛ مؤلفه‌های میدان الکتریکی مجانبی غیرصفرند و برای $z > 0$ ، $E_z = -E_0$ است و برای $z < 0$ ، $E_z = -E_1$ است. مسئله ممکن است غیر عملی به نظر برسد، اما با $E_0 = 0$ یا $E_1 = 0$ این مسئله در تابش ناشی از سوراخ‌های کوچک در دیواره‌ی موج‌برها کاربرد دارد، که در آن "کوچک" به معنی کوچک در مقایسه با یک طول موج تعریف می‌شود، طوری که بتوانیم ملاحظات الکترواستاتیکی را اعمال کنیم (بخش ۹-۵ را ملاحظه کنید).



شکل ۳-۱۳:

از آنجایی که میدان الکتریکی در فواصل دور از حفره مشخص است پتانسیل را به صورت زیر می‌نویسیم

$$\Phi = \begin{cases} E_0 z + \Phi^{(1)} & (z > 0) \\ E_1 z + \Phi^{(1)} & (z < 0) \end{cases} \quad (۳-۱۷۰)$$

اگر سوراخی در کار نمی‌بود $\Phi^{(1)}$ صفر می‌شد و سطح بالایی این صفحه چگالی بار سطحی یکنواخت $E_0 \cdot \epsilon_0$ و سطح پایینی چگالی بار $E_1 \cdot \epsilon_0$ را می‌داشت. بنابراین پتانسیل $\Phi^{(1)}$ را می‌توانیم به مثابه نتیجه‌ی

آرایش مجدد بار سطحی در همسایگی سوراخ تصور کنیم. چون این چگالی بار روی صفحه‌ی $z = 0$ قرار گرفته است، پتانسیل $\Phi^{(1)}$ را می‌توانیم به صورت زیر بنویسیم

$$\Phi^{(1)}(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\sigma^{(1)}(x', y') dx' dy'}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + z^2}}$$

این موضوع نشان می‌دهد که $\Phi^{(1)}$ برحسب z زوج است، طوری که $E_x^{(1)}$ و $E_y^{(1)}$ نیز برحسب z زوج‌اند، اما $E_z^{(1)}$ فرد است. اشاره می‌کنیم که $E_x^{(1)}$ و $E_y^{(1)}$ مؤلفه‌های x و y میدان الکتریکی کل هستند، اما به‌خاطر رابطه‌ی (۳-۱۷۰)، $E_z^{(1)}$ مؤلفه‌ی z کل نیست. به این ترتیب اگرچه برحسب z فرد است اما در $z = 0$ صفر نیست بلکه در این نقطه انحصالی است.

از آنجایی که مؤلفه‌ی z کل میدان الکتریکی باید در عبور از $z = 0$ (سوراخ) متصل باشد باید داشته باشیم (برای $\rho < a$)

$$-E_0 + E_z^{(1)} \Big|_{z=0^+} = -E_1 + E_z^{(1)} \Big|_{z=0}$$

چون $E_z^{(1)}$ برحسب z فرد است. این رابطه مؤلفه‌ی عمودی میدان الکتریکی را به صورت

$$E_z^{(1)} \Big|_{z=0^+} = -E_z^{(1)} \Big|_{z=0} = \frac{1}{4}(E_0 - E_1)$$

تعیین می‌کند، مشروط بر اینکه (x, y) درون سوراخ ($0 \leq \rho \leq a$) قرار گیرد. برای نقاط روی سطح رسانا ($a \leq \rho \leq \infty$) میدان الکتریکی مشخص نشده است، ولی پتانسیل روی سطح طبق فرض صفر است. با توجه به رابطه‌ی (۳-۱۷۰) این بدان معنی است که در آنجا $\Phi^{(1)} = 0$ است. دقت کنید که پتانسیل را در سوراخ نمی‌دانیم، بنابراین یک مسئله‌ی مقدار مرزی الکترواستاتیکی داریم با شرایط مرزی آمیخته‌ای به صورت زیر

$$\frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial z} \Big|_{z=0^+} = -\frac{1}{4}(E_0 - E_1) \quad \text{برای } 0 \leq \rho < a$$

و

$$\Phi^{(1)} \Big|_{z=0} = 0 \quad \text{برای } a \leq \rho < \infty \quad (3-171)$$

به جهت تقارن سمتی موجود در این شکل، پتانسیل $\Phi^{(1)}$ را می‌توانیم برحسب مختصات استوانه‌ای [از (۳-۱۰۶)] به صورت زیر بنویسیم

$$\Phi^{(1)}(\rho, z) = \int_0^\infty dk A(k) e^{-k|z|} J_0(k\rho) \quad (3-172)$$

قبل از بررسی اینکه $A(k)$ چگونه با شرایط مرزی تعیین می‌شود، $A(k)$ و مشتق‌های آن را در $k = 0$ به رفتار مجانبی پتانسیل مربوط می‌کنیم. برای ρ یا $|z|$ بزرگ، نوسان‌های سریع $J_0(k\rho)$ یا کاهش سریع $e^{-k|z|}$ ایجاب می‌کند که انتگرال موجود در (۳-۱۷۲) سهم مهم خودش را از ناحیه اطراف $k = 0$ دریافت کند. بنابراین رفتار مجانبی $\Phi^{(1)}$ به رفتار $A(k)$ (در مقادیر کوچک k) مربوط می‌شود. فرض می‌کنیم که بتوانیم $A(k)$ را به صورت یک سری تیلور حول $k = 0$ بسط دهیم

$$A(k) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{k^l}{l!} \frac{d^l A}{dk^l}(0)$$

با اعمال این سری در (۳-۱۷۲)، پتانسیل $\Phi^{(1)}$ به صورت زیر درمی‌آید

$$\Phi^{(1)}(\rho, z) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{d^l A}{dk^l}(0) B_l(\rho, z) \quad (3-173)$$

که در آن

$$B_l(\rho, z) = \frac{1}{l!} \int_0^{\infty} dk k^l e^{-k|z|} J_0(k\rho) \quad (3-174)$$

انتگرال (۳-۱۷۴) را می‌توان به وضوح به صورت زیر نوشت

$$B_l = \frac{1}{l!} \left(-\frac{d}{d|z|} \right)^l \int_0^{\infty} dk e^{-k|z|} J_0(k\rho)$$

با استفاده از نتیجه‌ی مسئله‌ی، (۳-۱۶) ج، درمی‌یابیم که B_l عبارت است از

$$B_l = \frac{1}{l!} \left(-\frac{d}{d|z|} \right)^l \left(\frac{1}{\sqrt{\rho^2 + z^2}} \right) \quad (3-175)$$

خواننده دریافتن اینکه محاسبات صریح منجر به نتیجه‌ی

$$B_l = \frac{P_l(|\cos \theta|)}{r^{l+1}} \quad (3-176)$$

می‌شود که در آن $\cos \theta = \frac{z}{r}$ و $r = \sqrt{\rho^2 + z^2}$ هستند نباید دچار تعجب شود. به این ترتیب بسط

مجانبی (۳-۱۷۳)، بسطی از نوع هماهنگ‌های کروی (۳-۳۳) است

$$\Phi^{(1)} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{d^l A}{dk^l}(0) \cdot \frac{P_l(|\cos \theta|)}{r^{l+1}} \quad (3-177)$$

همانگونه که در فصل بعد نیز بحث شده است، این بسط برحسب توان‌های r^{-1} یک بسط چند قطبی نامیده می‌شود. ضریب $l = 0$ ، $A(0)$ ، بار کل است (تقسیم بر $4\pi\epsilon_0$). ضریب $l = 1$ ، $\frac{dA(0)}{dk}$ ، گشتاور دوقطبی در جهت z است و غیره. همین که تابع $A(k)$ را بشناسیم می‌توانیم این کمیت‌ها را که رفتار مجانبی پتانسیل را توصیف می‌کنند، بدون اثبات صریح خود پتانسیل تعیین کنیم. حال آماده‌ایم که مسئله‌ی مقدار مرزی آمیخته را مورد بحث قرار دهیم. با توجه به شکل فرضی (۳-۱۷۲) برای $\Phi^{(1)}$ ، شرایط مرزی (۳-۱۷۱) به صورت یک جفت معادله‌ی انتگرالی از نوع اول برای $A(k)$ درمی‌آیند

$$\begin{aligned} \int_0^\infty dk k A(k) J_0(k\rho) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} (E_0 - E_1) \quad 0 \leq \rho < a \\ \int_0^\infty dk A(k) J_0(k\rho) &= 0 \quad a \leq \rho < \infty \end{aligned} \quad (3-178)$$

یک چنین جفت معادلاتی انتگرالی، که یکی از آن‌ها روی یک بخش از ناحیه‌ی تغییرات متغیر مستقل و دیگری روی بخش دیگری از این ناحیه صادق هستند "معادلات انتگرالی دوگانه" نامیده می‌شوند. نظریه‌ی کلی مربوط به یک چنین معادلاتی پیچیده بوده و گسترش زیادی نیافته است. تقریباً یکصد سال پیش اچ. وبر، به دقت مسئله‌ی پتانسیل ناشی از یک دیسک باردار دایروی را با استفاده از انتگرال‌های انفصالی مشخص (شامل توابع بسل) حل کرد. در اینجا ما به دنبال تعمیمی از فرمول‌های وبر هستیم. معادلات انتگرالی دوگانه‌ی زیر را در نظر بگیرید

$$\begin{aligned} \int_0^\infty dy y g(y) J_n(yx) &= x^n \quad 0 \leq x < 1 \\ \int_0^\infty dy g(y) J_n(yx) &= 0 \quad 1 \leq x < \infty \end{aligned} \quad (3-179)$$

بررسی فرمول سونین^۱ و شفیت لین^۲ برای انتگرال $J_\mu(at)J_\nu(bt)t^{-\lambda}$ [Watson, 99. 398ff] یا Magnus et al., p. 99 را ملاحظه کنید] نشان می‌دهد که جواب برای $g(y)$ عبارت است از

$$g(y) = \frac{\Gamma(n+1)}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right)} j_{n+\frac{1}{2}}(y) = \frac{\Gamma(n+1) J_{n+\frac{3}{2}}(y)}{\Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right) (\sqrt{2}y)^{\frac{1}{2}}} \quad (3-180)$$

در این رابطه $j_n(y)$ تابع بسل کروی از مرتبه‌ی n است (بخش ۹-۶ را ملاحظه کنید). برای جفت معادلات مان، (۳-۱۷۸)، داریم؛ $n = 0$ ، $x = \frac{\rho}{a}$ و $y = ka$ بنابراین $A(k)$ عبارت است از

$$A(k) = \frac{(E_0 - E_1)a^{\frac{1}{2}}}{\pi} j_1(ka) = \frac{(E_0 - E_1)}{\pi} \left[\frac{\sin ka}{k^{\frac{1}{2}}} - \frac{a \cos ka}{k} \right] \quad (3-181)$$

بسط $A(k)$ برای مقادیر کوچک k شکل زیر را به خود می‌گیرد

$$A(k) \simeq \frac{(E_0 - E_1)a^2}{3\pi} \left[ka - \frac{(ka)^3}{10} + \dots \right]$$

این بدان معنی است که بارکل وابسته به $\Phi^{(1)}$ صفر است و جمله‌ی عمده در پتانسیل مجانبی (۱۷۷-۳) مربوط به سهم $l = 1$ است

$$\Phi^{(1)} \rightarrow \frac{(E_0 - E_1)a^2}{3\pi} \cdot \frac{|z|}{r^3} \quad (182-3)$$

که با فاصله به صورت r^{-2} افت می‌کند و دارای گشتاور دوقطبی الکتریکی موثری به شکل زیر است

$$\mathbf{p} = \mp \frac{4\varepsilon_0}{3} (\mathbf{E}_0 - \mathbf{E}_1)a^3 \quad (z \geq 0) \quad (183-3)$$

وارونی گشتاور دوقطبی مؤثر بسته به اینکه آیا نقطه‌ی مشاهده بالا یا پایین صفحه قرار داشته باشد نتیجه‌ای از این واقعیت است که یک پتانسیل دوقطبی حقیقی برحسب z فرد است، در حالی که (۱۸۲-۳) زوج است. این ایده که یک سوراخ کوچک در یک ورقه‌ی رسانای تخت در فاصله‌ی دور از سوراخ معادل یک دوقطبی عمود بر سطح است در بحث مربوط به نتایج یک چنین سوراخ‌هایی در دیواره‌های موج‌برها و حفره‌ها اهمیت دارد. شکل ۹-۴ به‌گونه‌ای تصویری، مبدأ میدان دوقطبی گونه را به‌صورت نتیجه‌ای از نفوذ خطوط میدان از سوراخ، تا ختم این خطوط به جایی که در آنجا میدان ثابت کوچک‌تری وجود دارد، نشان می‌دهد. این تصویر معنی کمی روابط (۱۸۲-۳) و (۱۸۳-۳) را ارائه کرده است. پتانسیل اضافه‌شده‌ی $\Phi^{(1)}$ در همسایگی سوراخ بایستی از رابطه‌ی دقیق

$$\Phi^{(1)}(\rho, z) = \frac{(E_0 - E_1)}{\pi} a^2 \int_0^\infty dk j_l(ka) e^{-k|z|} J_0(k\rho) \quad (184-3)$$

محاسبه شود. بعد از انجام انتگرال‌گیری به روش جزء‌به‌جزء برای جایگزینی j_l با J_0 این انتگرال* را می‌توان به‌صورت مجموعی از بخش‌های موهومی تبدیلات لاپلاس $\frac{J_\nu(k\rho)}{k}$ (برای مقدار مختلط P) به‌ازای $\nu = 0, 1$ بیان نمود. پس از مقداری ساده‌سازی نتیجه عبارت است از

$$\Phi^{(1)}(\rho, z) = \frac{(E_0 - E_1)a}{\pi} \left[\sqrt{\frac{R-\lambda}{2}} - |z| \tan^{-1} \left(\sqrt{\frac{2}{R+\lambda}} \right) \right] \quad (185-3)$$

* برای انتگرال‌ها، از نوعی که در اینجا برشمرده شدند، مراجع زیر را ببینید

که در آن

$$\lambda = \frac{1}{a^2}(z^2 + \rho^2 - a^2), \quad R = \sqrt{\lambda^2 + \frac{4z^2}{a^2}}$$

چند حالت خاص مورد نظر است. پتانسیل اضافی روی محور ($\rho = 0$) عبارت است از

$$\Phi^{(1)}(0, z) = \frac{(E_0 - E_1)a}{\pi} \left[1 - \frac{|z|}{a} \tan^{(1)} \left(\frac{a}{|z|} \right) \right]$$

به این ترتیب برای $a \gg |z|$ ، این رابطه با $r = |z|$ به (۳-۱۸۲) تقلیل می‌یابد، در حالی که به ازای $|z| \rightarrow 0$ ، این رابطه با جمله‌ی اول تقریب زده می‌شود. در صفحه‌ی سوراخ ($z = 0$) برای $0 \leq \rho < a$ (و البته صفر برای $\rho \geq a$) پتانسیل $\Phi^{(1)}$ عبارت است از

$$\Phi^{(1)}(\rho, 0) = \frac{(E_0 - E_1)}{\pi} \sqrt{a^2 - \rho^2}$$

میدان الکتریکی مماسی در سوراخ یک میدان شعاعی است

$$\mathbf{E}_{\tan}(\rho, 0) = \frac{(E_0 - E_1)}{\pi} \frac{\rho}{\sqrt{a^2 - \rho^2}} \quad (۳-۱۸۶)$$

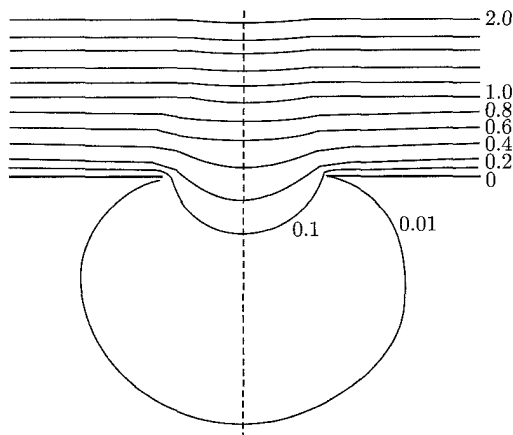
مؤلفه‌ی عمودی میدان الکتریکی در سوراخ با توجه به اولین معادله در (۳-۱۷۱) دقیقاً میانگین میدان‌های یکنواخت در بالا و پایین صفحه خواهد بود، یعنی

$$E_z(\rho, 0) = -\frac{1}{2}(E_0 + E_1) \quad (۳-۱۸۷)$$

اشاره می‌کنیم که اندازه‌ی میدان الکتریکی دارای یک تکینگی ریشه‌ی مربعی در لبه‌ی سوراخ است که با ملاحظات بخش (۲-۱۱) نیز مطابقت دارد. چگالی‌های بار سطحی روی وجوه بالا و پایین این صفحه‌ی رسانا در همسایگی سوراخ را می‌توان با روشی ساده محاسبه نمود. محاسبه‌ی صریح این چگالی‌ها به مسائل واگذار شده است.

منحنی‌های هم‌پتانسیل در نزدیکی حفره‌ی دایروی، برای پتانسیل کامل (۳-۱۷۰) برای وضعیتی که در آن $E_1 = 0$ است در شکل (۳-۱۴) نشان داده شده است. در فواصلی بیش از دو یا سه برابر شعاع دورتر از حفره حضور این منحنی‌ها به سختی قابل تشخیص هستند.

مسئله‌ی کلاسیک یک دیسک رسانای باردار با جزئیاتش توسط اسندون (op. cit) مورد بحث قرار گرفته است. می‌توان با جداسازی معادله‌ی لاپلاس در مختصات بیضوی از شرایط مرزی آمیخته برای این دیسک یا سوراخ اجتناب کرد. پس از آن، این دیسک را می‌توان شکل حدی یک سطح کره‌گون پخت در نظر گرفت. برای این روش به عنوان مثال، اسمیت (صفحات ۱۷۱، ۱۲۴) یا جینز (صفحه‌ی ۲۲۴) را ملاحظه کنید.



شکل ۳-۱۴: منحنی‌های هم‌پتانسیل نزدیک یک سوراخ دایروی در یک صفحه‌ی رسانا با میدان الکتریکی عمود E_0 در فواصل دور از حفره در یک طرف، و عدم وجود میدان مجانبی روی طرف دیگر ($E_0 = 0$). اعداد نشان‌دهنده‌ی مقادیر پتانسیل Φ برحسب واحدهای aE_0 هستند. توزیع (منحنی‌ها؛ م) حول خط بریده‌ی عمودی از مرکز حفره دارای تقارن دورانی است.

مراجع و خواندنی‌های پیشنهادی

موضوع توابع خاص ریاضی فیزیک، حل معادلات دیفرانسیل معمولی، توابع فوق هندسی^۱ و قضیه‌ی اشترم - لیوویل در بسیاری از کتاب‌ها پوشش داده شده‌اند. برای خواننده‌ای که تاکنون مرجع مطلوبش را نداشته است تعدادی از این مراجع عبارتند از

Arfken

Dennery and Kryzwicki

Morse and Feshbach

Whittaker and Watson

یک بحث بسیار مقدماتی با مثال‌ها و مسائلی که خوب انتخاب شده‌اند را می‌توان در

Hildebrand, Chapter 4, 5, and 8

یافت.

یک منبع که تا اندازه‌ای با سبک و سیاق قدیمی به این قضیه و جریان چندجمله‌ای‌های لژاندر و هارمونیک‌های کروی پرداخته است، همراه با مسائل و مثال‌های زیاد، عبارت است از

Byerly

برای خواص ریاضی محض توابع کروی، یکی از مفیدترین مراجع تک‌جلدی عبارت است از

1) hypergeometric

Magnus, Oberhettinger, and Soni

برای خواص ریاضی دقیق توابع بسل، واتسون، و برای تمام انواع توابع خاص

Bateman Manuscript Project books

را ملاحظه کنید.

مسائل الکترواستاتیک در مختصات استوانه‌ای، کروی و دیگر مختصات به صورت جامعی در

Durand, Chapter XI

Jeans, Chapter VIII

Smythe, Chapter V

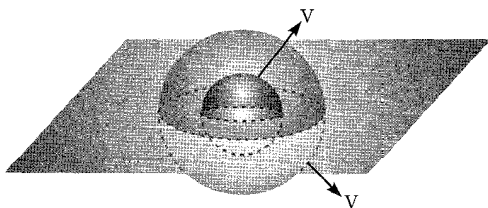
Stratton, Chapter III

مورد بحث قرار گرفته‌اند.

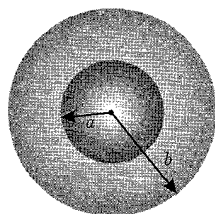
مسائل

۱-۳ دو کره‌ی هم‌مرکز دارای شعاع‌های a و b هستند ($b > a$) و هر کدام توسط صفحه‌ی افقی یکسانی به دو نیم‌کره تقسیم شده است. نیم‌کره‌ی بالا از کره‌ی درونی و نیم‌کره‌ی پایین از کره‌ی بیرونی در پتانسیل V نگه داشته شده‌اند و سایر نیم‌کره‌ها در پتانسیل صفرند.

پتانسیل را در ناحیه‌ی $a \leq r \leq b$ به صورت یک سری از چند جمله‌ای‌های لژاندر تعیین و جملات را تا حداقل $l = 4$ وارد کنید. حل‌تان را در برابر نتایج شناخته‌شده در حالت‌های حدی $a \rightarrow 0$ و $b \rightarrow \infty$ واریسی کنید.



(ب)



(الف)

۲-۳ یک سطح کروی با شعاع R دارای باری با چگالی $\frac{Q}{4\pi R^2}$ است که به طور یکنواخت روی سطح آن (البته به جز برای یک عرقچین در قطب شمال که با مخروط $\theta = \alpha$ تعریف می‌شود) توزیع شده است. (الف) نشان دهید که پتانسیل درون این سطح کروی را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\Phi = \frac{Q}{\lambda\pi\epsilon_0} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{2l+1} [P_{l+1}(\cos \alpha) - P_{l-1}(\cos \alpha)] \frac{r^l}{R^{l+1}} P_l(\cos \theta)$$

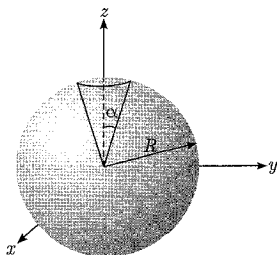
که در آن برای $l = 0$ ، $P_{l-1}(\cos \alpha)$ است. پتانسیل در ناحیه‌ی بیرون کره چیست؟

(ب) اندازه و جهت میدان الکتریکی را در مبدأ بیابید.

(ج) شکل‌های حدی پتانسیل (در قسمت الف) و میدان الکتریکی در قسمت (ب) را در حالت‌های زیر مورد بحث قرار دهید:

۱. وقتی عرقچین بسیار کوچک باشد و

۲. طوری بزرگ باشد که سطح همراه با بار روی آن به صورت یک عرقچین کوچک در قطب جنوب درآید.



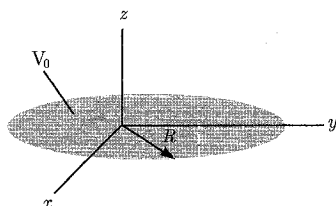
۳-۳ یک صفحه‌ی دایره‌ای رسانای تخت و نازک به شعاع R در صفحه‌ی $x - y$ قرار گرفته است. مرکز این صفحه‌ی دایره‌ی در مبدأ مختصات و در پتانسیل ثابت V نگه داشته شده است. با اطلاع از این‌که چگالی بار روی صفحه‌ی دایره‌ای با پتانسیل ثابت، با $(R^2 - \rho^2)^{1/2}$ متناسب است که در آن ρ فاصله‌ای در خارج از مرکز دیسک است

الف) نشان دهید که برای $r > R$ پتانسیل عبارت است از

$$\Phi(r, \theta, \phi) = \frac{2V R}{\pi r} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{2l+1} \left(\frac{R}{r}\right)^{2l} P_{2l}(\cos \theta)$$

ب) پتانسیل را برای $r < R$ به دست آورید.

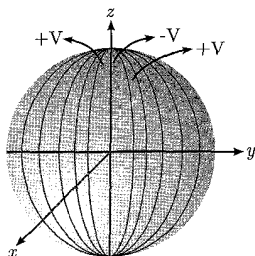
ج) ظرفیت این دیسک چیست؟



۴-۳ سطح یک کره‌ی رسانای توخالی با شعاع داخلی a به یک تعداد زوج از قطعات مساوی توسط یک مجموعه از صفحات تقسیم‌بندی شده است. خط مشترک تقاطع این صفحات محور z است و این قطعات به طور یکنواخت برحسب زاویه‌ی ϕ توزیع شده‌اند. (این قطعات شبیه به پوست روی قاچ‌های یک سیب هستند، یا مشابه سطح زمین، بین نصف‌النهارهای متوالی طول جغرافیایی). این قطعات به طور یک‌درمیان در پتانسیل‌های ثابت $\pm V$ قرار دارند.

الف) یک نمایش سری برای پتانسیل درون کره برای حالت کلی $2n$ قطعه بنا کنید و ضرایب به قدر کافی دور و کوچک را در این سری محاسبه کنید تا بدین وسیله به طور دقیق تعیین کنید که کدام یک از ضرایب با صفر تفاوت دارند. برای جملات غیرصفر، ضرایب را به صورت یک انتگرال روی $\cos \theta$ نمایش دهید.

ب) برای حالت خاص $n = 1$ (دو نیم کره) پتانسیل را به طور صریح تا تمام جملات با $l = 3$ (و شامل $l = 3$) تعیین کنید. با یک تبدیل مختصه اثبات کنید که این پتانسیل به نتیجه‌ی (۳-۳۶) از بخش ۳-۳ کاهش می‌یابد.



۳-۵ یک کره‌ی توخالی داریم با شعاع داخلی a که روی سطح آن پتانسیل با $\Phi = V(\theta, \phi)$ مشخص شده است. هم‌ارزی دو صورت از جواب برای پتانسیل درون کره را اثبات کنید.

الف)

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{a(a^2 - r^2)}{4\pi} \int \frac{V(\theta', \phi')}{(r^2 + a^2 - 2ar \cos \gamma)^{3/2}} d\Omega'$$

که در آن

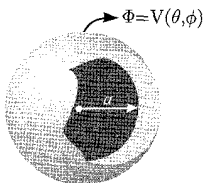
$$\cos \gamma = \cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \cos(\phi - \phi')$$

ب)

$$\Phi(x) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l A_{lm} \left(\frac{r}{a}\right)^l Y_{lm}(\theta, \phi)$$

که در آن

$$A_{lm} = \int d\Omega' Y_{lm}^*(\theta', \phi') V(\theta', \phi')$$

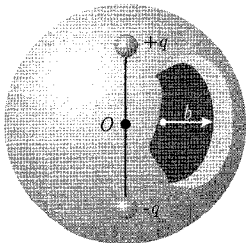


۶-۳ دو بار نقطه‌ای q و $-q$ روی محور z به ترتیب در $z = +a$ و $z = -a$ قرار گرفته‌اند.

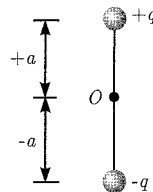
الف) پتانسیل الکتروستاتیک را برحسب هماهنگ‌های کروی و توان‌های r برای دو حالت $r > a$ و $r < a$ بسط دهید.

ب) با ثابت فرض کردن حاصل ضرب $qa = \frac{P}{\epsilon_0}$ ، حد $a \rightarrow 0$ را بگیرید و پتانسیل را برای $r \neq 0$ بیابید. طبق تعریف این پتانسیل مربوط است به یک دوقطبی در راستای محور z .

ج) حال فرض کنید دوقطبی قسمت (ب) توسط یک پوسته‌ی کروی با پتانسیل صفر، شعاع b و هم‌مرکز با مبدأ احاطه شده باشد. با برهم‌نهی خطی، پتانسیل را در هر جایی درون این پوسته بیابید.

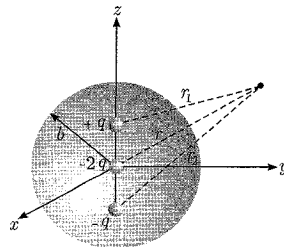
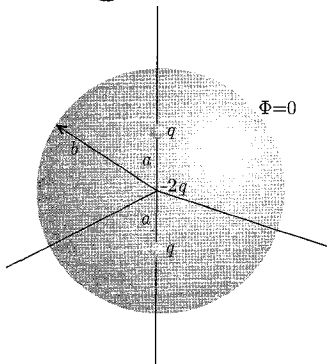


(ب)



(الف)

۷-۳ سه بار نقطه‌ای $(q, -2q, q)$ روی یک خط راست با فاصله‌ی جدایی a از هم قرار گرفته‌اند. میانی $(-2q)$ همانند شکل، در مبدأ یک پوسته‌ی کروی رسانای زمین‌شده با شعاع b قرار گرفته است.



الف) پتانسیل ناشی از این سه بار را در غیاب کره‌ای با پتانسیل صفر بنویسید. شکل حدی پتانسیل را در صورتی بیابید که $a \rightarrow 0$ میل کرده اما حاصل ضرب $qa^2 = Q$ محدود بماند. جواب آخر را در مختصات کروی بنویسید.

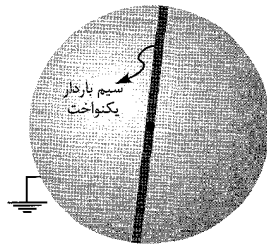
ب) حضور کره‌ی زمین‌شده‌ی با شعاع b ، پتانسیل را برای $r < b$ تغییر می‌دهد. می‌توان چنین تصور کرد که پتانسیل اضافی توسط چگالی بار سطحی القایی روی سطح داخلی در $r = b$ به وجود می‌آید و یا توسط

کره‌های تصویری که در $r > b$ قرار گرفته‌اند. برهم‌نهی خطی را برای برآوردن شرایط مرزی استفاده کنید و پتانسیل را در هر جایی درون کره برای $r < a$ و $r > a$ بیابید. نشان دهید که در حد $a \rightarrow 0$ داریم

$$\Phi(r, \theta, \phi) \rightarrow \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^3} \left(1 - \frac{r^5}{b^5}\right) P_2(\cos \theta)$$

۸-۳ در حل (۳-۱۳۶) برای پتانسیل در داخل یک کره‌ی زمین‌شده با یک سیم باردار یکنواخت که در طول قطرش قرار گرفته است یک جنبه‌ی متحرکننده وجود دارد. در فواصل بسیار نزدیک به سیم (یعنی برای $\rho = r \sin \theta \ll b$) پتانسیل باید پتانسیل ناشی از یک سیم باردار یکنواخت باشد، یعنی

$$\Phi = \left(\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 b}\right) \ln\left(\frac{b}{\rho}\right) + \Phi_0$$



که حل (۳-۱۳۶) به‌طور صریح فاقد این رفتار است.

الف) با استفاده از معادله‌ی دیفرانسیل لژاندر (۳-۱۰) و یک انتگرال‌گیری جزء‌به‌جزء نشان دهید که $\ln(\sec \theta)$ دارای بسط مناسبی برحسب هارمونیک‌های کره‌ی است تا بدین وسیله نوشتن حل (۳-۱۳۶) را به‌صورتی دیگر به شکل زیر امکان‌پذیر کند

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 b} \left\{ \ln\left(\frac{2b}{r \sin \theta}\right) - 1 - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{4j+1}{4j(4j+1)} \left(\frac{r}{b}\right)^{2j} P_{2j}(\cos \theta) \right\}$$

که در آن رفتار مورد انتظار، در نزدیک سیم نمایان شده است. تعبیری از جمله‌ی ثابت، $\Phi_0 = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 b}$ ارائه دهید. دقت کنید که در این شکل برای هر $\frac{r}{b} < 1$ سری چندجمله‌ای لژاندر در تمام زاویه‌ها به سرعت همگرا است.

ب) با استفاده از بسط (۳-۳۸) نشان دهید که

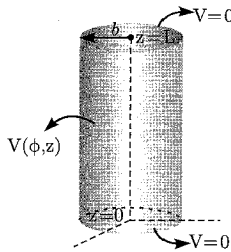
$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sin \frac{\theta}{2}} + \frac{1}{\cos \frac{\theta}{2}} \right) = 2 \sum_{j=0}^{\infty} P_{2j}(\cos \theta)$$

و این که چگالی بار سطح درونی کره یعنی معادله‌ی (۳-۱۳۷) را می‌توان به‌گونه‌ای دیگر به صورت زیر نوشت

$$\sigma(\theta) = -\frac{Q}{4\pi b^2} \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sin \frac{\theta}{2}} + \frac{1}{\cos \frac{\theta}{2}} \right) - \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{2j+1} P_{2j}(\cos \theta) \right\}$$

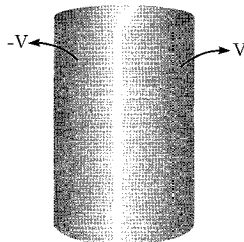
اکنون (در این رابطه) رفتار خاص (یعنی انتگرال‌پذیری) در $\theta = \pi$ و $\theta = 0$ به روشنی ارائه شده است. وقتی $\theta \rightarrow 0$ میل می‌کند، سری تصحیحاتی را در عبارت $\ln\left(\frac{1}{\theta}\right)$ پیش‌بینی می‌کند.

۹-۳ یک استوانه‌ی دایروی راست توخالی با شعاع b داریم که محورش بر محور z منطبق و دو انتهای آن در $z = L$ و $z = 0$ قرار دارند. پتانسیل روی وجوه انتهایی صفر است، در حالی که پتانسیل روی سطح جانبی استوانه به صورت $V(\phi, z)$ مشخص شده است. با استفاده از جداسازی مناسب متغیرها در مختصات استوانه‌ای یک جواب سری برای پتانسیل، در هر جایی در درون استوانه بیابید.



۱۰-۳ برای استوانه‌ی مسئله (۳-۹)، سطح استوانه از دو نیم‌استوانه‌ی مساوی، یکی در پتانسیل V و دیگری در پتانسیل $-V$ ساخته شده است، طوری که

$$V(\phi, z) = \begin{cases} V & -\frac{\pi}{2} < \phi < \frac{\pi}{2} \\ -V & +\frac{\pi}{2} < \phi < \frac{3\pi}{2} \end{cases}$$



الف) پتانسیل را در ناحیه داخلی استوانه بیابید.

ب) با فرض $L \gg b$ ، پتانسیل را در $Z = \frac{L}{\gamma}$ به صورت تابعی از ρ و ϕ در نظر بگیرید و آن را با مسئله‌ی دوبعدی ۲-۱۳ مقایسه کنید.

۱۱-۳ برای یک تابع اختیاری $f(\rho)$ ، یک سری بسط - فوریه‌ی اصلاح شده در بازه‌ی $0 \leq \rho \leq a$ می‌تواند روی شرایط مرزی همگن زیر متکی باشد

$$\rho J_\nu(k\rho) \frac{dJ_\nu(k'\rho)}{d\rho} = 0 \quad \text{در } \rho = 0$$

$$\frac{d}{d\rho} \ln[J_\nu(k\rho)] = -\frac{\lambda}{a} \quad (\lambda \text{ حقیقی}) \quad \text{در } \rho = a$$

شرط اول ν را محدود می‌کند. شرط دوم مقادیر ویژه $k = \frac{y_{\nu n}}{a}$ را نتیجه می‌دهد که در آن $y_{\nu n}$ ، n امین ریشه‌ی مثبت معادله‌ی $x \frac{dJ_\nu(x)}{dx} + \lambda J_\nu(x) = 0$ است.

الف) با روش معمول نشان دهید که توابع بسط با مقادیر ویژه‌ی مختلف متعامند.

ب) انتگرال بهنجارش را بیابید و نشان دهید که یک تابع اختیاری $f(\rho)$ را می‌توان روی این بازه به صورت سری فوریه - بسط اصلاح شده‌ی

$$f(\rho) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_\nu \left(\frac{y_{\nu n} \rho}{a} \right)$$

بسط داد؛ همراه با ضرایب A_n که توسط

$$A_n = \frac{2}{a^2} \left[\left(1 - \frac{v^2}{y_{\nu n}^2} \right) J_\nu^2(y_{\nu n}) + \left(\frac{dJ_\nu(y_{\nu n})}{dy_{\nu n}} \right)^2 \right]^{-1} \int_0^a f(\rho) \rho J_\nu \left(\frac{y_{\nu n} \rho}{a} \right) d\rho$$

داده می‌شوند. بستگی به λ در این سری واضح است، اما گروه‌ی مربعی شکل‌های دیگری را نیز داراست

$$\begin{aligned} \left[\left(1 - \frac{v^2}{y_m^2} \right) J_\nu^2(y_m) + \left(\frac{dJ_\nu(y_{\nu n})}{dy_{\nu n}} \right)^2 \right] &= \left(1 + \frac{\lambda^2 - v^2}{y_{\nu n}^2} \right) J_\nu^2(y_{\nu n}) \\ &= \left(1 + \frac{y_{\nu n}^2 - v^2}{\lambda^2} \right) \left[\frac{dJ_\nu(y_{\nu n})}{dy_{\nu n}} \right]^2 \\ &= [J_\nu^2(y_{\nu n}) - J_{\nu-1}(y_{\nu n}) J_{\nu+1}(y_{\nu n})] \end{aligned}$$

برای $\lambda \rightarrow \infty$ مجدداً نتیجه‌ی ۳-۹۶ و ۳-۹۷ را به دست می‌آوریم. انتخاب $\lambda = 0$ شق ساده‌ی دیگری است.

۱۲-۳ یک ورقه‌ی تخت نازک و بینهایت از ماده‌ای رسانا داریم که سوراخی دایروی به شعاع a در آن ایجاد شده است. یک دیسک تخت نازک از همان ماده و با شعاع اندکی کم‌تر در این صفحه قرار می‌دهیم و سوراخ را پر می‌کنیم، طوری که این دیسک با یک حلقه‌ی عایق بسیار باریک از ورقه جدا بماند. دیسک را در یک پتانسیل ثابت V قرار می‌دهیم در حالی که ورقه‌ی بینهایت در پتانسیل صفر قرار دارد.

الف) با استفاده از مختصات استوانه‌ای مناسب، یک رابطه‌ی انتگرالی شامل توابع بسل، برای پتانسیل در هر نقطه بالای صفحه به دست آورید.

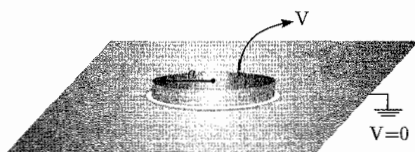
ب) نشان دهید که پتانسیل در فاصله‌ی عمودی z بالای مرکز دیسک عبارت است از

$$\Phi_0(z) = V \left(1 - \frac{z}{\sqrt{a^2 + z^2}} \right)$$

ج) نشان دهید که پتانسیل در فاصله‌ی عمودی z بالای لبه‌ی دیسک عبارت است از

$$\Phi_0(z) = \frac{V}{\pi} \left[1 - \frac{kz}{\pi a} K(k) \right]$$

که در آن $k = \frac{2a}{(z^2 + 4a^2)^{1/2}}$ و $K(k)$ یک انتگرال بیضوی کامل از نوع اول است.



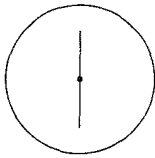
۱۳-۳ با استفاده از تابع گرین مناسبی که در متن به دست آمد، پتانسیل را برای مسئله ۱-۳ حل کرده و ثابت کنید که جواب به دست آمده به این روش با حل مستقیم معادله‌ی دیفرانسیل هماهنگی دارد.

۱۴-۳ یک بار خطی به طول $2d$ و بار کلی Q داریم که دارای چگالی بار خطی متغیر $(d^2 - z^2)$ است، که در آن z فاصله از نقطه‌ی میانی است. یک پوسته‌ی کروی رسانای زمین‌شده با شعاع داخلی $b > d$ در نقطه‌ی میانی این بار خطی مرکزیت یافته است.

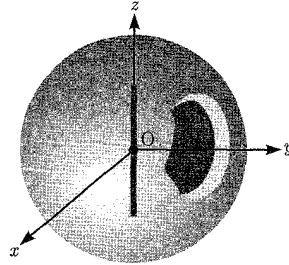
الف) پتانسیل را در هر جا داخل پوسته‌ی کروی به صورت بسط برحسب چندجمله‌ای‌های لژاندر بیابید.

ب) چگالی بار سطحی القایی روی لایه را محاسبه کنید.

ج) جواب‌های خود را برای قسمت‌های الف) و ب) در حدی که در آن $d \ll b$ است مورد بحث قرار دهید.



شکل (ب): تصویر دوبعدی



شکل (الف): تصویر سه‌بعدی

۱۵-۳ مدل قوز - کره‌ای زیر را در مورد یک باتری که به مدار خارجی متصل است در نظر بگیرید. یک کره با شعاع a و رسانایی σ در یک محیط یکنواخت با رسانایی σ' فرو رفته است. در داخل کره یک نیروی یکنواخت (شیمیایی) در جهت z وجود دارد که روی حامل‌های بار اثر می‌گذارد. توانایی این نیرو به صورت یک میدان الکتریکی مؤثر (با وارد شدن قانون اهم) F است. در حالت پایدار، میدان‌های الکتریکی در داخل و خارج از کره وجود دارند و چگالی بار روی سطح آن ساکن است.

(الف) میدان الکتریکی (علاوه بر F) و چگالی جریان را در هر نقطه از فضا به دست آورید. چگالی بار سطحی را تعیین کرده و نشان دهید که گشتاور دوقطبی الکتریکی کره عبارت است از

$$P = 4\pi\epsilon_0 \sigma a^3 \frac{F}{(a + 2a')}$$

(ب) نشان دهید که کل جریانی که از نیم‌کره‌ی بالایی کره‌ی فوق به بیرون جاری می‌شود عبارت است از

$$I = \frac{2\sigma\sigma'}{\sigma + 2\sigma'} \cdot \pi a^2 F$$

توان اتلافی کل در بیرون از کره چیست؟ با استفاده از روابط مداری فشرده‌ی $P = I^2 R_e = IV_e$ مقاومت خارجی مؤثر R_e و ولتاژ V_e را بیابید.

(ج) توان تلف‌شده را در داخل کره بیابید و مقاومت داخلی مؤثر R_i و ولتاژ V_i را به دست آورید.

(د) ولتاژ کل را از رابطه‌ی $V_t = (R_e + R_i)I$ تعریف کرده و نشان دهید که

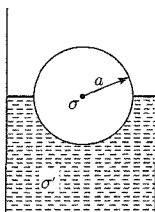
$$V_t = \frac{4aF}{3}$$

و همچنین؛ $V_e + V_i = V_t$

نشان دهید که IV_t توان تأمین شده توسط نیروی شیمیایی است.

W.M.Saslow, Am, J.Phys. **62**, 495-501 (1994)

مرجع:



۱۶-۳ (الف) با شروع از معادله‌ی دیفرانسیل بسل و روش‌های حدی مناسب، تعمیم (۳-۸۰) را ثابت کنید

$$\frac{1}{k} \delta(k - k') = \int_0^{\infty} \rho J_{\nu}(k\rho) J_{\nu}(k'\rho) d\rho$$

یا به‌طور معادل

$$\frac{1}{\rho} \delta(\rho - \rho') = \int_0^{\infty} k J_{\nu}(k\rho) J_{\nu}(k\rho') dk$$

که در آن $\text{Re}(\nu) > -1$ است.

(ب) بسط زیر را به‌دست آورید

$$\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} dk e^{im(\phi - \phi')} J_m(k\rho) J_m(k\rho') e^{-k(z > - z <)}$$

(ج) با استفاده از روش‌های حدی مناسب بسط‌های زیر را ثابت کنید.

$$\frac{1}{\sqrt{\rho^2 + z^2}} = \int_0^{\infty} e^{-k|z|} J_0(k\rho) dk$$

$$J_0(k\sqrt{\rho^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho' \cos \phi}) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im\phi} J_m(k\rho) J_m(k\rho')$$

$$e^{ik\rho \cos \phi} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} i^m e^{im\phi} J_m(k\rho)$$

(د) با توجه به آخرین نتیجه، یک نمایش انتگرالی برای تابع بسل زیر به‌دست آورید

$$J_m(x) = \frac{1}{2\pi i^m} \int_0^{2\pi} e^{ix \cos \phi - im\phi} d\phi$$

نمایش‌های انتگرالی استاندارد را با هم مقایسه کنید.

۱۷-۳ تابع گرین دیریکله برای فضای نامحدود بین صفحات $z = L$ و $z = 0$ بحث مربوط به یک بار نقطه‌ای یا یک توزیع بار، بین صفحات رسانای موازی را که در پتانسیل صفر قرار دارند امکان پذیر می‌کند.

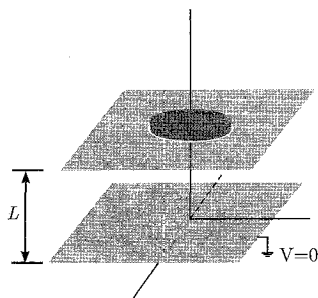
الف) با استفاده از مختصات استوانه‌ای نشان دهید که یک شکل از تابع گرین عبارت است از

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \frac{1}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im(\phi-\phi')} \sin\left(\frac{n\pi z}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi z'}{L}\right) I_m\left(\frac{n\pi}{L}\rho_{<}\right) K_m\left(\frac{n\pi}{L}\rho_{>}\right)$$

ب) نشان دهید که صورت دیگری از این تابع گرین عبارت است از

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = 2 \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} dk e^{im(\phi-\phi')} J_m(k\rho) J_m(k\rho') \frac{\sinh(kz_{<}) \sinh[k(L-z_{>})]}{\sinh(kL)}$$

۱۸-۳ آرایش مسئله‌ی ۱۲-۳ با قرار دادن یک صفحه‌ی رسانا که در پتانسیل صفر قرار دارد به موازات و در فاصله‌ی L از صفحه‌ای دیگر که در آن یک دیسک تعبیه شده است تغییر می‌کند. به جهت معین بودن صفحه‌ی زمین شده را در $z = 0$ و مرکز دیسک صفحه‌ی دیگر را روی محور z در $z = L$ قرار دهید.



الف) نشان دهید که پتانسیل بین صفحات را می‌توانیم در مختصات استوانه‌ای (z, ρ, ϕ) به صورت

زیر بنویسیم

$$\Phi(z, \rho) = V \int_0^{\infty} d\lambda J_1(\lambda) J_0\left(\frac{\lambda\rho}{a}\right) \frac{\sinh\left(\frac{\lambda z}{a}\right)}{\sinh\left(\frac{\lambda L}{a}\right)}$$

(ب) نشان دهید که در حد $a \rightarrow \infty$ با z, ρ و L ثابت، حل بخش (الف) به نتیجه‌ی مورد انتظار تبدیل می‌شود. با تلقی نتیجه‌ای که به دست آمد به منزله‌ی جوابی با پایین‌ترین مرتبه بسط توانی برحسب توان‌های a^{-1} ، مسئله تصحیح‌های تا پایین‌ترین مرتبه‌ی بسط را در صورتی که a مقایسه با ρ و L بزرگ اما بینهایت نباشد در نظر بگیرید. آیا مشکلی یا مشکلاتی در این زمینه وجود دارد؟ آیا می‌توانید تخمینی صریح و روشن از این تصحیح‌ها صورت دهید؟

(ج) حد $L \rightarrow \infty$ را با $(L - z)$ ، a و ρ ثابت بررسی کرده و نشان دهید که نتایج مسئله‌ی ۱۲-۳ مجدداً به دست می‌آیند. در ارتباط با تصحیح‌های برای $L \gg a$ اما نه $L \rightarrow \infty$ چه؟

۱۹-۳ بار نقطه‌ای q را بین دو صفحه‌ی رسانای موازی بینهایت که در پتانسیل صفر قرار دارند در نظر بگیرید. فرض کنید صفحات در یک سیستم مختصات استوانه‌ای در $z = L$ و $z = 0$ و بار روی محور z در $z = z_0$ که $0 < z_0 < L$ است قرار داشته باشند. قضیه‌ی دوجانبگی گرین از مسئله ۱۲-۱ را همراه با مسئله (۱۸-۳) به عنوان مسئله مقایسه مورد استفاده قرار دهید.

(الف) نشان دهید که مقدار بار القایی روی صفحه‌ی $z = L$ درون دایره‌ای به شعاع a که مرکزش روی محور z است با

$$Q_L(a) = -\frac{a}{V} \Phi(z_0, 0)$$

مشخص می‌شود، که در آن $\Phi(z_0, 0)$ پتانسیل مسئله‌ی ۱۸-۳ است، که در $z = z_0$ و $\rho = 0$ محاسبه شده است. بار کل القایی روی صفحه‌ی بالایی را بیابید. نتیجه را با جواب به دست آمده در مسئله‌ی ۱۳-۱ مقایسه کنید. (از لحاظ روش و جواب)

(ب) نشان دهید که چگالی بار القایی روی صفحه‌ی بالایی به صورت

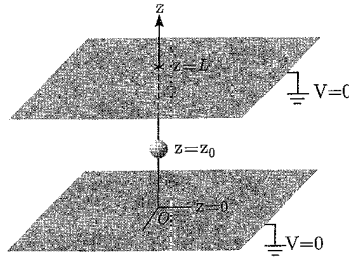
$$\sigma(\rho) = -\frac{q}{2\pi} \int_0^\infty dk \frac{\sinh(kz_0)}{\sinh(kL)} k J_0(k\rho)$$

نوشته می‌شود.

این انتگرال را می‌توان (مثلاً صفحه‌ی ۷۲۸ فرمول ۶-۶۶۶ از کتاب Gradshteyn & Ryzhik را ببینید) به صورت یک سری نامتناهی از توابع بسل اصلاح شده $K_0\left(\frac{n\pi\rho}{L}\right)$ بیان کرد، با نشان دادن این‌که در فواصل شعاعی بزرگ چگالی بار القایی به صورت $\rho^{-\frac{1}{2}} \rho^{-\frac{\pi\rho}{L}}$ افت می‌کند.

(ج) نشان دهید که چگالی بار در $\rho = 0$ عبارت است از

$$\sigma(0) = -\frac{\pi q}{8L^2} \sec^2\left(\frac{\pi z_0}{2L}\right)$$



۲۰-۳ (الف) با توجه به نتایج مسئله ۳-۱۷ یا از اصول اولیه، نشان دهید که پتانسیل در محل یک بار نقطه‌ای q بین دو صفحه‌ی رسانای موازی بینهایت که در پتانسیل صفر قرار دارند را می‌توانیم به صورت زیر بنویسیم

$$\Phi(z, \rho) = \frac{q}{\pi \epsilon_0 L} \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi z_0}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi z}{L}\right) K_0\left(\frac{n\pi \rho}{L}\right)$$

که در آن صفحات در $z = 0$ و $z = L$ قرار دارند و بار روی محور z در نقطه‌ی $z = z_0$.

(ب) چگالی‌های بار سطحی القایی $\sigma_0(\rho)$ و $\sigma_L(\rho)$ روی صفحات بالا و پایین را محاسبه کنید. نتیجه برای $\sigma_L(\rho)$ عبارت است از

$$\sigma_L(\rho) = \frac{q}{L^2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n \sin\left(\frac{n\pi z_0}{L}\right) K_0\left(\frac{n\pi \rho}{L}\right)$$

ارتباط این رابطه را با رابطه‌ی مسئله ۳-۱۰ (ب) و ۳-۱۰ (ج) مورد بحث قرار دهید.

(ج) با توجه به جواب قسمت (ب) بارکل Q_L روی صفحه‌ی $z = L$ را محاسبه کنید. با جمع سری فوریه یا با سایر روش‌های مقایسه‌ای جواب خود را در مقابل رابطه‌ی معلوم موجود در مسئله‌ی ۱۳-۱ مقایسه و بررسی کنید.

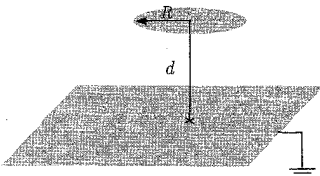
[C.Y.Fong and C.Kittel, Am.J.Phys 35, 1091 (1967)]

مرجع:

۲۱-۳ (الف) با استفاده از تابع گرین مسئله ۳-۱۷ (ب) در حد $L \rightarrow \infty$ نشان دهید که ظرفیت یک دیسک رسانای دایروی نازک و تخت با شعاع R که به موازات و در فاصله‌ی d بالای یک صفحه‌ی رسانای زمین‌شده قرار دارد با رابطه‌ی زیر داده می‌شود

$$\frac{4\pi\epsilon_0}{C} = \int_0^{\infty} dk (1 - e^{-2kd}) \frac{\left[\int_0^R \rho J_0(k\rho) \sigma(\rho) d\rho \right]^2}{\left[\int_0^R \rho \sigma(\rho) d\rho \right]^2}$$

که در آن $\sigma(P)$ چگالی بار روی دیسک است.



(ب) رابطه‌ی موجود در قسمت (الف) را به صورت یک اصل مانا یا وردشی برای C^{-1} (همراه با این تقریب که؛ $\sigma(P) = \text{cte}$) مورد استفاده قرار دهید. به طور صریح نشان دهید که وقتی $d \ll R$ است مقدار d صحیح را به دست خواهید آورد. یک مقدار تقریبی از C^{-1} برای یک دیسک ایزوله ($d \gg R$) به دست آورده و نسبت این مقدار را با نتیجه‌ی دقیق $R^{-1} \left(\frac{\pi}{2}\right)$ مشخص کنید.

(ج) به عنوان یک شکل تجربی بهتر برای $\sigma(\rho)$ ، یک ترکیب خطی از یک ثابت و عبارت $(R^2 - \rho^2)^{-\frac{1}{2}}$ در نظر بگیرید. $(R^2 - \rho^2)^{-\frac{1}{2}}$ شکل صحیحی برای یک دیسک ایزوله است. [برای قسمت (ب) انتگرال‌های زیر ممکن است مورد استفاده قرار بگیرند:

$$\int_0^{\infty} dt \left[\frac{J_1(t)}{t} \right]^2 = \frac{2}{3\pi} \quad , \quad \int_0^{\infty} \frac{dt J_1^2(t)}{t} = \frac{1}{2}$$

۲۲-۳ هندسه‌ی یک مسئله‌ی پتانسیلی دوبعدی در مختصات قطبی با سطوح $\phi = \beta$ ، $\phi = 0$ و $\rho = a$ تعریف می‌شود (همانند شکل). با استفاده از جداسازی متغیرها در مختصات قطبی نشان دهید که تابع گرین را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$G(\rho, \phi; \rho', \phi') = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2}{m} \rho_{<}^{\frac{m\pi}{\beta}} \left(\frac{1}{\rho_{>}^{\frac{m\pi}{\beta}}} - \frac{\rho_{>}^{\frac{m\pi}{\beta}}}{a \frac{2m\pi}{\beta}} \right) \sin \left(\frac{m\pi\phi}{\beta} \right) \sin \left(\frac{m\pi\phi'}{\beta} \right)$$

می‌توانید از مسئله ۲-۲۵ استفاده کنید.

۲۳-۳ یک بار نقطه‌ای q در نقطه‌ی (ρ', ϕ', z') درون یک جعبه‌ی استوانه‌ای زمین‌شده قرار دارد که با سطوح $z = L$ ، $z = 0$ و $\rho = a$ تعریف می‌شود. نشان دهید که پتانسیل درون جعبه را می‌توان به صورت‌های دیگری که در زیر آمده است نیز بیان کرد.

$$\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \frac{q}{\pi\epsilon_0 a} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-1}^{\infty} \frac{e^{im(\phi-\phi')} J_m \left(\frac{x_{mn}\rho}{a} \right) J_m \left(\frac{x_{mn}\rho'}{a} \right)}{x_{mn} J_{m+1/2}(x_{mn}) \sinh \left(\frac{x_{mn}L}{a} \right)}$$

$$\times \sinh \left[\frac{x_{mn}}{a} z_{<} \right] \sinh \left[\frac{x_{mn}}{a} (L - z_{>}) \right]$$

$$\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \frac{q}{\pi\epsilon_0 L} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} e^{im(\phi-\phi')} \sin \left(\frac{n\pi z}{L} \right) \sin \left(\frac{n\pi z'}{L} \right) \frac{I_m \left(\frac{n\pi\rho_{<}}{L} \right)}{I_m \left(\frac{n\pi a}{L} \right)}$$

$$\times \left[I_m \left(\frac{n\pi a}{L} \right) K_m \left(\frac{n\pi\rho_{>}}{L} \right) - K_m \left(\frac{n\pi a}{L} \right) I_m \left(\frac{n\pi\rho_{>}}{L} \right) \right]$$

$$\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \frac{2q}{\pi\epsilon_0 L a^2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty}$$

$$\frac{e^{im(\phi-\phi')} \sin\left(\frac{k\pi z}{L}\right) \sin\left(\frac{k\pi z'}{L}\right) J_m\left(\frac{x_{mn}\rho}{a}\right) J_m\left(\frac{x_{mn}\rho'}{a}\right)}{\left[\left(\frac{x_{mn}}{a}\right)^2 + \left(\frac{k\pi}{L}\right)^2\right] J_{m+1}^2(x_{mn})}$$

رابطه‌ی بین بسط آخر (با جمع اضافه‌اش) را با دو توی دیگر مورد بحث قرار دهید.

۲۴-۳ دیواره‌های جعبه‌ی استوانه‌ای رسانای مسئله ۲۳-۳ تماماً در پتانسیل صفرند، به جز برای یک دیسک در انتهای بالایی که در پتانسیل V است و با $\rho = b < a$ تعریف شده است.

الف) با استفاده از شکل‌های مختلف تابع گرین به دست آمده در مسئله ۲۳-۳، سه بسط مختلف برای پتانسیل در داخل این استوانه بیابید.

ب) برای هر کدام از سری‌ها به طور عددی، نسبت پتانسیل در $\rho = 0$ ، $z = \frac{L}{4}$ را به پتانسیل دیسک، با در نظر گرفتن $\frac{L}{4} = \frac{a}{4} = b$ محاسبه کنید. حداقل سعی کنید دو سری مهم را به دقت به دست آورید. آیا همگرایی یکی از این سری‌ها نسبت به سری‌های دیگر، با سرعت کم‌تری اتفاق می‌افتد؟ چرا؟

(Abramovits and Stegun have tables; Mathematica has Bessel function an does the software of press et al.)



۲۵-۳ چگالی‌های بار سطحی در مسئله‌ی مربوط به بخش ۱۳-۳ برای صفحه‌ای رسانا با یک سوراخ دایره‌ای با شعاع a را در نظر بگیرید.

الف) نشان دهید که چگالی‌های بار سطحی روی بالا و پایین این صفحه برای $\rho \geq a$ عبارتند از

$$\sigma_+(\rho) = -\varepsilon_0 E_0 + \Delta\sigma(\rho)$$

$$\sigma_-(\rho) = \varepsilon_0 E_0 + \Delta\sigma(\rho)$$

که در آن

$$\Delta\sigma(\rho) = -\varepsilon_0 \frac{(E_0 - E_0)}{\pi} \left[\frac{a}{\sqrt{\rho^2 - a^2}} - \sin^{-1}\left(\frac{a}{\rho}\right) \right]$$

رفتار $\Delta\sigma(\rho)$ برای ρ های بزرگ چگونه صورت می‌گیرد؟ آیا $\Delta\sigma(\rho)$ برای $\rho < a$ بر حسب $\Phi^{(1)}$ و صفر تعریف شده است؟ توضیح دهید.

(ب) با انتگرال‌گیری مستقیم نشان دهید که

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \left[2\pi \int_0^R d\rho \rho (\sigma_+ + \sigma_-) + 2\pi \epsilon_0 \int_0^R d\rho \rho (E_0 - E_1) \right] = 0$$

مسئله را تعریف کنید.

۲۶-۳ تابع گرین مناسب شرایط مرزی نیومن را برای حجم V بین سطوح کروی هم‌مرکزی که توسط $r = a$ و $r = b$ ($a < b$) تعریف شده‌اند در نظر بگیرید. برای این‌که قادر باشید رابطه‌ی (۴۶-۱) را برای پتانسیل مورد استفاده قرار دهید قید ساده‌ی (۴۵-۱) را اعمال کنید. بسطی برحسب هماهنگ‌های کروی به صورت

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \sum_{l=0}^{\infty} g_l(r, r') P_l(\cos \gamma)$$

را مورد استفاده قرار دهید که در آن؛

$$g_l(r, r') = \frac{r_{<}^l}{r_{>}^{l+1}} + f_l(r, r')$$

(الف) نشان دهید که برای $l > 0$ ، تابع گرین شعاعی دارای شکل متقارن زیر است

$$g_l(r, r') = \frac{r_{<}^l}{r_{>}^{l+1}} + \frac{1}{(b^{2l+1} - a^{2l+1})} \left[\frac{l+1}{l} (rr')^l + \frac{1}{l+1} \frac{(ab)^{2l+1}}{(rr')^{l+1}} + a^{2l+1} \left(\frac{r^l}{r'^{l+1}} + \frac{r'^l}{r^{l+1}} \right) \right]$$

(ب) نشان دهید که برای $l = 0$

$$g_0(r, r') = \frac{1}{r_{>}} - \left(\frac{a^2}{a^2 + b^2} \right) \frac{1}{r'} + \lambda + \frac{\mu}{r}$$

که در آن λ و μ اختیاری هستند.

به صورت صریح در رابطه‌ی (۴۶-۱) نشان دهید که جواب‌ها برای پتانسیل $\Phi(x)$ مستقل از λ و μ هستند. [اختیاری بودن در تابع گرین نیومن را می‌توان با متقارن‌سازی g برحسب r و r' حذف کرد.]

۲۷-۳ با به‌کارگیری تابع گرین نیومن مربوط به مسئله‌ی (۲۶-۳) [برای وضعیتی که در آن میدان الکتریکی عمود بر سطح بیرونی ($r = b$)، $E_r = -E_0 \cos \theta$ است و روی سطح درونی ($r = a$)، $E_r = 0$ باشد]،

الف) نشان دهید که پتانسیل الکترواستاتیک درون حجم V عبارت است از

$$\Phi(\mathbf{x}) = E_0 \frac{r \cos \theta}{1 - P^2} \left(1 + \frac{a^3}{2r^3} \right)$$

که در آن $P = \frac{a}{b}$. مؤلفه‌های میدان الکتریکی زیر را به دست آورید

$$E_r(r, \theta) = -E_0 \frac{\cos \theta}{1 - P^2} \left(1 - \frac{a^3}{r^3} \right)$$

$$E_\theta(r, \theta) = E_0 \frac{\sin \theta}{1 - P^2} \left(1 + \frac{a^3}{2r^3} \right)$$

ب) مؤلفه‌های دگرتهی یا استوانه‌ای E_ρ و E_z می‌تواند را محاسبه و یک طرح یا ترسیم کامپیوتری از خطوط نیروی الکتریکی برای حالت خاص $P = 0.5$ بکشید.

پیوست فصل ۳

در اینجا نیز فرض شده است دانشجوی در درس ریاضی فیزیک دوره‌ی کارشناسی تسلط کافی دارد. لذا فرمول‌هایی که اثبات نشده‌اند، طبیعی فرض شده‌اند. همچنین فرمول‌هایی که نکته‌ای فیزیکی در خود دارند نیز همراه با بیان آن نکته آورده شده‌اند.

۳-۳ مسائل مقدار - مرزی با تقارن سمتی

حل عمومی معادله‌ی لاپلاس برای پتانسیل با تقارن سمتی، یعنی با $m = 0$ در (۳-۵) عبارت است از

$$\Phi(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} [A_l r^l + B_l r^{-(l+1)}] P_l(\cos \theta) \quad (33-3)$$

که در آن ضرایب A_l و B_l از شرایط مرزی تعیین می‌شوند. فرض کنید پتانسیل روی سطح یک کره به شعاع a به صورت $V(\theta)$ بوده و یافتن پتانسیل در داخل کره مورد نظر باشد. اگر در مبدأ باری وجود نداشته باشد، باید پتانسیل در آن نقطه متناهی باشد، بنابراین ضرایب B_l در رابطه‌ی (۳۳-۳) به‌ازای تمامی l ها باید صفر شوند. ضرایب A_l نیز با محاسبه‌ی (۳۳-۳) روی سطح کره به‌دست می‌آیند

$$\Phi(a, \theta) = V(\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l a^l P_l(\cos \theta) \quad (34-3)$$

اگر طرفین رابطه‌ی بالا را در $P_l(\cos \theta)$ ضرب کرده و از شرط تعامد (۳-۲۱) نیز استفاده کنیم، خواهیم داشت

$$A_l = \frac{2l+1}{2a^l} \int_0^{\pi} V(\theta) P_l(\cos \theta) \sin \theta d\theta \quad (35-3)$$

مثال: کره‌ی رسانا با نیم‌کره‌هایی در پتانسیل‌های متفاوت

$$V(\theta) = \begin{cases} +V & 0 \leq \theta < \frac{\pi}{4} \\ -V & \frac{\pi}{4} < \theta \leq \pi \end{cases}$$

با جایگزینی پتانسیل بالا در رابطه‌ی (۳۵-۳) (طبق پتانسیل داده شده، انتگرال به دو قسمت تقسیم می‌شود) داریم

$$A_l = \frac{2l+1}{2a^l} \left\{ \int_0^{\frac{\pi}{4}} (+V) P_l(\cos \theta) \sin \theta d\theta + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} (-V) P_l(\cos \theta) \sin \theta d\theta \right\}$$

با تغییر متغیر، $x = \cos \theta$ ، خواهیم داشت

$$A_l = \frac{(2l+1)V}{2a^l} \left\{ + \int_0^1 P_l(x) dx - \int_0^1 P_l(-x) dx \right\}$$

در انتگرال اول حدود را تغییر دادیم و در انتگرال دوم x را به $-x$ تبدیل کردیم. با استفاده از $P_l(-x) = (-1)^l P_l(x)$ خواهیم داشت

$$A_l = \frac{(2l+1)V}{2a^l} \{1 - (-1)^l\} \int_0^1 P_l(x) dx$$

A_l به ازای l زوج صفر می شود، به ازای l فرد داریم

$$A_l = \frac{(2l+1)V}{a^l} \int_0^1 P_l(x) dx \quad ; \quad (l \text{ فرد})$$

با استفاده از روابط (۲۵-۳) و (۲۶-۳) خواهیم داشت

$$A_l = \frac{V}{a^l} \left(-\frac{1}{2}\right)^{\frac{(l-1)}{2}} \frac{(2l+1)(l-2)!!}{2 \left(\frac{l+1}{2}\right)!}$$

بنابراین

$$\Phi(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l r^l P_l(\cos \theta)$$

$$\Phi(r, \theta) = V \left[\frac{3}{2} \frac{r}{a} P_1(\cos \theta) - \frac{5}{8} \left(\frac{r}{a}\right)^3 P_3(\cos \theta) + \frac{11}{16} \left(\frac{r}{a}\right)^5 P_5(\cos \theta) - \dots \right] \quad (36-3)$$

رابطه‌ی بالا، پتانسیل در داخل کره را به ما می‌دهد، برای پیدا کردن پتانسیل در خارج کره، به جای $\left(\frac{r}{a}\right)^l$ عبارت $\left(\frac{a}{r}\right)^{l+1}$ را جایگزین می‌کنیم.

بر روی محور تقارن، یعنی محور z ، چون $\theta = 0$ و $P_l(1) = 1$ است، خواهیم داشت

$$\Phi(r = z, \theta = 0) = \sum_{l=0}^{\infty} [A_l r^l + B_l r^{-(l+1)}] \quad (37-3)$$

که برای z ‌های مثبت صادق است. برای z ‌های منفی، هر جمله را در $(-1)^l$ ضرب می‌کنیم، چون $P_l(\cos(180^\circ)) = (-1)^l$ است. فرض کنید، با روشی خاص، پتانسیل $\Phi(z)$ را روی محور تقارن

محاسبه کنیم. اگر این تابع پتانسیل را بتوان به صورت یک سری توانی در $z = r$ به شکل [(۳۷-۳)] بسط داد، در این صورت پتانسیل در هر نقطه از فضا، با ضرب هر جمله در $P_l(\cos \theta)$ به دست می‌آید. مثال قبل، یعنی نیم‌کره‌های با پتانسیل مختلف را با روش فوق‌الذکر حل می‌کنیم. پتانسیل در خارج کره و روی محور تقارن با رابطه‌ی (۲۲-۲) داده می‌شود

$$\Phi(z = r) = V \left[1 - \frac{r^2 - a^2}{r\sqrt{r^2 + a^2}} \right]$$

برای اینکه رابطه‌ی بالا را، به صورت سری موردنظر تبدیل کنیم، ابتدا بسط دو جمله‌ای زیر را اثبات می‌کنیم

$$\frac{1}{\sqrt{r^2 + a^2}} = \frac{1}{r} \sum_{J=0}^{\infty} (-1)^J \frac{(2J)!}{2^{2J}(J!)^2} \left(\frac{a}{r}\right)^{2J} \quad (۱-۳۷-۳)$$

بسط دو جمله‌ای زیر را در نظر بگیرید

$$(1+x)^m = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{m}{n} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{m!}{n!(m-n)!} x^n \quad (۲-۳۷-۳)$$

به‌ازای $m = -\frac{1}{2}$ خواهیم داشت

$$(1+x)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)!}{n! \left(-\frac{1}{2} - n\right)!} \quad (۳-۳۷-۳)$$

با استفاده از روابط زیر*

$$\begin{cases} \left(-\frac{1}{2}\right)! = \sqrt{\pi} \\ \left(-\frac{1}{2} - n\right)! \left(n - \frac{1}{2}\right)! = (-1)^n \pi \\ \left(n - \frac{1}{2}\right)! = \frac{\sqrt{\pi}(2n)!}{n! 2^{2n}} \end{cases} \quad (۴-۳۷-۳)$$

به دست می‌آید

$$(1+x)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n)!}{2^{2n} (n!)^2} x^n \quad (۵-۳۷-۳)$$

که همان رابطه‌ی (۱-۳۷-۳) به‌ازای $x = \frac{a}{r}$ است.

*) Arfken, Chapter (10), (1985).

پتانسیل مورد نظر را به صورت زیر می نویسیم

$$\begin{aligned}\phi(z, r) &= V \left[1 - \frac{r^2 - a^2}{r^2 \sqrt{1 + \frac{a^2}{r^2}}} \right] \\ &= V \left[1 - \left(-\frac{a^2}{r^2} \right) \left(1 - \left(\frac{a}{r} \right)^2 \right)^{-\frac{1}{2}} \right] \quad (۶-۳۷-۳)\end{aligned}$$

با استفاده از رابطه‌ی (۶-۳۷-۳)، خواهیم داشت

$$\begin{aligned}\Phi(z = r) &= V \left[1 - \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j (2j)!}{2^{2j} (j!)^2} \left(\frac{a}{r} \right)^{2j} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j (2j)!}{2^{2j} (j!)^2} \left(\frac{a}{r} \right)^{2j+2} \right] \quad (۷-۳۷-۳)\end{aligned}$$

سری اول به ازای $z = r$ برابر -1 می شود که با $+1$ حذف می شود، اگر در سری دوم j را به $(j-1)$ تبدیل کنیم، خواهیم داشت

$$\begin{aligned}\Phi(z = r) &= V \left[\sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j-1} (2j)!}{2^{2j} (j!)^2} \left(\frac{a}{r} \right)^{2j} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j-1} (2j-2)!}{2^{2j-2} ((j-1)!)^2} \left(\frac{a}{r} \right)^{2j} \right] \\ &= V \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j-1}}{2^{2j}} \left[\frac{(2j)!}{(j!)^2} + \frac{(2j-2)!}{2^{-2} ((j-1)!)^2} \right] \left(\frac{a}{r} \right)^{2j} \quad (۸-۳۷-۳)\end{aligned}$$

عبارت داخل کروشه در رابطه‌ی بالا را به صورت زیر ساده می کنیم

$$\begin{aligned}\left[\frac{(2j)!}{(j!)^2} + \frac{(2j-2)!}{2^{-2} ((j-1)!)^2} \right] &= \left[\frac{2j(2j-1)(2j-2)!}{(j^2)((j-1)!)^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{(2j-2)!}{2^{-2} ((j-1)!)^2} \right] = \frac{(2j-2)!}{((j-1)!)^2} \left[\frac{2(2j-1)}{j} + 4 \right] \\ &= \frac{(2j-2)!}{((j-1)!)^2} \left[\frac{8j-2}{j} \right] = \frac{(2j-2)!}{((j-1)!)^2} \frac{4 \left(2j - \frac{1}{2} \right)}{j}\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{j!} \left[\frac{(2(j-1))!}{2^{2(j-1)}(j-1)!} \right] \left(2j - \frac{1}{2} \right) \quad (9-37-3)$$

از $j! = (j-1)!j$ ، استفاده کرده‌ایم.

با جایگزینی (9-37-3) در (8-37-3)، به دست می‌آید

$$\Phi(r=z) = V \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j-1} (2(j-1))!}{2^{2j-2} j! (j-1)!} \left(2j - \frac{1}{2} \right) \left(\frac{a}{r} \right)^{2j} \quad (10-37-3)$$

از رابطه سوم (4-37-3) به‌ازای $m = j-1$ داریم

$$\left(j - 1 - \frac{1}{2} \right)! = \frac{\sqrt{\pi} (2j-2)!}{(j-1)! 2^{2j-2}} \quad (11-37-3)$$

از طرفی رابطه‌ی زیر را داریم

$$\Gamma \left(j - \frac{1}{2} \right) = \left(j - \frac{1}{2} - 1 \right)! \quad (12-37-3)$$

با جانشینی رابطه‌ی (12-37-3) در (11-37-3)، و نتیجه‌ی حاصل در (10-37-3) خواهیم داشت

$$\Phi(z=r) = \frac{V}{\sqrt{\pi}} \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^{j-1} \frac{\left(2j - \frac{1}{2} \right) \Gamma \left(j - \frac{1}{2} \right)}{j!} \left(\frac{a}{r} \right)^{2j}$$

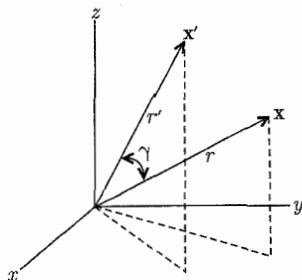
مقایسه با جمله‌ی $\frac{1}{r^{(l+1)}}$ در رابطه‌ی (37-3) نشان می‌دهد که تنها اهای فرد ($l = 2j - 1$) وجود دارند، بنابراین پتانسیل در هر نقطه در خارج کره عبارت است از

$$\Phi(r, \theta) = \frac{V}{\sqrt{\pi}} \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^{j-1} \frac{\left(2j - \frac{1}{2} \right) \Gamma \left(j - \frac{1}{2} \right)}{j!} \left(\frac{a}{r} \right)^{2j} \times P_{2j-1}(\cos \theta)$$

که با جواب‌های به دست آمده در روابط (27-2) و (36-3) در توافق است. بسط زیر، یعنی پتانسیل بار نقطه‌ای واحد واقع در x' ، بسط مهمی است

$$\frac{1}{|x-x'|} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r_{<}^l}{r_{>}^{l+1}} P_l(\cos \gamma) \quad (38-3)$$

که در آن $r_{<} < r_{>}$ ، کوچکتر (بزرگتر) $|x|$ و $|x'|$ است، و γ زاویه‌ی بین x و x' است که در شکل 3-3 نشان داده شده است.



شکل ۳-۳:

برای اثبات رابطه‌ی (۳۸-۳)، محورها را می‌چرخانیم، به‌گونه‌ای که x' در راستای محور z قرار گیرد. در این صورت پتانسیلی که در معادله‌ی لاپلاس صدق می‌کند، تقارن سمتی خواهد داشت، و لذا می‌تواند به صورت (۳۳-۳) بسط داده شود

$$\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} = \sum_{l=0}^{\infty} (A_l r^l + B_l r^{-(l+1)}) P_l(\cos \gamma)$$

اگر نقطه‌ی x روی محور z باشد، طرف راست به رابطه‌ی (۳۷-۳) تبدیل می‌شود، ولی طرف چپ به صورت زیر تبدیل می‌شود

$$\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \equiv \frac{1}{(r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \gamma)^{1/2}} \equiv \frac{1}{|r - r'|}$$

با بسط $\frac{1}{|r - r'|}$ برای x های روی محور تقارن داریم

$$\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \rightarrow \frac{1}{|r - r'|} = \frac{1}{r_{>}} \left(1 - \frac{r_{<}}{r_{>}}\right) = \frac{1}{r_{>}} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{r_{<}}{r_{>}}\right)^l$$

از بسط $\frac{1}{1-x} = \sum_{l=0}^{\infty} x^l$ استفاده شده است

$$\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} = \frac{1}{r_{>}} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{r_{<}}{r_{>}}\right)^l$$

برای نقاطی که روی محور تقارن نیستند، طبق (۳۳-۳) و (۳۷-۳) هر جمله را در $P_l(\cos \gamma)$ ضرب می‌کنیم، یعنی

$$\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r_{<}^l}{r_{>}^{l+1}} P_l(\cos \gamma)$$

۴-۳ رفتار میدان‌ها در یک حفره‌ی مخروطی یا در همسایگی یک نقطه‌ی تیز

با معرفی متغیر ξ به صورت

$$\xi = \frac{1}{r}(1-x)$$

معادله‌ی لژاندر (۳-۱۰) به صورت زیر درمی‌آید

$$\frac{d}{d\xi} \left[\xi(1-\xi) \frac{dP}{d\xi} \right] + v(v+1)P = 0 \quad (3-39)$$

که برای جلوگیری از اشتباه به جای l ، از v استفاده شده است. جوابی به صورت سری توانی در نظر می‌گیریم

$$P(\xi) = \xi^\alpha \sum_{j=0}^{\infty} a_j \xi^j$$

با مشتق‌گیری از آن و جایگزینی در رابطه‌ی (۳-۳۹) داریم

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{\infty} (j+\alpha)^2 a_j \xi^{j+\alpha-1} - \sum_{j=0}^{\infty} (j+\alpha)(j+\alpha+1) a_j \xi^{j+\alpha} \\ + v(v+1) \sum_{j=0}^{\infty} a_j \xi^{j+\alpha} = 0 \end{aligned}$$

ضریب پایین‌ترین توان ξ به ازای $\alpha = 0$ صفر می‌شود، با تبدیل j به $j+1$ در جمله‌ی اول، و مساوی صفر قرار دادن ضریب $\xi^{j+\alpha}$ نتیجه می‌دهد

$$(j+1)^2 a_{j+1} - j(j+1) + v(v+1) a_j = 0$$

با اضافه کردن $0 = vj - jv$ به سمت چپ، خواهیم داشت

$$\frac{a_{j+1}}{a_j} = \frac{(j-v)(j+v+1)}{(j+1)^2} \quad (3-40)$$

با انتخاب $a_0 = 1$ برای بهنجار شدن جواب به واحد، در $\xi = 0$ یا $\cos \theta = 1$ ، نمایش سری جواب عبارت است از

$$P_v(\xi) = 1 + \frac{(-v)(v+1)}{1!1!} \xi + \dots \quad (3-41)$$

سری (۳-۴۱) یک مثال از یک تابع فوق هندسی ${}_2F_1(a, b; c; z)$ است که بسط سری آن عبارت است از

$${}_2F_1(a, b; c; z) = 1 + \frac{ab}{c} \frac{z}{1!} + \frac{a(a+1)b(b+1)}{c(c+1)} \frac{z^2}{2!} + \dots$$

تابع فوق هندسی بر حسب نماد پوکهامر (Pochhammer)

$$(a)_n = \frac{(a+n-1)!}{(a-1)!}, \quad (a)_0 = 1$$

به صورت زیر درمی آید

$${}_2F_1(a, b; c; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n z^n}{(c)_n n!}$$

به این ترتیب به مفهوم شاخص های ۲ و ۱ پی می بریم. شاخص پیشین ۲ نشان می دهد که دو نماد پوکهامر در صورت کسر و شاخص بعدی ۱ نشان می دهد که یک نماد پوکهامر در مخرج کسر موجود است. بنابراین مقایسه با (۴۱-۳) نشان می دهد که

$$P_\nu(x) = {}_2F_1\left(-\nu, \nu+1; 1; \frac{1-x}{2}\right) \quad (42-3)$$

بنابراین با در نظر گرفتن تابع شعاعی جواب پایه عبارت است از

$$Ar^\nu P_\nu(\cos \theta)$$

برای داشتن پتانسیل متناهی در مبدأ، شرط $\nu > 0$ ضروری است. چون پتانسیل در $\theta = \beta$ برای همه ی مقادیر r باید صفر شود، داریم

$$P_\nu(\cos \beta) = 0 \quad (43-3)$$

این معادله، یک شرط ویژه مقداری برای ν است، این معادله تعداد نامحدودی جواب، $\nu = (1, 2, \dots)$ دارد، که آن ها را به ترتیب افزایش مقدار مرتب می کنیم. برای $\nu = \nu_1$ ، $x = \cos \beta$ صفر اول $P_{\nu_1}(x)$ است. برای $\nu = \nu_2$ ، $x = \cos \beta$ صفر دوم $P_{\nu_2}(x)$ است، و به همین ترتیب. حل کامل برای پتانسیل متقارن سمتی در ناحیه ی $0 \leq \theta \leq \beta$ عبارت است از

$$\Phi(r, \theta) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k r^{\nu_k} P_{\nu_k}(\cos \theta) \quad (44-3)$$

پتانسیل در نزدیکی $r = 0$ را با جمله ی اول (۴۴-۳) تقریب می زنیم

$$\Phi(r, \theta) \simeq Ar^\nu P_\nu(\cos \theta)$$

که در آن ν کوچک ترین جواب معادله ی (۴۳-۳) است.

مؤلفه‌های میدان الکتریکی و چگالی بار سطحی روی مخروط رسانا همان روابط (۳-۴۶) کتاب هستند. یک عبارت تقریبی برای v عبارت است از

$$P_v(\cos \theta) \cong j_0 \left((2v+1) \sin \left(\frac{\theta}{2} \right) \right) \quad (۳-۴۸)$$

که برای v بزرگ و $\theta < 1$ صادق است. اکنون به اثبات آن می‌پردازیم، از رابطه‌ی (۳-۸۲) داریم

$$j_0(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j!j!} \left(\frac{x}{2} \right)^{2j}$$

$$j_0 \left((2v+1) \sin \left(\frac{\theta}{2} \right) \right) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j!j!} \frac{1}{(2)^{2j}} (2v+1)^{2j} \left(\sin \frac{\theta}{2} \right)^{2j}$$

با استفاده از رابطه‌ی $\sin^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1}{2}(1 - \cos \theta)$ و بسط دو جمله‌ای

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} x^k$$

خواهیم داشت

$$j_0 \left((2v+1) \sin \left(\frac{\theta}{2} \right) \right) \cong \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{2j} \sum_{x=0}^k \frac{(-1)^j}{j!j!} \cdot (v)^k \cdot (-\cos \theta)^x$$

از طرفی از سری رابطه‌ی (۳-۴۱) به‌ازای v های بزرگ، داریم

$$P_v(\cos \theta) \cong \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{v^{(2j)}}{j!j!} (\cos \theta)^j$$

بنابراین رابطه‌ی (۳-۴۷) به‌طور تقریبی برقرار است. اولین صفر تابع $j_0(x)$ در $x = 2,405$ است. لذا از (۳-۴۳) و (۳-۴۷)، داریم

$$j_0 \left((2v+1) \frac{\beta}{2} \right) \cong 0 \Rightarrow (2v+1) \frac{\beta}{2} \cong 2,405$$

$$v \cong \frac{2,405}{\beta} - \frac{1}{2} \quad (\text{الف } ۳-۴۸)$$

از اینکه به‌ازای β کوچک $\frac{\beta}{2} \approx \sin \left(\frac{\beta}{2} \right)$ است، استفاده کرده‌ایم.

برای $\beta \rightarrow \pi$ و $v \rightarrow 0$ ، چون $\exp\left(-\frac{1}{2v}\right)$ به صفر نزدیک می‌شود، بنابراین در این حالت به طور تقریبی داریم

$$\frac{\pi - \beta}{2} \approx \exp\left(-\frac{1}{2v}\right)$$

یا

$$v \cong \left[2 \operatorname{Ln}\left(\frac{2}{\pi - \beta}\right)\right]^{-1} \quad (\text{ب } ۴۸-۳)$$

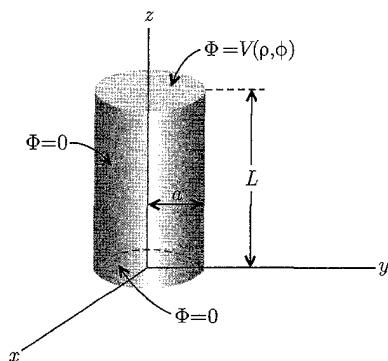
۸-۳ مسائل مقدار - مرزی در مختصات استوانه‌ای

مثال: مسئله‌ی مقدار-مرزی شکل ۹-۳ را که در آن پتانسیل سطح جانبی و سطح پایینی صفر، و پتانسیل سطح بالایی $\Phi = V(\rho, \phi)$ است، در نظر بگیرید.

حل معادله‌ی لاپلاس در مختصات استوانه‌ای به صورت $\Phi = R(\rho)Q(\phi)Z(z)$ است که در آن

$$\begin{cases} Q(\phi) = A \sin m\phi + B \cos m\phi \\ Z(z) = \sin h_k z \end{cases} \quad (۱۰۵-۳)$$

$$R(\rho) = C_j m(k\rho) + DN_m(k\rho) \quad (۱۰۶-۳)$$



شکل ۹-۳:

برای داشتن پتانسیل صفر در $z = 0$ ، جمله‌ی $\cos h_k z$ وجود ندارد، برای متناهی بودن پتانسیل روی محور استوانه، $\rho = 0$ باید $D = 0$ باشد، و از شرط صفر بودن پتانسیل در $\rho = a$ ، داریم

$$j_m(ka) = 0 \Rightarrow K_{mn} = \frac{x_{mn}}{a}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (۱۰۷-۳)$$

که در آن x_{mn} ریشه‌های $j_m(x_{mn}) = 0$ هستند. بنابراین شکل عمومی جواب به صورت زیر می‌شود

$$\Phi(\rho, \phi, z) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} j_m(k_{mn}\rho) \cdot \sin h(k_{mn}z) \times \\ \times (A_{mn} \sin m\phi + B_{mn} \cos m\phi) \quad (108-3)$$

در $z = L$ پتانسیل $V(\rho, \phi)$ است، بنابراین

$$V(\rho, \phi) = \sum_{m,n} \sin h(k_{mn}L) j_m(k_{mn}\rho) (A_{mn} \sin m\phi + B_{mn} \cos m\phi)$$

با توجه به انتگرال‌های زیر

$$\int_0^{2\pi} \sin m\phi \cdot \sin n\phi d\phi = \begin{cases} \pi \delta_{nm} & , n \neq 0 \\ 0 & , n = 0 \end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi} \cos m\phi \cdot \cos n\phi d\phi = \begin{cases} \pi \delta_{nm} & , n \neq 0 \\ 2\pi & , n = 0 \end{cases}$$

و رابطه‌ی (۹۷-۳)، خواهیم داشت

$$\left\{ \begin{aligned} A_{mn} &= \left(\frac{2 \cos \operatorname{ech}(k_{mn}L)}{\pi a^2 j_{m+1}^2(k_{mn}a)} \right) \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^a d\rho \cdot \rho \cdot V(\rho, \phi) \\ &\quad \times j_m(k_{mn}\rho) \sin m\phi \\ B_{mn} &= \left(\frac{2 \cos \operatorname{ech}(k_{mn}L)}{\pi a^2 j_{m+1}^2(k_{mn}a)} \right) \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^a d\rho \cdot \rho \cdot V(\rho, \phi) \\ &\quad \times j_m(k_{mn}\rho) \cos m\phi \end{aligned} \right. \quad (109-3)$$

برای $m = 0$ $\frac{1}{4} B_{0n}$ را نیز در سری به‌کار می‌بریم.

مثال دیگر: اگر پتانسیل در فضای بدون بار برای $z \geq 0$ متناهی باشد، و به‌ازای $z \rightarrow \infty$ صفر شود، داریم

$$\left\{ \begin{aligned} Q(\phi) &= A \sin m\phi + B \cos m\phi \\ Z(z) &= e^{-kz} \\ R(\rho) &= j_m(k\rho) \end{aligned} \right.$$

و از آن جواب عمومی برای $z \geq 0$ عبارت است از

$$\Phi(\rho, \phi, z) = \sum_{m=0}^{\infty} \int_0^{\infty} dk e^{-kz} j_m(k\rho) [A_m(k) \sin m\phi + B_m(k) \cos m\phi] \quad (110-3)$$

اگر پتانسیل روی تمامی صفحه $z = 0$ با $V(\rho, \phi)$ مشخص شود خواهیم داشت

$$V(\rho, \phi) = \sum_{m=0}^{\infty} \int_0^{\infty} dk j_m(k\rho) [A_m(k) \sin m\phi + B_m(k) \cos m\phi]$$

با توجه به انتگرال‌های قبل از رابطه‌ی (۱۰۹-۳) و تبدیل k به k' خواهیم داشت

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} V(\rho, \phi) \begin{Bmatrix} \sin m\phi \\ \cos m\phi \end{Bmatrix} d\phi = \int_0^{\infty} j_m(k'\rho) \begin{Bmatrix} A_m(k') \\ B_m(k') \end{Bmatrix} dk' \quad (111-3)$$

با استفاده از رابطه‌ی بستاری تابع بسل، یعنی

$$\int_0^{\infty} x j_m(kx) j_m(k'x) dx = \frac{1}{k} \delta(k' - k) \quad (112-3)$$

دو طرف رابطه‌ی (۱۱۱-۳) را در $\rho j_m(k\rho)$ ضرب می‌کنیم، و سپس روی ρ انتگرال می‌گیریم

$$\begin{Bmatrix} A_m(k) \\ B_m(k) \end{Bmatrix} = \frac{k}{\pi} \int_0^{\infty} d\rho \rho \int_0^{2\pi} d\phi V(\rho, \phi) j_m(k\rho) \begin{Bmatrix} \sin m\phi \\ \cos m\phi \end{Bmatrix} \quad (113-3)$$

برای $m = 0$ ، باید $\frac{1}{\rho} B_0(k)$ را در سری (۱۱۰-۳) استفاده کنیم.

۹-۳ بسط توابع گرین در مختصات کروی

برای حالتی که هیچ‌گونه سطح مرزی، جز در بی‌نهایت وجود نداشته باشد، بسط تابع گرین به صورت رابطه‌ی (۷۰-۳) است

$$\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} = 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{1}{2l+1} \frac{r_{<}^l}{r_{>}^{l+1}} Y_{lm}^*(\theta', \phi') Y_{lm}(\theta, \phi)$$

فرض کنید که می‌خواهیم بسط مشابهی برای تابع گرین مناسب برای "خارج" کره‌ای با شعاع $r = a$ به دست آوریم. نتیجه قبلاً در (۱۶-۲)، به روشی تصویری به دست آمده است. با استفاده از بسط بالا در

هر دو جمله‌ی رابطه‌ی (۱۶-۲)، داریم

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = 4\pi \sum_{l,m} \frac{1}{r^{l+1}} \left[\frac{r^l}{r'^{l+1}} - \frac{1}{a} \left(\frac{a^2}{rr'} \right)^{l+1} \right] Y_{lm}^*(\theta', \phi') \times Y_{lm}(\theta, \phi) \quad (114-3)$$

قسمت شعاعی برای $r < r'$ و $r > r'$ عبارت است از

$$\left[\frac{r^l}{r'^{l+1}} - \frac{1}{a} \left(\frac{a^2}{rr'} \right)^{l+1} \right] = \begin{cases} \frac{1}{r'^{l+1}} \left[r^l - \frac{a^{2l+1}}{r^{l+1}} \right] & , r < r' \\ \left[r'^l - \frac{a^{2l+1}}{r'^{l+1}} \right] \frac{1}{r^{l+1}} & , r > r' \end{cases} \quad (115-3)$$

اکنون نحوه‌ی بسط سیستماتیک تابع گرین عمومی در مختصات کروی را با استفاده از اصول اولیه به دست می‌آوریم، یک تابع گرین برای مسئله‌ی پتانسیل در معادله‌ی زیر صدق می‌کند

$$\nabla_x^2 G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = -4\pi \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \quad (116-3)$$

به‌گونه‌ای که شرط مرزی $G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = 0$ را وقتی \mathbf{x} یا \mathbf{x}' روی سطح مرزی S باشد، برآورده نماید. تابع دلتا را در مختصات کروی به صورت زیر می‌نویسیم

$$\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = \frac{1}{r^2} \delta(r - r') \delta(\phi - \phi') \delta(\cos \theta - \cos \theta')$$

به کمک رابطه‌ی بستاری (۵۶-۳)، خواهیم داشت

$$\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = \frac{1}{r^2} \delta(r - r') \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l Y_{lm}^*(\theta', \phi') Y_{lm}(\theta, \phi) \quad (117-3)$$

تابع گرین را به عنوان تابعی از \mathbf{x} ، به صورت زیر بسط می‌دهیم

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l A_{lm}(r|r', \theta', \phi') Y_{lm}(\theta, \phi) \quad (118-3)$$

ضرایب A_{lm} را به صورت زیر می‌نویسیم

$$A_{lm}(r|r', \theta', \phi') = g_l(r, r') Y_{lm}^*(\theta', \phi') \quad (119-3)$$

با جایگزینی در (۱۱۸-۳)، داریم

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l g_l(r, r') Y_{lm}^*(\theta', \phi') Y(\theta, \phi)$$

معادله‌ی (۱۱۶-۳) را به صورت زیر می‌نویسیم

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (rG) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial G}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 G}{\partial \phi^2} = -4\pi \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$$

اما از (۵۳-۳)، داریم

$$\frac{\partial^2}{\partial \phi^2} Y_{lm}(\theta, \phi) = -m^2 Y_{lm}(\theta, \phi)$$

بنابراین

$$\frac{\partial^2 G}{\partial \phi^2} = -m^2 G$$

و از طرفی از (۶-۳)، داریم

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{dG}{d\theta} \right) - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} G = -l(l+1)G$$

در نتیجه خواهیم داشت

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (rG) - \frac{l(l+1)}{r^2} G = -4\pi \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$$

با توجه به ملاحظات بالا و جایگزینی (۱۱۷-۳) و (۱۱۸-۳) در رابطه‌ی بالا، و در نظر گرفتن (۱۱۹-۳) خواهیم داشت

$$\frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} (r g_l(r, r')) - \frac{l(l+1)}{r^2} g_l(r, r') = -\frac{4\pi}{r^2} \delta(r - r') \quad (۱۲۰-۳)$$

لذا تابع گرین شعاعی در معادله‌ی شعاعی همگن (۷-۳) به ازای $r \neq r'$ صدق می‌کند، با توجه به جواب آن (۸-۳)، خواهیم داشت

$$g_l(r, r') = \begin{cases} A r^l + B r^{-(l+1)} & , r < r' \\ A' r^l + B' r^{-(l+1)} & , r > r' \end{cases}$$

ضرایب A, B, A', B' که تابعی از r' هستند، به کمک شرایط مرزی تعیین می‌شوند. فرض کنید سطوح مرزی، کره‌های هم‌مرکزی در $r = a$ و $r = b$ باشند. صفر شدن $G(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ برای \mathbf{x} روی سطوح، صفر شدن $g_l(r, r')$ را برای $r = a$ و $r = b$ نتیجه می‌دهد

$$\begin{cases} A a^l + B a^{-(l+1)} = 0 \Rightarrow B = -a^{2l+1} A \\ A' b^l + B' b^{-(l+1)} = 0 \Rightarrow A' = \frac{-B'}{b^{2l+1}} \end{cases}$$

بنابراین

$$g_l(r, r') = \begin{cases} A \left(r^l - \frac{a^{2l+1}}{r^{l+1}} \right) & , r < r' \\ B' \left(\frac{1}{r^{l+1}} - \frac{r^l}{b^{2l+1}} \right) & , r > r' \end{cases} \quad (۱۲۱-۳)$$

با الزام تقارن در r و r' ، $g_l(r, r')$ را به صورت زیر می نویسیم

$$g_l(r, r') = C \left(r^l - \frac{a^{2l+1}}{r^{l+1}} \right) \left(\frac{1}{r_{>}^{l+1}} - \frac{r_{>}^l}{b^{2l+1}} \right) \quad (۱۲۲-۳)$$

که در آن $r_{<} > r_{>}$ ، کوچکتر (بزرگتر) r و r' است. برای تعیین ضریب C باید اثر تابع دلتا در (۱۲۰-۳) را در نظر بگیریم. اگر دو طرف رابطه (۱۲۰-۳) را در r ضرب کنیم و از $r = r' - \varepsilon$ تا $r = r' + \varepsilon$ انتگرال بگیریم، به دست می آوریم

$$\begin{aligned} \int_{r'-\varepsilon}^{r'+\varepsilon} \frac{d}{dr} \left[\frac{d}{dr} (r g_l(r, r')) \right] dr - l(l+1) \int_{r'-\varepsilon}^{r'+\varepsilon} \frac{1}{r} g_l(r, r') dr \\ = -4\pi \int_{r'-\varepsilon}^{r'+\varepsilon} \frac{1}{r} \delta(r - r') dr \end{aligned}$$

جمله‌ی دوم در سمت چپ وقتی $\varepsilon \rightarrow 0$ میل می کند، صفر خواهد شد. پس

$$\left\{ \frac{d}{dr} [r g_l(r, r')] \right\}_{r=r'+\varepsilon} - \left\{ \frac{d}{dr} [r g_l(r, r')] \right\}_{r=r'-\varepsilon} = -\frac{4\pi}{r'} \quad (۱۲۳-۳)$$

به ازای $r = r' + \varepsilon$ ، $r_{<} = r$ و $r_{>} = r'$ است و به ازای $r = r' - \varepsilon$ ، $r_{<} = r'$ و $r_{>} = r$ است. در نتیجه با استفاده از (۱۲۲-۳)، داریم

$$\begin{aligned} \left\{ \frac{d}{dr} [r g_l(r, r')] \right\}_{r'+\varepsilon} &= C \left(r'^l - \frac{a^{2l+1}}{r'^{l+1}} \right) \left[\frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r^l} - \frac{r^{l+1}}{b^{2l+1}} \right) \right]_{r=r'} \\ &= -\frac{C}{r'} \left[1 - \left(\frac{a}{r'} \right)^{2l+1} \right] \left[l + (l+1) \left(\frac{r'}{b} \right)^{2l+1} \right] \end{aligned}$$

به طور مشابه

$$\left\{ \frac{d}{dr} [r g_l(r, r')] \right\}_{r'-\varepsilon} = \frac{C}{r'} \left[l + 1 + l \left(\frac{a}{r'} \right)^{2l+1} \right] \left[1 - \left(\frac{r'}{b} \right)^{2l+1} \right]$$

با جایگزینی این‌ها در (۱۲۳-۳)، ضریب C به دست می آید

$$C = \frac{4\pi}{(2l+1) \left[1 - \left(\frac{a}{b} \right)^{2l+1} \right]} \quad (۱۲۴-۳)$$

ترکیب (۱۲۴-۳)، (۱۲۲-۳)، (۱۱۹-۳) و (۱۱۸-۳)، بسط تابع گرین برای یک پوسته‌ی کروی محصور به $r = a$ و $r = b$ را نتیجه می‌دهد [همان فرمول‌های (۱۲۵-۳) کتاب].

۳-۱۰ حل مسائل پتانسیل به کمک بسط تابع گرین کروی

جواب عمومی معادله‌ی پواسن با مقادیر معلوم پتانسیل روی سطح مرزی عبارت است از

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \rho(\mathbf{x}') G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') d^3x' - \frac{1}{4\pi} \oint_S \Phi(\mathbf{x}') \frac{\partial G}{\partial n'} da' \quad (126-3)$$

پتانسیل در داخل یک کره به شعاع b را در نظر می‌گیریم. ابتدا هم‌ارز بودن انتگرال سطحی در (۱۲۶-۳) را با روش قبلی (بخش ۵-۳) یعنی معادلات (۶۱-۳) و (۵۸-۳)، نتیجه‌گیری می‌کنیم. با قرار دادن $a = 0$ در (۱۲۵-۳) و محاسبه‌ی مشتق عمودی در $r' = b$ ، و در نظر گرفتن $r' < r$ و $r' > r$ خواهیم داشت

$$\frac{\partial G}{\partial n'} = + \frac{\partial G}{\partial r'} \Big|_{r'=b} = 4\pi \sum_{l,m} \frac{Y_{lm}^* Y_{lm}}{(2l+1)} r'^l \left[\frac{-(2l+1)}{b^{l+2}} \right]$$

یا

$$\frac{\partial G}{\partial n'} = \frac{\partial G}{\partial r'} \Big|_{r'=b} = -\frac{4\pi}{b^2} \sum_{l,m} \left(\frac{r}{b}\right)^l Y_{lm}^*(\theta', \phi') Y_{lm}(\theta, \phi) \quad (127-3)$$

در نتیجه جواب معادله‌ی لاپلاس در داخل $r = b$ با $\Phi = V(\theta', \phi')$ روی سطح، عبارت است از

$$\Phi(\mathbf{x}) = -\frac{1}{4\pi} \oint_S \Phi(\mathbf{x}') \frac{\partial G}{\partial n'} b^2 d\Omega'$$

$$\Phi(\mathbf{x}) = \sum_{l,m} \left[\int V(\theta', \phi') Y_{lm}^*(\theta', \phi') d\Omega' \right] \left(\frac{r}{b}\right)^l Y_{lm}(\theta, \phi) \quad (128-3)$$

برای حالتی که در نظر گرفتیم، این جواب مشابه (۶۱-۳) یا (۵۸-۳) است.

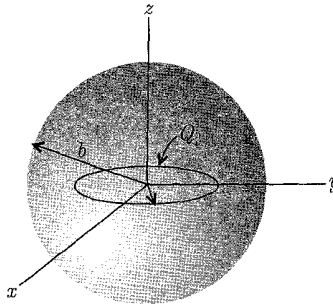
مثال: کره‌ای توخالی به شعاع b و متصل به زمین را با یک حلقه‌ی بار هم‌مرکز به شعاع a و بار کل Q (مطابق شکل ۱۱-۳) در نظر می‌گیریم.

چگالی بار حلقه را به کمک تابع دلتا به صورت تابعی از زاویه‌ی θ' و شعاع r' می‌نویسیم

$$\rho(\mathbf{x}') = C \delta(r' - a) \delta(\cos \theta' - \cos 90^\circ)$$

اما اگر از چگالی بار در کل فضا انتگرال بگیریم، باید داشته باشیم

$$\int \rho(\mathbf{x}') d^3x' = Q$$



شکل ۳-۱۱:

با جایگزینی $d^3 x' = a^2 d\Omega' dr'$ داریم

$$C(2\pi a^2) = Q$$

بنابراین

$$\rho(\mathbf{x}') = \frac{Q}{2\pi a^2} \delta(r' - a) \delta(\cos \theta') \quad (129-3)$$

با قرار دادن $a \rightarrow 0$ (چون یک کره به شعاع b در مسئله داریم) و $m = 0$ ، به دلیل تقارن سمتی مسئله در (125-3) داریم

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \frac{Y_{l0}^*(\theta', \phi') Y_{l0}(\theta, \phi)}{(2l+1)} r_{<}^l \left(\frac{1}{r_{>}^{l+1}} - \frac{r_{>}^l}{b^{2l+1}} \right)$$

با جایگزینی تابع گرین و چگالی بار (129-3) در (126-3)، خواهیم داشت

$$\Phi(\mathbf{x}) = \int \rho(\mathbf{x}') G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') d^3 x' = Q \sum_{l=0}^{\infty} P_l(0) r_{<}^l \left(\frac{1}{r_{>}^{l+1}} - \frac{r_{>}^l}{b^{2l+1}} \right) P_l(\cos \theta) \quad (130-3)$$

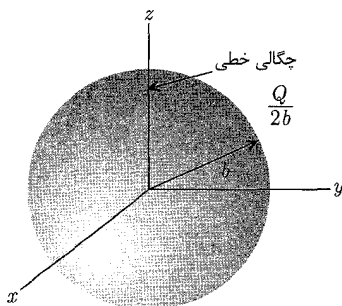
از رابطه‌ی (127-3)، دو بار استفاده شده است، در رابطه‌ی (130-3)، $r_{<} > r_{>}$ مربوط به مقدار کوچک‌تر (بزرگ‌تر) r و a است. به کمک روابط

$$\begin{cases} P_{2n+1}(0) = 0 \\ P_{2n}(0) = \frac{(-1)^n (2n-1)!!}{2^n n!} \end{cases}$$

رابطه‌ی (130-3) را به صورت زیر می‌نویسیم (البته با تقسیم طرف راست بر $4\pi\epsilon_0$)

$$\Phi(\mathbf{x}) = Q \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n-1)!!}{2^n n!} r_{<}^{2n} \left(\frac{1}{r_{>}^{2n+1}} - \frac{r_{>}^{2n}}{b^{2n+1}} \right) P_{2n}(\cos \theta) \quad (131-3)$$

مثال دوم: کره توخالی به شعاع b و متصل به زمین را با یک بار خطی یکنواخت به طول $2b$ و بار کل Q (مطابق شکل ۱۲-۳) در نظر می‌گیریم.



شکل ۱۲-۳:

چگالی بار خطی را به کمک توابع دلتا به صورت زیر می‌نویسیم

$$\rho(\mathbf{x}') = \frac{C}{r'^2} [\delta(\cos \theta' - 1) + \delta(\cos \theta' + 1)]$$

اما باید داشته باشیم

$$\int \rho(\mathbf{x}') d^3x' = Q$$

با جایگزینی $d^3x' = r'^2 d\Omega' dr'$ داریم

$$C \left[\int_0^{2\pi} d\phi' \int_0^b dr' \int_0^\pi \sin \theta' d\theta' \delta(\cos \theta' - 1) + \int_0^{2\pi} d\phi' \int_{-b}^0 dr' \int_0^\pi \sin \theta' d\theta' \delta(\cos \theta' + 1) \right] = Q$$

با محاسبه‌ی انتگرال‌ها، خواهیم داشت

$$C[2\pi b + 2\pi b] = Q \Rightarrow C = \frac{Q}{2b \cdot 2\pi}$$

بنابراین

$$\rho(\mathbf{x}') = \frac{Q}{2b} \frac{1}{2\pi r'^2} [\delta(\cos \theta' - 1) + \delta(\cos \theta' + 1)] \quad (۱۳۲-۳)$$

دو تابع دلتا متناظر با دو نیمه‌ی بالایی و پایینی بار خطی هستند.

در این مثال نیز با قرار دادن $a = 0$ و $m = 0$ به دلیل تقارن سمتی در (۱۲۵-۳)، تابع گرین همان تابع گرین مثال قبل خواهد بود. با جایگذاری این تابع گرین و رابطه‌ی (۱۳۲-۳) در رابطه‌ی (۱۲۶-۳) و در نظر گرفتن $d^3x' = r'^2 dr' d\Omega'$ خواهیم داشت (طرف راست را بر $4\pi\epsilon_0$ تقسیم کنید).

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{Q}{2b} \sum_{l=0}^{\infty} [P_l(1) + P_l(-1)] P_l(\cos\theta) \int_0^1 r'^l \left(\frac{1}{r'^{l+1}} - \frac{r'^l}{b^{2l+1}} \right) dr' \quad (133-3)$$

انتگرال باقیمانده را به دو بازه‌ی $0 \leq r' < r$ و $r \leq r' \leq b$ تقسیم می‌کنیم

$$\begin{aligned} \int_0^b &= \left(\frac{1}{r^{l+1}} - \frac{r^l}{b^{2l+1}} \right) \int_0^r r'^l dr' + r^l \int_r^b \left(\frac{1}{r'^{l+1}} - \frac{r'^l}{b^{2l+1}} \right) dr' \\ &= \frac{(2l+1)}{l(l+1)} \left[1 - \left(\frac{r}{b} \right)^l \right] \end{aligned} \quad (134-3)$$

این انتگرال به ازای $l = 0$ نامعین است، چون

$$\lim_{l \rightarrow 0} \frac{(2l+1)}{(l+1)} \frac{\left[1 - \left(\frac{r}{b} \right)^l \right]}{l} \rightarrow \frac{1}{1}$$

به کمک قاعده‌ی هوییتال، این ابهام را رفع می‌کنیم

$$\begin{aligned} \int_0^b &= \lim_{l \rightarrow 0} \frac{\frac{d}{dl} \left[1 - \left(\frac{r}{b} \right)^l \right]}{d^{(l)}/dl} = \lim_{l \rightarrow 0} \left[\frac{-d}{dl} \left(\frac{r}{b} \right)^l \right] \\ &= \lim_{l \rightarrow 0} \left(-\frac{d}{dl} e^{\text{Ln}(r/b)^l} \right) = \lim_{l \rightarrow 0} \left(-\frac{d}{dl} e^{l \text{Ln}(r/b)} \right) = \text{Ln} \left(\frac{b}{r} \right) \end{aligned} \quad (135-3)$$

با توجه به اینکه $P_l(1) = 1$ و $P_l(-1) = (-1)^l$ هستند و

$$P_l(1) + P_l(-1) = \begin{cases} 0 & , \text{ فرد } l \\ 2 & , \text{ زوج } l \end{cases}$$

در نتیجه با قرار دادن $l = 2j$ و $l = 0$ در (۱۳۳-۳)، خواهیم داشت

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{Q}{b} \left\{ \text{Ln} \left(\frac{b}{l} \right) + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(4j+1)}{2j(2j+1)} \left[1 - \left(\frac{r}{b} \right)^{2j} \right] \right\} P_{2j}(\cos\theta) \quad (136-3)$$

چگالی بار سطحی روی کره‌ی متصل به زمین با مشتق‌گیری از (۱۳۶-۳) به دست می‌آید

$$\sigma(\theta) = +\epsilon_0 \left. \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right|_{r=b} = -\frac{Q}{4\pi b^2} \left[1 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(4j+1)}{(2j+1)} P_{2j}(\cos\theta) \right] \quad (137-3)$$

۱۱-۳ بسط توابع گرین در مختصات استوانه‌ای

معادله برای تابع گرین عبارت است از

$$\nabla_x^2 G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = -4\pi\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$$

با نوشتن تابع دلتا در مختصات استوانه‌ای، خواهیم داشت

$$\nabla_x^2 G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = -\frac{4\pi}{\rho} \delta(\rho - \rho') \delta(\phi - \phi') \delta(z - z') \quad (۱۳۸-۳)$$

از طرفی داریم

$$\begin{cases} \delta(z - z') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ik(z-z')} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} dk \cos[k(z - z')] \\ \delta(\phi - \phi') = \frac{1}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im(\phi-\phi')} \end{cases} \quad (۱۳۹-۳)$$

تابع گرین را به صورت زیر بسط می‌دهیم

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \frac{1}{2\pi^2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} dk e^{im(\phi-\phi')} \cos[k(z - z')] g_m(k, \rho, \rho') \quad (۱۴۰-۳)$$

معادله‌ی (۱۳۸-۳) را در مختصات استوانه‌ای به صورت زیر می‌نویسیم

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial G}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 G}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 G}{\partial z^2} = -4\pi\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$$

با جایگزینی روابط (۱۳۹-۳) و (۱۴۰-۳) در معادله‌ی بالا، خواهیم داشت

$$\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dg_m}{d\rho} \right) - \left(k^2 + \frac{m^2}{\rho^2} \right) g_m = -\frac{4\pi}{\rho} \delta(\rho - \rho') \quad (۱۴۱-۳)$$

برای $\rho \neq \rho'$ ، این معادله، همان معادله‌ی (۹۸-۳) برای توابع بسط تعدیل‌یافته، $I_m(k\rho)$ و $K_m(k\rho)$ است. اگر $\psi_1(k\rho)$ و $\psi_2(k\rho)$ ترکیب‌هایی خطی از I_M و K_M باشند که شرایط مرزی صحیحی را به ترتیب برای $\rho < \rho'$ و $\rho > \rho'$ برآورده کنند، در این صورت از تقارن تابع گرین در ρ و ρ' می‌نویسیم

$$g_m(k, \rho, \rho') = \psi_1(k\rho_{<}) \psi_2(k\rho_{>}) \quad (۱۴۲-۳)$$

با ضرب کردن (۱۴۱-۳) در ρ و انتگرال‌گیری از آن در بازه‌ی $\rho = \rho' - \varepsilon$ تا $\rho = \rho' + \varepsilon$ ، داریم

$$\left[\rho \frac{dg_m}{d\rho} \right]_{\rho=\rho'-\varepsilon}^{\rho=\rho'+\varepsilon} - 0 = -4\pi$$

انتگرال جمله‌ی دوم در سمت چپ در حد $\varepsilon \rightarrow 0$ ، صفر می‌شود

$$\left. \frac{dg_m}{d\rho} \right|_{\rho'+\varepsilon} - \left. \frac{dg_m}{d\rho} \right|_{\rho'-\varepsilon} = -\frac{4\pi}{\rho'} \quad (۱۴۳-۳)$$

از طرفی داریم

$$\left. \frac{d}{d\rho} (\psi_1(k\rho_<) \cdot \psi_2(k\rho_>)) \right|_{\rho=\rho'+\varepsilon} = \psi_1(k\psi'_2)$$

چون در این حالت $\rho_< = \rho'$ و $\rho_> = \rho$ است و

$$\left. \frac{d}{d\rho} (\psi_1(k\rho_<) \psi_2(k\rho_>)) \right|_{\rho=\rho'-\varepsilon} = k\psi'_1 \psi_2$$

در این حالت $\rho_< = \rho$ و $\rho_> = \rho'$ است، و معنی پریم‌ها، مشتق نسبت به شناسه است، بنابراین

$$k(\psi_1 \psi'_2 - \psi_2 \psi'_1) = kW[\psi_1, \psi_2] \quad (۱۴۴-۳)$$

$W[\psi_1, \psi_2]$ ، رونسکین ψ_1 و ψ_2 است. معادله‌ی (۱۴۱-۳) از نوع اشتورم - لیوویل است

$$\frac{d}{dx} \left[P(x) \frac{dy}{dx} \right] + g(x)y = 0$$

رونسکین دو جواب مستقل خطی این معادله با $[1/P(x)]$ متناسب است. از این رو از امکان صادق بودن (۱۴۳-۳) برای همه‌ی مقادیر ρ' مطمئن هستیم. بنابراین باید ادعا کنیم که بهنجارش $\psi_1 \psi_2$ به‌گونه‌ای

است که رونسکین مقدار زیر را دارد

$$W[\psi_1(x), \psi_2(x)] = -\frac{4\pi}{x} \quad (۱۴۶-۳)$$

اگر هیچ سطح مرزی‌ای وجود نداشته باشد، باید $g_m(k, \rho, \rho')$ در $\rho = 0$ متناهی باشد و در حد $\rho \rightarrow \infty$ ، صفر شود. در نتیجه، $\psi_1(k\rho) = AI_m(k\rho)$ و $\psi_2(k\rho) = K_m(k\rho)$. ثابت A از شرط رونسکین (۱۴۶-۳) تعیین می‌شود. از روابط مجانبی (۱۰۴-۳)، داریم

$$I_m(x) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} e^x$$

$$K_m(x) \rightarrow \sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{-x}$$

رونسکین آن‌ها را محاسبه می‌کنیم

$$W[I_m(x), K_m(x)] = I_m K' - I'_m K = \frac{1}{2} \frac{e^x}{\sqrt{x}} \left(\frac{1}{\sqrt{x}} (-e^{-x}) - \frac{1}{2} \frac{e^{-x}}{x^2} \right)$$

$$-\frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{x}} e^x - \frac{1}{2} \frac{e^x}{x^{\frac{3}{2}}} \right) \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} = -\frac{1}{x}$$

$$W[I_m(x), K_m(x)] = -\frac{1}{x} \quad (147-3)$$

از طرفی، از رابطه (۱۴۶-۳)، داریم

$$W[\psi_1 = AI_m, \psi_2 = K_m] = -\frac{4\pi}{x}$$

$$AW[I_m, K_m] = -\frac{4\pi}{x}$$

با جایگذاری از (۱۴۷-۳) در رابطه بالا، $A = 4\pi$ به دست می آید و از (۱۴۲-۳)، داریم

$$g_m(k, \rho, \rho') = 4\pi I_m(k\rho_{<}) K_m(k\rho_{>})$$

با قرار دادن این رابطه در (۱۴۰-۳)، خواهیم داشت

$$\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} = \frac{2}{\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} dk e^{im(\phi - \phi')} \cos[k(z - z')] I_m(k\rho_{<}) K_m(k\rho_{>}) \quad (148-3)$$

به کمک رابطه زیر

$$\begin{aligned} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im(\phi - \phi')} &= 1 + \sum_{m=-\infty}^{-1} e^{im(\phi - \phi')} + \sum_{m=1}^{\infty} e^{im(\phi - \phi')} \\ &= 1 + \sum_{m=1}^{\infty} e^{-m(\phi - \phi')} + \sum_{m=1}^{\infty} e^{im(\phi - \phi')} \\ &= 1 + \sum_{m=1}^{\infty} 2 \cos[m(\phi - \phi')] \end{aligned}$$

معادله (۱۴۸-۳) را به صورت توابع حقیقی می نویسیم

$$\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} = \frac{4}{\pi} \int_0^{\infty} dk \cos[k(z - z')] \quad (149-3)$$

$$\times \left\{ \frac{1}{2} I_0(k\rho_{<}) K_0(k\rho_{>}) + \sum_{m=1}^{\infty} \cos[m(\phi - \phi')] I_m(k\rho_{<}) K_m(k\rho_{>}) \right\}$$

اگر $\phi \rightarrow 0$ میل کند، تنها جمله $m = 0$ باقی می ماند (به دلیل تقارن). چون $J_0(0) = 1$ است،

خواهیم داشت

$$\frac{1}{|\mathbf{x}|} = \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + z^2}} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \cos kz K_0(k\rho) dk \quad (150-3)$$

اگر به جای ρ^2 در (۱۵۰-۳)، $R^2 = \rho^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho' \cos(\phi - \phi')$ را جایگزین کنیم، داریم

$$\frac{1}{\sqrt{\rho^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho' \cos(\phi - \phi')}} = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \cos kz K_0(k\sqrt{\rho^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho' \cos(\phi - \phi')}) dk$$

در طرف چپ رابطه‌ی بالا، $|x - x'|^{-1}$ با $z' = 0$ را داریم، که درست طرف چپ (۱۴۹-۳) با $z' = 0$ است. مقایسه‌ی طرف راست رابطه‌ی اخیر با طرف راست رابطه‌ی (۱۴۹-۳) منجر به رابطه زیر می‌شود

$$K_0(k\sqrt{\rho^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho' \cos(\phi - \phi')}) = I_0(k\rho_{<})K_0(k\rho_{>}) + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \cos[m(\phi - \phi')] I_m(k\rho_{>}) K_m(k\rho_{>}) \quad (151-3)$$

در حد $K \rightarrow 0$ یا $x = k\rho \rightarrow 0$ ، از روابط (۱۰۲-۳) و (۱۰۳-۳)، داریم

$$\begin{cases} I_0(x) \rightarrow 1 \\ I_m(x) \rightarrow \frac{1}{\Gamma(m+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^m = \frac{1}{m\Gamma(m)} \left(\frac{x}{2}\right)^m \\ K_0(x) \rightarrow -\text{Ln} \left(\frac{x}{2}\right) = \text{Ln} 2 + \text{Ln} \left(\frac{1}{x}\right) \\ K_m(x) \rightarrow \frac{\Gamma(m)}{2} \left(\frac{2}{x}\right)^m \end{cases}$$

با به‌کار بردن روابط بالا در حد $K \rightarrow 0$ در رابطه‌ی (۱۵۱-۳)، بسطی برای تابع گرین در مختصات قطبی (دوبعدی) به دست می‌آید که در واقع همان رابطه‌ی (۱۵۲-۳) کتاب است.

۱۲-۳ بسط‌های ویژه تابعی برای توابع گرین

در معادله‌ی ویژه مقداری زیر، λ_n ها ویژه مقادیر و جواب‌ها، $(\psi_n(x))$ ویژه توابع نامیده می‌شوند

$$\nabla^2 \psi_n(x) + [f(x) + \lambda_n] \psi_n(x) = 0 \quad (153-3)$$

ویژه توابع این معادله در شرط تعامد زیر صدق می‌کنند

$$\int \psi_m^*(x) \psi_n(x) d^3x = \delta_{mn} \quad (155-3)$$

طوری که ویژه توابع بهنجار فرض شوند. می‌خواهیم تابع گرین برای معادله‌ی زیر را بیابیم

$$\nabla_x^2 G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') + [f(\mathbf{x}) + \lambda]G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = -4\pi\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \quad (156-3)$$

تابع گرین را به صورت یک سری از ویژه توابع بسط می‌دهیم

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \sum_n a_n(\mathbf{x}')\psi_n(\mathbf{x}) \quad (157-3)$$

با جایگذاری این معادله در (۱۵۶-۳)، و تبدیل n به m ، خواهیم داشت

$$\sum_m a_m(\mathbf{x}')\nabla_x^2\psi_m(\mathbf{x}) + \sum_m a_m(\mathbf{x}')[f(\mathbf{x}) + \lambda]\psi_m(\mathbf{x}) = -4\pi\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$$

با استفاده از (۱۵۴-۳)، می‌نویسیم

$$\sum_m a_m(\mathbf{x}')(\lambda - \lambda_m)\psi_m(\mathbf{x}) = -4\pi\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \quad (158-3)$$

اگر دو طرف این معادله را در $\psi_n^*(\mathbf{x})$ ضرب و در حجم V انتگرال‌گیری کنیم، با استفاده از شرط

تعامد (۱۵۵-۳)، خواهیم داشت

$$\sum_m a_m(\mathbf{x}')(\lambda - \lambda_m)\delta_{mn} = -4\pi$$

$$a_n(\mathbf{x}') = 4\pi \frac{\psi_n^*(\mathbf{x}')}{\lambda_n - \lambda} \quad (159-3)$$

با جایگذاری (۱۵۹-۳) در (۱۵۷-۳)، بسط ویژه تابعی برای تابع گرین به دست می‌آید

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = 4\pi \sum_n \frac{\psi_n^*(\mathbf{x}')\psi_n(\mathbf{x})}{\lambda_n - \lambda} \quad (160-3)$$

برای حالتی که ویژه مقادیر، طیفی پیوسته داشته باشند، علامت جمع به انتگرال تبدیل می‌شود. برای در

نظر گرفتن ملاحظات مربوط به معادله‌ی پواسن، λ و $f(x)$ در (۱۵۶-۳) را مساوی صفر می‌گیریم.

مثال اول: معادله‌ی موج در کل فضا را در نظر می‌گیریم

$$(\nabla^2 + k^2)\psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}) = 0 \quad (161-3)$$

که دارای ویژه مقادیر پیوسته k^2 ، و ویژه توابع زیر است

$$\psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \quad (162-3)$$

این ویژه توابع با تابع دلتا بهنجار می‌شوند

$$\int \psi_{\mathbf{k}'}^*(\mathbf{x}) \psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}) d^3x = \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \quad (۱۶۳-۳)$$

بنابراین، مطابق (۱۶۰-۳)، بسط تابع گرین فضای نامتناهی به صورت زیر است

$$\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} = \frac{1}{2\pi^2} \int d^3k \frac{e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')}}{k^2} \quad (۱۶۴-۳)$$

مثال دوم: تابع گرین را برای یک مسئله‌ی دیریکله در داخل یک جعبه‌ی محصور با صفحات $x = 0$, $x = a$, $y = 0$, $y = b$, $z = 0$, $z = c$ در نظر می‌گیریم. بسط تابع گرین باید برحسب ویژه توابع معادله‌ی موج زیر انجام شود

$$(\nabla^2 + k_{lmn}^2) \psi_{lmn}(x, y, z) = 0 \quad (۱۶۵-۳)$$

اگر ویژه توابع را به صورت $\psi_{lmn}(x, y, z) = \psi_l(x) \psi_m(y) \psi_n(z)$ بنویسیم، خواهیم داشت

$$\frac{d^2 \psi_l(x)}{\psi_l(x) dx^2} + \frac{d^2 \psi_m(y)}{\psi_m(y) dy^2} + \frac{d^2 \psi_n(z)}{\psi_n(z) dz^2} + K_{lmn}^2 = 0$$

اما چون هر جمله تنها تابعی از یک متغیر است، داریم

$$-A^2 - B^2 - C^2 + K_{lmn}^2 = 0$$

$$\begin{cases} \frac{d^2 \psi_l(x)}{dx^2} = -A^2 \psi_l(x) \\ \frac{d^2 \psi_m(y)}{dy^2} = -B^2 \psi_m(y) \\ \frac{d^2 \psi_n(z)}{dz^2} = -C^2 \psi_n(z) \end{cases}$$

برای اینکه جواب‌ها به ترتیب در $x = 0$, $y = 0$, و $z = 0$ صفر شوند داریم

$$\begin{cases} \psi_l(x) = D \sin(Ax) \\ \psi_m(y) = E \sin(By) \\ \psi_n(z) = F \sin(Cz) \end{cases}$$

از طرفی، برای اینکه جواب‌ها به ترتیب در $x = a$, $y = b$ و $z = c$ صفر شوند، باید داشته باشیم

$$Aa = l\pi, \quad Bb = m\pi, \quad Cc = n\pi$$

و بالاخره با استفاده از انتگرال زیر، ضرایب بهنجارش، D ، E و F به دست می آید

$$\int_0^a \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n'\pi x}{a}\right) dx = \frac{a}{2} \delta_{nn'} \quad ; \quad n > 0$$

$$D = \sqrt{\frac{2}{a}} \quad ; \quad E = \sqrt{\frac{2}{b}} \quad ; \quad F = \sqrt{\frac{2}{c}}$$

بنابراین

$$\begin{cases} \psi_{lmn}(x, y, z) = \sqrt{\frac{\lambda}{abc}} \sin\left(\frac{l\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right) \sin\left(\frac{n\pi z}{c}\right) \\ k_{lmn}^{\nu} = \pi^{\nu} \left(\frac{l^{\nu}}{a^{\nu}} + \frac{m^{\nu}}{b^{\nu}} + \frac{n^{\nu}}{c^{\nu}} \right) \end{cases} \quad (۱۶۶-۳)$$

بنابراین، بسط تابع گرین با قرار دادن $\lambda = 0$ و (۱۶۶-۳) در (۱۶۰-۳)، به دست می آید

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \frac{32}{\pi abc} \sum_{l,m,n=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{l\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{l\pi x'}{a}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right) \sin\left(\frac{m\pi y'}{b}\right) \sin\left(\frac{n\pi z}{c}\right) \sin\left(\frac{n\pi z'}{c}\right)}{\frac{l^{\nu}}{a^{\nu}} + \frac{m^{\nu}}{b^{\nu}} + \frac{n^{\nu}}{c^{\nu}}}$$

(۱۶۷-۳)

برای اینکه بسط (۱۶۷-۳) را با بسط‌های به دست آمده از نوع (۱۲۵-۳) برای مختصات کروی و (۱۴۸-۳) برای مختصات استوانه‌ای ارتباط دهیم، از بسط‌های مشابهی برای جعبه استفاده می‌کنیم. معادله برای تابع گرین عبارت است از

$$\nabla_x^2 G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = -4\pi \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \quad (۱-۱۶۷-۳)$$

با استفاده از جواب‌های به دست آمده در بالا، روابط بستاری زیر را می‌نویسیم

$$\begin{cases} \delta(x - x') = \sqrt{\frac{2}{a}} \sqrt{\frac{2}{a}} \sum_{l=1}^{\infty} \sin\left(\frac{l\pi}{a} x\right) \sin\left(\frac{l\pi}{a} x'\right) \\ \delta(y - y') = \sqrt{\frac{2}{b}} \sqrt{\frac{2}{b}} \sum_{m=1}^{\infty} \sin\left(\frac{m\pi}{b} y\right) \sin\left(\frac{m\pi}{b} y'\right) \end{cases} \quad (۲-۱۶۷-۳)$$

با استفاده از این روابط تابع دلتا را به صورت زیر می‌نویسیم

$$\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = \delta(x - x') \delta(y - y') \delta(z - z') \quad (۳-۱۶۷-۳)$$

$$= \delta(z - z') \sum_{l,m=1}^{\infty} \left(\frac{4}{ab}\right) \sin\left(\frac{l\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{l\pi}{a}x'\right) \sin\left(\frac{m\pi}{b}y\right) \sin\left(\frac{m\pi}{b}y'\right)$$

تابع گرین را به صورت زیر بسط می‌دهیم

$$G(x, x') = \left(\frac{4}{ab}\right) \sum_{l,m=1}^{\infty} g_{lm}(z, z') \left[\sin\left(\frac{l\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{l\pi}{a}x'\right) \sin\left(\frac{m\pi}{b}y\right) \sin\left(\frac{m\pi}{b}y'\right) \right]$$

که آن را رابطه‌ی (۳-۱۶۷-۴) می‌نامیم. با قرار دادن (۳-۱۶۷-۳) و (۴-۱۶۷-۳) در (۳-۱۶۷-۳)، خواهیم داشت

$$\left[-\left(\frac{l\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2 \right] g_{lm} + \frac{d^2 g_{lm}}{dz^2} = -4\pi\delta(z - z') \quad (۵-۱۶۷-۳)$$

با $K_{lm}^2 = \frac{\pi^2 l^2}{a^2} + \frac{\pi^2 m^2}{b^2}$ معادله‌ی همگن برای $g_{lm}(z, z')$ به صورت زیر خواهد بود

$$\frac{d^2 g_{lm}(z, z')}{dz^2} - K_{lm}^2 g_{lm}(z, z') = 0 \quad (۶-۱۶۷-۳)$$

جواب‌های این معادله، ترکیب‌هایی خطی از $\sinh(K_{lm}z)$ و $\cosh(K_{lm}z)$ هستند، برای اینکه شرایط مرزی (صفر بودن پتانسیل) در $z = 0$ و $z = c$ را برآورده نماید با در نظر گرفتن تقارن خواهیم داشت

$$g_{lm}(z, z') = A \sinh(K_{lm}z_{<}) \sinh(K_{lm}(c - z_{>})) \quad (۷-۱۶۷-۳)$$

که در آن A ثابت و $z_{<} < z_{>}$ ، مربوط به کوچک‌تر (بزرگ‌تر)، z و z' است.

اگر از (۵-۱۶۷-۳) در بازه‌ی $z = z' - \varepsilon$ و $z = z' + \varepsilon$ در حد ε خیلی کوچک انتگرال بگیریم

داریم

$$\frac{dg_{lm}}{dz} \Big|_{z=z'+\varepsilon} - \frac{dg_{lm}}{dz} \Big|_{z=z'-\varepsilon} = -4\pi \quad (۸-۱۶۷-۳)$$

انتگرال جمله‌ی اول (۵-۱۶۷-۳) در حد $\varepsilon \rightarrow 0$ ، صفر می‌شود. اگر با استفاده از (۷-۱۶۷-۳)، ناپیوستگی در مشتق را حساب کنیم

$$\begin{cases} \frac{dg_{lm}}{dz} \Big|_{z=z'+\varepsilon} = A \sinh(K_{lm}z') [-K_{lm} \cosh(K_{lm}(c - z'))] \\ \frac{dg_{lm}}{dz} \Big|_{z=z'-\varepsilon} = A [K_{lm} \cosh(K_{lm}z')] \sinh(K_{lm}(c - z')) \end{cases} \quad (۹-۱۶۷-۳)$$

با توجه به رابطه‌ی مثلثاتی

$$\sinh(x + y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y$$

داریم

$$\left. \frac{dg_{lm}}{dz} \right|_{z'+\varepsilon} - \left. \frac{dg_{lm}}{dz} \right|_{z'-\varepsilon} = A(-K_{lm} \sinh(K_{lm}C)) \quad (۱۰-۱۶۷-۳)$$

بنابراین از مقایسه‌ی (۸-۱۶۷-۳) و (۱۰-۱۶۷-۳)، ثابت A به دست می‌آید

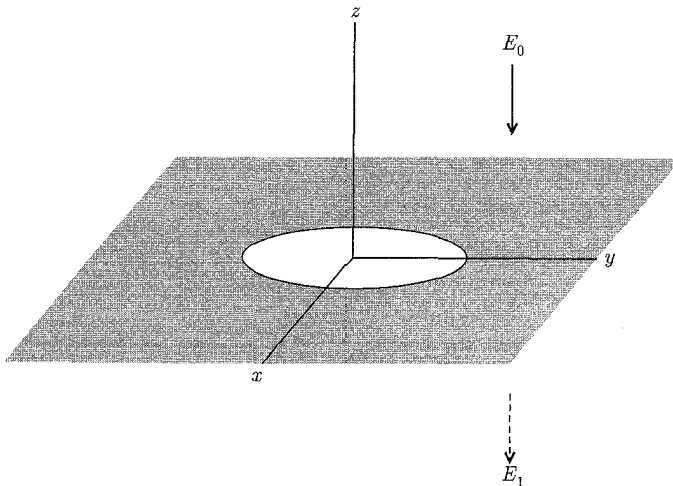
$$A = \frac{4\pi}{K_{lm} \sinh(K_{lm}C)}$$

با قرار دادن این ثابت در (۷-۱۶۷-۳) و سپس در رابطه‌ی (۴-۱۶۷-۳)، به راحتی رابطه (۱۶۸-۳) را خواهیم داشت.

اگر (۱۶۷-۳) و (۱۶۸-۳)، مساوی باشند، رابطه‌ی (۱۶۹-۳) را به راحتی خواهیم داشت.

۱۳-۳ شرایط مرزی آمیخته، صفحه‌ی رسانا با یک سوراخ دایره‌ای شکل

مثال: یک صفحه‌ی رسانای نازک متصل به زمین را که یک سوراخ دایره‌ای شکل به شعاع a در آن ایجاد شده است، در نظر بگیرید، میدان الکتریکی در فاصله‌ی خیلی دور از این صفحه، ثابت و بر این صفحه عمود است، و میدان در دو طرف آن متفاوت است، (شکل ۱۳-۳).



شکل ۱۳-۳:

مؤلفه‌های مجانبی (در فاصله‌ی دور از سوراخ) و غیرصفر میدان الکتریکی عبارتند از

$$E_z = \begin{cases} -E_0 & ; z > 0 \\ -E_1 & ; z < 0 \end{cases}$$

بنابراین، پتانسیل را به صورت زیر می‌نویسیم

$$\Phi = \begin{cases} E_0 z + \Phi^{(1)} & (z > 0) \\ E_1 z + \Phi^{(1)} & (z < 0) \end{cases} \quad (۱۷۰-۳)$$

اگر سوراخی وجود نمی‌داشت، $\Phi^{(1)}$ صفر می‌شد، و سطح بالایی صفحه، چگالی بار سطحی یکنواخت $E_0 \cdot \varepsilon_0$ و سطح پایینی، چگالی بار $E_1 \cdot \varepsilon_0$ را داشت. بنابراین پتانسیل $\Phi^{(1)}$ می‌تواند نتیجه‌ی بازآرایی چگالی سطحی در نزدیکی سوراخ باشد، چون این چگالی سطحی در صفحه‌ی $z = 0$ توزیع شده است، لذا $\Phi^{(1)}$ را به صورت زیر می‌توان نوشت

$$\Phi^{(1)}(x, y, z) = \int \frac{\sigma^{(1)}(x', y') dx' dy'}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + z^2}}$$

طبق این رابطه، $\Phi^{(1)}$ نسبت به z زوج است، لذا $E_x^{(1)}$ و $E_y^{(1)}$ نسبت به z زوج هستند، اما $E_z^{(1)}$ فرد است. باید توجه که که $E_x^{(1)}$ و $E_y^{(1)}$ مؤلفه‌های x و y میدان الکتریکی کل هستند، اما با توجه به (۱۷۰-۳)، $E_z^{(1)}$ مؤلفه‌ی z میدان الکتریکی کل نیست، بنابراین، اگرچه نسبت به z فرد است، ولی در $z = 0$ صفر نمی‌شود، بلکه در $z = 0$ ناپیوسته است. از آنجایی که مؤلفه‌ی z میدان الکتریکی کل باید در $z = 0$ در عبور از سوراخ پیوسته باشد، باید داشته باشیم

$$-E_0 + E_z^{(1)} \Big|_{z=0+} = -E_1 + E_z^{(1)} \Big|_{z=0-}$$

چون $E_z^{(1)}$ نسبت به z فرد است، خواهیم داشت

$$\begin{cases} E_z^{(1)} \Big|_{z=0+} = -E_z^{(1)} \Big|_{z=0-} = \frac{1}{\epsilon_0} (E_0 - E_1) \\ 0 \leq \rho < a \end{cases}$$

برای نقاط واقع بر روی سطح رسانا ($a \leq \rho < \infty$)، میدان الکتریکی نامعلوم است، اما پتانسیل صفر فرض می‌شود. این با استفاده از رابطه‌ی (۱۷۰-۳) بدان معنی است که در ($a \leq \rho < \infty$)، $\Phi^{(1)} = 0$

است. بنابراین یک مسئله‌ی مقدار مرزی الکترواستاتیکی با شرایط مرزی آمیخته به صورت زیر داریم

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial z} \Big|_{z=0^+} &= -\frac{1}{\epsilon_0} (E_0 - E_1) \quad ; \quad 0 \leq \rho < a \\ \Phi^{(1)} \Big|_{z=0} &= 0 \quad ; \quad a \leq \rho < \infty \end{aligned} \right\} \quad (171-3)$$

به دلیل تقارن سمتی، پتانسیل $\Phi^{(1)}$ را در مختصات استوانه‌ای با قرار دادن $m = 0$ در رابطه‌ی (۱۱۰-۳) به صورت زیر می‌نویسیم

$$\Phi^{(1)}(\rho, z) = \int_0^\infty dk A(k) e^{-k|z|} j_0(k\rho) \quad (172-3)$$

گفته می‌شود که، برای ρ یا $|z|$ بزرگ، نوسان‌های سریع $j_0(k\rho)$ یا کاهش سریع $e^{-k|z|}$ سهم عمده‌ی انتگرال (۱۷۲-۳)، در نواحی اطراف $k = 0$ است. بنابراین، رفتار مجانبی $\Phi^{(1)}$ با رفتار $A(k)$ در k کوچک مرتبط است. فرض می‌کنیم بتوان $A(k)$ را به صورت سری تیلور حول $k = 0$ بسط داد

$$A(k) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{k^l}{l!} \frac{d^l A}{dk^l} (0)$$

با قرار دادن این سری در (۱۷۲-۳)، داریم

$$\Phi^{(1)}(\rho, z) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{d^l A}{dk^l} (0) B_l(\rho, z) \quad (173-3)$$

که در آن

$$B_l(\rho, z) = \frac{1}{l!} \int_0^\infty dk k^l e^{-k|z|} j_0(k\rho) \quad (174-3)$$

با استفاده از اینکه $k^l e^{-k|z|} = \left(-\frac{d}{d|z|}\right)^l e^{-k|z|}$ ، داریم

$$B_l(\rho, z) = \frac{1}{l!} \left(-\frac{d}{d|z|}\right)^l \int_0^\infty dk e^{-k|z|} j_0(k\rho)$$

با استفاده از نتیجه‌ی مسئله‌ی (۱۶-۳ ج)، خواهیم داشت

$$B_l = \frac{1}{l!} \left(-\frac{d}{d|z|}\right)^l \left(\frac{1}{\sqrt{\rho^2 + z^2}}\right) \quad (175-3)$$

رابطه‌ی زیر را با $r = \sqrt{\rho^2 + z^2}$ و $z = r \cos \theta$ ثابت خواهیم کرد

$$B_l = \frac{P_l(|\cos \theta|)}{r^{l+1}} \quad (۱۷۶-۳)$$

برای اثبات این رابطه، ابتدا رابطه‌ی زیر را در مختصات قطبی کروی ثابت می‌کنیم

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{P_n(\cos \theta)}{r^{n+1}} \right] = -(n+1) \frac{P_{n+1}(\cos \theta)}{r^{n+2}} \quad (۱-۱۷۶-۳)$$

می‌توان نوشت

$$\mathbf{k} \cdot \nabla_{xyz} = \mathbf{k} \cdot \nabla_{r\theta\phi}$$

از طرفی داریم

$$(\nabla_{xyz})_z = \frac{\partial}{\partial z}$$

و

$$(\nabla_{r\theta\phi})_z = \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} - \sin \theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}$$

بنابراین

$$\frac{\partial}{\partial z} = \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} - \sin \theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \quad (۲-۱۷۶-۳)$$

بنابراین

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{P_n(\cos \theta)}{r^{n+1}} \right] = \cos \theta \frac{-(n+1)}{r^{n+2}} P_n(\cos \theta) - \sin \theta \frac{1}{r^{n+2}} \frac{\partial P_n(\cos \theta)}{\partial \cos \theta} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \cos \theta$$

که آن را (۳-۱۷۶-۳) می‌نامیم. با قرار دادن $x = \cos \theta$ داریم

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{P_n(x)}{r^{n+1}} \right] = \frac{1}{r^{n+2}} (-x(n+1)P_n(x) + (1-x^2)P_n'(x)) \quad (۴-۱۷۶-۳)$$

پریم در $P_n'(x)$ ، نمایانگر مشتق نسبت به شناسه است، اما از تفاضل دو رابطه‌ی اول و سوم رابطه‌ی

(۲۹-۳)، و جایگزینی n به جای l ، داریم

$$(1-x^2)P_n'(x) - (n+1)xP_n(x) = -(n+1)P_{n+1}(x) \quad (۵-۱۷۶-۳)$$

از جایگذاری (۵-۱۷۶-۳) در (۴-۱۷۶-۳)، رابطه‌ی (۱-۱۷۶-۳) به دست می‌آید. به ازای $n = 0$ ، داریم

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{1}{r} \right] = -\frac{P_1(\cos \theta)}{r^2} \quad (۶-۱۷۶-۳)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} \left[\frac{1}{r} \right] = -\frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{P_1(\cos \theta)}{r^2} \right] = +2 \frac{P_2(\cos \theta)}{r^3} \quad (۷-۱۷۶-۳)$$

بنابراین

$$\frac{\partial^l}{\partial z^l} \left[\frac{1}{z} \right] = l!(-1)^l \frac{P_l(\cos \theta)}{r^{l+1}} \quad (۸-۱۷۶-۳)$$

از جایگذاری (۸-۱۷۶-۳) در (۱۷۵-۳)، رابطه‌ی (۱۷۶-۳) به دست می‌آید. بنابراین بسط مجانبی (۱۷۳-۳)، از نوع بسط هماهنگ‌های کروی به صورت (۳۳-۳) است

$$\Phi^{(1)} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{d^l A}{dk^l}(\circ) \cdot \frac{P_l(|\cos \theta|)}{r^{l+1}} \quad (۱۷۷-۳)$$

اکنون مسئله‌ی مقدار مرزی آمیخته را مورد بحث و بررسی قرار می‌دهیم، با شکل فرض شده‌ی (۱۷۲-۳) برای $\Phi^{(1)}$ ، شرایط مرزی (۱۷۱-۳) به صورت یک جفت معادله‌ی انتگرالی نوع اول برای $A(k)$ تبدیل می‌شوند

$$\left. \begin{aligned} \int_0^{\infty} dk k A(k) j_0(k\rho) &= \frac{1}{\nu} (E_0 - E_1) \quad ; \quad 0 \leq \rho < a \\ \int_0^{\infty} dk A(k) j_0(k\rho) &= 0 \quad ; \quad a \leq \rho < \infty \end{aligned} \right\} \quad (۱۷۸-۳)$$

این قبیل جفت معادلات انتگرالی، به "معادلات انتگرالی دوگان" معروف هستند، معادلات انتگرالی دوگان زیر را در نظر بگیرید

$$\left. \begin{aligned} \int_0^{\infty} dy y g(y) j_n(xy) &= x^n \quad ; \quad 0 \leq x < 1 \\ \int_0^{\infty} dy g(y) j_n(xy) &= 0 \quad ; \quad 1 \leq x < \infty \end{aligned} \right\} \quad (۱۷۹-۳)$$

اما داریم*

$$\int_0^{\infty} \frac{j_{\mu}(at)j_{\nu}(bt)}{t^{\lambda}} dt = \frac{b^{\nu} \Gamma\left(\frac{1}{2}\mu + \frac{1}{2}\nu - \frac{1}{2}\lambda + \frac{1}{2}\right)}{\nu^{\lambda} a^{\nu-\lambda+1} \Gamma(\nu+1) \Gamma\left(\frac{1}{2}\lambda + \frac{1}{2}\mu - \frac{1}{2}\nu + \frac{1}{2}\right)} \times {}_2F_1\left(\frac{\mu+\nu-\lambda+1}{2}, \frac{\nu-\lambda-\mu+1}{2}; \nu+1; \frac{b^2}{a^2}\right) \quad (۱-۱۷۹-۳)$$

* G. N. WATGSON, A Treatise on the theory of Bessel Functions, Second Ed, 1944.

تابع ${}_2F_1$ تابع فوق هندسی است که معنی اندیس‌های آن را قبلاً هنگام اثبات رابطه‌ی (۳-۴۲) در بخش (۳-۴)، توضیح دادیم. با جایگذاری $\mu = n + \frac{3}{2}$ ، $\nu = n$ ، $\lambda = -\frac{1}{2}$ ، $a = 1$ ، $b = x$ و $t = y$ خواهیم داشت

$$\int_0^\infty dy \frac{j_{n+\frac{3}{2}}(y)j_n(xy)}{y^{-\frac{1}{2}}} = \frac{x^n \Gamma\left(n + \frac{3}{2}\right)}{\frac{1}{2}^{-\frac{1}{2}} \Gamma(n+1)\Gamma(0)} \times {}_2F_1\left(n + \frac{3}{2}, 0; n+1; x^2\right) \quad (2-179-3)$$

اما در تابع $F(a, b; c; x)$ ، اگر a, b ، صفر باشد، طبق بسط این تابع در بخش (۳-۴)، این تابع برابر یک می‌شود

$$\int_0^\infty dy \frac{j_{n+\frac{3}{2}}(y)j_n(xy)}{y^{-\frac{1}{2}}} = \frac{x^n \Gamma\left(n + \frac{3}{2}\right)}{\frac{1}{2}^{-\frac{1}{2}} \Gamma(n+1)} \quad (3-179-3)$$

معادله‌ی بالا را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم

$$\int dy \cdot y \left[\frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma\left(n + \frac{3}{2}\right)} \frac{j_{n+\frac{3}{2}}(y)}{(2y)^{\frac{1}{2}}} \right] j_n(xy) = x^n \quad (4-179-3)$$

از مقایسه‌ی (۳-۱۷۹) با این معادله خواهیم داشت

$$g(y) = \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma\left(n + \frac{3}{2}\right)} \frac{j_{n+\frac{3}{2}}(y)}{(2y)^{\frac{1}{2}}} = \frac{\Gamma(n+1)}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(n + \frac{3}{2}\right)} j_{n+1}(y) \quad (180-3)$$

در این رابطه، $j_n(y)$ تابع بسل کروی از مرتبه‌ی n است، اما برای جفت معادله (۳-۱۷۸)، $n = 0$ ، $x = \frac{\rho}{a}$ و $y = ka$ است. بنابراین

$$A(k) = \frac{1}{2} (E_0 - E_1) a^2 \frac{\Gamma(1)}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} j_1(ka)$$

اما $\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ پس

$$A(k) = \frac{(E_0 - E_1) a^2}{\pi} j_1(ka) = \frac{(E_0 - E_1)}{\pi} \left[\frac{\sin ka}{k^2} - \frac{a \cos ka}{k} \right] \quad (181-3)$$

با بسط توابع سینوس و کسینوس برای k های کوچک، بسط $A(k)$ به صورت زیر درمی آید

$$A(k) \simeq \frac{(E_0 - E_1)a^2}{3\pi} \left[ka - \frac{(ka)^3}{10} + \dots \right]$$

این بدان معنی است که بار کل که متناظر با جمله $l = 0$ در (۱۷۷-۳) است صفر خواهد بود و لذا پایین ترین جمله در پتانسیل مجانبی (۱۷۷-۳)، به ازای $l = 1$ است

$$\Phi^{(1)} \rightarrow \frac{dA}{dk}(\circ) \frac{P_1(|\cos \theta|)}{r^2}$$

چون $P_1(|\cos \theta|) = |\cos \theta| = \frac{|z|}{r}$ پس

$$\Phi^{(1)} \rightarrow \frac{(E_0 - E_1)}{3\pi} a^3 \cdot \frac{|z|}{r^3} \quad (182-3)$$

این پتانسیل، دارای گشتاور دوقطبی الکتریکی مؤثر زیر است

$$\mathbf{P} = \mp \frac{4\varepsilon_0}{3} (E_0 - E_1) a^3 \quad (z \geq 0) \quad (183-3)$$

در همسایگی روزنه، پتانسیل $\Phi^{(1)}$ باید از عبارت دقیق زیر که از جایگذاری (۱۸۱-۳) در (۱۷۲-۳) حاصل می شود، محاسبه شود

$$\Phi^{(1)}(\rho, z) = \frac{(E_0 - E_1)}{\pi} a^2 \int_0^\infty dk j_1(ka) e^{-k|z|} j_0(k\rho) \quad (184-3)$$

این پتانسیل روی محور ($\rho = 0$)، به کمک $j_0(\circ) = 1$ به صورت زیر درمی آید

$$\Phi^{(1)}(\circ, z) = \frac{(E_0 - E_1)}{\pi} a^2 \int_0^\infty dk j_1(ka) e^{-k|z|} \quad (1-184-3)$$

با قرار دادن $j_1(ka) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{j_{\frac{3}{2}}(ka)}{(ka)^{\frac{1}{2}}}$ داریم

$$\Phi^{(1)}(\circ, z) = \frac{(E_0 - E_1)}{\pi} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{a^2}{a^{\frac{1}{2}}} \int_0^\infty dk \frac{e^{-k|z|}}{k^{\frac{1}{2}}} j_{\frac{3}{2}}(ka) \quad (2-184-3)$$

اما انتگرال زیر را داریم*

$$\int_0^\infty e^{-at} j_{\frac{3}{2}}(bt) t^{-\frac{1}{2}} dt = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \left(\frac{1}{2}b\right)^{\frac{3}{2}+2m} \Gamma(2m+2)}{m! \Gamma\left(m + \frac{5}{2}\right) a^{2m+2}} \quad (3-184-3)$$

*) G. N. Watson

با جایگزینی $a = |z|$ و $b = a$ و $t = k$ و ساده کردن توابع گاما با استفاده از $\Gamma(z) = (z-1)!$ خواهیم داشت

$$\int_0^\infty dk \frac{e^{-k|z|}}{k^{\frac{1}{2}}} j_{\frac{3}{2}}(ak) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \left(\frac{a}{2}\right)^{\frac{3}{2}+2m}}{m!(|z|)^{2m+2}} \frac{(2m+1)!}{\left(m+\frac{3}{2}\right)!} \quad (4-184-3)$$

اما داریم **

$$\begin{cases} \left(m+\frac{3}{2}\right)! = \left(m+\frac{3}{2}\right) \left(m+\frac{1}{2}\right)! \\ m! \left(m+\frac{1}{2}\right)! = 2^{-2m-1} \pi^{\frac{1}{2}} (2m+1)! \end{cases} \quad (5-184-3)$$

رابطه‌ی دوم را اثبات می‌کنیم.

تابع بتا را که به صورت زیر است در نظر می‌گیریم

$$B(m+1, n+1) \equiv \frac{m!n!}{(m+n+1)!} \equiv 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2m+1} \theta \sin^{2n+1} \theta d\theta \quad (1)$$

با جانشانی $t = \cos^2 \theta$ معادله‌ی بالا به صورت زیر درمی‌آید

$$B(m+1, n+1) = \frac{m!n!}{(m+n+1)!} = \int_0^1 t^m (1-t)^n dt \quad (2)$$

با نشانیدن x^2 به جای t داریم

$$\frac{m!n!}{2(m+n+1)!} = \int_0^1 x^{2m+1} (1-x^2)^n dx \quad (3)$$

با قرار دادن $m = n = z$ در معادله‌ی (۲) داریم

$$\frac{z!z!}{(2z+1)!} = \int_0^1 t^z (1-t)^z dt \quad (4)$$

پس از جانشانی $t = \frac{(1+s)}{2}$ داریم

$$\frac{z!z!}{(2z+1)!} = 2^{-2z-1} \int_{-1}^1 (1-s^2)^z ds = 2^{-2z} \int_0^1 (1-s^2)^z ds \quad (5)$$

با محاسبه‌ی این انتگرال به صورت یک تابع بتا (معادله‌ی (۳) به ازای $m = -\frac{1}{2}$) خواهیم داشت

$$\frac{z!z!}{(2z+1)!} = 2^{-2z-1} \frac{z! \left(-\frac{1}{2}\right)}{\left(z + \frac{1}{2}\right)} \quad (6)$$

پس از بازآرایی جمله‌ها، و یادآوری این نکته که، $\left(-\frac{1}{2}\right)! = \sqrt{\pi}$ است، خواهیم داشت

$$z! \left(z + \frac{1}{2}\right)! = 2^{-2z-1} \sqrt{\pi} (2z+1)! \quad (7)$$

که همان رابطه‌ی موردنظر در رابطه‌ی (۳-۱۸۴-۵) است.

همچنین برای $\tan^{-1} x$ بسط زیر را داریم

$$\tan^{-1} x = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)} \quad ; \quad |x| < 1 \quad (6-184-3)$$

با جایگذاری (۳-۱۸۴-۵) در (۳-۱۸۴-۴) و استفاده از (۳-۱۸۴-۶)، و جایگزینی نتیجه، در (۳-۱۸۴-۲)، خواهیم داشت

$$\Phi^{(1)}(\circ, z) = \frac{(E_0 - E_1)a}{\pi} \left[1 - \frac{|z|}{a} \tan^{-1} \left(\frac{a}{|z|} \right) \right]$$

برای $|z| \gg a$ ، این معادله به معادله‌ی (۳-۱۸۲) (با $r = |z|$) تبدیل می‌شود.

در صفحه‌ی روزنه ($z = \circ$)، پتانسیل $\phi^{(1)}$ از رابطه‌ی (۳-۱۸۴) عبارت است از

$$\Phi^{(1)}(\rho, \circ) = \begin{cases} \frac{(E_0 - E_1)}{\pi} \sqrt{a^2 - \rho^2} & ; \quad \circ \leq \rho < a \\ \circ & ; \quad \rho \geq a \end{cases}$$

میدان الکتریکی مماسی در روزنه یک میدان شعاعی است

$$\mathbf{E}_{\tan} = \frac{(E_0 - E_1)}{\pi} \frac{\rho}{\sqrt{a^2 - \rho^2}}$$

مؤلفه‌ی عمودی میدان الکتریکی در روزنه، از رابطه‌ی (۳-۱۷۱)، با میانگین میدان‌ها در بالا و پایین صفحه

به دست می‌آید

$$E_z(\rho, \circ) = -\frac{1}{2} (E_0 + E_1)$$

فصل ۴

چندقطبی‌ها، الکترواستاتیک محیط‌های ماکروسکوپی، دی‌الکتریک‌ها

این فصل ابتدا با پتانسیل ناشی از توزیع بارهای جایگزیده و بسط آن‌ها برحسب چندقطبی‌ها سروکار دارد و در ادامه، کار برحسب هماهنگ‌های کروی پیش می‌رود. در عین اینکه ارتباط با مؤلفه‌های قائم برای تعدادی از اولین چندقطبی‌ها نیز برقرار شده است. پس از آن انرژی یک چندقطبی در یک میدان خارجی مورد بحث قرار گرفته است. یک استخراج مقدماتی از معادلات ماکروسکوپی الکترواستاتیک نیز صورت گرفته اما بحث دقیق آن تا فصل ۶ به تعویق افتاده است. پس از آن دی‌الکتریک‌ها و شرایط مرزی مناسب توصیف شده‌اند، و تعدادی از مسائل مقدار مرزی نوعی با وجود دی‌الکتریک‌ها مورد بحث و بررسی قرار گرفته‌اند. مدل‌های کلاسیکی ساده‌ای برای بررسی کیفیت اصلی قطبش‌پذیری اتمی و گذردهی ویژه مورد استفاده واقع شده‌اند. در نهایت سؤال انرژی الکترواستاتیکی و نیروها در حضور دی‌الکتریک‌ها مورد بحث قرار گرفته است.

۱-۴ بسط چندقطبی

یک توزیع بار جایگزیده با چگالی بار $\rho(x')$ توصیف شده است که تنها درون کره‌ای به شعاع R حول یک مبدأ، غیرصفر است.^۱

(۱) کره‌ای با شعاع R تنها یک ابزار مفهومی ابداعی است که برای تقسیم فضا به دو ناحیه‌ی باردار و بدون بار به‌کار گرفته می‌شود. در صورتی که چگالی بار نسبت به فاصله سریع‌تر از هر توانی افت کند، بسط برحسب چندقطبی‌ها در فواصل به اندازه کافی بزرگ معتبر است.

پتانسیل در خارج از کره را می‌توان برحسب هماهنگ‌های کروی بسط داد

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{4\pi}{2l+1} q_{lm} \frac{Y_{lm}(\theta, \phi)}{r^{l+1}} \quad (1-4)$$

که در آن انتخاب ویژه ضرایب ثابت به جهت مناسبت‌های بعدی است.

معادله (۱-۴) یک بسط چندقطبی نامیده می‌شود؛ جمله $l = 0$ جمله تک قطبی است، جمله‌های $l = 1$ جمله‌های دوقطبی هستند و غیره. دلیل نامگذاری اسامی فوق در زیر روشن می‌شود. مسئله‌ای که بایستی حل کنیم تعیین ثابت‌های q_{lm} برحسب خواص چگالی بار $\rho(\mathbf{x}')$ است. جواب برای پتانسیل بسیار ساده از انتگرال (۱۷-۱) یعنی:

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x'$$

و بسط (۳-۷) برای $\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}$ ، به‌دست می‌آید. از آنجا که در این لحظه به مسئله پتانسیل در خارج از توزیع بار علاقه‌مندیم، لذا داریم $r' < r$ و $r' > r$. به این ترتیب درمی‌یابیم که

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{l,m} \frac{1}{2l+1} \left[\int Y_{lm}^*(\theta', \phi') r'^l \rho(\mathbf{x}') d^3x' \right] \frac{Y_{lm}(\theta, \phi)}{r^{l+1}} \quad (2-4)$$

در نتیجه ضرایب در (۱-۴) عبارتند از

$$q_{lm} = \int Y_{lm}^*(\theta', \phi') r'^l \rho(\mathbf{x}') d^3x' \quad (3-4)$$

این ضرایب گشتاورهای چندقطبی نامیده می‌شوند.

برای دیدن تعبیر فیزیکی این گشتاورها، چندتای اول را به‌طور صریح برحسب مختصات دکارتی نشان می‌دهیم

$$q_{00} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \int \rho(\mathbf{x}') d^3x' = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} q \quad (4-4)$$

$$\left. \begin{aligned} q_{11} &= -\sqrt{\frac{3}{4\pi}} \int (x' - iy') \rho(\mathbf{x}') d^3x' = -\sqrt{\frac{3}{4\pi}} (p_x - ip_y) \\ q_{10} &= \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \int z' \rho(\mathbf{x}') d^3x' = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} p_z \end{aligned} \right\} \quad (5-4)$$

$$\left. \begin{aligned} q_{22} &= \frac{1}{4} \sqrt{\frac{15}{2\pi}} \int (x' - iy')^2 \rho(\mathbf{x}') d^3x' = \frac{1}{12} \sqrt{\frac{15}{2\pi}} (Q_{11} - 2iQ_{12} - Q_{22}) \\ q_{21} &= -\sqrt{\frac{15}{4\pi}} \int z' (x' - iy') \rho(\mathbf{x}') d^3x' = -\frac{1}{3} \sqrt{\frac{15}{4\pi}} (Q_{12} - iQ_{22}) \\ q_{20} &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{5}{4\pi}} \int (3z'^2 - r'^2) \rho(\mathbf{x}') d^3x' = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{5}{4\pi}} Q_{22} \end{aligned} \right\} \quad (6-4)$$

در اینجا تنها گشتاورهایی با $m \geq 0$ ارائه شده‌اند، زیرا رابطه‌ی $(3-54)$ نشان می‌دهد که برای یک چگالی بار حقیقی، گشتاورهایی با $m < 0$ از طریق رابطه‌ی زیر به هم مربوط می‌شوند

$$q_{l,-m} = (-1)^m q_{lm}^* \quad (7-4)$$

در معادلات $(4-6) - (4-4)$ ، q بار کلی یا گشتاور تک‌قطبی است و \mathbf{P} عبارت است از گشتاور دوقطبی الکتریکی

$$\mathbf{P} = \int \mathbf{x}' \rho(\mathbf{x}') d^3 \mathbf{x}' \quad (8-4)$$

و Q_{ij} تانسور گشتاور چهارقطبی بدون تریس زیر است

$$Q_{ij} = \int (3x'_i x'_j - r'^2 \delta_{ij}) \rho(\mathbf{x}') d^3 \mathbf{x}' \quad (9-4)$$

ملاحظه می‌کنیم که l امین ضرایب چندقطبی $[(l+1)$ عدد] ترکیب‌هایی خطی از چندقطبی‌های متناظر بیان شده در مختصات قائم‌اند. بسط $\Phi(\mathbf{x})$ در مختصات قائم به صورت

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q}{r} + \frac{\mathbf{P} \cdot \mathbf{x}}{r^3} + \frac{1}{2} \sum_{i,j} Q_{ij} \frac{x_i x_j}{r^5} + \dots \right] \quad (10-4)$$

(با روش بسط مستقیم، سری تیلور $\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}$) را به‌عنوان یک تمرین به خواننده واگذار می‌کنیم. ادامه‌ی بسط در $(4-10)$ فراتر از جملات چهارقطبی به‌طور فزاینده‌ای پرزحمت است. مؤلفه‌های میدان الکتریکی برای یک چندقطبی مشخص را می‌توانیم بسیار ساده برحسب مختصات کروی بسط دهیم.

منفی‌گردایان یک جمله در $(4-1)$ با l و m معین دارای مؤلفه‌های کروی زیر است

$$\begin{cases} E_r = \frac{(l+1)}{(2l+1)\epsilon_0} q_{lm} \frac{Y_{lm}(\theta, \phi)}{r^{l+2}} \\ E_\theta = -\frac{1}{(2l+1)\epsilon_0} q_{lm} \frac{1}{r^{l+2}} \frac{\partial}{\partial \theta} Y_{lm}(\theta, \phi) \\ E_\phi = -\frac{1}{(2l+1)\epsilon_0} q_{lm} \frac{1}{r^{l+2}} \frac{im}{\sin \theta} Y_{lm}(\rho, \phi) \end{cases} \quad (11-4)$$

$\frac{Y_{lm}}{\sin \theta}$ و $\frac{\partial Y_{lm}}{\partial \theta}$ را می‌توان به‌صورت ترکیب‌هایی خطی از سایر Y_{lm} ها بیان کرد، اما این روابط به‌طور اخص شفاف نیستند لذا از آن‌ها می‌گذریم. روش مناسبی برای توصیف یک میدان چندقطبی برداری استفاده از هماهنگ‌های کروی برداری است که در فصل ۹ مورد بحث قرار گرفته است. برای یک دوقطبی

P در امتداد محور z ، میدان‌ها در (۱۱-۴) به شکل آشنای زیر درمی‌آیند:

$$\begin{aligned} E_r &= \frac{2P \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} \\ E_\theta &= \frac{P \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} \\ E_\phi &= 0 \end{aligned} \quad (12-4)$$

با ترکیب مجدد (۱۲-۴) یا با عمل مستقیم گرادینان روی جمله‌ی دوقطبی در (۱۰-۴) میدان‌های دوقطبی فوق را می‌توانیم به صورت برداری بنویسیم. نتیجه‌ی این کار برای میدان در نقطه‌ی x ، ناشی از یک دوقطبی P در نقطه‌ی x_0 عبارت است از

$$E(x) = \frac{3n(P \cdot n) - P}{4\pi\epsilon_0 |x - x_0|^3} \quad (13-4)$$

که در آن n یک بردار یکانی است که جهت آن از x_0 به x است. دو نکته‌ی مهم وجود دارد که باید به آن اشاره کنیم:

اولی به رابطه‌ی بین گشتاورهای چندقطبی دکارتی، مانند (۸-۴)، با گشتاورهای چندقطبی در مختصات کروی، (۳-۴)، مربوط می‌شود. تعداد گشتاورهای چندقطبی دکارتی $\frac{(l+1)(l+2)}{6}$ است و تعداد آن‌ها به ازای $l > 1$ ، بسیار بیش‌تر از $(2l+1)$ مؤلفه‌ی کروی است. در این رابطه هیچ تناقضی هم وجود ندارد. ریشه‌ی این اختلاف‌ها در خواص تبدیل دورانی متفاوت این دو نوع گشتاور چندقطبی نهفته است؛ تانسورهای دکارتی تقلیل‌پذیرند، حال آنکه تانسورهای کروی تقلیل‌ناپذیر (مسئله ۳-۴ را ملاحظه کنید). دقت کنید که به ازای $l = 2$ این اختلاف را، با تعریف گشتاور چهارقطبی دکارتی بدون تریس (۹-۴)، شناسایی کردیم.

دومین نکته این است که در حالت کلی ضرایب گشتاور چندقطبی در بسط (۱-۴) به انتخاب مبدأ بستگی دارند. به عنوان مثالی واضح بار نقطه‌ای e را که در $(r_0, \theta_0, \phi_0) = x_0$ قرار دارد در نظر بگیرید. پتانسیل این بار دارای یک بسط چندقطبی به صورت (۱-۴) و با گشتاورهای چندقطبی زیر است

$$q_{lm} = e r_0^l Y_{lm}^*(\theta_0, \phi_0)$$

در حالت کلی این گشتاورها به ازای تمام مقادیر l و m غیر صفرند. تنها چندقطبی $l = 0$ یعنی $q_{00} = \frac{e}{\sqrt{4\pi}}$ مستقل از مکان بار نقطه‌ای است. برای دو بار نقطه‌ای $+e$ و $-e$ که به ترتیب در x_0 و x_1 قرار دارند، گشتاورهای چندقطبی عبارتند از

$$q_{lm} = e[r_0^l Y_{lm}^*(\theta_0, \phi_0) - r_1^l Y_{lm}^*(\theta_1, \phi_1)]$$

حال گشتاور چندقطبی $l = 0$ این سیستم صفر شدند و گشتاورهای چندقطبی $l = 1$ برای سیستم فوق عبارتند از

$$q = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} e(z_0 - z_1)$$

$$q_{11} = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} e[(x_0 - x_1) - i(y_0 - y_1)]$$

این گشتاورها مستقل از مکان مبدأ هستند و فقط به مکان نسبی دو بار وابسته‌اند، اما تمامی گشتاورهای مرتبه‌ی بالاتر، به همان اندازه به مکان مبدأ بستگی دارند. این مثال‌های ساده، حالت‌های خاصی از یک قضیه‌ی کلی هستند (مسئله‌ی ۴-۴ را ملاحظه کنید).

مقادیر q_{lm} برای پایین‌ترین گشتاور چندقطبی غیرصفر برای هر توزیع باری، مستقل از انتخاب مبدأ مختصات است ولی تمام گشتاورهای چندقطبی مرتبه‌ی بالاتر در حالت کلی به مکان مبدأ مختصات بستگی دارند. قبل از پایان دادن به فرمول‌بندی کلی چندقطبی‌ها، نتیجه‌ای که در روشن ساختن اختلاف اساسی بین دوقطبی‌های الکتریکی و مغناطیسی (بخش ۵-۶ را ملاحظه کنید) مفید است را مورد بررسی قرار می‌دهیم. توزیع بار جایگزیده‌ی $\rho(x)$ را که باعث به‌وجود آمدن یک میدان الکتریکی $\mathbf{E}(\mathbf{x})$ در سرتاسر فضا می‌شود در نظر بگیرید. می‌خواهیم انتگرال \mathbf{E} را روی حجم کره‌ای به شعاع R محاسبه کنیم. کارمان را با بررسی مسئله در حالت کلی آغاز می‌کنیم، ولی پس از آن مسئله را به دو حالت حدی که در شکل ۴-۱ نشان داده شده است محدود می‌کنیم. یکی که در آن کره شامل تمام بار است و دیگری که در آن بار در خارج از کره قرار دارد. با انتخاب مبدأ مختصات در مرکز کره، انتگرال حجمی میدان الکتریکی را به‌صورت زیر داریم

$$\int_{r < R} \mathbf{E}(\mathbf{x}) d^3x = - \int_{r < R} \nabla \Phi d^3x \quad (14-4)$$

این انتگرال را می‌توانیم به یک انتگرال روی سطح کره تبدیل کنیم

$$\int_{r < R} \mathbf{E}(\mathbf{x}) d^3x = - \int_{r=R} R^2 d\Omega \Phi(\mathbf{x}) \mathbf{n} \quad (15-4)$$

که در آن \mathbf{n} یکانی عمودی است که جهت آن به طرف خارج است $(\mathbf{n} = \frac{\mathbf{x}}{R})$. جایگزینی (۱۷-۱) برای پتانسیل منجر می‌شود به

$$\int_{r < R} \mathbf{E}(\mathbf{x}) d^3x = - \frac{R^2}{4\pi\epsilon_0} \int d^3x' \rho(\mathbf{x}') \int_{r=R} d\Omega \frac{\mathbf{n}}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \quad (16-4)$$

برای انجام انتگرال‌گیری زاویه‌ای، ابتدا ملاحظه می‌کنیم که می‌توان \mathbf{n} را برحسب زوایای کروی (θ, ϕ) به صورت زیر نوشت

$$\mathbf{n} = \mathbf{i} \sin \theta \cos \phi + \mathbf{j} \sin \theta \sin \phi + \mathbf{k} \cos \theta$$

روشن است که مؤلفه‌های مختلف \mathbf{n} ترکیب‌هایی خطی از Y_{lm} برای فقط $l = 1$ هستند. وقتی $(3-38)$ یا $(3-70)$ در $(4-16)$ قرار گیرد، متعامد بودن Y_{lm} باعث حذف تمام جملات این سری خواهد شد، به جز جمله‌ی $l = 1$. به این ترتیب داریم

$$\int_{r=R} d\Omega \frac{\mathbf{n}}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} = \frac{r_{<}}{r_{>}^2} \int d\Omega \mathbf{n} \cos \gamma \quad (4-16')$$

که در آن $\cos \gamma = \cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \cos(\phi - \phi')$

انتگرال زاویه‌ای مساوی $\frac{4\pi \mathbf{n}'}{3}$ است که در آن $\mathbf{n}' = \frac{\mathbf{r}'}{r}$. به این ترتیب انتگرال $(4-16)$ عبارت است از

$$\int_{r < R} \mathbf{E}(\mathbf{x}) d^3 \mathbf{x} = -\frac{R^2}{3\epsilon_0} \int d^3 x' \frac{r_{<}}{r_{>}^2} \mathbf{n}' \rho(\mathbf{x}') \quad (4-17)$$

که در آن $(r_{<}, r_{>}) = (r', R)$ یا (R, r) ، بسته به این که کدام یک از کمیت‌های r' یا R بزرگ‌تر باشد. اگر کره‌ی با شعاع R به‌طور کامل تمام چگالی بار را همان‌گونه که در شکل ۱-۴ (الف) نشان داده شده است دربرگیرد، در این صورت در رابطه‌ی $(4-17)$ داریم، $r_{<} = R$ و $r_{>} = R$

به این ترتیب انتگرال حجمی میدان الکتریکی روی کره‌ی فوق به‌صورت زیر درمی‌آید

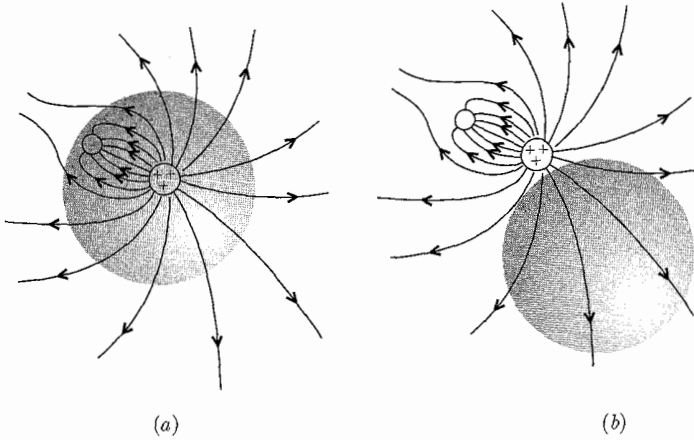
$$\int_{r < R} \mathbf{E}(\mathbf{x}) d^3 \mathbf{x} = -\frac{\mathbf{P}}{3\epsilon_0} \quad (4-18)$$

که در آن \mathbf{P} گشتاور دوقطبی الکتریکی $(4-18)$ برای توزیع بار نسبت به مرکز کره است. دقت کنید که این انتگرال حجمی مستقل از اندازه‌ی ناحیه‌ی کره‌ی انتگرال‌گیری است، مشروط بر اینکه تمام بار درون کره باشد. از طرفی اگر وضعیت همانند شکل ۱-۴ (ب) باشد که در آن تمام بارها در خارج از کره‌ی موردنظر قرار دارند، در رابطه‌ی $(4-17)$ ، $r_{<} = R$ و $r_{>} = r'$ خواهد بود. در این صورت داریم

$$\int_{r < R} \mathbf{E}(\mathbf{x}) d^3 \mathbf{x} = -\frac{R^2}{3\epsilon_0} \int d^3 x' \frac{\mathbf{n}'}{r'^2} \rho(\mathbf{x}')$$

با توجه به قانون کولن $(5-1)$ می‌توانیم این انتگرال را به‌عنوان منفی $4\pi\epsilon_0$ برابر میدان الکتریکی در مرکز کره $(E(\mathbf{o}))$ بازشناسی کنیم. به این ترتیب انتگرال حجمی \mathbf{E} عبارت است از

$$\int_{r < R} \mathbf{E}(\mathbf{x}) d^3 \mathbf{x} = \frac{4\pi}{3} R^3 \mathbf{E}(\mathbf{o}) \quad (4-19)$$



شکل ۴-۱: دو آرایه از چگالی بار و کره‌هایی که درون آن‌ها انتگرال حجمی میدان الکتریکی را باید محاسبه کنیم.

به عبارت دیگر، مقدار میانگین میدان الکتریکی روی یک حجم کروی که هیچ باری در آن نیست، برابر مقدار این میدان در مرکز این کره است. نتیجه‌ی (۴-۱۸) اصلاحاتی را در (۴-۱۳) برای میدان الکتریکی ناشی از یک دوقطبی ایجاب می‌کند. برای هماهنگ بودن با (۴-۱۸)، میدان دوقطبی را باید به صورت زیر بنویسیم

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{3\mathbf{n}(\mathbf{P} \cdot \mathbf{n}) - \mathbf{P}}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|^3} - \frac{4\pi}{3} \mathbf{P} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \right] \quad (۴-۲۰)$$

تابع دلتای اضافه شده سهمی در میدان در فواصل دور از مکان دوقطبی ندارد. هدف این تابع این است که انتگرال حجمی لازم (۴-۱۸) را نتیجه دهد. با این قرارداد که انتگرال حجمی متقارن کروی (حول \mathbf{x}_0) جمله‌ی اول، صفر است (با انتگرال‌گیری زاویه‌ای)، تکینگی در $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$ باعث ایجاد نتیجه‌ای مبهم به‌گونه‌ای دیگر می‌شود. وقتی به دقت اقدام کنیم، معادله‌ی (۴-۲۰) و هم‌تای دوقطبی مغناطیسی آن (۵-۶۴) را می‌توانیم مشابه با همان صورتی که دوقطبی‌های نقطه‌ای ایده‌آل دارند به‌کار بگیریم، و عبارت‌های تابع دلتا نیز حاوی اطلاعاتی اساسی در مورد توزیع‌های محدود و واقعی بار و جریان هستند.

۴-۲ بسط چندقطبی انرژی یک توزیع بار در میدان خارجی

اگر یک توزیع جایگزیده‌ی بار که با $\rho(\mathbf{x})$ توصیف می‌شود در یک پتانسیل خارجی $\Phi(x)$ قرار گیرد، انرژی الکترواستاتیک آن سیستم عبارت خواهد بود با

$$W = \int \rho(\mathbf{x}) \Phi(\mathbf{x}) d^3x \quad (۴-۲۱)$$

اگر پتانسیل Φ روی ناحیه‌ای که در آن $\rho(\mathbf{x})$ غیر قابل اغماض است به آرامی تغییر کند، در این صورت می‌توان آن را به صورت یک سری تیلور حول یک مبدأ انتخابی مناسب بسط داد

$$\Phi(\mathbf{x}) = \Phi(\circ) + \mathbf{x} \cdot \nabla \Phi(\circ) + \frac{1}{2} \sum_i \sum_j x_i x_j \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_i \partial x_j}(\circ) + \dots \quad (22-4)$$

با استفاده از تعریف میدان الکتریکی، $\mathbf{E} = -\nabla \Phi$ ، می‌توانیم دو جمله‌ی آخر در رابطه‌ی بالا را بازنویسی کنیم. در این صورت (22-4) به شکل زیر درمی‌آید

$$\Phi(\mathbf{x}) = \Phi(\circ) - \mathbf{x} \cdot \mathbf{E}(\circ) - \frac{1}{2} \sum_i \sum_j x_i x_j \frac{\partial E_j}{\partial x_i}(\circ) + \dots \quad (22'-4)$$

چون برای میدان خارجی فوق $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ است می‌توانیم برای به دست آوردن بسط نهایی زیر یعنی

$$\Phi(\mathbf{x}) = \Phi(\circ) - \mathbf{x} \cdot \mathbf{E}(\circ) - \frac{1}{6} \sum_i \sum_j (3x_i x_j - r^2 \delta_{ij}) \frac{\partial E_j}{\partial x_i}(\circ) + \dots \quad (23-4)$$

عبارت $\frac{1}{6} r^2 \nabla \cdot \mathbf{E}$ را از جمله‌ی آخر رابطه‌ی (22'-4) کسر کنیم.

وقتی این رابطه [(23-4)] را در (21-4) قرار دهیم و تعاریف مربوط به بار کل و گشتاور دوقطبی

(8-4) و گشتاور چهارقطبی (9-4) را نیز به کار بگیریم، انرژی شکل زیر را به خود می‌گیریم

$$W = q\Phi(\circ) - \mathbf{P} \cdot \mathbf{E}(\circ) - \frac{1}{6} \sum_i \sum_j Q_{ij} \frac{\partial E_j}{\partial x_i}(\circ) + \dots \quad (24-4)$$

این بسط روش خاصی را نشان می‌دهد که در آن چندقطبی‌های مختلف با یک میدان خارجی برهم‌کنش می‌کنند - بار با پتانسیل، دوقطبی با میدان الکتریکی، چهارقطبی با گرادیان میدان و غیره.

در فیزیک هسته‌ای برهم‌کنش چهارقطبی از اهمیت به‌سزایی برخوردار است. هسته‌های اتمی می‌توانند دارای گشتاورهای چهارقطبی الکتریکی باشند و اندازه و علامت آن‌ها منعکس‌کننده‌ی طبیعت نیروهای بین نوترون‌ها و پروتون‌ها و نیز شکل خود هسته‌ها است. سطوح انرژی یا حالت‌های یک هسته، توسط اعداد کوانتومی با اندازه‌ی حرکت زاویه‌ای کل J ، و تصویر M آن در امتداد محور z و نیز سایر کمیت‌ها که آن‌ها را با اندیس کلی α نشان می‌دهیم توصیف می‌شوند. به یک حالت هسته‌ای مشخص، یک چگالی^۱ بار کوانتوم - مکانیکی $\rho_{J M \alpha}(\mathbf{x})$ وابسته می‌شود که بستگی به اعداد کوانتومی (J, M, α) دارد، اما حول محور z دارای تقارن استوانه‌ای است به این ترتیب تنها گشتاور چهارقطبی غیرصفر در (4-6)، q_{20} یا در (4-9)، Q_{33} است.^۲

(۱) برای یک بحث مقدماتی در جنبه‌های کوانتومی این مسئله کتاب: Blatt and Weisskopf (pp. 23 ff.) را ملاحظه کنید.

(۲) در واقع Q_{11} و Q_{22} مخالف صفرند، اما از Q_{33} که با $Q_{33} = -\frac{1}{3}Q_{33}$ مشخص می‌شود مستقل نیستند.

گشتاور چهارقطبی یک حالت هسته‌ای به صورت اندازه‌ای از $Q_{JM\alpha}$ $\left(\frac{1}{e}\right)$ تعریف می‌شود، با چگالی بار $\rho_{JM\alpha}(x)$ که در آن e بار پروتونی است

$$Q_{JM\alpha} = \frac{1}{e} \int (3z^2 - r^2) \rho_{JM\alpha}(x) d^3x \quad (25-4)$$

در نتیجه ابعاد $Q_{JM\alpha}$ ، 2 (طول) است. به جز در وضعیت‌هایی که استثنایی هستند، (مثلاً هسته‌ها در اتم‌هایی با لایه‌های الکترونی کاملاً بسته) هسته‌ها در معرض میدان‌های الکتریکی‌ای قرار می‌گیرند که در مجاورت آن‌ها گرادیان میدانی دارند. در نتیجه طبق رابطه‌ی (۴-۲۴) انرژی هسته‌ها سهمی از برهم‌کنش چهارقطبی دارد.

حالت‌هایی با M متفاوت، برای مقدار مشابه J دارای گشتاورهای چهارقطبی متفاوت $Q_{JM\alpha}$ هستند و به این ترتیب وجود واگنی در M (که احتمال وجود آن می‌رود) با جفت‌شدگی چهارقطبی به میدان الکتریکی "خارجی" (شبکه‌ی کریستالی یا مولکولی) برطرف می‌شود. آشکارسازی این اختلاف‌های کوچک انرژی با روش‌های رادیوفرکانسی، تعیین گشتاور چهارقطبی هسته‌ها را امکان‌پذیر می‌کند^۱.

انرژی برهم‌کنشی بین دوقطبی P_1 و P_2 را می‌توانیم مستقیماً از (۴-۲۴) با استفاده از میدان دوقطبی (۴-۲۰) به دست آوریم. به این ترتیب، انرژی پتانسیل متقابل عبارت است از

$$W_{12} = \frac{P_1 \cdot P_2 - 3(n \cdot P_1)(n \cdot P_2)}{4\pi\epsilon_0 |x_1 - x_2|^3} \quad (26-4)$$

که در آن n بردار یکانی در جهت $(x_1 - x_2)$ است و فرض شده است که $x_1 \neq x_2$.

برهم‌کنش دوقطبی - دوقطبی، بسته به جهت‌گیری دوقطبی‌ها جاذبه‌ای یا دافعه‌ای است. برای جهت‌گیری و فاصله‌ی جدایی ثابت بین دوقطبی‌ها، اندازه‌ی این برهم‌کنش به‌طور میانگین روی مکان نسبی این دوقطبی‌ها صفر است. اگر گشتاورها به‌طور کلی موازی باشند، جاذبه (دافعه) وقتی اتفاق می‌افتد که گشتاورها کم‌وبیش به موازات (عمود) خط واصل بین مراکزشان جهت بگیرند. برای گشتاورهای ناموازی (پادموازی) عکس این مورد صحیح است ولی مقادیر نهایی انرژی پتانسیل از لحاظ مقدار مساوی هستند.

۳-۴ بحث مقدماتی الکترواستاتیک با محیط‌های دارای وزن محسوس^۲

در فصول ۱، ۲ و ۳ پتانسیل‌ها و میدان‌ها را در حضور بارها و رساناها و بدون حضور سایر محیط‌های دارای وزن محسوس بررسی کردیم. در این فصول تمایزی بین میدان‌های میکروسکوپی و ماکروسکوپی

(۱) "گشتاور چهارقطبی یک هسته" که با Q نشان داده می‌شود به صورت اندازه‌ی $Q_{JM\alpha}$ در حالت $M = J$ تعریف می‌شود. مرجع Blatt and Weisskopf, loc. cit را ملاحظه کنید.

قابل نشدیم، گرچه بحث در مورد رساناها با یک روش ایده‌آل با چگالی‌های بار سطحی یک توصیف ماکروسکوپی را ایجاب کرد.

هوا به اندازه‌ای رقیق است که صرف‌نظر کردن از خواص دی‌الکتریک آن باعث ایجاد خطای زیادی نمی‌شود، لذا نتایج کنونی در اینجا نیز قابل اعمال هستند. اما پیش‌تر مبحث الکترواستاتیک خودش را با بارها و میدان‌ها در محیط‌های دارای وزن محسوسی درگیر می‌کند که پاسخ الکتریکی نسبی آن‌ها را باید به حساب بیاوریم.

در مقدمه کتاب برای به‌دست آوردن معادلات ماکسولی که برای پدیده‌های ماکروسکوپی مناسب باشند نیاز به میانگین‌گیری روی ناحیه‌هایی را نشان دادیم که از نظر ماکروسکوپی کوچک ولی از نظر میکروسکوپی بزرگ هستند. این کار با روشی دقیق در فصل ۶ پس از اینکه معادلات ماکسول با تغییرات زمانی مورد بحث قرار بگیرند انجام خواهد شد.

برای حال حاضر تنها نکات عمده‌ی بحث مقدماتی قطبش را به خواننده یادآوری می‌کنیم، طوری‌که به مشکلات و گاهی جنبه‌های ظریف روش میانگین‌گیری و مقدمه‌ی کمیتهای ماکروسکوپی غلبه کند. اولین اظهارنظر این است که وقتی میانگین‌گیری از معادله‌ی همگن $\nabla \times \mathbf{E}_{\text{micro}} = 0$ انجام دهیم، معادله‌ای مشابه، به همان صورت؛ یعنی

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0 \quad (27-4)$$

برای میانگین‌گیری انجام شده (یعنی میدان الکتریکی ماکروسکوپی \mathbf{E}) صادق خواهد بود. این بدان معنی است که میدان الکتریکی هنوز از یک پتانسیل $\Phi(\mathbf{x})$ در الکترواستاتیک قابل استنتاج است. اگر یک میدان الکتریکی را به محیطی متشکل از تعداد زیادی اتم یا مولکول اعمال کنیم بارهای مقید در هر مولکول به میدان اعمال‌شده‌ی فوق پاسخ می‌دهند و حرکات آشفته‌ای را به اجرا درمی‌آورند. چگالی بار مولکولی نیز متعاقب این موضوع واپیچیده می‌شود. گشتاورهای چندقطبی هر مولکول در حضور میدان و عدم حضور آن با هم متفاوتند. در مواد ساده، وقتی میدانی هم اعمال نشده باشد گشتاورهای چندقطبی تماماً صفر هستند؛ حداقل وقتی میانگین‌گیری روی تعداد زیادی مولکول صورت گیرد.

چندقطبی مولکولی غالب در حضور میدان‌های الکتریکی همان دوقطبی مولکولی است. به این ترتیب در محیط، یک قطبش الکتریکی \mathbf{P} (گشتاور دوقطبی بر واحد حجم) به‌وجود می‌آید که با رابطه‌ی زیر مشخص می‌شود

$$\mathbf{P}(\mathbf{x}) = \sum_i N_i \langle \mathbf{P}_i \rangle \quad (28-4)$$

که در آن \mathbf{P}_i گشتاور دوقطبی مولکول نوع i ام در محیط است. میانگین‌گیری روی یک حجم کوچک به مرکزیت \mathbf{x} صورت پذیرفته و N_i تعداد میانگین بر واحد حجم مولکول نوع i ام در نقطه‌ی \mathbf{x} است. اگر

مولکول‌ها دارای بار خالص e_i باشند و علاوه بر آن بار ماکروسکوپی اضافی یا آزادی نیز موجود باشد، چگالی بار در سطح ماکروسکوپی عبارت است از

$$\rho(\mathbf{x}) = \sum_i N_i \langle e_i \rangle + \rho_{\text{excess}} \quad (29-4)$$

به‌طور معمول میانگین بار مولکولی صفر است. به این ترتیب چگالی بار، همان چگالی بار اضافی یا آزاد خواهد بود (که به‌گونه‌ای مناسب میانگین‌گیری شده باشد).

حال اگر به محیط از نظر ماکروسکوپی نگاه کنیم پتانسیل یا میدان را می‌توانیم با برهم‌نهی خطی سهم هر یک از عناصر حجمی کوچک ماکروسکوپی ΔV در نقطه‌ی متغیر \mathbf{x}' بنا کنیم. به این ترتیب بار درون حجم ΔV ، $\rho(\mathbf{x})\Delta V$ است و گشتاور دوقطبی $\Delta V \cdot \mathbf{P}(\mathbf{x})$. ملاحظه می‌کنیم که اگر چگالی گشتاور چندقطبی ماکروسکوپی مرتبه‌ی بالاتری وجود نداشته باشد، پتانسیل $\Delta\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ که با آرایشی از گشتاورهای موجود در حجم ΔV ایجاد می‌شود را می‌توانیم با توجه به رابطه‌ی (۱۰-۴) و بدون تقریب با رابطه‌ی زیر مشخص کنیم

$$\Delta\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \Delta V + \frac{\mathbf{P}(\mathbf{x}') \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} \Delta V \right] \quad (30-4)$$

مشروط بر اینکه \mathbf{x} خارج از ΔV باشد.

حال ΔV را از لحاظ ماکروسکوپی بینهایت کوچک در نظر می‌گیریم و آن را مساوی $d^3\mathbf{x}'$ قرار می‌دهیم و برای به‌دست آوردن پتانسیل روی تمام فضا انتگرال می‌گیریم

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3\mathbf{x}' \left[\frac{\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} + \mathbf{P}(\mathbf{x}') \cdot \nabla' \left(\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right) \right] \quad (31-4)$$

جمله‌ی دوم در این انتگرال مشابه پتانسیل ناشی از یک لایه‌ی دوقطبی در رابطه‌ی (۲۵-۴) است، منتهی در اینجا برای یک توزیع حجمی از دوقطبی‌ها محاسبه شده است. انتگرال‌گیری به طریقه‌ی جزء‌به‌جزء پتانسیل را به شکل زیر تبدیل می‌کند

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3\mathbf{x}' \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} [\rho(\mathbf{x}') - \nabla' \cdot \mathbf{P}(\mathbf{x}')] \quad (32-4)$$

این رابطه همان رابطه‌ی معمول برای پتانسیل ناشی از یک توزیع بار به‌صورت $(\rho - \nabla \cdot \mathbf{P})$ است. بنابراین با توجه به $\mathbf{E} = -\nabla\Phi$ اولین معادله‌ی ماکسول منجر می‌شود به

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} [\rho - \nabla \cdot \mathbf{P}] \quad (33-4)$$

حضور دیورژانس P در چگالی بار مؤثر را می‌توان به صورت کیفی نیز درک نمود. اگر قطبش غیریکنواخت باشد، افزایش یا کاهش خالص بار، درون هر حجم کوچکی می‌تواند وجود داشته باشد، همان‌گونه که به صورت طرح‌وار در شکل ۲-۴ نشان داده شده است.

با توجه به تعریف جابه‌جایی الکتریکی D

$$D = \epsilon_0 E + P \quad (۳۴-۴)$$

رابطه‌ی (۳۳-۴) به شکل آشنای زیر درمی‌آید

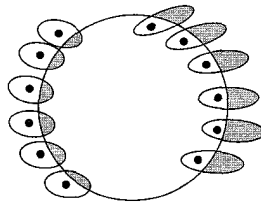
$$\nabla \cdot D = \rho \quad (۳۵-۴)$$

معادلات (۲۷-۴) و (۳۵-۴) همتای ماکروسکوپی (۱۳-۱) و (۱۴-۱) در فصل ۱ هستند.

همان‌طور که در مقدمه نیز بحث شد، قبل از اینکه بتوانیم جوابی برای پتانسیل الکترواستاتیک یا میدان‌ها به دست آوریم، وجود یک رابطه‌ی ساختاری ارتباط‌دهنده‌ی D و E ضروری است. در بخش‌های بعد در این فصل فرض می‌کنیم پاسخ سیستم به میدان الکتریکی اعمال شده خطی باشد. البته این موضوع مورد فروالکتریسیته را از بحث مستثنی می‌کند، اما از جهت‌های دیگر هیچ محدودیتی در این رابطه وجود ندارد مشروط بر اینکه قدرت میدان‌ها خیلی زیاد بزرگ نشود.

برای سهولت بیشتر فرض می‌کنیم محیط همسانگرد^۱ باشد. در این صورت قطبش القایی P با احتساب یک ضریب تناسب که مستقل از جهت است، موازی با E خواهد بود

$$P = \epsilon_0 \chi_e E \quad (۳۶-۴)$$



شکل ۲-۴: سرم‌نشاء چگالی بار قطبشی به جهت تغییر مکانی قطبش، که ممکن است بیشتر از آنچه بارهای مولکولی به یک حجم کوچک مشخص وارد شوند، حجم را ترک کنند. در شکل تنها مولکول‌های نزدیک مرز نشان داده شده‌اند.

ثابت χ_e "پذیرایی ویژه الکتریکی" محیط نامیده می‌شود. بنابراین جابه‌جایی D با E متناسب است

$$D = \epsilon E \quad (۳۷-۴)$$

که در آن

$$\varepsilon = \varepsilon_0 (1 + \chi_e) \quad (38-4)$$

گذردهی الکتریکی است؛ $\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} = 1 + \chi_e$ ثابت دی‌الکتریک یا گذردهی الکتریکی نسبی^۱ نامیده می‌شود. اگر دی‌الکتریک فوق‌نه تنها همسانگرد بلکه یکنواخت نیز باشد، در این صورت ε مستقل از مکان خواهد بود. به این ترتیب معادله‌ی دیورژانس (۴-۳۵) را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon} \quad (39-4)$$

و تمام مسائل در آن محیط به مسائل فصول قبل منجر می‌شوند، مگر اینکه میدان‌های الکتریکی ایجادشده توسط بارهای داده شده با عامل $\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}$ کاهش پیدا کنند. این کاهش را می‌توان براساس قطبش اتم‌هایی که باعث ایجاد میدان‌هایی برخلاف میدان‌های بارهای موجود می‌شوند درک نمود.

یک نتیجه‌ی سریع در این رابطه این است که ظرفیت یک خازن، اگر فضای خالی بین الکترودها با دی‌الکتریکی با ثابت $\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}$ پر شده باشد، با عامل $\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}$ افزایش خواهد یافت (این موضوع تنها تا آنجایی که بتوانیم از میدان‌های حشوی^۲ صرف‌نظر کنیم صحیح است).

اگر محیط یکنواخت تمام فضایی را که در آن میدان‌های الکتریکی وجود دارند پر نکند، یا خیلی کلی‌تر، اگر محیط‌های مختلفی کنار هم وجود داشته باشند و لزوماً پاسخ‌هایشان به میدان‌ها خطی نباشد، در این صورت باید مسئله‌ی شرایط مرزی روی \mathbf{D} و \mathbf{E} در فصول مشترک بین محیط‌ها را مورد ملاحظه قرار دهیم. این شرایط مرزی از مجموعه‌ی کامل معادلات ماکسول در بخش (۱-۵) نتیجه می‌شوند. این نتایج عبارتند از اینکه مؤلفه‌های عمودی \mathbf{D} و مماسی \mathbf{E} در دو طرف یک فصل مشترک شرایط مرزی را برآورده کرده و برای میدان‌های متغیر با زمان نیز همانند میدان‌های استاتیکی معتبرند

$$\begin{cases} (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) \cdot \mathbf{n}_{21} = \sigma \\ (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) \times \mathbf{n}_{21} = 0 \end{cases} \quad (40-4)$$

که در آن \mathbf{n}_{21} بردار یکانی عمود بر سطح است که جهت آن از ناحیه‌ی ۱ به ناحیه‌ی ۲ است و σ نیز چگالی بار سطحی ماکروسکوپی روی سطح مرزی است (شامل بار قطبشی نیست).

۴-۴ مسائل مقدار مرزی با دی‌الکتریک‌ها

روش‌های فصول قبل برای حل مسائل مقدار مرزی الکترواستاتیک را می‌توانیم به‌سادگی برای بحث در مورد حضور دی‌الکتریک‌ها نیز بسط و گسترش دهیم. در این بخش چند مثال از روش‌های مختلفی را که برای محیط‌های دی‌الکتریک نیز به‌کار می‌روند مورد بحث قرار می‌دهیم.

برای بررسی روش تصاویر برای دی الکتریک‌ها، بار نقطه‌ای q را در نظر می‌گیریم که در یک دی الکتریک نیمه - بینهایت ε فرو رفته است و در فاصله‌ی d از فصل مشترک دو محیط که محیط اول را از محیط دی الکتریک نیمه‌بینهایت دوم ε_2 جدا می‌کند (شکل ۳-۴) قرار گرفته است. صفحه‌ی $z = 0$ را می‌توانیم به‌عنوان صفحه‌ی مشترک در نظر بگیریم. باید جواب مناسبی برای معادلات

$$\varepsilon_1 \nabla \cdot \mathbf{E} = \rho, \quad z > 0 \quad (۴۱-۴)$$

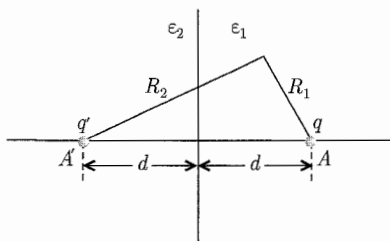
$$\varepsilon_2 \nabla \cdot \mathbf{E} = 0, \quad z < 0$$

و

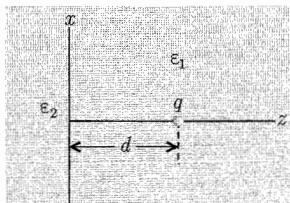
$$\nabla \times \mathbf{E} = 0 \quad ; \quad \text{در هر جا}$$

که تحت شرایط مرزی در $z = 0$ قرار دارند، پیدا کنیم

$$\lim_{z \rightarrow 0^+} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 E_z \\ E_x \\ E_y \end{Bmatrix} = \lim_{z \rightarrow 0^-} \begin{Bmatrix} \varepsilon_2 E_z \\ E_x \\ E_y \end{Bmatrix} \quad (۴۲-۴)$$



شکل ۳-۴:



شکل ۴-۳:

چون در هر جا $\nabla \times \mathbf{E} = 0$ است، به روش معمول از یک پتانسیل ϕ قابل استنتاج است. در مبادرت به استفاده از روش تصاویر طبیعی است که بار تصویری q' را در مکان متقارن A' که در شکل ۴-۳ نشان داده شده است قرار دهیم. به این ترتیب برای $z > 0$ ، پتانسیل در نقطه‌ی P که با مختصات استوانه‌ای (ρ, ϕ, z) توصیف شده است عبارت است از

$$\Phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_1} \left(\frac{q}{R_1} + \frac{q'}{R_2} \right), \quad z > 0 \quad (۴۳-۴)$$

$$\text{که در آن } R_2 = \sqrt{\rho^2 + (d+z)^2} \text{ و } R_1 = \sqrt{\rho^2 + (d-z)^2}$$

تا اینجا این روش کاملاً شبیه به مسئله‌ی یک ماده‌ی رسانا، به‌جای دی الکتریک ε_2 در ناحیه‌ی $z < 0$ است. اکنون باید پتانسیل را برای $z < 0$ مشخص کنیم. از آنجا که در ناحیه‌ی $z < 0$ باری وجود ندارد

این پتانسیل باید جوابی از معادله‌ی لاپلاس (بدون تکینگی) در آن ناحیه باشد. به‌وضوح ساده‌ترین فرض این است که برای $z < 0$ ، پتانسیل معادل پتانسیل ناشی از یک بار q'' در مکان A از بار واقعی q باشد

$$\Phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_2 R_1} q'' \quad z < 0 \quad (44-4)$$

زیرا

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{R_1} \right) \Big|_{z=0} = -\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{R_2} \right) \Big|_{z=0} = \frac{d}{(\rho^2 + d^2)^{\frac{3}{2}}}$$

حال آنکه

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{R_1} \right) \Big|_{z=0} = -\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{R_2} \right) \Big|_{z=0} = \frac{-\rho}{(\rho^2 + d^2)^{\frac{3}{2}}}$$

شرایط مرزی (۴۲-۴) به شرایط زیر منجر می‌شود

$$\begin{cases} q - q' = q'' \\ \frac{1}{\epsilon_1}(q + q') = \frac{1}{\epsilon_0}q'' \end{cases}$$

این معادله‌ها را می‌توانیم برای به‌دست آوردن بارهای تصویری q' و q'' حل کنیم

$$q' = -\left(\frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{\epsilon_2 + \epsilon_1} \right) q \quad ; \quad q'' = \left(\frac{2\epsilon_2}{\epsilon_2 + \epsilon_1} \right) q \quad (45-4)$$

برای دو حالت $\epsilon_2 > \epsilon_1$ و $\epsilon_2 < \epsilon_1$ خطوط نیرو (در واقع خطوط D) به‌طور کیفی در شکل ۵-۴ نشان داده شده‌اند.

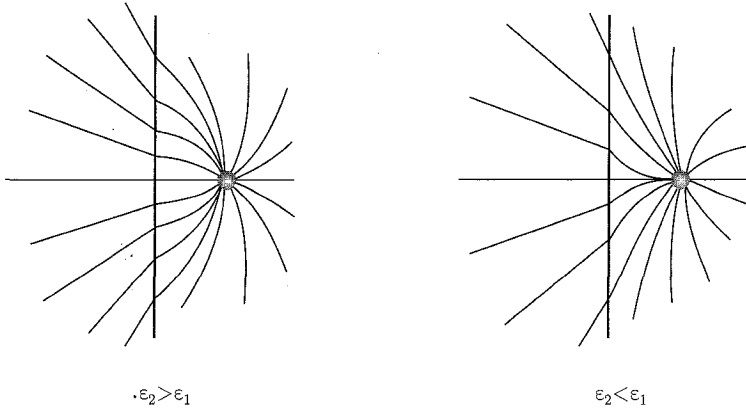
چگالی بار قطبشی با رابطه‌ی $-\nabla \cdot \mathbf{P}$ داده می‌شود. داخل هر دی‌الکتریک $\mathbf{P} = \epsilon_0 \chi_e \mathbf{E}$ است، طوری‌که؛ $-\nabla \cdot \mathbf{P} = -\epsilon_0 \chi_e \nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ ، مگر در مکان بار نقطه‌ای q .

هرچند که در سطح، وقتی $z = 0$ از صفحه‌ی $z = 0$ عبور می‌کند، یک پرش انفصالی به اندازه‌ی $\nabla \chi_e = \frac{(\epsilon_1 - \epsilon_2)}{\epsilon_0}$ دارد. این موضوع ایجاب می‌کند که یک چگالی بار سطحی قطبشی روی صفحه‌ی $z = 0$ وجود داشته باشد

$$\sigma_{\text{pol}} = -(\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1) \cdot \mathbf{n}_{21} \quad (46-4)$$

که در آن \mathbf{n}_{21} یکانی عمود از دی‌الکتریک ۱ به دی‌الکتریک ۲ است و \mathbf{P}_i قطبش در دی‌الکتریک i در $z = 0$ است. چون

$$\mathbf{P}_i = (\epsilon_i - \epsilon_0) \mathbf{E}_i = -(\epsilon_i - \epsilon_0) \nabla \Phi(0^\pm)$$



شکل ۴-۵: خطوط جابه‌جایی الکتریکی برای یک بار نقطه‌ای در داخل دی‌الکتریک ϵ_1 . این بار نقطه‌ای نزدیک یک بره‌ی دی‌الکتریک نیمه‌بینهایت ϵ_2 قرار دارد.

نشان دادن اینکه چگالی بار قطبشی به صورت زیر باشد کار ساده‌ای است

$$\sigma_{\text{pol}} = -\frac{q \epsilon_0 (\epsilon_2 - \epsilon_1)}{2\pi \epsilon_1 (\epsilon_2 + \epsilon_1)} \frac{d}{(\rho^2 + d^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (47-4)$$

در حالت حدی $\epsilon_2 \gg \epsilon_1$ ، دی‌الکتریک ϵ_2 بسیار شبیه به یک رسانا رفتار می‌کند که در آن میدان الکتریکی درون دی‌الکتریک بسیار کوچک شده و چگالی بار سطحی (۴۷-۴) جدا از عامل $\frac{\epsilon_0}{\epsilon_1}$ به سمت مقداری میل می‌کند که مناسب با سطح یک رسانا است.

دومین مثال از مسائل الکترواستاتیک در مورد دی‌الکتریک‌ها، مربوط است به یک کره‌ی دی‌الکتریک با شعاع a و با ثابت دی‌الکتریک $\frac{\epsilon}{\epsilon_0}$ ، که در میدان الکتریکی یکنواخت اولیه‌ای قرار گرفته است که در فواصل دور از کره (همانند شکل ۴-۶) میدان در امتداد محور z بوده و دارای مقدار E_0 است. نه در داخل و نه در خارج کره بار آزادی وجود ندارد. در نتیجه این مسئله از نوع حل معادله‌ی لاپلاس با شرایط مرزی مناسب $r = a$ است. با توجه به تقارن محوری هندسه‌ی فوق می‌توانیم جواب را طوری در نظر بگیریم که به صورت زیر باشد

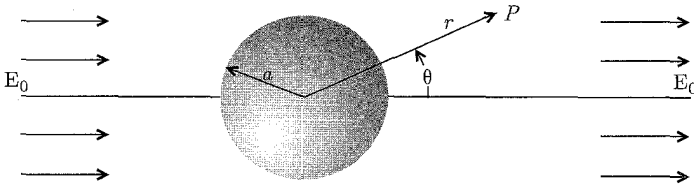
$$\Phi_{\text{in}} = \sum_{l=0}^{\infty} A_l r^l P_l(\cos \theta) \quad \text{داخل:} \quad (48-4)$$

$$\Phi_{\text{out}} = \sum_{l=0}^{\infty} [B_l r^l + C_l r^{-(l+1)}] P_l(\cos \theta) \quad \text{خارج:} \quad (49-4)$$

از شرط مرزی در بینهایت ($\Phi \rightarrow -E_0 z = -E_0 r \cos \theta$) درمی‌یابیم که تنها جمله غیرصفر B_l ، $B_1 = -E_0$ است. سایر ضرایب از شرایط مرزی در $r = a$ تعیین می‌شوند

$$\begin{aligned} -\frac{1}{a} \frac{\partial \Phi_{in}}{\partial \theta} \Big|_{r=a} &= -\frac{1}{a} \frac{\partial \Phi_{out}}{\partial \theta} \Big|_{r=a} & E: \text{ مماسی} \\ -\varepsilon \frac{\partial \Phi_{in}}{\partial r} \Big|_{r=a} &= -\varepsilon_0 \frac{\partial \Phi_{out}}{\partial r} \Big|_{r=a} & D: \text{ عمودی} \end{aligned} \quad (50-4)$$

وقتی سری‌های (۴۸-۴) و (۴۹-۴) جایگزین شوند، نتیجه‌ی آن صفر شدن دو سری از چندجمله‌ای‌های لژاندر است. چون این دو سری باید به‌ازای تمام مقادیر θ صفر شوند، لذا ضریب هر چندجمله‌ای لژاندر بایستی به‌طور جداگانه صفر شود.



شکل ۶-۴:

برای شرایط مرزی اول این موضوع منجر به روابط زیر می‌شود

$$\begin{aligned} A_1 &= -E_0 + \frac{C_1}{a^3} \\ A_l &= \frac{C_l}{a^{2l+1}} \quad \text{برای } l \neq 1 \end{aligned} \quad (51-4)$$

در حالی‌که دومین شرط مرزی نتیجه می‌دهد

$$\begin{aligned} \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right) A_1 &= -E_0 - 2 \frac{C_1}{a^3} \\ \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right) l A_l &= -(l+1) \frac{C_l}{a^{2l+1}} \quad \text{برای } l \neq 1 \end{aligned} \quad (52-4)$$

معادله‌های دوم (۵۱-۴) و (۵۲-۴) می‌توانند به‌صورت همزمان تنها با: $A_l = C_l = 0$ (به‌ازای تمام مقادیر $l \neq 1$) برآورده شوند. ضرایب باقیمانده برحسب میدان الکتریکی اعمال‌شده E_0 مشخص می‌شوند

$$A_1 = -\left(\frac{3}{2 + \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}}\right) E_0 \quad ; \quad C_1 = \left(\frac{\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} - 1}{\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} + 2}\right) a^3 E_0 \quad (53-4)$$

بنابراین پتانسیل عبارت است از

$$\Phi_{\text{in}} = - \left(\frac{\epsilon}{\epsilon_0} + 2 \right) E_0 r \cos \theta \quad (54-4)$$

$$\Phi_{\text{out}} = -E_0 r \cos \theta + \left(\frac{\frac{\epsilon}{\epsilon_0} - 1}{\frac{\epsilon}{\epsilon_0} + 2} \right) E_0 \frac{a^3}{r^2} \cos \theta$$

پتانسیل در داخل کره، توصیف‌کننده‌ی یک میدان الکتریکی ثابت و موازی با میدان خارجی است. با مقدار

$$E_{\text{in}} = \frac{3}{\frac{\epsilon}{\epsilon_0} + 2} E_0 < E_0 \quad \text{اگر } \epsilon > \epsilon_0 \quad (55-4)$$

پتانسیل در خارج از کره معادل با میدان اعمال‌شده‌ی \mathbf{E}_0 ، به‌علاوه‌ی میدان ناشی از یک دوقطبی الکتریکی در مبدأ مختصات است با گشتاور دوقطبی

$$P = 4\pi\epsilon_0 \left(\frac{\frac{\epsilon}{\epsilon_0} - 1}{\frac{\epsilon}{\epsilon_0} + 2} \right) a^3 E_0 \quad (56-4)$$

که جهت آن در راستای میدان است.

گشتاور دوقطبی فوق را می‌توان به انتگرال حجمی قطبش \mathbf{P} تعبیر کرد. قطبش عبارت است از

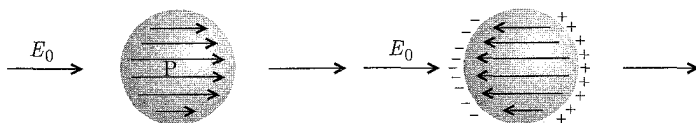
$$\mathbf{P} = (\epsilon - \epsilon_0) \mathbf{E} = 3\epsilon_0 \left(\frac{\frac{\epsilon}{\epsilon_0} - 1}{\frac{\epsilon}{\epsilon_0} + 2} \right) \mathbf{E}_0 \quad (57-4)$$

که در سرتاسر حجم کره ثابت بوده و دارای انتگرال حجمی‌ای است که با (56-4) مشخص می‌شود. طبق

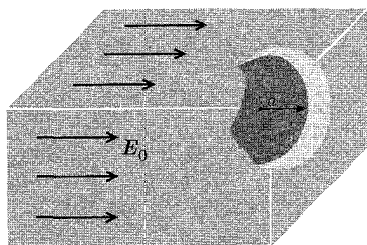
رابطه‌ی (46-4) چگالی بار سطحی قطبشی $\sigma_{\text{pol}} = \frac{(\mathbf{P} \cdot \mathbf{r})}{r}$ عبارت است از

$$\sigma_{\text{pol}} = 3\epsilon_0 \left(\frac{\frac{\epsilon}{\epsilon_0} - 1}{\frac{\epsilon}{\epsilon_0} + 2} \right) E_0 \cos \theta \quad (58-4)$$

می‌توان چنین تصور کرد که این چگالی بار سطحی باعث ایجاد یک میدان داخلی در جهتی مخالف با میدان اعمال‌شده می‌شود، طوری که میدان در داخل کره، همانند شکل 4-7، به مقدار (55-4) کاهش می‌یابد.



شکل ۴-۷: کره‌ی دی‌الکتریک در یک میدان الکتريکی یکنواخت E_0 . قطبش P در کره‌ی سمت چپ و بار قطبشی همراه با میدان الکتريکی مخالف وابسته به آن در کره‌ی سمت راست.



شکل ۴-۸: حفره‌ی کره‌ی در یک دی‌الکتریک با یک میدان یکنواخت.

مسئله‌ی یک حفره‌ی کره‌ی با شعاع a در یک محیط دی‌الکتریک با ثابت دی‌الکتریک $\frac{\epsilon}{\epsilon_0}$ و با حضور میدان الکتريکی اعمال‌شده‌ی E_0 به موازات محور z ، همانند شکل ۴-۸، را می‌توانیم به‌گونه‌ای دقیق و مشابه با روش کره‌ی دی‌الکتریک مورد بحث قرار دهیم.

درواقع بررسی شرایط مرزی (۴-۵) نشان می‌دهد که نتایج برای حفره‌ی فوق را می‌توان از نتایج

$$\text{به دست آمده برای کره با جایگذاری } \left(\frac{\epsilon_0}{\epsilon}\right) \rightarrow \frac{\epsilon}{\epsilon_0} \text{ به دست آورد (یا؛ } k' = \frac{1}{k} \Rightarrow k = \frac{\epsilon}{\epsilon_0}\text{).}$$

به این ترتیب، برای مثال میدان داخل حفره، یکنواخت و موازی با E_0 است و اندازه‌ی آن عبارت است از

$$E_{in} = \frac{3\epsilon}{2\epsilon + \epsilon_0} E_0 > E_0, \quad \text{اگر } \epsilon > \epsilon_0 \quad (۴-۵۹)$$

به‌گونه‌ای مشابه، میدان در خارج از کره برابر است با مجموع میدان اعمال‌شده و میدان ناشی از یک دوقطبی (در مبدأ) که جهت آن مخالف میدان اعمال‌شده‌ی اصلی است و گشتاور دوقطبی آن عبارت است از

$$P = 4\pi\epsilon_0 \left(\frac{\frac{\epsilon}{\epsilon_0} - 1}{\frac{\epsilon}{\epsilon_0} + 1} \right) a^3 E_0 \quad (۴-۶۰)$$

۵-۴ قطبش پذیری مولکولی^۱ و پذیرایی ویژه الکتریکی^۲

در این بخش و بخش آینده رابطه‌ی بین خواص مولکولی و پارامتر تعریف شده‌ی ماکروسکوپی یعنی پذیرایی ویژه را مورد بررسی قرار می‌دهیم. بحث ما در اینجا براساس مدل‌های ساده‌ی کلاسیکی خواص مولکولی استوار است. هرچند که یک بحث مناسب لزوماً ملاحظات کوانتومی را نیز دربر خواهد داشت. خوشبختانه خواص ساده‌تر دی‌الکتریک‌ها تابع تجزیه و تحلیل کلاسیکی هستند.

قبل از بررسی این نکته که چگونه خواص دقیق مولکول‌ها به پذیرایی ویژه‌ی آن‌ها مربوط می‌شود باید بین میدان‌های مؤثر بر مولکول‌ها در محیط و میدان اعمال شده تمایز قائل شویم. پذیرایی ویژه طبق رابطه‌ی $\mathbf{P} = \epsilon_0 \chi_e \mathbf{E}$ تعریف می‌شود که در آن \mathbf{E} میدان الکتریکی ماکروسکوپی است. در محیط‌های رقیق^۲ که در آن‌ها فواصل مولکولی زیاد است اختلاف کمی بین میدان ماکروسکوپی و میدان مؤثر روی هر مولکول یا دسته‌ای از مولکول‌ها وجود دارد. اما در محیط‌های چگال با مولکول‌های درهم فشرده و نزدیک به هم^۳، قطبش مولکول‌های مجاور منجر به ایجاد یک میدان الکتریکی داخلی \mathbf{E}_i در هر مولکول مشخص می‌شود که این میدان علاوه بر میدان ماکروسکوپی میانگین \mathbf{E} است، طوری که در نهایت میدان کل در مولکول $\mathbf{E} + \mathbf{E}_i$ خواهد بود. میدان داخلی را می‌توان به صورت تفاوت دو جمله‌ی زیر نوشت

$$\mathbf{E}_i = \mathbf{E}_{\text{near}} - \mathbf{E}_p \quad (۶۱-۴)$$

که در آن E_{near} سهم واقعی مولکول‌های نزدیک به مولکول مورد نظر است و E_p سهم آن مولکول‌هایی است که در یک تقریب پیوستار میانگین با قطبش \mathbf{P} توصیف شدند.

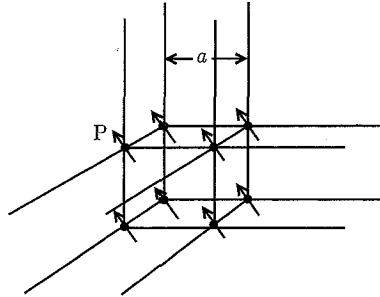
آنچه ما در اینجا می‌گوئیم این است که نزدیک مولکول مورد بحث در مسئله، باید مراقب شناخت آرایش خاص اتمی و مکان مولکول‌های نزدیک باشیم. بنابراین درون حجم V که از لحاظ ماکروسکوپی کوچک ولی از لحاظ میکروسکوپی بزرگ است معادل ماکروسکوپی (هموار) سهم مولکول‌های اطراف مولکول مورد نظر (یعنی \mathbf{E}_p) را کسر نموده و سپس آن را با سهم واقعی تعیین شده (E_{near}) جایگزین کنید. اختلاف بین این دو همان میدان داخلی اضافی \mathbf{E}_i است. نتیجه‌ی (۱۸-۴) برای انتگرال میدان الکتریکی درون حجم کروی با شعاع R که محتوی یک توزیع بار است را می‌توان برای محاسبه‌ی \mathbf{E}_p مورد استفاده قرار داد. اگر حجم V ، کره‌ای با شعاع R و شامل تعداد زیادی مولکول انتخاب شود، گشتاور دوقطبی کل درون کره عبارت است از

$$\mathbf{p} = \frac{4\pi R^3}{3} \mathbf{P}$$

مشروط بر اینکه V به قدری کوچک باشد که \mathbf{P} اساساً در سرتاسر حجم فوق ثابت بماند. در این صورت (۱۸-۴)

نشان می‌دهد که میدان الکتریکی میانگین درون کره (دقیقاً آنچه برای \mathbf{E}_p مطلوب است) عبارت است از

$$\mathbf{E}_p = \frac{\mathbf{P}}{3\epsilon_0} \quad (۶۲-۴)$$



شکل ۹-۴: محاسبه‌ی میدان داخلی: سهم مولکول‌های نزدیک در یک شبکه‌ی مکعبی ساده.

بنابراین میدان داخلی را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\mathbf{E}_i = \frac{1}{3\epsilon_0} \mathbf{P} + \mathbf{E}_{\text{near}} \quad (۶۳-۴)$$

تعیین میدان ناشی از مولکول‌های نزدیک کار بسیار سختی است.

لورنتز نشان داد که برای اتم‌ها در یک شبکه‌ی مکعبی ساده، \mathbf{E}_{near} در مکان‌های شبکه‌ای صفر است. همان‌گونه که در زیر می‌توان ملاحظه کرد، موضوع به تقارن مسئله بستگی دارد. فرض کنید درون کره، همانند آنچه در شکل (۹-۴) نشان داده شده است آرایه‌ای مکعبی از دوقطبی‌ها را داشته باشیم، همراه با گشتاورهایشان که تماماً از لحاظ مقدار ثابت و همگی در یک امتداد جهت گرفته‌اند (به خاطر داشته باشید که کره‌ی فوق از لحاظ ماکروسکوپی کوچک است هرچند که تعداد زیادی مولکول دارد). مکان این دوقطبی‌ها با مختصات x_{ijk} مشخص شده‌اند، با مؤلفه‌هایی در امتداد محورهای مختصات (ia, ja, ka) که در آن a فاصله‌ی شبکه‌ای است و i, j و k هر یک مقادیر صحیح، مثبت و یا منفی را به خود می‌گیرند.

طبق رابطه‌ی (۱۳-۴) میدان در مبدأ، ناشی از تمام دوقطبی‌ها، عبارت است از

$$\mathbf{E} = \sum_{i,j,k} \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}_{ijk} \mathbf{x}_{ijk} - x_{ijk}^2 \mathbf{p}}{4\pi\epsilon_0 x_{ijk}^3} \quad (۶۴-۴)$$

مؤلفه‌ی x این میدان را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$E_x = \sum_{ijk} \frac{\mathbf{p} \cdot (i^2 \mathbf{p}_1 + j^2 \mathbf{p}_2 + k^2 \mathbf{p}_3) - (i^2 + j^2 + k^2) p_1}{4\pi\epsilon_0 a^3 (i^2 + j^2 + k^2)^{3/2}} \quad (۶۵-۴)$$

چون اندیس‌ها به‌طور مساوی روی مقادیر مثبت و منفی دور می‌زنند، لذا جمله‌های ضربدری^۱ شامل $(ijp_2 + ikp_3)$ صفر می‌شوند. با توجه به تقارن، جمع‌های

$$\sum_{ijk} \frac{i^2}{(i^2 + j^2 + k^2)^{\frac{5}{4}}} = \sum_{ijk} \frac{j^2}{(i^2 + j^2 + k^2)^{\frac{5}{4}}} = \sum_{ijk} \frac{k^2}{(i^2 + j^2 + k^2)^{\frac{5}{4}}}$$

تماماً مساوی هستند. در نتیجه

$$E_1 = \sum_{ijk} \frac{[3i^2 - (i^2 + j^2 + k^2)]p_1}{4\pi\epsilon_0 a^3 (i^2 + j^2 + k^2)^{\frac{5}{4}}} = 0 \quad (66-4)$$

مباحث مشابهی نشان می‌دهد که مؤلفه‌های y و z نیز صفر می‌شوند. از این‌رو برای یک شبکه‌ی مکعبی ساده $E_{\text{near}} = 0$ است.

اگر برای یک وضعیت با تقارن بالا $E_{\text{near}} = 0$ باشد، موجه به‌نظر می‌رسد که برای وضعیت‌های کاملاً تصادفی نیز $E_{\text{near}} = 0$ باشد. بنابراین انتظار داریم مواد غیر بلورین^۲ به‌خاطر مولکول‌های نزدیک به هم خود، فاقد میدان داخلی باشند. برای شبکه‌هایی غیر از مکعبی ساده، مؤلفه‌های E_{near} به مؤلفه‌های \mathbf{P} از طریق یک تانسور بدون تریس $S_{\alpha\beta}$ که حاوی خواص تقارنی شبکه‌ای است مربوط می‌شوند. با این وجود فرض اینکه برای بیش‌تر مواد $E_{\text{near}} \approx 0$ باشد فرض خوبی است. بردار قطبش \mathbf{P} در (۲۸-۴) به‌صورت زیر تعریف شد

$$\mathbf{P} = N \langle \mathbf{p}_{\text{mol}} \rangle$$

که در آن $\langle \mathbf{p}_{\text{mol}} \rangle$ ، گشتاور دوقطبی میانگین مولکول‌ها است. این گشتاور دوقطبی، به‌طور تقریب با میدان الکتریکی مؤثر بر مولکول متناسب است. برای نمایش این وابستگی به میدان الکتریکی، قطبش‌پذیری مولکولی γ_{mol} را به‌صورت، نسبت گشتاور دوقطبی مولکولی میانگین به ϵ_0 برابر میدان اعمال‌شده به مولکول تعریف می‌کنیم. با به حساب آوردن میدان داخلی (۴-۶۳) این موضوع می‌رساند که

$$\langle \mathbf{p}_{\text{mol}} \rangle = \epsilon_0 \gamma_{\text{mol}} (\mathbf{E} + \mathbf{E}_i) \quad (67-4)$$

γ_{mol} در اصل تابعی از میدان الکتریکی است اما برای گستره‌ی وسیعی از شدت‌های میدانی، γ_{mol} ثابتی است که مشخص‌کننده‌ی پاسخ مولکول‌ها به میدان اعمال‌شده به آن‌ها است. معادله‌ی (۴-۶۷) را می‌توان با (۴-۲۸) و (۴-۶۳) ترکیب کرد تا نتیجه‌ی زیر به‌دست آید

$$\mathbf{P} = N \gamma_{\text{mol}} \left(\epsilon_0 \mathbf{E} + \frac{1}{3} \mathbf{P} \right) \quad (68-4)$$

که در آن فرض کرده‌ایم که $\mathbf{E}_{\text{near}} = 0$ است. با حل برای \mathbf{P} برحسب \mathbf{E} و با استفاده از این حقیقت که $\mathbf{P} = \epsilon_0 \chi_e \mathbf{E}$ معرف "پذیرایی ویژه" الکتریکی یک ماده است درمی‌یابیم که

$$\chi_e = \frac{N\gamma_{\text{mol}}}{1 - \frac{1}{3}N\gamma_{\text{mol}}} \quad (۶۹-۴)$$

که رابطه‌ای است بین پذیرایی ویژه (پارامتری ماکروسکوپی) و قطبش پذیری مولکولی (پارامتری میکروسکوپی). چون ثابت دی‌الکتریک عبارت است از؛ $\frac{\epsilon}{\epsilon_0} = 1 + \chi_e$ ، لذا می‌توان آن را برحسب γ_{mol} بیان کرد، یا به روشی دیگر می‌توان قطبش‌پذیری مولکولی را برحسب ثابت دی‌الکتریک بیان کرد

$$\gamma_{\text{mol}} = \frac{3}{N} \left(\frac{\frac{\epsilon}{\epsilon_0} - 1}{\frac{\epsilon}{\epsilon_0} + 2} \right) \quad (۷۰-۴)$$

این رابطه، معادله‌ی کلاسیوس - موساتی^۱ نامیده می‌شود، چراکه موساتی (در ۱۸۵۰) و کلاسیوس (در ۱۸۷۹) به صورت مستقل اثبات کردند که برای هر ماده‌ی مشخص کمیت $\left(\frac{\epsilon}{\epsilon_0} - 1\right) \left(\frac{\epsilon}{\epsilon_0} + 2\right)$ می‌تواند متناسب با چگالی ماده باشد*. این رابطه برای مواد رقیقی همچون گازها بهتر صادق است. رابطه‌ی (۷۰-۴) برای مایعات و جامدات تنها به صورت تقریبی معتبر است، به خصوص اگر ثابت دی‌الکتریک بزرگ باشد. خواننده‌ی علاقه‌مند می‌تواند برای جزئیات بیشتر به کتاب‌هایی که توسط بوچر، دبی و فرولیش تألیف شده‌اند مراجعه کند.

۶-۴ مدل‌های قطبش‌پذیری مولکولی

قطبش مجموعه‌ای از اتم‌ها یا مولکول‌ها را می‌توان به دو روش مطرح کرد:

میدان اعمال شده توزیع بار را تغییر شکل می‌دهد و به این ترتیب یک گشتاور دوقطبی القایی در هر مولکول ایجاد می‌کند.

میدان اعمال شده گشتاور دوقطبی دائمی مولکول‌هایی را که به طور تصادفی جهت گرفته‌اند هم‌راستا می‌کند.

برای برآورد گشتاورهای القایی، مدل ساده‌ای از بارهای مقید را که به طور هماهنگ نوسان می‌کنند (الکترون‌ها و یون‌ها) در نظر می‌گیریم. هر بار الکتریکی e تحت تأثیر یک نیروی بازدارنده به صورت زیر مقید است

$$\mathbf{F} = -m\omega_e^2 \mathbf{x} \quad (۷۱-۴)$$

1) Clausius-Mossotti

* در فرکانس‌های نوری، $\frac{\epsilon}{\epsilon_0} = n^2$ است که در آن n ضریب شکست است. با جایگزینی n^2 به جای $\frac{\epsilon}{\epsilon_0}$ در (۷۰-۴)، این معادله گاهی اوقات معادله‌ی لورنتس - لورنز نامیده می‌شود (۱۸۸۰).

در آن m جرم بار و ω فرکانس نوسان حول نقطه‌ی تعادل است. تحت تأثیر یک میدان الکتریکی \mathbf{E} بار از نقطه‌ی تعادلش به اندازه‌ی x جابه‌جا می‌شود که این مقدار با رابطه‌ی زیر مشخص می‌شود

$$m\omega_0^2 x = eE$$

در نتیجه گشتاور دوقطبی القایی برابر است با

$$p_{\text{mol}} = ex = \frac{e^2}{m\omega_0^2} E \quad (۷۲-۴)$$

این بدان معنی است که قطبش‌پذیری عبارت است از؛ $\gamma = \frac{e^2}{m\omega_0^2 \epsilon_0}$. اگر مجموعه‌ای از بارهای e_j هر یک با جرم m_j و فرکانس نوسانی ω_j در هر مولکول وجود داشته باشند، قطبش‌پذیری مولکولی عبارت خواهد بود با

$$\gamma_{\text{mol}} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_j \frac{e_j^2}{m_j \omega_j^2} \quad (۷۳-۴)$$

برای به‌دست آوردن احساسی از مرتبه مقدار γ می‌توانیم دو تخمین متفاوت انجام دهیم. چون γ دارای ابعاد حجم است، مقدارش باید از مرتبه‌ی ابعاد مولکولی یا کم‌تر یعنی $\gamma_{el} \leq 10^{-29} \text{m}^3$ باشد. متناوباً اشاره می‌کنیم که فرکانس‌های پیوندی الکترون‌ها در اتم‌ها باید از مرتبه‌ی فرکانس‌های نوری باشد.

با در نظر گرفتن یک طول موج نوعی نور مثلاً 3000 \AA در می‌یابیم که $\omega \simeq 6 \times 10^{15} \text{ s}^{-1}$ بدین ترتیب

سهم الکترونی برای γ عبارت است از؛ $\gamma_{el} \sim \left(\frac{e^2}{m\omega^2 \epsilon_0} \right) \sim 0.88 \times 10^{-29} \text{m}^3$ که با حجم

مولکولی تخمینی هماهنگ است. برای گازها در NTP، تعداد مولکول‌ها بر مترمکعب $N = 2.7 \times 10^{25}$

است، طوری‌که پذیرایی ویژه‌ی آن‌ها باید از مرتبه‌ی $\chi_e \leq 10^{-3}$ باشد. این بدان معنی است که ثابت‌های

دی‌الکتریک به اندازه‌ی چند هزارم یا حتی کم‌تر از آن با یک تفاوت دارند. از لحاظ تجربی مقادیر نوعی

ثابت دی‌الکتریک برای هوا 1.00054 برای بخار آمونیاک 1.00072 برای متیل الکل 1.00057 و برای

هلیوم 1.000068 است. برای دی‌الکتریک‌های مایع یا جامد، $\frac{\text{مولکول}}{\text{m}^3} 10^{29} - 10^{28} \sim N$ است.

در نتیجه پذیرایی ویژه هم‌چنانکه مشاهده نیز شده است* می‌تواند از مرتبه‌ی واحد باشد. احتمال اینکه

اغتشاش گرمایی مولکول‌ها بتواند، نتیجه‌ی (۷۳-۴) برای قطبش‌پذیری دوقطبی القایی را، تغییر دهد،

احتیاج به بررسی دارد. در مکانیک آماری توزیع احتمالاتی ذرات در فضای فاز (فضای \mathbf{p} و \mathbf{q}) یک تابع

(* برای مثال مرجع زیر را ببینید

$f(H)$ از هامیلتونین است. برای سیستم‌های کلاسیکی

$$f(H) = e^{-\frac{H}{kT}} \quad (۷۴-۴)$$

عامل بولتزمن است. برای مسئله‌ی ساده‌ی بار مقیدی که به‌طور هماهنگ نوسان می‌کند، همراه با یک میدان در جهت z هامیلتونین عبارت است از

$$H = \frac{\mathbf{P}^2}{2m} + \frac{m}{2} \omega_0^2 \mathbf{x}^2 - eEz \quad (۷۵-۴)$$

که در اینجا \mathbf{P} اندازه حرکت ذره‌ی باردار است. مقدار میانگین گشتاور دوقطبی در جهت z عبارت است از

$$\langle p_{\text{mol}} \rangle = \frac{\int d^3p \int d^3x (ez) f(H)}{\int d^3p \int d^3x f(H)} \quad (۷۶-۴)$$

اگر یک مختصه‌ی جابه‌جاشده به‌صورت $\mathbf{x}' = \mathbf{x} - \frac{eEz}{m\omega_0^2}$ معرفی کنیم، در این صورت

$$H = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + \frac{m\omega_0^2}{2} (\mathbf{x}')^2 - \frac{e^2 E^2}{2m\omega_0^2} \quad (۷۷-۴)$$

و

$$\langle p_{\text{mol}} \rangle = \frac{\int d^3p \int d^3x' \left(ez' + \frac{e^2 E}{m\omega_0^2} \right) f(H)}{\int d^3p \int d^3x' f(H)} \quad (۷۸-۴)$$

از آنجائی‌که H برحسب z' زوج است، انتگرال اول صفر می‌شود. به این ترتیب مستقل از شکل $f(H)$ به‌دست می‌آوریم

$$\langle p_{\text{mol}} \rangle = \frac{e^2}{m\omega_0^2} E$$

دقیقاً همان‌گونه که در (۷۲-۴) با صرف‌نظر از حرکت گرمایی به‌دست آمد.

نوع دوم قطبش‌پذیری آن است که با جهت‌گیری نسبی گشتاورهای دوقطبی دائمی که به‌گونه‌ای دیگر به‌صورت تصادفی جهت گرفته‌اند، ایجاد می‌شود. این قطبش جهتی^۱ در مواد قطبی‌ای همچون HCl و H₂O مهم است و اولین بار توسط دیبی^۲ (۱۹۱۲) مورد بحث قرار گرفت.

فرض بر این است که تمام مولکول‌ها دارای گشتاور دوقطبی دائمی \mathbf{p} هستند که می‌تواند در هر جهتی در فضا سمت‌گیری کند. در غیاب میدان، اغتشاش گرمایی، مولکول‌ها را به‌طور تصادفی جهت می‌دهد؛

طوری که گشتاور دوقطبی برآیندی در این زمینه وجود نخواهد داشت. اما با اعمال یک میدان، تمایل به صف شدن مولکول‌ها در جهت میدان به صورت آرایشی یا پایین‌ترین انرژی وجود دارد. در نتیجه برای این حالت یک گشتاور دوقطبی میانگین داریم. برای محاسبه این گشتاور اشاره می‌کنیم که هامیلتونین مولکول توسط

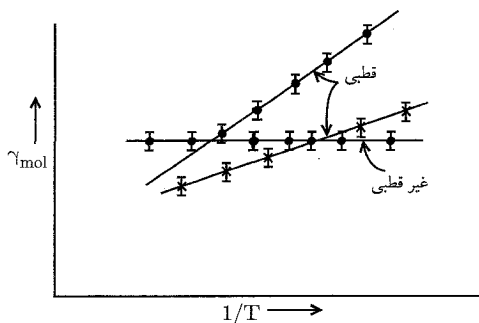
$$H = H_0 - \mathbf{P}_0 \cdot \mathbf{E} \quad (۷۹-۴)$$

مشخص می‌شود که در آن H_0 تنها تابعی از، مختصات داخلی مولکول است. با استفاده از فاکتور بولتزمن (۷۴-۴) می‌توانیم گشتاور دوقطبی میانگین را به صورت زیر بنویسیم

$$\langle p_{\text{mol}} \rangle = \frac{\int d\Omega p_0 \cos \theta \exp\left(\frac{p_0 E \cos \theta}{kT}\right)}{\int d\Omega \exp\left(\frac{p_0 E \cos \theta}{kT}\right)} \quad (۸۰-۴)$$

که در آن E را در امتداد محور z انتخاب و تمام متغیرهای غیر مربوط به موضوع را از این رابطه‌ی انتگرالی خارج کرده‌ایم و اشاره می‌کنیم که تنها مؤلفه‌ی $\langle p_0 \rangle$ که به موازات میدان است مخالف صفر است. در حالت کلی به جز در دماهای پایین، کمیت $\left(\frac{p_0 E}{kT}\right)$ در مقایسه با واحد بسیار کوچک است. بنابراین می‌توانیم نماها را بسط داده و نتیجه‌ی زیر را به دست آوریم

$$\langle p_{\text{mol}} \rangle \simeq \frac{1}{3} \frac{p_0^2}{kT} E \quad (۸۱-۴)$$



شکل ۴-۱۰: نمودار تغییر قطبش‌پذیری مولکولی γ_m با دما برای مواد قطبی و غیرقطبی: γ_{mol} بر حسب T^{-1} .

قطبش جهتی^۱ به‌طور معکوس به دما وابسته است چنانکه از اثری که در آن میدان می‌بایست بر مانع اغتشاش گرمایی غلبه کند انتظار می‌رود. در حالت کلی هر دو نوع قطبش القایی (الکترونی و یونی) و

جهتی حضور دارند و شکل کلی قطبش مولکولی عبارت است از

$$\gamma_{\text{mol}} \simeq \gamma_i + \frac{1}{3\epsilon_0} \frac{p_0^{\text{I}}}{kT} \quad (۸۲-۴)$$

رابطه‌ی بالا نوعی بستگی دمایی به شکل $\left(a + \frac{b}{T}\right)$ را نشان می‌دهد، طوری که دو نوع قطبش را می‌توان به شکل تجربی از هم جدا کرد (همانند شکل ۴-۱۰). برای مولکول‌هایی "قطبی" همچون HCl و H₂O، گشتاورهای دوقطبی دائمی مشاهده شده از مرتبه‌ی حاصل ضرب یک بار الکترونی در ۱۰^{-۸} cm است که با ابعاد مولکولی مطابقت دارد.

۴-۷ انرژی الکترواستاتیک در محیط‌های دی‌الکتریک

در بخش ۱-۱۱، انرژی سیستمی از ذرات را در فضای آزاد بررسی کردیم. نتیجه‌ی به‌دست آمده در آنجا برای انرژی ناشی از یک چگالی بار $\rho(x)$ و یک پتانسیل $\Phi(x)$ یعنی

$$W = \frac{1}{4} \int \rho(\mathbf{x})\Phi(\mathbf{x})d^3x \quad (۸۳-۴)$$

نمی‌تواند در حالت کلی نماینده‌ی توصیف ماکروسکوپی ما از محیط‌های دی‌الکتریک باشد. دلیل این موضوع وقتی روشن می‌شود که چگونگی به‌دست آوردن رابطه‌ی (۴-۸۳) را به‌یاد آوریم. در اینجا آرایش نهایی باری را تصور می‌کنیم که با جمع شدن ذره به ذره‌ی بارهای جزئی به‌وجود می‌آید و این کار با آوردن هر یک از این اجزاء بار از بینهایت، درخلاف جهت میدان الکتریکی موجود صورت می‌گیرد. کار انجام شده در این حالت با رابطه‌ی (۴-۸۳) مشخص می‌شود.

در محیط‌های دی‌الکتریک کار نه تنها برای آوردن بار حقیقی (ماکروسکوپی) به محل صورت می‌گیرد بلکه این کار برای ایجاد یک حالت قطبشی مشخص در محیط نیز انجام می‌شود. در صورتی که ρ و Φ در (۴-۸۳) نشان‌دهنده‌ی متغیرهای ماکروسکوپی باشند به‌طور قطع مشخص نیست که (۴-۸۳) مبین کل کار انجام شده (شامل آن کاری که روی دی‌الکتریک نیز انجام می‌شود) باشد.

برای اینکه یک توصیف کلی از دی‌الکتریک‌ها ارائه دهیم، در ابتدا هیچ فرضی مبنی بر خطی بودن، یکنواخت بودن و غیره در ارتباط با پاسخ دی‌الکتریک به یک میدان اعمال‌شده نمی‌کنیم. به‌جای آن تغییر کوچکی در انرژی به اندازه‌ی δW را در نظر می‌گیریم که ناشی از یک نوع تغییر $\delta\rho$ در چگالی بار ماکروسکوپی ρ در تمام فضا است. کار کل برای انجام این تغییر عبارت است از

$$\delta W = \int \delta\rho(\mathbf{x})\Phi(\mathbf{x})d^3x \quad (۸۴-۴)$$

که در آن $\Phi(\mathbf{x})$ پتانسیل ناشی از چگالی بار $\rho(\mathbf{x})$ است که قبلاً حضور داشت. چون $\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$ است، می‌توانیم تغییر $\delta\rho$ را به یک تغییر در جابه‌جایی δD ارتباط دهیم

$$\delta\rho = \nabla \cdot (\delta\mathbf{D}) \quad (۸۵-۴)$$

به این ترتیب تغییر انرژی δW را می‌توانیم به صورت زیر مطرح کنیم

$$\delta W = \int \mathbf{E} \cdot \delta\mathbf{D} d^3x \quad (۸۶-۴)$$

که در آن $\mathbf{E} = -\nabla\phi$ را مورد استفاده قرار داده‌ایم، و فرض کرده‌ایم $\rho(\mathbf{x})$ یک توزیع بار جایگزیده باشد. حال می‌توان انرژی الکترواستاتیکی کل را به طور رسمی به صورت زیر نوشت؛ حداقل با مجاز شمردن D به اینکه از یک مقدار اولیه $D = 0$ تا مقدار نهایی‌اش D تغییر می‌کند

$$W = \int d^3x \int_0^D \mathbf{E} \cdot \delta\mathbf{D} \quad (۸۷-۴)$$

اگر محیط خطی باشد، در این صورت

$$\mathbf{E} \cdot \delta\mathbf{D} = \frac{1}{\epsilon} \delta(\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}) \quad (۸۸-۴)$$

و انرژی الکترواستاتیکی کل عبارت است از

$$W = \frac{1}{\epsilon} \int \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} d^3x \quad (۸۹-۴)$$

این نتیجه‌ی آخری را می‌توان با استفاده از $\mathbf{E} = -\nabla\Phi$ و $\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$ و یا با بازگشت به (۸۴-۴) و با این فرض که ρ و Φ به صورت خطی به هم مرتبط‌اند به صورت (۸۳-۴) درآوریم. به این ترتیب ملاحظه می‌کنیم که (۸۳-۴) تنها اگر رفتار خطی باشد به شکل ماکروسکوپی معتبر است. از جهت دیگر انرژی یک آرایش نهایی باید از (۸۷-۴) محاسبه شود و ممکن است احتمالاً به تاریخچه‌ی گذشته‌ی سیستم وابسته باشد (اثر هیستریزیس).

مسئله‌ای که خیلی مورد توجه است عبارت است از تغییر در انرژی وقتی یک شیء دی‌الکتریک با پاسخی خطی در یک میدان الکتتریکی با چشمه‌های ثابت قرار می‌گیرد. فرض کنید در ابتدا میدان الکتتریکی \mathbf{E}_0 ناشی از یک توزیع مشخص از بارهایی با چگالی $\rho_0(\mathbf{x})$ در محیطی با ثابت گذردهی ویژه الکتتریکی ϵ_0 برقرار باشد که در آن ممکن است ϵ_0 خود نیز تابعی از مکان باشد (در این لحظه ϵ_0 گذردهی ویژه‌ی ϵ_0 خلاء نیست). انرژی الکترواستاتیک اولیه عبارت است از

$$W_0 = \frac{1}{\epsilon_0} \int \mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{D}_0 d^3x$$

$$\mathbf{D}_0 = \epsilon_0 \mathbf{E}_0$$

به این ترتیب با توجه به چشمه‌های ثابتی که وجود دارد یک شیء دی‌الکتریک با حجم V_1 به درون این میدان وارد شده و میدان را از \mathbf{E}_0 به \mathbf{E} تغییر می‌دهد. حضور شیء دی‌الکتریک را می‌توان با یک گذردهی ویژه‌ی $\epsilon(\mathbf{x})$ توصیف کرد که دارای مقدار ϵ_1 درون حجم V_1 و ϵ_0 در بیرون از حجم V_1 است. برای اجتناب از مشکلات ریاضی می‌توانیم چنین تصور کنیم که $\epsilon(\mathbf{x})$ تابعی با تغییرات آرام از مکان است که به سرعت اما به شکل متصل از مقدار ϵ_1 به ϵ_0 در لبه‌ی حجم V_1 افت می‌کند. حال انرژی دارای مقدار زیر است

$$W_1 = \frac{1}{4} \int \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} d^3x$$

$$\text{که در آن } \mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$$

تفاوت در انرژی را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{4} \int (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} - \mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{D}_0) d^3x & (90-4) \\ &= \frac{1}{4} \int (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}_0 - \mathbf{D} \cdot \mathbf{E}_0) d^3x + \frac{1}{4} \int (\mathbf{E} + \mathbf{E}_0) \cdot (\mathbf{D} - \mathbf{D}_0) d^3x \end{aligned}$$

با توجه به دلیل ارائه شده در پایین می‌توانیم نشان دهیم که انتگرال دوم صفر می‌شود. چون $\nabla \times (\mathbf{E} + \mathbf{E}_0) = 0$ است می‌توانیم بنویسیم

$$\mathbf{E} + \mathbf{E}_0 = -\nabla \Phi$$

در این صورت انتگرال دوم به صورت زیر درمی‌آید

$$I = -\frac{1}{4} \int \nabla \Phi \cdot (\mathbf{D} - \mathbf{D}_0) d^3x$$

انتگرال‌گیری به روش جزء‌به‌جزء انتگرال بالا را به انتگرال زیر تبدیل می‌کند

$$I = \frac{1}{4} \int \Phi \nabla \cdot (\mathbf{D} - \mathbf{D}_0) d^3x = 0$$

چون $\nabla \cdot (\mathbf{D} - \mathbf{D}_0) = \rho_0(\mathbf{x})$ ، چگالی بار چشمه، با وارد کردن شیء دی‌الکتریک بدون تغییر بماند. در نتیجه تغییر در انرژی عبارت است از

$$W = \frac{1}{4} \int (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}_0 - \mathbf{D} \cdot \mathbf{E}_0) d^3x \quad (91-4)$$

به نظر می‌رسد انتگرال‌گیری روی تمام فضا انجام گرفته باشد اما در واقع این انتگرال‌گیری تنها روی حجم V_1 جسم انجام شده است چراکه در بیرون از حجم V_1 ، $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E}$ است. بنابراین می‌توان نوشت

$$W = -\frac{1}{2} \int_{V_1} (\epsilon_1 - \epsilon_0) \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}_0 d^3x \quad (92-4)$$

اگر محیط اطراف جسم دی‌الکتریک فضای آزاد باشد، در این صورت با استفاده از قطبش P رابطه (92-4) را می‌توان به صورت زیر بیان کرد

$$W = -\frac{1}{2} \int_{V_1} (\mathbf{P} \cdot \mathbf{E}_0) d^3x \quad (93-4)$$

که در آن \mathbf{P} قطبش دی‌الکتریک است. این موضوع نشان می‌دهد که چگالی انرژی یک دی‌الکتریک که در میدان \mathbf{E}_0 (با چشمه‌های ثابت) قرار دارد، با رابطه‌ی زیر مشخص می‌شود

$$w = -\frac{1}{2} \mathbf{P} \cdot \mathbf{E}_0 \quad (94-4)$$

این نتیجه مشابه با جمله‌ی دوقطبی در عبارت انرژی (94-4)، ناشی از یک توزیع بار در یک میدان خارجی است. عامل $\frac{1}{2}$ ناشی از این واقعیت است که (94-4) به جای اینکه یک دوقطبی دائمی را نشان دهد، مبین چگالی انرژی یک دی‌الکتریک قطبش‌پذیر در یک میدان خارجی است.

معادلات (92-4) و (93-4) نشان می‌دهند که یک حجم دی‌الکتریک تمایل به حرکت به سمت ناحیه‌هایی با میدان فزاینده‌ی \mathbf{E}_0 را دارد مشروط بر اینکه $\epsilon_1 \gg \epsilon_0$ باشد. برای محاسبه‌ی نیروی مؤثر می‌توانیم جابه‌جایی تعمیم‌یافته‌ی کوچکی از جسم به اندازه‌ی $\delta \xi$ را تصور کنیم. در این صورت یک تغییر δW در انرژی به وجود می‌آید. چون بارها ثابت نگه داشته شده‌اند، چشمه‌ی خارجی انرژی وجود ندارد و تغییر در انرژی میدانی را می‌توان به صورت تغییر در انرژی پتانسیل جسم تعبیر کرد. این بدان معنی است که یک نیروی مؤثر به اندازه‌ی زیر بر جسم وارد می‌شود

$$F_\xi = - \left(\frac{\partial W}{\partial \xi} \right)_Q \quad (95-4)$$

که در آن اندیس پایین Q روی مشتق جزئی به این خاطر است که نشان دهد، چشمه‌های میدان ثابت نگه داشته شده‌اند.

در وضعیت‌های کاربردی که در آن‌ها حرکت دی‌الکتریک‌ها را داریم، میدان‌های الکتریکی اغلب با آرایشی از الکترودهایی به وجود می‌آیند که با ارتباط با یک چشمه‌ی خارجی همانند یک باتری در پتانسیل ثابتی نگه داشته شده‌اند. برای ثابت نگه داشتن پتانسیل‌ها وقتی توزیع دی‌الکتریک تغییر می‌کند بار از

باتری به الکترودها و بالعکس جریان می‌یابد. این بدان معنی است که انرژی از چشمه‌ی خارجی تأمین می‌شود و مقایسه‌ی انرژی تأمین‌شده با این روش با تغییر در انرژی‌ای که در بالا برای چشمه‌های ثابت میدان دریافتیم مفید و سودمند است. در اینجا تنها محیط‌های خطی را مورد بحث قرار می‌دهیم، طوری که رابطه‌ی (۴-۸۳) معتبر باشد. کافی است تغییرات کوچک در آرایش موجود را بررسی کنیم. از (۴-۸۳) واضح است که تغییر در انرژی همراه با تغییرات $\delta\rho(x)$ و $\delta\Phi(x)$ در چگالی بار و پتانسیل عبارت است از

$$\delta W = \frac{1}{4\pi} \int (\rho\delta\Phi + \Phi\delta\rho) d^3x \quad (۴-۹۶)$$

مقایسه این رابطه با رابطه‌ی (۴-۸۴) نشان می‌دهد که اگر خواص دی‌الکتریک تغییر نکنند، دو جمله‌ی موجود در (۴-۹۶) مساوی می‌شوند. هرچند که اگر خواص دی‌الکتریک تغییر کند یعنی

$$\varepsilon(x) \rightarrow \varepsilon(x) + \delta\varepsilon(x) \quad (۴-۹۷)$$

در این صورت سهم جمله‌ها در (۴-۹۶) لزوماً یکسان نخواهد بود. در حقیقت ما تغییر در انرژی‌ای را محاسبه کرده‌ایم که با وارد کردن یک جسم دی‌الکتریک به درون یک میدان الکتریکی با چشمه‌های ثابت ایجاد شده است ($\delta\rho = 0$). وجود سهم مساوی جملات موجود در (۴-۹۶) ایجاب می‌کند که $\delta W = 0$ باشد، ولی در حالت کلی (۴-۹۱) و (۴-۹۲) صفر نیستند و دلیل این اختلاف نیز در وجود بار قطبشی نهفته است. تغییر در خواص دی‌الکتریک ایجاب شده توسط رابطه‌ی (۴-۹۷) را می‌توان به تغییر در چگالی بار قطبشی ارتباط داد. در این صورت اگر (۴-۹۶) را به انتگرال روی هر دو چگالی بار آزاد و قطبشی تعبیر کنیم (یعنی یک معادله‌ی میکروسکوپی) آنگاه این دو سهم همواره مساوی خواهند بود. هرچند که اغلب، سروکار داشتن با کمیت‌های ماکروسکوپی مناسب است. در این صورت تساوی فوق تنها در صورتی که خواص دی‌الکتریک بدون تغییر بماند صادق خواهد بود.

فرآیند تغییر خواص دی‌الکتریک با یک روش خاص (با حرکت اجسام دی‌الکتریک با تغییر گذرده‌ی ویژه‌ی آن‌ها و غیره) در حضور الکترودهایی در پتانسیل ثابت را می‌توان به این شکل که در دو مرحله صورت می‌گیرد تصور نمود. در مرحله‌ی اول الکترودها از باتری جدا می‌شوند و بار روی آن‌ها ثابت می‌ماند ($\delta\rho = 0$). با توجه به تغییر در خواص دی‌الکتریک در رابطه‌ی (۴-۹۷) تغییر در انرژی عبارت است از

$$\delta W_1 = \frac{1}{4\pi} \int \rho\delta\Phi_1 d^3x \quad (۴-۹۸)$$

که در آن $\delta\Phi_1$ تغییری است که در پتانسیل ایجاد می‌شود. می‌توان نشان داد که این موضوع منجر به نتیجه‌ی (۴-۹۲) می‌شود.

در مرحله‌ی دوم باتری‌ها مجدداً برای برگشت پتانسیل به مقادیر اولیه، به الکترودها وصل می‌شوند. جریان باری به اندازه‌ی $\delta\rho_2$ از باتری با یک تغییر در پتانسیل* به اندازه‌ی $-\delta\Phi_1 = \delta\Phi_2$ همراه است. (* تنها لازم است بدانید که روی الکترودها $-\delta\Phi_1 = \delta\Phi_2$ است چراکه این تنها جایی است که در آنجا بار آزادی نداریم.

بنابراین تغییر انرژی در مرحله‌ی دوم برابر است با

$$\delta W_2 = \frac{1}{4} \int (\rho \delta \Phi_2 + \Phi \delta \rho_2) d^3x = -2\delta W_1 \quad (۹۹-۴)$$

چراکه در اینجا سهم دو جمله با هم برابر است.

در مرحله‌ی دوم دریافتیم که چشمه‌های خارجی، انرژی را در جهت مخالف و به اندازه‌ی دو برابر مقدار مرحله‌ی اول آن تغییر می‌دهند. در نتیجه برآیند تغییر عبارت است از

$$\delta W = -\frac{1}{4} \int \rho \delta \Phi_1 d^3x \quad (۱۰۰-۴)$$

به صورت نمادین

$$\delta W_V = -\delta W_Q \quad (۱۰۱-۴)$$

که در آن اندیس پایین کمیتی را نشان می‌دهد که ثابت نگه داشته شده است. اگر یک دی‌الکتریک با $\epsilon > \epsilon_0$ به سمت میدانی با قدرت میدان بیشتر حرکت کند، انرژی به جای کاهش، افزایش می‌یابد. حال برای یک جابه‌جایی تعمیم‌یافته $d\xi$ ، نیروی مکانیکی مؤثر عبارت است از

$$F_\xi = + \left(\frac{\partial W}{\partial \xi} \right)_V \quad (۱۰۲-۴)$$

مراجع و خواندنی‌های پیشنهادی

استخراج معادلات ماکروسکوپی الکترواستاتیک با روش میانگین‌گیری روی مجموعه‌ی اتم‌ها، در فصل ۶ و همچنین توسط نویسندگان زیر ارائه شده است

Rosenfeld, Chapter II

Mason and Weaver, Chapter 1, part III

Van Vleck, Chapter I

روزنفلد، نظریه‌ی کلاسیکی الکترون در دی‌الکتریک‌ها را نیز مورد بحث قرار داده است.

کتاب وان ولک به مبحث "پذیرایی ویژه‌ی" الکتریکی و مغناطیسی اختصاص یافته است. کارهای خاصی روی پدیده‌ی قطبش الکتریکی توسط

Böttcher

Debye

Fröhlich

صورت گرفته است.

مسائل مقدار- مرزی با دی‌الکتریک‌ها در تمام مراجع موجود (راجع به مبحث الکترواستاتیک در فصول ۲ و ۳) بحث شده‌اند.

بحث در مورد نیروها و انرژی با حضور محیط‌های دی‌الکتریک در این فصل به صورت خلاصه انجام گرفته است. بحث‌های بسیار جامعی، شامل نیروها در مایعات و دی‌الکتریک‌های جامد، تانسور تنش الکتریکی، دگردهایی الکتریکی^۱ و اثرات ترمودینامیکی را می‌توان در مراجع زیر پیدا نمود

Abraham and Becker, Band 1, Chapter V

Durand, Chapters VI and VII

Landau and Lifshitz, *Electrodynamics of Continuous Media*

Maxwell, Vol. 1. Chapter V

Panofsky and Phillips, Chapter 6

Stratton, Chapter II

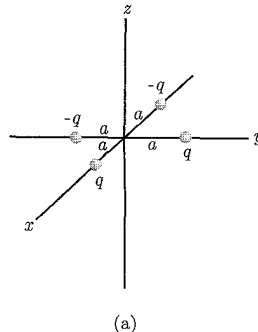
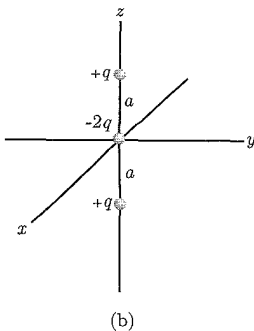
مسائل

۱-۴ (الف) و (ب) گشتاور چندقطبی qlm توزیع بارهای شکل (a) و (b) را محاسبه کنید. سعی کنید نتایج را برای گشتاورهای غیرصفری که به‌ازای تمام مقادیر l معتبرند به‌دست آورید، ولی در هر حال اولین دو مجموعه از گشتاورهای غیرصفر را با حداقل کار ممکن بیابید.

(ج) برای توزیع بار مجموعه‌ی دوم، بسط چندقطبی برای پتانسیل را بنویسید. با حفظ تنها جمله‌ی دارای پایین‌ترین مرتبه در بسط، پتانسیل در صفحه‌ی $x - y$ را به‌صورت تابعی از فاصله از مبدأ برای فواصل بزرگ‌تر از a ، ترسیم کنید.

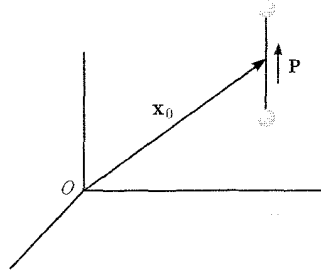
(د) پتانسیل دقیق را برای مجموعه‌ی دوم در صفحه $x - y$ ، به‌طور مستقیم از قانون کولن محاسبه کنید. این پتانسیل را به‌صورت تابعی از فاصله رسم کرده و آن را با نتیجه‌ی به‌دست آمده در قسمت (ج) مقایسه کنید.

برای بررسی واضح‌تر رفتار در فواصل بزرگ، شکل مجانبی در قسمت‌های (ج) و (د) را از هم جدا کنید.



۲-۴ یک دوقطبی نقطه‌ای با گشتاور دوقطبی \mathbf{p} در نقطه‌ی \mathbf{x}_0 قرار دارد. با توجه به خواص مشتق تابع دلتای دیراک، نشان دهید که برای محاسبه‌ی پتانسیل Φ ، یا انرژی یک دوقطبی در یک میدان خارجی می‌توان دوقطبی فوق را با یک چگالی بار مؤثر به صورت زیر توصیف کرد.

$$\rho_{\text{eff}}(\mathbf{x}) = -\mathbf{p} \cdot \nabla \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$$



۳-۴ امین جمله‌ی موجود در بسط چندقطبی (۱-۴) برای پتانسیل، با $(2l+1)$ گشتاور چندقطبی q_{lm} مشخص می‌شود. از طرفی، تعداد گشتاورهای چندقطبی دکارتی

$$Q_{\alpha\beta\gamma}^{(l)} = \int \rho(x) x^\alpha y^\beta z^\gamma d^3x$$

است $\frac{(l+1)(l+2)}{2}$ [با α, β, γ به عنوان عددهایی صحیح و غیرمنفی، که تحت قید $\alpha + \beta + \gamma = l$ قرار دارند]. به این ترتیب برای $l > 1$ ، گشتاورهای چندقطبی دکارتی بیشتری وجود دارد، نسبت به آنچه برای توصیف جمله‌ی موجود در پتانسیل (که بستگی شعاعی آن به صورت r^{-l-1} است) لازم به نظر می‌رسد. نشان دهید در حالی که q_{lm} تحت دوران به صورت تانسورهای کروی و تحویل‌پذیری l مرتبه‌ی l تبدیل می‌یابند، گشتاورهای چندقطبی دکارتی، با تانسورهای کروی تحویل‌پذیری با مرتبه‌ی $l_{\min}, l_{\min}-2, l_{\min}-4, \dots, l-2, l$ متناظرند که در آن به ترتیب برای l زوج یا فرد $l_{\min} = 0$ یا یک است. بررسی کنید که تعداد مؤلفه‌های متفاوت تانسوری، به اندازه‌ی کل تعداد تانسورهای دکارتی است. چرا تنها q_{lm} ها در بسط (۱-۴) لازم هستند.

۴-۴ قضیه‌ی زیر را ثابت کنید:

الف) برای یک توزیع بار اختیاری $\rho(x)$ ، مقادیر $(2l+1)$ گشتاور از اولین چندقطبی‌های غیرصفر، مستقل از مبدأ مختصاتند ولی مقادیر گشتاورهای چندقطبی مرتبه‌ی بالاتر در حالت کلی به انتخاب مبدأ وابسته‌اند. (البته گشتاورهای مختلف q_{lm} برای مقادیر ثابت l به جهت‌گیری محورها نیز بستگی دارند.)

ب) یک توزیع بار، نسبت به یک مجموعه از محورهای مختصات دارای گشتاورهای چندقطبی q, p, Q_{ij} ، و

... نسبت به مجموعه‌ی دیگری از مختصات که محورهای آن موازی با اولی است؛ ولی مبدأ آن نسبت به اولی در نقطه‌ی $\mathbf{R} = (X, Y, Z)$ قرار دارد، دارای گشتاورهای چندقطبی q', p', Q'_{ij} و... است. به صورت واضح ارتباط بین گشتاورهای تک‌قطبی، دوقطبی و چهارقطبی در این دو چارچوب مختصات را تعیین کنید.

ج) اگر $q \neq 0$ باشد آیا می‌توان R را طوری تعیین کرد که $\mathbf{p}' = 0$ باشد؟ اگر $q \neq 0$ و $p \neq 0$ باشند یا حداقل $\mathbf{p} \neq 0$ باشد آیا می‌توان R را طوری پیدا کرد که $Q'_{ij} = 0$ باشد؟

۵-۴ یک چگالی بار چایگزیده‌ی $\rho(x, y, z)$ در یک میدان الکتروستاتیک خارجی، که با پتانسیل $\Phi^{\circ}(x, y, z)$ توصیف می‌شود، قرار گرفته است. پتانسیل خارجی در فضا، روی ناحیه‌ای که در آن چگالی بار مخالف صفر است به آرامی تغییر می‌کند.

الف) با توجه به اصول اولیه، نیروی کل وارد بر توزیع بار را به صورت حاصل ضرب یک بسط برحسب گشتاورهای چندقطبی در مشتق میدان الکتریکی (تا گشتاورهای چهارقطبی و شامل آن) محاسبه کنید. نشان دهید که این نیرو عبارت است از:

$$\mathbf{F} = qE^{(\circ)}(\circ) + \left\{ \nabla[\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}^{(\circ)}(\mathbf{x})] \right\} + \left\{ \nabla \left[\frac{1}{\epsilon} \sum_{j,k} Q_{jk} \frac{\partial E_j^{(\circ)}}{\partial x^k}(\mathbf{x}) \right] \right\} + \dots$$

این رابطه را با بسط (۴-۲۴) در مورد انرژی W مقایسه کنید. دقت کنید که (۴-۲۴) یک عدد است (یک اسکالر) - این عدد تابعی از \mathbf{x} نیست که بتوانیم از آن مشتق‌گیری کنیم؛ رابطه‌ی این عدد با \mathbf{F} چیست؟

ب) محاسبه‌ی قسمت الف) را برای گشتاور کل تکرار کنید. برای سهولت کار تنها یک مؤلفه‌ی دکارتی از این گشتاور، مثلاً N_1 را تعیین کنید. نشان دهید که این مؤلفه عبارت است از

$$N_1 = [\mathbf{p} \times \mathbf{E}^{(\circ)}(\circ)]_1 + \frac{1}{3} \left[\frac{\partial}{\partial x_3} \left(\sum_j Q_{2j} E_j^{(\circ)} \right) - \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\sum_j Q_{3j} E_j^{(\circ)} \right) \right] + \dots$$

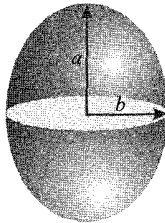
۶-۴ یک هسته با گشتاور چهارقطبی Q ، خود را در یک میدان الکتریکی [دارای تقارن استوانه‌ای، با گزادیان $\left(\frac{\partial E_z}{\partial z} \right)$ در امتداد محور z] در مکان هسته می‌یابد.

الف) نشان دهید که انرژی برهم‌کنشی چهارقطبی عبارت است از

$$W = -\frac{e}{4} Q \left(\frac{\partial E_z}{\partial z} \right).$$

ب) اگر مشخص شود که، $Q = 2 \times 10^{-28} \text{ m}^2$ و مقدار $\frac{W}{h} = 10^6 \text{ MHz}$ است، با h به عنوان ثابت پلانک، $\left(\frac{\partial E_z}{\partial z}\right)$ را بر حسب واحدهای $\frac{e}{4\pi\epsilon_0 a_0^3}$ محاسبه کنید که در آن $a_0 = \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{me^2} = 0.529 \times 10^{-10} \text{ m}$ شعاع مدار بور در اتم هیدروژن است.

ج) توزیع بارهای هسته‌ای را می‌توان با یک چگالی بار ثابت در سرتاسر یک حجم کره‌وار با نیم‌محور بزرگ a و نیم‌محور کوچک b تقریب زد. با فرض اینکه بار کل هسته Ze باشد، گشتاور چهارقطبی یک چنین هسته‌ای را محاسبه کنید.



با مشخص بودن اینکه $E_u^{(153)} (Z = 63)$ دارای یک گشتاور چهارقطبی $2.5 \times 10^{-28} \text{ (m}^3)$ و یک شعاع میانگین به اندازه‌ای

$$R = \frac{(a+b)}{2} = 7 \times 10^{-15} \text{ m}$$

باشد، اختلاف نسبی در شعاع $\frac{(a-b)}{R}$ را تعیین کنید.

$\gamma=4$ یک توزیع جایگزیده‌ی بار، دارای چگالی باری به صورت زیر است

$$\rho(\mathbf{r}) = \frac{1}{64\pi} r^2 e^{-r} \sin^2 \theta$$

الف) یک بسط چندقطبی برای پتانسیل ناشی از این چگالی بار صورت دهید و تمام گشتاورهای چندقطبی غیرصفر را تعیین کنید. پتانسیل را در فواصل دور به صورت یک بسط متناهی از چند جمله‌ای‌های لژاندر بنویسید.

ب) پتانسیل در هر نقطه از فضا را به طور صریح تعیین و نشان دهید که تصحیح تا مرتبه‌ی r^2 در نزدیک مبدأ شامل جملات زیر است

$$\Phi(r) \simeq \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{4} - \frac{r^2}{120} P_2(\cos \theta) \right]$$

ج) اگر در مبدأ هسته‌ای با گشتاور چهارقطبی $Q = 10^{-28} \text{ m}^2$ داشته باشیم، اندازه‌ی انرژی برهم‌کنشی را تعیین کنید. [با فرض اینکه واحد بار برای $\rho(r)$ در بالا، واحد بار الکتریکی و واحد طول، شعاع اتم هیدروژن بوهر یعنی $10^{-10} \text{ m} \times 0,529$ باشد] با تقسیم نتیجه‌ی حاصل بر ثابت پلانک \hbar ، جوابتان را برحسب فرکانس بیان کنید.

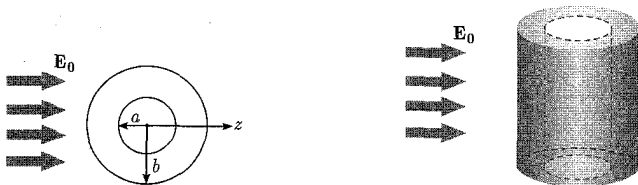
چگالی بار در این مسئله همان چگالی بار برای حالت‌های $m = \pm 1$ از تراز $2p$ در اتم هیدروژن است در حالی‌که مرتبه‌ی برهم‌کنش چهارقطبی مشابه با مولکول‌ها است.

۴-۸ یک لایه‌ی استوانه‌ای بسیار بلند دایره‌ای و راست با ثابت دی‌الکتริก $\frac{\epsilon}{\epsilon_0}$ ، و به ترتیب با شعاع‌های داخلی و خارجی a و b در یک میدان الکتریکی از پیش یکنواخت E_0 قرار دارد، طوری‌که محور استوانه بر میدان عمود است. محیط درون و بیرون استوانه دی‌الکتریکی با ثابت یک است.

الف) با صرف نظر از اثرات انتهایی، پتانسیل و میدان الکتریکی را در سه ناحیه فوق تعیین کنید.

ب) خطوط نیرو را برای حالت نوعی $b \simeq 2a$ رسم کنید.

ج) روی شکل حدی جوابتان که برای یک استوانه دی‌الکتریک توپر در یک میدان یکنواخت و یک حفره‌ی استوانه‌ای در یک دی‌الکتریک یکنواخت مناسب باشد بحث کنید.



شکل (ب): حالت دوبعدی مسئله

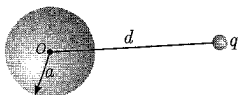
شکل (الف): حالت سه‌بعدی مسئله

۴-۹ یک بار نقطه‌ای q در فضای آزاد و در فاصله‌ی d از مرکز یک کره‌ی دی‌الکتریک با شعاع a ($a < d$) و ثابت دی‌الکتریک $\frac{\epsilon}{\epsilon_0}$ قرار گرفته است.

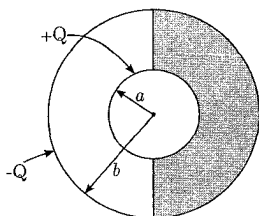
الف) پتانسیل را در تمام نقاط فضا با بسط برحسب هم‌هنگ‌های کروی بیابید.

ب) مؤلفه‌های قائم (یا دکارتی) میدان الکتریکی را در نزدیکی مرکز این کره محاسبه کنید.

ج) ثابت کنید که در حالت حدی $\frac{\epsilon}{\epsilon_0} \rightarrow \infty$ نتیجه‌ای که به دست آورده‌اید مشابه آن چیزی است که برای کره‌ی رسانا به دست آمد.



۱۰-۴ دو کره‌ی رسانای هم‌مرکز، به‌ترتیب با شعاع‌های داخلی و خارجی a و b ، حامل بارهای $\pm Q$ هستند. فضای خالی بین کره‌ها با یک نیم‌پوسته‌ی کروی از جنس دی‌الکتریک با ثابت $\frac{\epsilon}{\epsilon_0}$ نیمه‌پر شده است، همانند شکل زیر.



الف) میدان الکتریکی را در هر نقطه‌ای در بین دو کره بیابید.

ب) توزیع بار سطحی را روی کره‌ی داخلی محاسبه کنید.

ج) چگالی بار قطبشی القایی را روی سطح دی‌الکتریک در $r = a$ محاسبه کنید.

۱۱-۴ اطلاعات ارائه شده در جدول زیر در مورد تغییرات ثابت دی‌الکتریک با فشار از

Smith Sonian Physical Tables 9th ed., P.424.

برگرفته شده است.

رابطه‌ی کلاوسیوس - موساتی را بین ثابت دی‌الکتریک و چگالی، برای هوا و پنتان در ناحیه‌ی تغییرات درج شده در جداول بررسی کنید. آیا این رابطه به‌طور دقیق صادق است یا به‌طور تقریب؟ اگر این رابطه به‌طور تقریب صادق است، تغییرات نسبی را در چگالی و در $\left(\frac{\epsilon}{\epsilon_0} - 1\right)$ مورد بحث قرار دهید. رابطه کلاوسیوس - موساتی را برای پنتان در رابطه‌ی ناتمام

$$\text{چگالی} \propto \left(\frac{\epsilon}{\epsilon_0} - 1\right)$$

مقایسه کنید.

هوا در 292°K

فشار	$\frac{\epsilon}{\epsilon_0}$	
۲۰	۱٫۰۱۰۸	چگالی نسبی هوا به‌صورت تابعی از فشار در
۴۰	۱٫۰۲۱۸	مرجع؛
۶۰	۱٫۰۳۳۳	AIP Handbook, [3rd ed., McGraw-Hill,
۸۰	۱٫۰۴۳۹	New York (1972), p.4-165].
۱۰۰	۱٫۰۵۴۸	

ارائه شده است

پنتان (C₅H₁₂) در ۳۰۳°K

فشار (atm)	چگالی (g/cm ³)	$\frac{\epsilon}{\epsilon_0}$
۱	۰٫۶۱۳	۱٫۸۲
۱۰ ^۳	۰٫۷۰۱	۱٫۹۶
۴ × ۱۰ ^۳	۰٫۷۹۶	۲٫۱۲
۸ × ۱۰ ^۳	۰٫۸۶۵	۲٫۲۴
۱۲ × ۱۰ ^۳	۰٫۹۰۷	۲٫۳۳

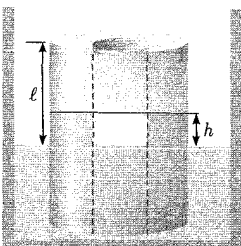
۱۲-۴ بخار آب یک گاز قطبی است که ثابت دی‌الکتریک آن بستگی دمایی قابل توجهی را نشان می‌دهد. جدول زیر اطلاعات تجربی را در مورد این اثر ارائه می‌دهد. با فرض اینکه بخار آب از قانون گاز ایده‌آل تبعیت کند، قطبش‌پذیری مولکولی را به صورت تابعی از معکوس دما محاسبه کرده و آن را رسم نمایید. از شیب این منحنی یک مقدار برای گشتاور دوقطبی دائمی مولکول H₂O نتیجه‌گیری کنید. (گشتاور دوقطبی را برحسب کولن - متر بیان کنید).

T(K)	فشار (CmHg)	$\left(\frac{\epsilon}{\epsilon_0} - 1\right) \times 10^5$
۳۹۳	۵۶٫۴۹	۴۰۰٫۲
۴۲۳	۶۰٫۹۳	۳۷۱٫۷
۴۵۳	۶۵٫۳۴	۳۴۸٫۸
۴۸۳	۶۹٫۷۵	۳۲۸٫۷

۱۳-۴ دو سطح رسانای استوانه‌ای بلند و هم‌محور با شعاع‌های a و b را به‌طور عمودی درون یک دی‌الکتریک مایع فرومی‌بریم. اگر هنگامی که اختلاف پتانسیل V بین الکترودها برقرار می‌شود مایع تا ارتفاع میانگین h بین آن‌ها بالا رود، نشان دهید که "پذیرایی ویژه‌ی" این مایع عبارت است از

$$\chi_e = \frac{(b^2 - a^2) \rho g h \ln \left(\frac{b}{a}\right)}{\epsilon_0 V^2}$$

که در آن ρ چگالی مایع، g شتاب گرانش و از پذیرایی ویژه‌ی هوا نیز صرف‌نظر شده است.



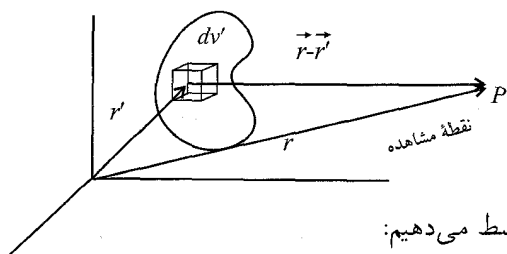
پیوست فصل ۴

بسط چندقطبی

به نظر می‌رسد خواننده‌گان محترم در اثبات فرمول (۴-۱۰) در صفحه ۳ اندکی مشکل داشته باشند. این فرمول عبارت است از:

$$\Phi(x) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q}{r} + \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}}{r^3} + \frac{1}{2} \sum_{i,j} Q_{ij} \frac{x_i x_j}{r^5} + \dots \right] \quad (۴-۱۰)$$

با یک راه ساده این فرمول را اثبات می‌کنیم. کلاً پتانسیل یک توزیع باز حجمی ρ در نقطه‌ای r عبارت است از: (روی $\frac{1}{4\pi\epsilon_0}$ وسواس نداشته باشید)*



$$U(r) = \int \frac{\rho(r')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv' \quad (۱)$$

تابع $\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$ را برحسب توان‌های صعودی $\frac{r'}{r}$ بسط می‌دهیم:

$$|r - r'|^{-1} = |(r^2 - 2\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}' + r'^2)|^{-1/2} = \frac{1}{r} \left\{ 1 - \left(\frac{2\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r^2} + \frac{r'^2}{r^2} \right) \right\}^{-1/2} \quad (۲)$$

رابطه‌ی (۲) را طبق رابطه‌ی زیر بسط می‌دهیم

$$(1 + y)^m = 1 + my + \frac{m(m-1)}{2!} y^2 + \dots$$

$$\begin{aligned} (۲) \Rightarrow |r - r'|^{-1} &= \frac{1}{r} \left\{ 1 + \left(-\frac{2\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r^2} + \frac{r'^2}{r^2} \right) \right\}^{-1/2} \\ &= \frac{1}{r} \left\{ 1 - \frac{1}{2} \left(-\frac{2\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r^2} + \frac{r'^2}{r^2} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1 \cdot 1 \cdot 3}{2 \cdot 2 \cdot 2} \left(-\frac{2\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r^2} + \frac{r'^2}{r^2} \right)^2 \dots \right\} \end{aligned}$$

* دقت کنید که دو پیوست در ارتباط با فصل ۴ ارائه شده است که در پیوست اول فرمول‌های فصل باز و پیوست دوم (انتهای کتاب) دیدگاه قوی‌تری در مورد گشتاورهای چندقطبی آمده است که در حل چندمسئله‌ی خاص در انتهای فصل و نیز فصل ۶ به خواننده کمک می‌کند.

با جایگذاری در رابطه‌ی (۱) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}
 U(r) &= \int_{v'} \left\{ \frac{1}{r} + \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r^3} + \frac{1}{2} \left[\frac{\mathbf{r}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}')^2}{r^5} - \frac{r'^2}{r^3} \right] + \dots \right\} \rho(r') dv' \\
 &= \left\{ \frac{1}{r} \int \rho(r') dv' + \frac{v}{r^3} \int_{V'} \rho(r') dv' + \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \frac{1}{2} x_i x_j \int_{V'} \left(\frac{\mathbf{r}' x'_i x'_j - r'^2 r'^2}{r^5} \right) \rho(r') dv' \right. \quad (3)
 \end{aligned}$$

با در نظر گرفتن:

$$\begin{aligned}
 Q_{ij} &= \int (\mathbf{r}' x'_i x'_j - r'^2 \delta_{ij}) \rho(r') dv' \\
 &= \left(\mathbf{r}' x'_i x'_j - \frac{r'^2}{r^3} \right) \rho(r') dv' \\
 P &= \int r' \rho(r') dv' , \quad \Phi(x) = u(x) , \quad q = \int \rho(r') dv'
 \end{aligned}$$

و همچنین $x \equiv r'$

لذا رابطه (۳) به صورت زیر درمی آید

$$\Phi(x) = \frac{q}{r} + \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}}{r^3} + \frac{1}{2} \sum_{i,j} Q_{ij} \frac{x_i x_j}{r^5} + \dots \quad (10-4)$$

که همان رابطه‌ی (۱۰-۴) است. حال به اثبات رابطه‌های (۱۱-۴) می‌پردازیم:
پتانسیل در خارج از یک کره با چگالی بار $\rho(x')$ را می‌توانیم برحسب هماهنگ‌های کروی بسط دهیم.
یعنی همان رابطه‌ی (۱-۴)

$$\Phi(x) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{4\pi}{2l+1} q_{lm} \frac{Y_{lm}(\theta, \varphi)}{r^{l+1}} \quad (1-4)$$

برای یک l و m مشخص پتانسیل به صورت زیر خواهد بود

$$\Phi(x) = \frac{1}{(2l+1)\epsilon_0} q_{lm} \frac{Y_{lm}(\theta, \varphi)}{r^{l+1}}$$

حال با توجه به $\mathbf{E} = -\nabla\Phi$ مؤلفه‌های میدان الکتریکی عبارت است از:

$$E_r = -\frac{\partial\Phi(x)}{\partial r} , \quad E_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial\Phi(x)}{\partial\theta} , \quad E_\varphi = -\frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial\Phi(x)}{\partial\varphi}$$

ضرایب q_{lm} به r' ، θ' و ϕ' بستگی دارند ولی به r ، θ و φ وابسته نمی باشند. لذا دارای مشتق بر حسب r و θ و φ نخواهند بود. لذا

$$\left[\begin{aligned} E_r &= -\frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{(\nu l + 1)\epsilon_0} q_{lm} \frac{Y_{lm}(\theta, \varphi)}{r^{l+1}} \right] = - \left[\frac{1}{(\nu l + 1)\epsilon_0} q_{lm} Y_{lm}(\theta, \varphi) \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r^{l+1}} \right) \right] \\ E_\theta &= -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{1}{(\nu l + 1)\epsilon_0} q_{lm} \frac{Y_{lm}(\theta, \varphi)}{r^{l+1}} \right] = -\frac{1}{r} \frac{1}{(\nu l + 1)\epsilon_0} q_{lm} \frac{1}{r^{l+1}} \frac{\partial}{\partial \theta} Y_{lm}(\theta, \varphi) \\ E_\varphi &= -\frac{1}{r \sin \theta} \left[\frac{1}{(\nu l + 1)\epsilon_0} q_{lm} \frac{Y_{lm}(\theta, \varphi)}{r^{l+1}} \right] \\ &= \frac{-1}{r \sin \theta (\nu l + 1)} q_{lm} \frac{1}{r^{l+1}} \frac{\partial}{\partial \varphi} Y_{lm}(\theta, \varphi) \\ E_r &= -\frac{1}{(\nu l + 1)\epsilon_0} q_{lm} Y_{lm}(\theta, \varphi) \frac{-(l+1)}{r^{l+2}} = \frac{l+1}{(\nu l + 1)\epsilon_0} q_{lm} \frac{Y_{lm}(\theta, \varphi)}{r^{l+2}} \\ E_\theta &= -\frac{1}{(\nu l + 1)\epsilon_0} q_{lm} \frac{1}{r} \frac{1}{r^{l+1}} \frac{\partial}{\partial \theta} Y_{lm}(\theta, \varphi) = -\frac{1}{(\nu l + 1)\epsilon_0} q_{lm} \frac{1}{r^{l+2}} \frac{\partial}{\partial \theta} Y_{lm}(\theta, \varphi) \\ E_\varphi &= -\frac{1}{(\nu l + 1)\epsilon_0} q_{lm} \frac{1}{r^{l+1}} \frac{im}{r \sin \theta} Y_{lm}(\theta, \varphi) \\ &= -\frac{1}{(\nu l + 1)\epsilon_0} q_{lm} \frac{1}{r^{l+2}} \frac{im}{\sin \theta} Y_{lm}(\theta, \varphi) \end{aligned} \right.$$

که همان روابط (۱۱-۴) هستند.

و حال اثبات رابطه ۴-۱۲ را پیگیری می کنیم. قبل از اثبات این رابطه به روش به دست آوردن هارمونیک های کروی $Y_{l,m}(\theta, \varphi)$ توجه کنید. تابع $Y_{l,m}(\theta, \varphi)$ عبارت است از:

$$Y_{l,m}(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{\nu l + 1}{2\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^m(\cos \theta) e^{im\varphi}$$

که در آن $P_l^m(\cos \theta)$ چندجمله ای های لژاندر است که چندجمله اول آن عبارت است از:

$$P_0(x) = 1, P_1(x) = x, P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1), P_3(x) = \frac{1}{2}(\Delta x^3 - 3x)$$

بدین ترتیب بعضی از هارمونیک های کروی $Y_{l,m}(\theta, \varphi)$ عبارتند از:

$$l = 0, m = 0 \rightarrow Y_{00} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}$$

$$l = 1 \rightarrow \begin{cases} m = 0 \rightarrow Y_{10} = p_1^0(\cos \theta) e^{i \times 0 \times \varphi} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta \\ m = 1 \rightarrow Y_{11} = \sqrt{\frac{3}{8\pi}} P_1'(\cos \theta) e^{im\varphi} = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta e^{i\varphi} \end{cases}$$

محاسبه گساورهای چندقطبی:

رابطه کلی گشتاورهای چندقطبی عبارتست از:

$$q_{lm} = \int Y_{lm}^*(\theta', \varphi') r'^l \rho(x') dx'^3$$

چون داریم:

$$Y_{l,-m}(\theta, \varphi) = (-1)^m Y_{l,m}^*(\theta, \varphi)$$

$$\text{بازای } l = 0, m = 0 \rightarrow q_{00} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \int \rho(x') dx'^3 = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} q \quad \text{گشتاور تک قطبی}$$

$$\begin{aligned} \text{بازای } l = 1, m = 1 \rightarrow q_{11} &= -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \int \sin \theta e^{-i\varphi} \rho(x') d^3x' \\ &= -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \int \sin \theta (\cos \varphi - i \sin \varphi) \rho(x') d^3x' \end{aligned}$$

$$q_{11} = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \int \left(\overbrace{\sin \theta \cos \varphi}^{x'} - i \overbrace{\sin \theta \sin \varphi}^{y'} \right) \rho(x') d^3x' \quad P \text{ گشتاور دو قطبی است.}$$

$$q_{11} = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \int (x' - iy') \rho(x') d^3x' = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} (P_x - iP_y)$$

$$\text{بازای } l = 1, m = 0 \rightarrow q_{10} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \int \cos \theta r' \rho(x') d^3x'$$

$$\text{چون } r' \cos \theta = z' \Rightarrow q_{10} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \int z' \rho(x') d^3x' = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} P_z$$

$$\text{بازای } l = 2, m = 2 \Rightarrow q_{22} = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{15}{2\pi}} \int (x' - iy')^2 \rho(x') d^3x'$$

$$= \frac{1}{12} \sqrt{\frac{15}{2\pi}} (Q_{11} - 2iQ_{12} - Q_{22}) \quad (1)$$

زیرا:

$$Q_{ij} = \int (\mathfrak{r}'_i x'_j - r'^2 \delta_{ij}) \rho(x') d^3x'$$

$$Q_{11} = \int (\mathfrak{r}' x'^2 - r'^2) \rho(x') d^3x' \quad (2)$$

$$Q_{12} = \int (\mathfrak{r}' x' y') \rho(x') d^3x', \quad -2iQ_{12} = \int (-6ix' y') \rho(x') d^3x' \quad (3)$$

$$Q_{22} = \int (\mathfrak{r}' y'^2 - r'^2) \rho(x') d^3x' \quad (4)$$

بسط طرف چپ رابطه (۱) عبارتست از:

$$q_{22} = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{15}{2\pi}} \int (x'^2 + y'^2 - 2ix'y') \rho(x') d^2x' \quad (5)$$

با ضرب صورت و مخرج طرف راست در عدد ۳ داریم:

$$q_{22} = \frac{1}{12} \sqrt{\frac{15}{2\pi}} \int (3x'^2 + 3y'^2 - 6ix'y') \rho(x') d^2x' \quad (6)$$

که با توجه به روابط (۲) و (۳) و (۴) رابطه (۱) اثبات می‌شود:

$$q_{22} = \frac{1}{12} \sqrt{\frac{15}{2\pi}} \int (Q_{11} - 2iQ_{12} - Q_{22}) \rho(x') d^2x' \quad \text{گشتاور چهارقطبی}$$

به همین ترتیب سایر گشتاورهای چندقطبی را می‌توان محاسبه کرد.

حال اثبات رابطه‌ی (۱۲-۴) را ادامه می‌دهیم. با توجه به رابطه (۱۱-۴) اگر یک دوقطبی (با $l = 1$) را در نظر بگیریم و گشتاور دوقطبی آن را در امتداد محور z فرض کنیم ($\mathbf{P} = P_z \mathbf{k}$) خواهیم داشت

$$l = 1, m = 0 \Rightarrow E_r = \frac{2}{3\epsilon_0} q_{10} \frac{Y_{10}(\theta, \varphi)}{r^3}$$

اما داریم

$$q_{10} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} P_z = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} P, \quad Y_{10}(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta$$

با جایگذاری این دو رابطه در رابطه‌ی قبلی، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} E_r &= \frac{2}{3\epsilon_0} \sqrt{\frac{3}{4\pi}} P \frac{\sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta}{r^3} = \frac{2}{3\epsilon_0} \frac{3}{4\pi} \frac{P \cos \theta}{r^3} \\ \Rightarrow E_r &= \frac{2P \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} \quad (\text{رابطه اول (۱۲-۴)}) \end{aligned}$$

برای E_θ نیز با توجه به اینکه $l = 1$ و $m = 0$ هستند داریم:

$$\begin{aligned} E_\theta &= -\frac{1}{3\epsilon_0} q_{10} \frac{1}{r^3} \frac{\partial}{\partial \theta} Y_{10}(\theta, \varphi) \\ &= -\frac{1}{3\epsilon_0} \left[\sqrt{\frac{3}{4\pi}} P \right] \frac{1}{r^3} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta \right] \\ \Rightarrow E_\theta &= -\frac{1}{3\epsilon_0} \frac{3}{4\pi} \frac{P}{r^3} [-\sin \theta] \Rightarrow E_\theta = \frac{P \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} \end{aligned}$$

که رابطه‌ی دوم (۱۲-۴) است.

$$\begin{aligned}
 &= \int d\Omega \mathbf{n} \frac{\frac{4}{3}\pi}{\frac{4}{3}\pi} \frac{r_{<}}{r_{>}} \left[\frac{3}{\lambda\pi} \sin \theta' \sin \theta e^{i(\varphi-\varphi')} + \frac{3}{4\pi} \cos \theta' \cos \theta + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{3}{\lambda\pi} \sin \theta' \sin \theta e^{-i(\varphi-\varphi')} \right] \\
 &= \int d\Omega \mathbf{n} \frac{r_{<}}{r_{>}} \left[\sin \theta' \sin \theta \left(\frac{e^{i(\varphi-\varphi')} + e^{-i(\varphi-\varphi')}}{2} \right) + \cos \theta' \cos \theta \right] \\
 &= \int d\Omega \mathbf{n} \frac{r_{<}}{r_{>}} (\cos \theta' \cos \theta + \sin \theta \sin \theta' \cos(\varphi - \varphi'))
 \end{aligned}$$

و با در نظر گرفتن رابطه

$$\cos \gamma = \cos \theta' \cos \theta + \sin \theta \sin \theta' \cos(\varphi - \varphi')$$

می توان نتیجه گرفت

$$\int d\Omega \frac{\mathbf{n}}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} = \frac{r_{<}}{r_{>}} \int d\Omega \mathbf{n} \cos \gamma \quad (۱۶-۴)$$

حال اگر این رابطه را در (۱۶-۴) قرار دهیم نتیجه می شود.

$$\int_{r < R} E(x) d^3x = -\frac{R^3}{4\pi\epsilon_0} \int d^3x' \rho(x') \frac{r_{<}}{r_{>}} \int d\Omega \mathbf{n} \cos \gamma$$

انتگرال زاویه ای برابر است با؛ $\frac{4}{3}\pi \mathbf{n}'$ [که در آن $\mathbf{n}' = \frac{\mathbf{r}'}{r}$]

لذا:

$$\int_{r < R} E(x) d^3x = \frac{-R}{4\pi\epsilon_0} \int d^3x' \rho(x') \frac{r_{<}}{r_{>}} \left[\frac{4}{3}\pi \mathbf{n}' \right]$$

با ساده کردن این رابطه می توان نتیجه گیری کرد که:

$$\int E(x) d^3x = -\frac{R^3}{3\epsilon_0} \int d^3x' \frac{r_{<}}{r_{>}} \mathbf{n} \rho(x') \quad (۱۷-۴)$$

حال اگر کره ای با شعاع R به طور کامل تمام بار را در برگیرد در رابطه (۱۷-۴) $r_{>} = R$ و $r_{<} = r'$ و لذا:

$$\int E(x) d^3x = -\frac{R^3}{3\epsilon_0} \int d^3x' \cdot \frac{r'}{R^3} \mathbf{n}' \rho(x') = -\frac{1}{3\epsilon_0} \int d^3x' r' \rho(x') \mathbf{n}$$

طبق تعریف گشتاور دوقطبی، یعنی رابطه ی (۸-۴)، داریم:

$$\mathbf{P} = \int d^3x' r' \rho(x') \mathbf{n}$$

که \mathbf{n} یکانی عمودی است که جهت آن به طرف خارج است یعنی $\mathbf{n} = \frac{\mathbf{x}}{R}$. حال با استفاده از رابطه (۱۷-۱)، که: $\Phi(x) = \int \frac{\rho(x') d^3 x'}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}$ می‌باشد، اگر این پتانسیل را در ۴-۱۵ قرار دهیم،

$$\begin{aligned} \int_{r < R} E(x) d^3 x &= - \int R^2 \int \frac{\rho(x') d^3 x'}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \mathbf{n} d\Omega \\ &= - \frac{R^2}{4\pi\epsilon_0} \int d^3 x' \rho(x') \int_{r=R} d\Omega \frac{\mathbf{n}}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \\ \int_{r < R} E(x) d^3 x &= - \frac{R^2}{4\pi\epsilon_0} \int d^3 x' \rho(x') \int_{r=R} d\Omega \frac{\mathbf{n}}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \end{aligned} \quad (۱۶-۴)$$

در رابطه اخیر، اگر بخواهیم این انتگرال را محاسبه کنیم، ملاحظه می‌کنیم که می‌توان برادر \mathbf{n} را برحسب زوایای کروی φ و θ به صورت مقابل نوشت: $\mathbf{n} = \mathbf{i} \sin \theta \cos \varphi + \mathbf{j} \sin \theta \sin \varphi + \mathbf{k} \cos \theta$. کاملاً پیدا است که مؤلفه‌های \mathbf{n} ، ترکیب‌هایی خطی از Y_{lm} برای تنها $l = 1$ هستند. بنابراین، شرط تعامد ایجاب می‌کند که تمام جملات این سری به جز جمله $l = 1$ ، حذف شوند (یعنی صفر باشند). بنابراین:

$$\begin{aligned} \int d\Omega \frac{\mathbf{n}}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} &= \int d\Omega \mathbf{n} \sum_{m=-1}^1 \frac{4\pi}{3} \frac{r <}{r >} Y_{1m}^*(\theta', \varphi) Y_{1m}(\theta, \varphi) \\ &= \int d\Omega \frac{4\pi}{3} \frac{r <}{r >} [Y_{11}^*(\theta', \varphi') Y_{11}(\theta, \varphi) + Y_{10}^*(\theta', \varphi') Y_{10}(\theta, \varphi) \\ &\quad + Y_{1,-1}^*(\theta', \varphi') Y_{1,-1}(\theta, \varphi)] \end{aligned}$$

در این رابطه، با در نظر گرفتن این مسئله که برای Y_{lm} ها، داریم:

$$\begin{aligned} Y_{11}(\theta, \varphi) &= -\sqrt{\frac{3}{4\pi}} \sin \theta e^{i\varphi}, \quad Y_{11}^*(\theta', \varphi') = -\sqrt{\frac{3}{4\pi}} \sin \theta' e^{-i\varphi'} \\ Y_{10}(\theta, \varphi) &= \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta, \quad Y_{10}^*(\theta', \varphi') = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta' \\ Y_{1,-1}(\theta, \varphi) &= \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \sin \theta e^{-i\varphi}, \quad Y_{1,-1}^*(\theta', \varphi') = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \sin \theta' e^{i\varphi'} \end{aligned}$$

اگر این مقادیر Y_{lm} ها را در رابطه فوق، قرار دهیم، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \int d\Omega \frac{\mathbf{n}}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} &= \int d\Omega \frac{4\pi}{3} \frac{r <}{r >} \left[\left(-\sqrt{\frac{3}{4\pi}} \sin \theta' e^{-i\varphi'} \right) \left(-\sqrt{\frac{3}{4\pi}} \sin \theta e^{i\varphi} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \left(\sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta' \right) \left(\sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta \right) + \left(\sqrt{\frac{3}{4\pi}} \sin \theta' e^{i\varphi'} \right) \left(\sqrt{\frac{3}{4\pi}} \sin \theta e^{-i\varphi} \right) \right] \end{aligned}$$

در نهایت اینکه E_{φ} مساوی صفر است [چراکه طبق رابطه‌ی (۱۱-۴) برای حالت $m = 0$ و $l = 1$ ضریب m ، کل جمله E_{φ} را صفر خواهد کرد. بنابراین $E_{\varphi=0}$ که همان رابطه‌ی سوم (۱۲-۴) است].
و اما اثبات رابطه‌ی (۱۳-۴):

$$\mathbf{E}(x) = \frac{\nabla \mathbf{n}(\mathbf{p} \cdot \mathbf{n}) - \mathbf{p}}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|^3} \quad (13-4)$$

پتانسیل دوقطبی الکتریکی عبارت است از: $\Phi(x) = \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}}{r^3}$ که در آن $r = |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|$. با قرار دادن مبدأ مختصات در مرکز دوقطبی خواهیم داشت $x_0 = 0$ که نتیجه می‌شود $r = x$ و داریم $\mathbf{x} = x\mathbf{n}$

$$\begin{aligned} \Phi(x) &= \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}}{x^3} \\ \Rightarrow \mathbf{E}(x) &= -\frac{\partial \Phi(x)}{\partial x} = -\left[\frac{\mathbf{p}x^{\top} - \nabla x^{\top} \mathbf{n}(\mathbf{p} \cdot \mathbf{x})}{x^6} \right] \\ &= -\left[\frac{\mathbf{p}x^{\top} - \nabla x^{\top} \mathbf{n}(\mathbf{p} \cdot x\mathbf{n})}{x^6} \right] \\ \Rightarrow \mathbf{E}(x) &= -\left[\frac{\mathbf{p}x^{\top} - \nabla x^{\top} \mathbf{n}(\mathbf{p} \cdot \mathbf{n})}{x^6} \right] = \frac{\nabla \mathbf{n}(\mathbf{p} \cdot \mathbf{n}) - \mathbf{p}}{x^3} \end{aligned}$$

که اثبات رابطه‌ی مورد نظر است.

* حال روابط ۱۴-۴ الی ۱۸-۴ در صفحه ۶ را به ترتیب اثبات می‌کنیم.

برای توزیع بار جایگزیده‌ی $\rho(x)$ که میدان $E(x)$ را در فضا ایجاد می‌کند، انتگرال E در حجم کره‌ای به شعاع R عبارت است از:

$$\int_{r < R} E(x) d^3x = \int_{r < R} -\nabla \Phi d^3x \quad (14-4)$$

حال اگر اتحاد زیر را در نظر بگیریم،

$$\int_{r < R} \nabla \phi d^3x = \oint_S \phi \mathbf{n} \cdot d\mathbf{a} \quad \text{لذا:} \quad -\int_{r < R} \nabla \phi d^3x = -\int \phi \mathbf{n} da \cos \theta$$

و داریم که $\cos \theta d\theta = R^2 d\Omega$ و اگر در رابطه اخیر، جایگذاری کنیم،

$$\begin{aligned} \int_{r < R} E(x) d^3x &= -\int_{r < R} \nabla \phi d^3x = -\int \phi \mathbf{n} R^2 d\Omega \\ \Rightarrow \int_{r < R} E(x) d^3x &= -\int_{R=R} R^2 d\Omega \phi(x) \mathbf{n} \end{aligned} \quad (15-4)$$

و این رابطه را در عبارت فوق جایگذاری می‌کنیم و نتیجه می‌گیریم که:

$$\int E(x) d^3x = -\frac{P}{3\epsilon_0} \quad (18-4)$$

اما چگونه به رابطه‌ی (۱۹-۴) برسیم؟

$$\int_{r < R} E(x) d^3x = \frac{4\pi}{3} R^3 E(0) \quad (19-4)$$

توزیع باری را در نظر می‌گیریم که کره‌ای به شعاع R تمام آن را دربرگرفته باشد (شکل a) و همان توزیع بار را در نظر می‌گیریم که کره‌ای به شعاع R در خارج از توزیع بار واقع شده است. انتگرال روی حجم V انجام می‌گیرد:

$$\int_{r < R} E(x) d^3x = - \int_{r < R} \nabla \Phi d^3x$$

طبق این رابطه می‌توانیم انتگرال حجمی را به انتگرال سطحی تبدیل کنیم

$$\oint_S \varphi \mathbf{n} da = \int_V \nabla \Phi dv$$

چون جزء سطح کره عبارت است از $da = R^2 d\Omega$ خواهیم داشت:

$$\int_{r < R} \mathbf{E}(x) dx^3 = - \int_V \nabla \Phi dx^3 = - \oint_S \Phi \mathbf{n} da = - \int \Phi(x) R^2 d\Omega \quad (1)$$

برطبق رابطه (۱۷-۱) داریم:

$$\Phi(x) = \int \frac{\rho(x')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dx'^3$$

با جایگذاری در رابطه‌ی بالا داریم:

$$\int_{r < R} E(x) d^3x = -R^2 \int \rho(x') dx^3 \int_{r=R} \frac{d\Omega \mathbf{n}}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \quad (2)$$

در انتگرال دوم چون انتگرال‌گیری روی $d\Omega$ است، $|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$ می‌تواند در آن نوشته شود و $\mathbf{n} = \frac{\mathbf{x}}{R}$ و همچنین \mathbf{n} عبارت است از:

$$\mathbf{n} = \mathbf{i} \sin \theta \cos \varphi + \mathbf{j} \sin \theta \sin \varphi + \mathbf{k} \cos \theta$$

برای $\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}$ رابطه‌ی (۳۸-۳) را داشتیم که در آن

$$\cos \gamma = \cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \cos(\varphi - \varphi')$$

$$\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r_{<}^l}{r_{>}^{l+1}} P_l(\cos \gamma)$$

$$\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} = \frac{4\pi}{2l+1} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{r_{<}^l}{r_{>}^{l+1}} Y_{l,m}^*(\theta', \varphi') Y_{l,m}(\theta, \varphi) \quad (70-3)$$

شرط تعامد توابع $Y_{l,m}(\theta, \varphi)$ ایجاب می‌کند که کلیه ترکیبات صفر شوند، مگر برای $l = 1$ و چون:

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{dx^l} (x^2 - 1)^l$$

چند جمله‌ای لژاندر عبارت است از خواهد شد:

$$P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x$$

$$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1), \quad P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$$

بنابراین $P_1(\cos \gamma) = \cos \gamma$ و خواهیم داشت:

$$\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r_{<}^l}{r_{>}^{l+1}} \cos \gamma = \frac{r'}{r^2} \cos \gamma$$

زیرا $r_{>} = r$ و $r_{<} = r'$ است.

با جاگذاری در (۲) داریم:

$$\begin{aligned} \int_{r=R} d\Omega \frac{\mathbf{n}}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} &= \frac{r'}{r^2} \int d\Omega \mathbf{n} \cos \gamma \\ \int_{r < R} \mathbf{E}(x) dx^3 &= -R^3 \int dx'^3 \rho(x') \int_{r=R} d\Omega \frac{\mathbf{n}}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \\ &= -R^3 \int dx'^3 \rho(x') \frac{r'}{r^2} \int d\Omega \mathbf{n} \cos \gamma \end{aligned}$$

چون $\mathbf{n} \cos \gamma = \mathbf{n}'$ تصویر بردار \mathbf{n} در امتداد \mathbf{n}' است و $\int d\Omega \mathbf{n}' = \frac{4\pi}{3} \mathbf{n}'$ خواهیم داشت:

$$\int_{r < R} \mathbf{E}(x) dx^3 = -\frac{4\pi R^3}{3} \int_{r=R} \frac{r' \mathbf{n}' \rho(x')}{r^2} dx'^3$$

با خروج r^2 از انتگرال به صورت R^2 و اینکه $r' = r'n'$ و نیز:

$$\mathbf{P} = \int \mathbf{r}' \rho(x') dx'^3$$

خواهیم داشت:

$$\int_{r < R} \mathbf{E}(x) dx^3 = \frac{-4\pi}{3} \mathbf{P}$$

اگر بار تماماً در خارج کره مورد نظر باشد یعنی: $r > R$ (فاصله گشتاور دو قطبی از مبدأ مختصات) $r < R$ (شعاع کره‌ای که روی آن انتگرال‌گیری می‌شود)

$$\int_{r < R} \mathbf{E}(x) dx^3 = \frac{-4\pi R^2}{3} \times R \int \frac{\mathbf{n}\rho(x') dx'^3}{r'^2}$$

مطابق قانون کولن (۱-۵) مقدار انتگرال مساوی منفی میدان الکتریکی در مرکز کره است زیرا مطابق شکل جهت میدان الکتریکی \mathbf{E} خلاف جهت بردار یکه‌ی \mathbf{n} است بنابراین:

$$\int_{r < R} \mathbf{E}(x) dx^3 = \frac{4\pi}{3} R^3 E(\circ) \quad (۱۹-۴)$$

و بدین ترتیب رابطه ۱۹-۴ اثبات می‌شود.

اثبات رابطه ۴۵-۴ ص ۱۷ و رابطه ۴۷-۴ ص ۱۸:

در روش تصاویر، طبیعی است که باید بار تصویری q' را در مکان متقارن A' (همانند شکل ۴-۴) قرار دهیم. بنابراین پتانسیل در نقطه P با مختصات استوانه‌ای (ρ, φ, z) ، عبارت خواهد بود با:

$$\Phi_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{R_1} + \frac{q'}{R_2} \right) \quad z > 0 \quad (۴۳-۴)$$

که در آن می‌توان گفت که: $R_1 = \sqrt{\rho^2 + (d-z)^2}$ و $R_2 = \sqrt{\rho^2 + (d+z)^2}$ همچنین، برای ناحیه $z < 0$ ، چون باری وجود ندارد و از آنجایی که پتانسیل باید جوابی برای معادله لاپلاس (بدون تکینگی) در آن ناحیه باشد، ساده‌ترین فرض این است که پتانسیل، معادل پتانسیل ناشی از یک بار q'' در مکان A از بار واقعی q باشد. یعنی:

$$\Phi_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q''}{R_1} \quad z < 0 \quad (۴۴-۴)$$

با استفاده از شرایط مرزی که با رابطه ۴-۴ داده شده است، داریم:

$$\begin{cases} (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) \cdot \mathbf{n}_{21} = \sigma & (1) \\ (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) \times \mathbf{n}_2 = 0 & (2) \end{cases}$$

ابتدا شرط مرزی اول یعنی رابطه (۱) را در نظر می‌گیریم

$$D_{2n} - D_{1n} = \sigma = 0 \rightarrow \epsilon_2 E_{2n} = \epsilon_1 E_{1n}$$

$$\rightarrow \epsilon_2 \frac{\partial \Phi_2}{\partial z} \Big|_{z=0} = \epsilon_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} \Big|_{z=0}$$

$$\epsilon_2 \left[\frac{q''}{4\pi\epsilon_2} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{R_1} \right) \right]_{z=0} = \left[\epsilon_1 \frac{q}{4\pi\epsilon_1} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{R_1} \right) + \epsilon_1 \frac{q'}{4\pi\epsilon_1} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{R_2} \right) \right]_{z=0} \quad (3)$$

حال با استفاده از تعریف‌های R_2 و R_1 ، می‌توان گفت:

$$R_1 = \sqrt{\rho^2 + (d-z)^2}, \quad \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{R_1} \right) \Big|_{z=0} = -\frac{-(d-z)}{[\rho^2 + (d-z)^2]^{3/2}} \Big|_{z=0}$$

$$= \frac{d}{(\rho^2 + d^2)^{3/2}}$$

$$R_2 = \sqrt{\rho^2 + (d+z)^2}, \quad \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{R_2} \right) \Big|_{z=0} = -\frac{(d+z)}{[\rho^2 + (d+z)^2]^{3/2}} \Big|_{z=0}$$

$$= -\frac{d}{(\rho^2 + d^2)^{3/2}}$$

اگر این دو مقدار را در رابطه (۳) قرار دهیم، خواهیم داشت:

$$\epsilon_2 \frac{q''}{4\pi\epsilon_2} \frac{d}{(\rho^2 + d^2)^{3/2}} = \epsilon_1 \frac{q}{4\pi\epsilon_1} \frac{d}{(\rho^2 + d^2)^{3/2}} + \epsilon_1 \frac{q'}{4\pi\epsilon_1} \frac{-d}{(\rho^2 + d^2)^{3/2}}$$

با ساده کردن رابطه اخیر، کاملاً واضح است که:

$$\frac{d}{4\pi(\rho^2 + d^2)^{3/2}} q'' = \frac{d}{4\pi(\rho^2 + d^2)^{3/2}} (q - q') \rightarrow \text{لذا: } q'' = q - q' \quad (4)$$

و با استفاده از شرط مرزی دوم یعنی رابطه (۲)، خواهیم داشت:

$$E_{2t} - E_{1t} = 0 \Rightarrow E_{2t} = E_{1t} \Rightarrow -\frac{\partial \Phi_2}{\partial \rho} \Big|_{z=0} = -\frac{\partial \Phi_1}{\partial \rho} \Big|_{z=0}$$

$$= -\frac{\partial}{\partial \rho} \left[\frac{q''}{4\pi\epsilon_2} \frac{1}{R_1} \right]_{z=0} = -\frac{\partial}{\partial \rho} \left[\frac{q}{4\pi\epsilon_1} \frac{1}{R_1} + \frac{q'}{4\pi\epsilon_2} \frac{1}{R_2} \right]_{z=0}$$

$$\frac{q''}{\epsilon_2} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{1}{R_1} \right) \Big|_{z=0} = \frac{q}{\epsilon_2 \pi \epsilon_1} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{1}{R_1} \right) \Big|_{z=0} + \frac{q'}{\epsilon_2 \pi \epsilon_1} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{1}{R_2} \right) \Big|_{z=0} \quad (5)$$

باز به تعریف‌های R_1 و R_2 بازمی‌گردیم، داریم:

$$R_1 = \sqrt{\rho^2 + (d-z)^2} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{1}{R_1} \right) \Big|_{z=0} = -\frac{\rho}{[\rho^2 + (d-z)^2]^{3/2}} \Big|_{z=0} \\ = \frac{-\rho}{(\rho^2 + d^2)^{3/2}}$$

$$R_2 = \sqrt{\rho^2 + (d+z)^2} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{1}{R_2} \right) \Big|_{z=0} = -\frac{\rho}{[\rho^2 + (d+z)^2]^{3/2}} \Big|_{z=0} \\ = \frac{-\rho}{(\rho^2 + d^2)^{3/2}}$$

و با جاگذاری این دو مقدار اخیر در رابطه (۵)، می‌توان گفت:

$$\frac{q''}{\epsilon_2} \left[\frac{-\rho}{(\rho^2 + d^2)^{3/2}} \right] = \frac{q}{\epsilon_1} \left[\frac{-\rho}{(\rho^2 + d^2)^{3/2}} \right] + \frac{q'}{\epsilon_1} \left[\frac{-\rho}{(\rho^2 + d^2)^{3/2}} \right] \\ \frac{q''}{\epsilon_2} = \frac{q}{\epsilon_1} + \frac{q'}{\epsilon_1} \Rightarrow \frac{1}{\epsilon_1} (q + q') = \frac{1}{\epsilon_2} q'' \quad (6)$$

حال برای یافتن مقدار q' و q'' برحسب q ، روابط (۵) و (۶) را تلفیق می‌کنیم:

$$\begin{cases} q'' = q - q' \\ \frac{1}{\epsilon_2} q'' = \frac{1}{\epsilon_1} (q + q') \Rightarrow \frac{1}{\epsilon_2} (q - q') = \frac{1}{\epsilon_1} (q + q') \end{cases} \\ \epsilon_1 (q - q') = \epsilon_2 (q + q') \Rightarrow \epsilon_1 q - \epsilon_1 q' = \epsilon_2 q + \epsilon_2 q' \\ \epsilon_1 q - \epsilon_2 q = \epsilon_1 q' + \epsilon_2 q' \Rightarrow q(\epsilon_1 - \epsilon_2) = q'(\epsilon_2 + \epsilon_1) \\ \text{یعنی: } q' = - \left(\frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{\epsilon_2 + \epsilon_1} \right) q \quad (\text{رابطه اول ۴۵-۴})$$

و اگر این رابطه را در رابطه (۵) جاگذاری کنیم، خواهیم داشت:

$$q'' = q - q' = q - \left[- \left(\frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{\epsilon_2 + \epsilon_1} \right) q \right] = q \left(1 + \frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{\epsilon_2 + \epsilon_1} \right) \\ = q \left(\frac{\epsilon_2 + \epsilon_1 + \epsilon_2 - \epsilon_1}{\epsilon_2 + \epsilon_1} \right) \\ \Rightarrow q'' = \left(\frac{2\epsilon_2}{\epsilon_2 + \epsilon_1} \right) q \quad (\text{رابطه دوم ۴۵-۴})$$

چگالی بار قطبشی با رابطه $-\nabla \cdot P$ مشخص می‌شود و در هر دی‌الکتریک، $\mathbf{P} = \epsilon_0 \chi_e \mathbf{E}$ است. در سطح $z = 0$ ، یک چگالی بار سطحی قطبشی به وجود می‌آید که،

$$\sigma_{\text{pol}} = -(\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1) \cdot \mathbf{n}_{21} \quad (۶۴-۴)$$

$$\sigma_{\text{pol}} = -(\mathbf{P}_2 \cdot \mathbf{n}_{21} - \mathbf{P}_1 \cdot \mathbf{n}_{21}) = -(-\mathbf{P}_{2n} + \mathbf{P}_{1n})$$

زیرا \mathbf{n}_{21} و \mathbf{P}_{2n} در خلاف جهت ولی \mathbf{E}_{1n} و \mathbf{n}_{21} در جهت همدیگر هستند. لذا:

$$\sigma_{\text{pol}} = \mathbf{P}_{2n} - \mathbf{P}_{1n} = \epsilon_0 \chi_{e2} E_{2n} - \epsilon_0 \chi_{e1} E_{1n}$$

حال، E_{2n} و E_{1n} را محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{aligned} E_{1n} &= -\left. \frac{\partial \phi_1}{\partial z} \right|_{z=0} = -\left. \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{q}{4\pi\epsilon_1 R_1} + \frac{q'}{4\pi\epsilon_1 R_2} \right] \right|_{z=0} \\ &= -\left[\frac{q}{4\pi\epsilon_1} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{R_1} \right) + \frac{q'}{4\pi\epsilon_1} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{R_2} \right) \right]_{z=0} \end{aligned}$$

در این رابطه، مقادیر $\left. \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{R_2} \right) \right|_{z=0}$ و $\left. \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{R_1} \right) \right|_{z=0}$ را که محاسبه نموده بودیم، جاگذاری می‌کنیم:

$$\Rightarrow \frac{\epsilon - \epsilon_0}{\epsilon} = \frac{\epsilon_2 \chi_e}{\epsilon} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\epsilon_1 - \epsilon_0}{\epsilon_1} = \frac{\epsilon_0 \chi_{e1}}{\epsilon_1} \\ \frac{\epsilon_2 - \epsilon_0}{\epsilon_2} = \frac{\epsilon_0 \chi_{e2}}{\epsilon_2} \end{cases}$$

دو رابطه اخیر را با هم تلفیق می‌کنیم، با این کار:

$$\begin{aligned} -\frac{\epsilon_0 \chi_{e1}}{\epsilon_1} + \frac{\epsilon_0 \chi_{e2}}{\epsilon_2} &= -\frac{\epsilon_1 - \epsilon_0}{\epsilon_1} + \frac{\epsilon_2 - \epsilon_0}{\epsilon_2} \\ -\frac{\epsilon_0 \chi_{e1}}{\epsilon_1} + \frac{\epsilon_0 \chi_{e2}}{\epsilon_2} &= \frac{-\epsilon_1 \epsilon_2 + \epsilon_0 \epsilon_2 + \epsilon_2 \epsilon_1 - \epsilon_1 \epsilon_0}{\epsilon_1 \epsilon_2} = \frac{\epsilon_0 (\epsilon_2 - \epsilon_1)}{\epsilon_1 \epsilon_2} \end{aligned}$$

این رابطه را در رابطه (۹) جاگذاری می‌کنیم، با این کار داریم

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{pol}} &= -\frac{q}{2\pi\epsilon_1 + \epsilon_2} \cdot \frac{\epsilon_0 (\epsilon_2 - \epsilon_1)}{\epsilon_1 \epsilon_2} \cdot \frac{d}{(\rho^2 + d^2)^{3/2}} \\ \sigma_{\text{pol}} &= -\frac{q \epsilon_0 (\epsilon_2 - \epsilon_1)}{2\pi \epsilon_1 (\epsilon_2 + \epsilon_1)} \frac{d}{(\rho^2 + d^2)^{3/2}} \quad (۴۷-۴) \end{aligned}$$

اثبات روابط ۴-۵۴ ص ۱۹ الی ۴-۶۰ ص ۲۱:

برای یک کره دی‌الکتریک به شعاع a و با ثابت دی‌الکتریک $\frac{\epsilon}{\epsilon_0}$ که در درون یک میدان الکتریکی یکنواخت اولیه قرار گرفته است و در بیرون و داخل کره، هیچ باری نداریم:

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho = 0 \Rightarrow \epsilon \nabla \cdot (\epsilon \mathbf{E}) = 0 \Rightarrow \epsilon \nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \Rightarrow \nabla \cdot \mathbf{E} = 0$$

$$\Rightarrow \nabla \cdot (-\nabla \Phi) = 0 \Rightarrow -\nabla^2 \Phi = 0 \Rightarrow \nabla^2 \Phi = 0$$

یعنی پتانسیل مورد نظر، می‌بایست در معادله لاپلاس، صدق کند. بنابراین شکل کلی پتانسیل به صورت زیر است

$$\Phi(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} [a_l r^l + b_l r^{-(l+1)}] P_l(\cos \theta)$$

با استفاده از این رابطه، شکل تابع پتانسیل در داخل و خارج کره به صورت زیر خواهد بود:

$$E_{\lambda n} = - \left[\frac{q}{4\pi\epsilon_1} \frac{d}{(\rho^2 + d^2)^{3/2}} + \frac{q'}{4\pi\epsilon_1} \frac{-d}{(\rho^2 + d^2)^{3/2}} \right]$$

همچنین، q' را برحسب q طبق رابطه ۴-۴۵، جاگذاری می‌کنیم:

$$E_{\lambda n} = - \frac{1}{4\pi\epsilon_1} \left[q - q \left(-\frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{\epsilon_2 + \epsilon_1} \right) \right] \frac{d}{(\rho^2 + d^2)^{3/2}}$$

$$E_{\lambda n} = - \frac{q}{4\pi\epsilon_1} \left(1 + \frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{\epsilon_2 + \epsilon_1} \right) \left(\frac{d}{(\rho^2 + d^2)^{3/2}} \right)$$

$$E_{\lambda n} = - \frac{q}{4\pi\epsilon_1} \left(\frac{2\epsilon_2}{\epsilon_2 + \epsilon_1} \right) \left(\frac{d}{(\rho^2 + d^2)^{3/2}} \right) \quad (7)$$

به همین ترتیب، برای E_{2n} هم این عملیات را تکرار می‌کنیم، یعنی:

$$E_{2n} = - \frac{\partial \phi_2}{\partial z} \Big|_{z=0} = - \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{q''}{4\pi\epsilon_2} \frac{1}{R_1} \right] = - \frac{q''}{4\pi\epsilon_2} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{R_1} \right) \Big|_{z=0}$$

حال مقادیر $\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{R_1} \right) \Big|_{z=0}$ و q'' را که قبلاً محاسبه نمودیم، در این رابطه قرار می‌دهیم. بنابراین:

$$E_{2n} = - \frac{1}{4\pi\epsilon_2} q \left(\frac{2\epsilon_2}{\epsilon_2 + \epsilon_1} \right) \left(\frac{d}{(\rho^2 + d^2)^{3/2}} \right)$$

$$E_{2n} = - \frac{q}{4\pi\epsilon_2} \left(\frac{2\epsilon_2}{\epsilon_2 + \epsilon_1} \right) \left(\frac{d}{(\rho^2 + d^2)^{3/2}} \right) \quad (8)$$

حال اگر این روابط (۷) و (۸) اخیر را در رابطه اصلی σ_{pol} جاگذاری کنیم، داریم:

$$\sigma_{pol} = \left(\epsilon_0 \chi_{er} \frac{-q}{4\pi\epsilon_2} \frac{2\epsilon_2}{\epsilon_2 + \epsilon_1} \frac{d}{(\rho^2 + d^2)^{3/2}} - \epsilon_0 \chi_{e1} \frac{-q}{4\pi\epsilon_1} \frac{2\epsilon_2}{\epsilon_2 + \epsilon_1} \frac{d}{(\rho^2 + d^2)^{3/2}} \right)$$

$$\sigma_{pol} = - \frac{q}{2\pi} \frac{\epsilon_2}{\epsilon_2 + \epsilon_1} \left(\frac{\epsilon_0 \chi_{er}}{\epsilon_2} - \frac{\epsilon_0 \chi_{e1}}{\epsilon_1} \right) \frac{d}{(\rho^2 + d^2)^{3/2}} \quad (9)$$

در این رابطه، ابتدا مقدار داخل پتانتر را ساده تر می‌کنیم، برای این کار از رابطه ۴-۳۸ کمک می‌گیریم:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 (1 + \chi_e) = \varepsilon_0 + \varepsilon_0 \chi_e \rightarrow \varepsilon - \varepsilon_0 = \varepsilon_0 \chi_e$$

$$\text{در داخل کره} : \Phi_{in} = \sum_{l=0}^{\infty} [A_l r^l P_l(\cos \theta) + A'_l r^{-(l+1)} P_l(\cos \theta)] = \Phi_1$$

$$\text{در خارج کره} : \Phi_{out} = \sum_{l=0}^{\infty} [B_l r^l P_l(\cos \theta) + C_l r^{-(l+1)} P_l(\cos \theta)] = \Phi_2 \quad (49-4)$$

در داخل کره، خصوصاً در مرکز کره، پتانسیل محدود است و نباید بینهایت شود. لذا وقتی

$$r \rightarrow 0 : \Phi_1 = \sum_{l=0}^{\infty} A_l r^l P_l(\cos \theta) + A'_l r^{-l-1} P_l(\cos \theta)$$

جمله اول این رابطه، یک مقدار متناهی و محدود است ولی جمله که دوم یک صفر در مخرج دارد، بینهایت خواهد شد، این اتفاق ناخوشایند است و باید از آن جلوگیری شود. برای جلوگیری از این عمل، می‌بایست $A'_l = 0$ باشد. لذا:

$$\Phi_{in} = \Phi_1 = \sum_{l=0}^{\infty} A_l r^l P_l(\cos \theta) \quad (48-4)$$

حال در این مرحله، ضرایب را در این دو تابع پتانسیل، محاسبه می‌کنیم.

در خارج کره، و در نقاط دور، میدان الکتریکی و در نتیجه پتانسیل، باید دست نخورده باقی بماند. یعنی:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} = -\nabla\Phi \rightarrow \Phi = -\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} &= -\int E_z dz = -E_0 \int dz = -E_0 z \\ &= -E_0 r \cos \theta \end{aligned}$$

$$r \rightarrow \infty : \Phi_2 = \left[\sum_{l=0}^{\infty} B_l r^l P_l(\cos \theta) + C_l r^{-(l+1)} P_l(\cos \theta) \right]_{r=\infty}$$

این دو مقدار، می‌بایست با هم برابر باشند. بنابراین:

$$\begin{aligned} B_0 + \frac{C_0}{r} + B_1 r \cos \theta + \frac{C_1}{r^2} \cos \theta + B_2 r^2 (3 \cos^2 \theta - 1) \\ + \frac{C_2}{r^3} (3 \cos^2 \theta - 1) = -E_0 r \cos \theta \end{aligned}$$

در این رابطه، جملات شامل ضرایب C ، که توان‌های r در مخرج دارند، به علت اینکه $r \rightarrow \infty$ میل می‌کند، همگی صفر می‌شوند و لذا فقط جملات شامل ضرایب B باقی می‌مانند. بنابراین به سادگی پیداست که:

$$B_1 = -E_0, \quad B_0 = B_2 = \dots = 0$$

$$\Phi_2 = -E_0 r \cos \theta + \sum_{l=0}^{\infty} C_l r^{-(l+1)} P_l(\cos \theta) \quad (1)$$

حال، با استفاده از دو شرط مرزی که با رابطه ۴-۴۰ آمده است، می‌توان گفت:

$$(\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) \cdot \mathbf{n}_{21} = \sigma = 0 \quad (\text{شرط مرزی اول، یعنی رابطه اول ۴-۴۰})$$

$$\begin{aligned} \epsilon_0 E_{2n} - \epsilon E_{1n} = 0 &\Rightarrow E_{2n} = \frac{\epsilon}{\epsilon_0} E_{1n} \\ &\Rightarrow -\frac{\partial \Phi_2}{\partial r} \Big|_{r=a} = \frac{\epsilon}{\epsilon_0} \left[-\frac{\partial \Phi_1}{\partial r} \right]_{r=a} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi_2}{\partial r} \Big|_{r=a} &= \frac{\epsilon}{\epsilon_0} \frac{\partial \Phi_1}{\partial r} \Big|_{r=a} \\ \therefore \frac{\partial}{\partial r} \left[-E_0 r \cos \theta + \sum_{l=0}^{\infty} C_l r^{-(l+1)} P_l(\cos \theta) \right]_{r=a} &= \frac{\epsilon}{\epsilon_0} \frac{\partial}{\partial r} \left[\sum_{l=0}^{\infty} l A_l r^l P_l(\cos \theta) \right]_{r=a} \\ \left[-E_0 \cos \theta + \sum_{l=0}^{\infty} -(l+1) C_l r^{-(l+2)} P_l(\cos \theta) \right]_{r=a} &= \frac{\epsilon}{\epsilon_0} \left[\sum_{l=0}^{\infty} l A_l r^{l-1} P_l(\cos \theta) \right]_{r=a} \\ -E_0 \cos \theta - C_0 a^{-2} P_0(\cos \theta) - 2C_1 a^{-3} P_1(\cos \theta) + \sum_{l=2}^{\infty} -(l+1) C_l a^{-(l+2)} P_l(\cos \theta) & \\ = \frac{\epsilon}{\epsilon_0} \left[0 + A_1 a^0 P_1(\cos \theta) + \sum_{l=2}^{\infty} l A_l a^{l-1} P_l(\cos \theta) \right] & \\ -E_0 \cos \theta - C_0 a^{-2} - 2C_1 a^{-3} \cos \theta + \sum_{l=2}^{\infty} -(l+1) C_l a^{-(l+2)} P_l(\cos \theta) & \\ = \frac{\epsilon}{\epsilon_0} \left(A_1 \cos \theta + \sum_{l=2}^{\infty} l A_l a^{l-1} P_l(\cos \theta) \right) & \end{aligned}$$

از این رابطه، به سادگی پیداست که داریم: $C_0 = 0$. همچنین:

$$\begin{cases} -E_0 - 2C_1 a^{-3} = \frac{\epsilon}{\epsilon_0} A_1 \\ -(l+1) \frac{C_l}{a^{l+2}} = \frac{\epsilon}{\epsilon_0} l A_l a^{l-1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\epsilon}{\epsilon_0} A_1 = -E_0 - 2 \frac{C_1}{a^3} \\ \frac{\epsilon}{\epsilon_0} l A_l = -(l+1) \frac{C_l}{a^{l+1}} \quad l \neq 1 \end{cases} \quad (52-4)$$

$$(\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) \times \mathbf{n}_{21} = 0 \Rightarrow E_{1t} = E_{2t}$$

$$-\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi_1}{\partial \theta} \Big|_{r=a} = -\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi_2}{\partial \theta} \Big|_{r=a} \Rightarrow \frac{\partial \Phi_1}{\partial \theta} \Big|_{r=a} = \frac{\partial \Phi_2}{\partial \theta} \Big|_{r=a}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\sum_{l=0}^{\infty} A_l r^l P_l(\cos \theta) \right]_{r=a} &= \frac{\partial}{\partial \theta} \left[-E_0 r \cos \theta + \sum_{l=0}^{\infty} C_l r^{-(l+1)} P_l(\cos \theta) \right] \\ \sum_{l=0}^{\infty} A_l a^l \frac{\partial}{\partial \theta} P_l(\cos \theta) &= -E_0 a \frac{\partial}{\partial \theta} (\cos \theta) + \sum_{l=0}^{\infty} C_l a^{-(l+1)} \frac{\partial}{\partial \theta} P_l(\cos \theta) \\ A_0 a^0 \frac{\partial}{\partial \theta} P_0(\cos \theta) + A_1 a \frac{\partial}{\partial \theta} P_1(\cos \theta) &+ \sum_{l=2}^{\infty} A_l a^l \frac{\partial}{\partial \theta} P_l(\cos \theta) \\ &= E_0 a \sin \theta + C_0 a^{-1} \frac{\partial}{\partial \theta} P_0(\cos \theta) + C_1 a^{-2} \frac{\partial}{\partial \theta} P_1(\cos \theta) \\ &+ \sum_{l=2}^{\infty} C_l a^{-(l+1)} \frac{\partial}{\partial \theta} P_l(\cos \theta) \\ -A_1 a \sin \theta + \sum_{l=2}^{\infty} A_l a^l \frac{\partial}{\partial \theta} P_l(\cos \theta) &= E_0 a \sin \theta - C_1 a^{-2} \sin \theta \\ &+ \sum_{l=2}^{\infty} C_l a^{-(l+1)} \frac{\partial}{\partial \theta} P_l(\cos \theta) \\ A_1 a \sin \theta + \sum_{l=2}^{\infty} A_l a^l \frac{\partial}{\partial \theta} P_l(\cos \theta) &= (E_0 a - C_1 a^{-2}) \sin \theta \\ &+ \sum_{l=2}^{\infty} C_l a^{-(l+1)} \frac{\partial}{\partial \theta} P_l(\cos \theta) \end{aligned}$$

با استفاده از رابطه اخیر، به راحتی روابط زیر را می‌توان نتیجه‌گیری کرد:

$$\begin{cases} -A_1 a \sin \theta = (E_0 a - C_1 a^{-2}) \sin \theta \\ A_l a^l = C_l a^{-(l+1)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_1 = -E_0 + C_1 a^{-3} \\ A_l = \frac{C_l}{a^{2l+1}} \quad l \neq 1 \end{cases} \quad (51-4)$$

معادلات دوم در رابطه 51-4 و 52-4 می‌توانند به‌طور همزمان، تنها با $C_l = A_l = 0$ (به‌ازای تمام مقادیر $l \neq 1$) برآورده شوند و برای بقیه ضرایب داریم:

$$\begin{cases} 51-4 \text{ رابطه اول} : -E_0 - 2C_1 a^{-3} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} A_1 \\ 52-4 \text{ رابطه اول} : A_1 = -E_0 + C_1 a^{-3} \end{cases} \\ \Rightarrow -E_0 - 2C_1 a^{-3} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} (-E_0 + C_1 a^{-3}) \\ -E_0 - 2C_1 a^{-3} = -\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} E_0 + C_1 \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} a^{-3}$$

$$\Rightarrow -E_0 + \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} E_0 = C_0 \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} a^{-3} + 2C_1 a^{-3}$$

$$\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} - 1\right) E_0 = C_1 \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} + 2\right) \Rightarrow C_1 = \left(\frac{\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} - 1}{\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} + 2}\right) a^3 E_0 \quad \text{رابطه دوم (۵۳-۴)}$$

حال اگر این مقدار C را در رابطه ۵۱-۴ قرار دهیم:

$$A_1 = -E_0 + C_1 a^{-3} = -E_0 + \left[\left(\frac{\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} - 1}{\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} + 2}\right) a^3 E_0 \right] a^{-3}$$

$$A_1 = -E_0 + \frac{\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} - 1}{\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} + 2} E_0 = - \left(1 - \frac{\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} - 1}{\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} + 2} \right) E_0$$

$$= - \frac{\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} + 2 - \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} + 1}{\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} + 2} E_0$$

$$\text{رابطه اول ۵۳-۴} \quad A_1 = - \left(\frac{3}{2 + \varepsilon/\varepsilon_0} \right) E_0 \quad \text{بنابراین نتیجه می‌شود:}$$

بنابراین، A_1 و C_1 را در پتانسیل‌های Φ_1 و Φ_2 جاگذاری می‌کنیم:

$$\text{در داخل کره} : \Phi_1 = \Phi_{\text{in}} = \sum_{l=0}^{\infty} A_l r^l P_l(\cos \theta) = A_1 r P_1(\cos \theta) = A_1 r \cos \theta$$

$$\Phi_{\text{in}} = - \left(\frac{3}{\varepsilon/\varepsilon_0 + 2} \right) E_0 r \cos \theta \quad \text{رابطه اول ۵۴-۴}$$

$$\text{در خارج کره} : \Phi_2 = \Phi_{\text{out}} = -E_0 r \cos \theta + \sum_{l=0}^{\infty} C_l r^{-(l+1)} P_l(\cos \theta)$$

$$\Phi_{\text{out}} = -E_0 r \cos \theta + C_1 r^{-2} P_1(\cos \theta)$$

$$\Phi_{\text{out}} = -E_0 r \cos \theta + \left[\left(\frac{\varepsilon/\varepsilon_0 - 1}{\varepsilon/\varepsilon_0 + 2} \right) a^3 E_0 \right] \frac{\cos \theta}{r^2}$$

$$\Phi_{\text{out}} = -E_0 r \cos \theta + \left(\frac{\varepsilon/\varepsilon_0 - 1}{\varepsilon/\varepsilon_0 + 2} \right) E_0 \frac{a^3}{r^2} \cos \theta \quad \text{رابطه دوم ۵۴-۴}$$

همچنین، میدان در داخل کره، از منفی شیب پتانسیل به دست خواهد آمد. یعنی

$$\mathbf{E}_{\text{in}} = -\nabla \phi_{\text{in}} = \frac{3}{\varepsilon/\varepsilon_0 + 2} \nabla (E_0 r \cos \theta)$$

$$\mathbf{E}_{in} = \frac{3}{\varepsilon/\varepsilon_0 + 2} \left[\mathbf{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} (E_0 r \cos \theta) + \theta \cdot \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (E_0 r \cos \theta) \right]$$

$$\mathbf{E}_{in} = \frac{3}{\varepsilon/\varepsilon_0 + 2} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}_0 \cos \theta + \theta \cdot E_0 \sin \theta)$$

$$\Rightarrow \mathbf{E}_{in} = \frac{3}{\varepsilon/\varepsilon_0 + 2} E_0 \quad (55-4)$$

حال اگر $\varepsilon > \varepsilon_0$ باشد، $\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} > 1$ و بنابراین $\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} + 2 > 3$ و در نتیجه:

$$\frac{3}{\varepsilon/\varepsilon_0 + 2} < 1 \Rightarrow \left(\frac{3}{\varepsilon/\varepsilon_0 + 2} \right) E_0 < E_0 \Rightarrow E_{in} < E_0.$$

نکته دیگر اینکه پتانسیل در خارج کره، هم‌ارز با برآیند میدان اعمال شده E_0 و میدان ناشی از یک دوقطبی الکتریکی در مبدأ می‌باشد و بنابراین، گشتاور دوقطبی کره، برابر خواهد بود با:

$$\Phi_{out} = \Phi_{E_0} + \Phi_P$$

$$\Phi_{out} = -E_0 r \cos \theta + \frac{\varepsilon/\varepsilon_0 - 1}{\varepsilon/\varepsilon_0 + 2} E_0 \frac{a^3}{r^2} \cos \theta$$

به وضوح نتیجه می‌گیریم،

$$\Phi_P = \frac{\varepsilon/\varepsilon_0 - 1}{\varepsilon/\varepsilon_0 + 2} E_0 \frac{a^3}{r^2} \cos \theta$$

این رابطه، پتانسیل ناشی از یک بار قطبی است. از سوی دیگر، برای یک دو قطبی با گشتاور دوقطبی

$$\Phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\mathbf{P} \cdot \mathbf{r}}{r^3} \text{ یا } \Phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{P \cos \theta}{r^2}$$

بنابراین:

$$\mathbf{P} = 4\pi\varepsilon_0 \frac{\varepsilon/\varepsilon_0 - 1}{\varepsilon/\varepsilon_0 + 2} E_0 a^3 \quad (56-4)$$

جهت گشتاور دو قطبی به دست آمده، در راستای میدان اعمال شده می‌باشد. البته این گشتاور را می‌توان به عنوان انتگرال حجمی قطبش \mathbf{P} تعبیر نمود. قطبش عبارت است از:

$$\mathbf{P} = (\varepsilon - \varepsilon_0) \mathbf{E}_{in}$$

و با توجه به رابطه 55-4، می‌توان نتیجه‌گیری کرد که:

$$\mathbf{P} = (\varepsilon/\varepsilon_0) \frac{3}{\varepsilon/\varepsilon_0 + 2} E_0 = \varepsilon_0 \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} - 1 \right) \left(\frac{3}{\varepsilon/\varepsilon_0 + 2} \right) E_0.$$

$$\Rightarrow \mathbf{P} = 3\varepsilon_0 \frac{\varepsilon/\varepsilon_0 - 1}{\varepsilon/\varepsilon_0 + 2} E_0 \quad \text{رابطه (57-4)}$$

با توجه به قطبش به دست آمده، چگالی بار - سطحی - قطبشی، به این صورت است که اولاً در داخل کره میدان داخلی در جهتی مخالف با میدان اعمال شده می باشد طوری که میدان داخل کره همانند شکل ۴-۷، به مقداری که در رابطه ۴-۵۵ آمده است، کاهش خواهد یافت. ثانیاً، مقدار این چگالی، برابر خواهد بود با

$$46-4 \quad \sigma_{\text{pol}} = -(\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1) \cdot \mathbf{n}_{21} = -(P_{2n} - P_{1n}) = -P_{2n} + P_{1n} \cos \theta$$

در داخل کره، $P_{1n} = P$ و در خارج کره: $P_{2n} = 0$ است. لذا

$$\sigma_{\text{pol}} = P \cos \theta \Rightarrow \sigma_{\text{pol}} = 3\varepsilon_0 \frac{\varepsilon/\varepsilon_0 - 1}{\varepsilon/\varepsilon_0 + 2} E_0 \cos \theta \quad (58-4)$$

حال اگر به جای یک کره دی الکتریک در داخل یک میدان E_0 ، یک حفره کروی با شعاع a در یک محیط دی الکتریک با ثابت دی الکتریک $\varepsilon/\varepsilon_0$ (در حضور میدان E_0 که به موازات محور z می باشد) را در نظر بگیریم، کافی است در عبارات فوق به جای $\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}$ ، قرار دهیم $\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}$. بنابراین:

$$E_{\text{in}} = \frac{3}{\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon} + 2} E_0 = \frac{3}{\varepsilon_0 + 2\varepsilon} E_0 \Rightarrow E_{\text{in}} = \frac{3\varepsilon}{2\varepsilon + \varepsilon_0} E_0 \quad (59-4)$$

$$\text{همچنین اگر } \varepsilon > \varepsilon_0 \Rightarrow \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} < 1 \Rightarrow \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon} + 2 < 3 \Rightarrow \frac{3}{\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon} + 2} > 1$$

$$\Rightarrow \frac{3}{\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon} + 2} E_0 > E_0 \Rightarrow E_{\text{in}} > E_0 \text{ و چون } E_0 > 0 \text{ است،}$$

در خارج از حفره، چون میدان ناشی از یک دوقطبی در مبدأ، دارای جهتی مخالف با میدان اعمال شده ی اصلی است، لذا گشتاور دوقطبی آن، با احتساب جایگزینی $\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}$ ، چنین خواهد بود،

$$P = -4\pi\varepsilon_0 \left(\frac{\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon} - 1}{\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon} + 2} \right) a^3 E_0 = -4\pi\varepsilon_0 \frac{\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon} (1 - \varepsilon/\varepsilon_0)}{\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon} (1 + 2\varepsilon/\varepsilon_0)} a^3 E_0$$

$$P = -4\pi\varepsilon_0 \frac{1 - \varepsilon/\varepsilon_0}{1 + 2\varepsilon/\varepsilon_0} a^3 E_0 \Rightarrow P = 4\pi\varepsilon_0 \frac{\varepsilon/\varepsilon_0 - 1}{2\varepsilon/\varepsilon_0 + 2} a^3 E_0 \quad (60-4)$$

روابط ۴-۶۸ الی ۴-۷۰ ص ۲۵:

بردار قطبش در رابطه ۴-۲۸، چنین تعریف شد که $P = N \langle p_{\text{mol}} \rangle$ که در آن $\langle p_{\text{mol}} \rangle$ گشتاور دوقطبی میانگین مولکول هاست. حال، با احتساب میدان داخلی که با رابطه ۴-۶۳ ارائه شد، یعنی

$$\mathbf{E}_i = \frac{1}{3\varepsilon_0} \mathbf{P} + \mathbf{E}_{\text{near}}$$

و در نظر گرفتن این فرض که برای بیش تر مواد، $E_{\text{near}} \approx 0$ می باشد، خواهیم داشت:

$$\mathbf{E}_i = \frac{1}{3\epsilon_0} \mathbf{P} \quad \text{همچنین:} \quad \langle P_{\text{mol}} \rangle = \epsilon_0 \gamma_{\text{mol}} (E + E_i)$$

یعنی در این جا، قطبش پذیری مولکولی γ_{mol} را به صورت نسبت گشتاور دو قطبی مولکولی میانگین $\langle P_{\text{mol}} \rangle$ به ϵ_0 برابر مجموع میدان های اعمال شده در مولکول $[\epsilon_0 (E + E_i)]$ تعریف کردیم. لذا،

$$P = N \langle p_{\text{mol}} \rangle = N [\epsilon_0 \gamma_{\text{mol}} (E + E_i)]$$

$$\mathbf{E}_i = \frac{1}{3\epsilon_0} \mathbf{P} \quad \text{نیز داشتیم:}$$

بنابراین، نتیجه می گیریم که،

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= N \epsilon_0 \gamma_{\text{mol}} \left(\mathbf{E} + \frac{1}{3\epsilon_0} \mathbf{P} \right) \\ \Rightarrow \mathbf{P} &= N \gamma_{\text{mol}} \left(\epsilon_0 \mathbf{E} + \frac{1}{3} \mathbf{P} \right) \end{aligned} \quad (68-4)$$

با حل این رابطه و با استفاده از این واقعیت که $\mathbf{P} = \epsilon_0 \chi_e \mathbf{E}$ معرف پذیرایی ویژه الکتریکی یک ماده می باشد می توان گفت:

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= N \gamma_{\text{mol}} \left(\epsilon_0 \mathbf{E} + \frac{1}{3} \mathbf{P} \right) \\ \epsilon_0 \chi_e \mathbf{E} &= N \gamma_{\text{mol}} \left(\epsilon_0 \mathbf{E} + \frac{1}{3} \epsilon_0 \chi_e \mathbf{E} \right) = \epsilon_0 \mathbf{E} \left(N \gamma_{\text{mol}} + \frac{1}{3} N \gamma_{\text{mol}} \chi_e \right) \\ \Rightarrow \chi_e &= N \gamma_{\text{mol}} + \frac{1}{3} N \gamma_{\text{mol}} \chi_e \Rightarrow \chi_e - \frac{1}{3} N \gamma_{\text{mol}} \chi_e = N \gamma_{\text{mol}} \\ \Rightarrow \chi_e \left(1 - \frac{1}{3} N \gamma_{\text{mol}} \right) &= N \gamma_{\text{mol}} \Rightarrow \chi_e = \frac{N \gamma_{\text{mol}}}{1 - \frac{1}{3} N \gamma_{\text{mol}}} \end{aligned} \quad (69-4)$$

البته چون ثابت دی الکتریک، عبارت است از $\frac{\epsilon}{\epsilon_0} = 1 + \chi_e$ بنابراین، اگر رابطه 68-4 را دوباره تغییر دهیم، و جای χ_e معادل آن یعنی $\frac{\epsilon}{\epsilon_0} - 1$ را قرار دهیم:

$$\begin{aligned} 68-4 : \mathbf{P} &= N \gamma_{\text{mol}} \left(\epsilon_0 \mathbf{E} + \frac{1}{3} \mathbf{P} \right) \\ \Rightarrow \epsilon_0 \chi_e \mathbf{E} &= N \gamma_{\text{mol}} \left(\epsilon_0 \mathbf{E} + \frac{1}{3} \epsilon_0 \chi_e \mathbf{E} \right) \\ \Rightarrow \chi_e &= N \gamma_{\text{mol}} \left(1 + \frac{1}{3} \chi_e \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} - 1 &= N\gamma_{\text{mol}} \left[1 + \frac{1}{3} \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} - 1 \right) \right] \\
 \Rightarrow \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} - 1 &= N\gamma_{\text{mol}} \left[1 + \frac{1}{3} \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} - \frac{1}{3} \right] = N\gamma_{\text{mol}} \left(\frac{2}{3} - \frac{\varepsilon}{3\varepsilon_0} \right) \\
 &= \frac{1}{3} N\gamma_{\text{mol}} \left(2 + \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \right) \\
 \Rightarrow \gamma_{\text{mol}} &= \frac{3 \varepsilon / \varepsilon_0 - 1}{N \varepsilon / \varepsilon_0 + 2} \quad (70-4)
 \end{aligned}$$

این رابطه، به معادله کلاسیوس - موساتی معروف می‌باشد.

فصل ۵

مگنتواستاتیک، قانون فارادی، میدان‌های شبه‌ایستا

۱-۵ مقدمه و تعاریف

در فصول قبل جنبه‌های مختلف الکترواستاتیک (یعنی میدان‌ها و برهم‌کنش بارهای ساکن و مرزها) را بررسی کردیم. حال توجه خودمان را به مطالعه‌ی پدیده‌های مغناطیسی حالت پایدار، قانون القای فارادی و میدان‌های شبه‌ایستا، معطوف می‌کنیم. از نقطه‌نظر تاریخی قدمت شناخت و مطالعه‌ی پدیده‌های مغناطیسی حداقل به قدمت شناخت و مطالعه‌ی پدیده‌های الکتریکی است. در زمان‌های قدیم، سنگ‌های معدن شناخته شده بودند، قطب‌نمای دریانوردی یک اختراع بسیار قدیمی است، و تحقیقات گیلبرت در مورد کره‌ی زمین به‌عنوان یک آهنربای بزرگ، به زمان‌های قبل از ۱۶۰۰ برمی‌گردد. برخلاف الکترواستاتیک قوانین اساسی میدان‌های مغناطیسی مستقیماً از تماس اولیه‌ی انسان با مواد مغناطیسی به‌دست نیامده‌اند. دلایل این موضوع متعدد است. این قوانین همگی از تفاوت اساسی بین الکترواستاتیک و مگنتواستاتیک یعنی "عدم وجود بارهای مغناطیسی آزاد" نشأت گرفته‌اند (هرچند که ایده‌ی یک چگالی بار مغناطیسی ممکن است گاهی اوقات یک ساختار ریاضی مفید باشد). این به آن معنی است که پدیده‌های مغناطیسی کاملاً با پدیده‌های الکتریکی متفاوتند، طوری‌که برای مدت‌های مدیدی هم ارتباطی بین آن‌ها برقرار نشده بود. جوهره‌ی اساسی در مطالعات مغناطیسی در گذشته، چیزی بود که ما اکنون آن را به‌عنوان یک دوقطبی مغناطیسی می‌شناسیم. در حضور مواد مغناطیسی، دوقطبی تمایل به تراز کردن خود در یک جهت خاص

را دارد. این جهت طبق تعریف، جهت چگالی شار مغناطیسی است که با \mathbf{B} نشان داده می‌شود، مشروط بر اینکه دوقطبی به قدری کوچک و ضعیف باشد که میدان موجود را آشفته نکند. اندازه‌ی چگالی شار فوق را می‌توان با گشتاور مکانیکی N ، که بر دوقطبی مغناطیسی وارد می‌شود تعریف نمود

$$\mathbf{N} = \boldsymbol{\mu} \times \mathbf{B} \quad (۱-۵)$$

که در آن $\boldsymbol{\mu}$ گشتاور مغناطیسی دوقطبی است که در مجموعه‌ای مناسب از واحدها تعریف شده است. در اینجا در تعریف چگالی شار مغناطیسی \mathbf{B} (که گاهی القا مغناطیسی نیز نامیده می‌شود) با وضعیتی بسیار پیچیده‌تر از میدان الکتریکی مواجه هستیم، و تبیین بیش‌تری از پدیده‌های مغناطیسی صورت نخواهد گرفت مگر اینکه رابطه‌ی بین جریان‌ها و میدان‌های مغناطیسی مشخص شود.

به‌طورکلی جریان متناظر است با بارهای در حال حرکتی که با یک چگالی جریان \mathbf{J} ، توصیف شده و برحسب واحدهای بار مثبت گذرنده از واحد سطح بر واحد زمان اندازه‌گیری می‌شود و جهت حرکت بارهای فوق نیز معرف جهت \mathbf{J} است. در سیستم واحدهای SI، برحسب کولن بر مربع متر - ثانیه، یا آمپر بر مترمربع اندازه‌گیری می‌شود. اگر چگالی جریان محدود به سیم‌هایی با سطح مقطع کم باشد، معمولاً روی مساحت سطح مقطع انتگرال‌گیری کرده و صحبت از جریان فلان قدر آمپری را می‌کنیم که در طول سیم جاری است.

بقای بار ایجاد می‌کند که چگالی بار در هر نقطه از فضا، به چگالی جریان در آن همسایگی با معادله پیوستگی

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0 \quad (۲-۵)$$

به هم مربوط باشند.

این رابطه، مبین این واقعیت فیزیکی است که یک مقدار کاهش در بار نسبت به زمان، از درون یک حجم کوچک، باید با یک جریان بار خارج‌شونده از سطح آن حجم کوچک متناظر باشد، چراکه مقدار کل بار باید پایسته بماند. پدیده‌های مغناطیسی حالت پایدار، در هر مکانی از فضا با عدم تغییر چگالی بار خالص مشخص می‌شوند. در نتیجه در مگنتواستاتیک داریم

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0 \quad (۳-۵)$$

حال به بحث در مورد ارتباط تجربی بین جریان و چگالی شار مغناطیسی و اثبات قوانین اساسی مگنتواستاتیک اقدام می‌کنیم.

۲-۵ قانون بیو و ساوار

در سال ۱۸۱۹، ارستد مشاهده نمود که سیم‌های حامل جریان الکتریکی، انحراف‌هایی را روی دوقطبی‌های مغناطیسی دائمی که در مجاورت آن‌ها قرار دارند، ایجاد می‌کنند. بدین ترتیب جریان‌های الکتریکی منابع

چگالی شار مغناطیسی هستند. بیو و ساوار در ابتدا (۱۸۲۰) و آمپر (۱۸۲۵-۱۸۲۰) با آزمایش‌های بسیار ماهرانه و دقیق، قوانین تجربی اساسی مربوطکننده‌ی القای مغناطیسی B ، به جریان و نیز قانون نیروی بین یک جریان و جریان دیگر را اثبات کردند. این رابطه‌ی اساسی البته نه به آن شکلی که آمپر بدان دست یافت به صورت زیر است.

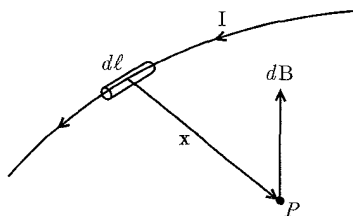
اگر همان‌گونه که در شکل ۱-۵ نشان داده شده است، $d\mathbf{l}$ المان طول (که در جهت جاری شدن جریان است) یک سیم رشته‌ای حامل جریان I ، و x بردار مختصه از المان طول تا نقطه‌ی مشاهده باشد، در این صورت چگالی شار المانی $d\mathbf{B}$ در نقطه‌ی P از لحاظ مقدار و جهت با رابطه‌ی زیر مشخص می‌شود

$$d\mathbf{B} = kI \frac{d\mathbf{l} \times \mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^3} \quad (۴-۵)$$

باید اشاره کنیم که (۴-۵) درست مانند قانون کولن در الکترواستاتیک، یک قانون عکس مجذوری است. هرچند که مشخصه‌ی برداری آن بسیار متفاوت است.

یک نکته انحرافی در مورد رابطه‌ی ۴-۵ وجود دارد و آن تصویری است که باعث می‌شود (۴-۵) را معادل مغناطیسی میدان الکتریکی (۳-۱) (ناشی از یک بار نقطه‌ای) بدانیم و $I d\mathbf{l}$ را مشابهی برای q در نظر بگیریم. اما اگر بخواهیم دقیق‌تر شویم این مقایسه نادرست است.

معادله‌ی (۴-۵) فقط به‌عنوان یک جزء از یک جمع روی یک مجموعه‌ی پیوسته معنی دارد، که در آن جمع نشان‌دهنده‌ی القای مغناطیسی ناشی از یک حلقه، یا مدار جریاندار است. به‌وضوح، معادله‌ی پیوستگی (۳-۵) برای المان $I d\mathbf{l}$ [که تنها واقع شده است] برآورده نخواهد شد - این جریان از هیچ جایی نمی‌آید و پس از پیمودن طول $d\mathbf{l}$ نیز ناپدید می‌شود. یک راه خوب برای خلاص شدن از این مشکل این است که تصور کنیم جریان واقعاً بار در حال حرکت است و $I d\mathbf{l}$ را با $q\mathbf{v}$ که در آن q بار و \mathbf{v} سرعت بار است عوض کنیم.



شکل ۱-۵: القای مغناطیسی جزئی $d\mathbf{B}$ ناشی از جزء جریان $I d\mathbf{l}$.

چگالی شار برای یک چنین بار در حال حرکتی، باید به صورت

$$\mathbf{B} = kq \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^3} \quad (۵-۵)$$

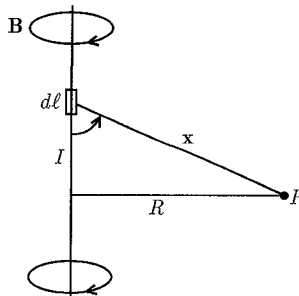
باشد، که تناظر نزدیکی با (۴-۵) دارد.

اما این رابطه بستگی زمانی دارد و علاوه بر آن فقط برای بارهایی معتبر است که سرعتشان در مقایسه با سرعت نور کم است و از شتابشان می‌توان صرف نظر کرد.

چون در این فصل میدان‌های مغناطیسی حالت پایدار را بررسی می‌کنیم، بنابراین با رابطه‌ی (۴-۵) درگیر خواهیم بود و برای به دست آوردن نتایج فیزیکی* روی مدارها انتگرال‌گیری خواهیم کرد.

همان‌طور که به طور دقیق در ضمیمه بررسی شده است، ثابت k در رابطه‌ی (۴-۵) و (۵-۵)، به اندازه و بعد در سیستم واحدهای مورد استفاده بستگی دارد. در سیستم واحدهای گوسی، که در آن جریان برحسب esu و القای مغناطیسی برحسب emu اندازه گرفته می‌شود، ثابت فوق به طور تجربی به صورت $k = \frac{1}{c}$ به دست می‌آید که در آن c سرعت نور در خلاء است.

حضور سرعت نور در معادلات مگنتواستاتیک، باعث حیرت اولیه‌ای می‌شود که این خود با نسبت خاص، که در آن $\frac{v}{c}$ حضوری طبیعی دارد برطرف خواهد شد. در سیستم واحدهای گوسی \mathbf{E} و \mathbf{B} دارای ابعاد مشابهی هستند: بار تقسیم بر مربع طول یا نیرو تقسیم بر بار واحد.



شکل ۲-۵:

در سیستم واحدهای SI، $k = \frac{\mu_0}{4\pi} = 10^{-7}$ [نیوتن بر مربع آمپر (N/A²) یا هانری بر متر (H/m)].

در اینجا \mathbf{B} دارای ابعاد نیوتن بر آمپر - متر است (N/A.m) در حالی که \mathbf{E} دارای ابعاد N/C است.

ضرب \mathbf{B} در یک سرعت نوعی، دارای ابعادی مشابه با \mathbf{E} است. از آنجا که c سرعتی طبیعی در الکترومغناطیس است، تعجبی ندارد که در واحدهای SI، \mathbf{E} و $c\mathbf{B}$ یک تانسور قدرت میدان $F^{\mu\nu}$ را در

* یک ناهماهنگی واضح در اینجا وجود دارد. به طور کلی جریان‌ها همان بارهای در حال حرکت‌اند، چگونه می‌توان رابطه‌ی (۴-۵) را انتگرال‌گیری نمود، طوری که نتایج دقیقی را ارائه دهد که رابطه‌ی (۵-۵) همچنان تنها تقریب باشد؟ جواب این است که (۵-۵) تنها برای یک بار الکتریکی به کار می‌رود. اگر سیستمی متشکل از چندین بار، به طریقی حرکت کند که وقتی واحد بار به سمت صفر میل می‌کند، و تعداد بارها به سمت بینهایت، (که در نتیجه این فرایند سیستم یک روند جریان پایدار را به وجود می‌آورد) در این صورت مجموع دقیق میدان‌های نسبیته، (شامل اثرات شتاب) یک میدان مگنتواستاتیک را (که مساوی با میدان به دست آمده توسط انتگرال‌گیری از (۴-۵) است) نتیجه می‌دهند.

این نتیجه‌ی نسبتاً ظریف برای چند وضعیت خاص در مسائل ۲۳-۱۴ و ۲۴-۱۴ مورد بحث قرار گرفته است.

یک توصیف نسبیتهی تشکیل دهند (فصل ۱۱ را ملاحظه کنید).

می‌توانیم با انتگرال‌گیری، عناصر اساسی شار مغناطیسی (۴-۵) را برای تعیین چگالی شار مغناطیسی ناشی از آرایش‌های مختلفی از سیم‌های حامل جریان، برهم‌نهیده خطی کنیم. برای مثال می‌توان ملاحظه کرد که القای مغناطیسی \mathbf{B} ی، ناشی از سیم راست طویل نشان داده شده در شکل ۲-۵ که جریان I را حمل می‌کند، در امتداد عمود بر صفحه‌ی شامل سیم و نقطه‌ی مشاهده جهت گرفته است طوری که خطوط القاء مغناطیسی به‌صورت دایره‌هایی هم‌مرکز حول سیم درمی‌آیند. اندازه \mathbf{B} توسط

$$|\mathbf{B}| = \frac{\mu_0}{4\pi} IR \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dl}{(R^2 + l^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{R} \quad (6-5)$$

مشخص می‌شود، که در آن R فاصله از نقطه‌ی مشاهده تا محل سیم است. این فرمول یک نتیجه‌ی تجربی است و در ابتدا توسط بیو و ساوار پیدا شد، که تحت عنوان قانون بیو ساوار شناخته شده است. دقت کنید که اندازه‌ی القای \mathbf{B} با R ، به‌طریقی مشابه با میدان الکتریکی ناشی از یک بار خطی طویل (با چگالی بار خطی یکنواخت) تغییر می‌کند.

این شباهت نشان می‌دهد که در بعضی از موقعیت‌ها، امکان یک تناظر بین مسائل الکترواستاتیک و مگنتواستاتیک وجود دارد، هرچند که مشخصه‌ی برداری میدان‌ها متفاوت است. در بخش‌های بعدی مطالب بیش‌تری در این مورد خواهیم دید.

آزمایش‌های آمپر، به‌طور مستقیم به تعیین رابطه‌ی بین جریان‌ها و القای مغناطیسی کاری ندارد، بلکه این آزمایش‌ها بیش‌تر با نیرویی که یک سیم حامل جریان در حضور سیم دیگر تجربه می‌کند مربوط است. چون تاکنون این ایده را معرفی کرده‌ایم که یک المان جریان باعث ایجاد یک القای مغناطیسی می‌شود، لذا قانون نیرو را به‌عنوان نیرویی که یک المان جریان $I_1 d\mathbf{l}_1$ در حضور یک القای مغناطیسی \mathbf{B} تجربه می‌کند تعبیر می‌کنیم. نیروی المانی فوق عبارت است از

$$d\mathbf{F} = I_1 (d\mathbf{l}_1 \times \mathbf{B}) \quad (7-5)$$

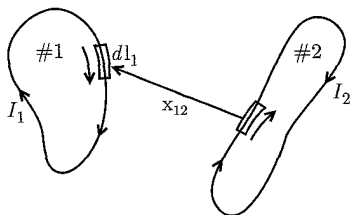
اگر میدان خارجی \mathbf{B} ، ناشی از حلقه‌ی جریان بسته ۲ با جریان I_2 باشد، در این صورت نیروی کلی‌ای که یک حلقه‌ی جریان بسته‌ی ۱ با جریان I_1 تجربه می‌کند، عبارت است از: [از (۴-۵) و (۷-۵)]

$$\mathbf{F}_{12} = \frac{\mu}{4\pi} I_1 I_2 \oint \oint \frac{d\mathbf{l}_1 \times (d\mathbf{l}_2 \times \mathbf{x}_{12})}{|\mathbf{x}_{12}|^3} \quad (8-5)$$

انتگرال‌های خطی حول دو حلقه انجام می‌شوند. \mathbf{x}_{12} همان‌طور که در شکل (۳-۵) نشان داده شده است فاصله‌ی برداری از عنصر خطی $d\mathbf{l}_2$ به $d\mathbf{l}_1$ است. رابطه‌ی بالا بیان ریاضی مشاهدات آمپر در مورد نیروی بین حلقه‌های حامل جریان است.

با محاسبه‌ی انتگرالده، می‌توان آن را به صورتی درآورد که برحسب dl_1 و dl_2 متقارن باشد و صریحاً قانون سوم نیوتن را نیز برآورده کند. به این ترتیب

$$\frac{dl_1 \times (dl_2 \times x_{12})}{|x_{12}|^3} = -(dl_1 \cdot dl_2) \frac{x_{12}}{|x_{12}|^3} + dl_2 \left(\frac{dl_1 \times x_{12}}{|x_{12}|^3} \right) \quad (9-5)$$



شکل ۳-۵: دو حلقه‌ی جریان آمپری.

جمله‌ی دوم در این رابطه، یک دیفرانسیل کامل در انتگرال روی dl_1 است. در نتیجه این جمله هیچ سهمی در انتگرال (۸-۵) ندارد، مشروط بر اینکه مسیرها بسته بوده، یا تا بینهایت ادامه داشته باشند. بدین ترتیب قانون آمپر در مورد نیروی بین حلقه‌های جریان به صورت زیر درمی‌آید

$$\mathbf{F}_{12} = -\frac{\mu_0}{4\pi} I_1 I_2 \oint \oint \frac{(dl_1 \cdot dl_2) x_{12}}{|x_{12}|^3} \quad (10-5)$$

جدا از بستگی برداری لازم روی x_{12} ، این رابطه نشان‌دهنده‌ی تقارن در انتگرال‌گیری است. هر کدام از دو سیم راست موازی و بلند با فاصله‌ی جدایی d ، که حامل جریان‌های I_1 و I_2 هستند، نیروی بر واحد طولی را احساس می‌کنند که به طور عمودی به طرف دیگر جهت گرفته و اندازه‌ی آن عبارت است از

$$\frac{d\mathbf{F}}{dl} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_1 I_2}{d} \quad (11-5)$$

نیروی فوق جاذبه‌ای (دافعه‌ای) است، اگر جریان‌ها در جهتی مشابه (مخالف) جاری شوند. این نیروها که بین سیم‌های حامل جریان عمل می‌کنند را می‌توان برای تعریف چگالی شار مغناطیسی مورد استفاده قرار داد، به طریقی که مستقل از دوقطبی‌های مغناطیسی دائمی باشد*. بعداً خواهیم دید که رابطه‌ی گشتاوری (۱-۵) و نیروی (۷-۵) به طور نزدیکی به یکدیگر وابسته‌اند.

اگر یک چگالی جریان $\mathbf{J}(\mathbf{x})$ ، در یک چگالی شار مغناطیسی خارجی $\mathbf{B}(\mathbf{x})$ قرار داشته باشد، قانون مقدماتی نیرو ایجاب می‌کند که نیروی کل وارد بر توزیع جریان فوق عبارت باشد با

$$\mathbf{F} = \int \mathbf{J}(\mathbf{x}) \times \mathbf{B}(\mathbf{x}) d^3x \quad (12-5)$$

(* در حقیقت رابطه‌ی (۱۱-۵) اساس استاندارد بین‌المللی پذیرفته‌شده‌ی جریان است، ضمیمه را ملاحظه کنید.

و به‌طور مشابه، گشتاور کل عبارت است از

$$\mathbf{N} = \int \mathbf{x} \times (\mathbf{J} \times \mathbf{B}) d^3x \quad (۱۳-۵)$$

این نتایج کلی، برای توزیع‌های جایگزیده‌ی جریان در بخش ۷-۵ به‌کار گرفته خواهند شد.

۳-۵ معادلات دیفرانسیل مگنتواستاتیک و قانون آمپر

رابطه‌ی اساسی (۴-۵) برای القاء مغناطیسی را می‌توان به‌صورت کلی برای یک چگالی جریان $\mathbf{J}(\mathbf{x})$ به‌شکل زیر نوشت

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \mathbf{J}(\mathbf{x}') \times \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} d^3x' \quad (۱۴-۵)$$

این رابطه برای $\mathbf{B}(\mathbf{x})$ ، مشابه مغناطیسی میدان الکتریکی برحسب چگالی بار است

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \rho(\mathbf{x}') \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} d^3x' \quad (۱۵-۵)$$

دقیقاً همان‌طوری‌که به‌دست آوردن این نتیجه برای \mathbf{E} ، به مفیدی بعضی از وضعیت‌ها همچون معادلات دیفرانسیل نیست، به‌همین شکل رابطه‌ی (۱۴-۵) نیز مفیدترین رابطه برای مگنتواستاتیک نیست، ولو اینکه در اصل توصیفی از تمامی پدیده‌ها را در خود دارا باشد.

برای به‌دست آوردن معادلات دیفرانسیل هم‌ارز با (۱۴-۵)، دقیقاً رابطه‌ی بالای (۱۵-۱) را برای تبدیل (۱۴-۵) به‌صورت

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x' \quad (۱۶-۵)$$

استفاده می‌کنیم.

از (۱۶-۵) بی‌درنگ صفر شدن دیورژانس \mathbf{B} نتیجه می‌شود

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (۱۷-۵)$$

معادله‌ی فوق، اولین معادله‌ی مگنتواستاتیک است و متناظر با $\nabla \times \mathbf{E} = 0$ در الکترواستاتیک. حال کرل \mathbf{B} را با شباهت با الکترواستاتیک محاسبه می‌کنیم

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \times \nabla \times \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x' \quad (۱۸-۵)$$

با کمک اتحاد؛ $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$ برای یک میدان برداری اختیاری \mathbf{A} ، رابطه‌ی (۱۸-۵) را می‌توان به صورت

$$\nabla \mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \int \mathbf{J}(\mathbf{x}') \cdot \nabla \left(\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right) d^3 x' - \frac{\mu_0}{4\pi} \int \mathbf{J}(\mathbf{x}') \nabla^2 \left(\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right) d^3 x' \quad (۱۹-۵)$$

تبدیل نمود. اگر از روابط زیر استفاده کنیم

$$\begin{cases} \nabla \left(\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right) = -\nabla' \left(\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right) \\ \nabla^2 \left(\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right) = -4\pi \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \end{cases} \quad \text{و}$$

انتگرال‌های موجود در (۱۹-۵) را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\nabla \times \mathbf{B} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \int \mathbf{J}(\mathbf{x}') \cdot \nabla' \left(\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right) d^3 x' + \mu_0 \mathbf{J}(\mathbf{x}) \quad (۲۰-۵)$$

انتگرال‌گیری به طریقه‌ی جزء به جزء نتیجه می‌دهد

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \int \frac{\nabla' \cdot \mathbf{J}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3 x' \quad (۲۱-۵)$$

اما برای پدیده‌های مغناطیسی حالت پایدار، $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$ است، طوری که به دست می‌آوریم

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} \quad (۲۲-۵)$$

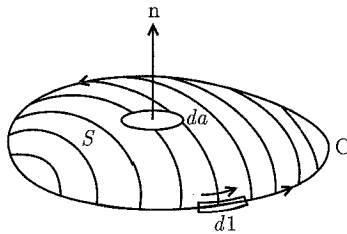
معادله‌ی فوق، دومین معادله‌ی مگنتواستاتیک و متناظر با $\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ در الکترواستاتیک است.

در الکترواستاتیک، قانون گوس (۱۱-۱) شکل انتگرالی معادله‌ی $\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ است. معادل انتگرالی (۲۲-۵) قانون آمپر نامیده می‌شود. قانون آمپر با به‌کارگیری قضیه‌ی استوکس برای انتگرال مؤلفه‌ی عمودی (۲۲-۵) روی یک سطح باز S ، که با یک منحنی بسته C محدود شده است، به دست می‌آید (همانند شکل (۴-۵)). به این ترتیب رابطه‌ی

$$\int_S \nabla \times \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} da = \mu_0 \int_C \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} da \quad (۲۳-۵)$$

به رابطه‌ی زیر تبدیل می‌شود

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \int_S \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} da \quad (۲۴-۵)$$



شکل ۴-۵:

چون انتگرال سطحی چگالی جریان همان جریان کل I است که از منحنی بسته C می‌گذرد، لذا قانون آمپر را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I \quad (۲۵-۵)$$

دقیقاً همان‌طور که قانون گوس را می‌توان برای محاسبه‌ی میدان الکتریکی در وضعیت‌هایی با تقارن بالا مورد استفاده قرار داد، قانون آمپر را نیز می‌توان در وضعیت‌های مشابهی اعمال کرد.

۴-۵ پتانسیل برداری

قوانین دیفرانسیلی اساسی مگنتواستاتیک عبارتند از

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{B} &= \mu_0 \mathbf{J} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \end{aligned} \quad (۲۶-۵)$$

مسئله این است که چگونه باید این معادلات حل شوند. در صورتی که چگالی جریان در ناحیه موردنظر صفر باشد، $\nabla \times \mathbf{B} = 0$ ، رابطه‌ای را برای القای مغناطیسی برداری \mathbf{B} به صورت گرادین یک پتانسیل اسکالر مغناطیسی، یعنی $\mathbf{B} = -\nabla \Phi_M$ امکان‌پذیر می‌کند.

بدین ترتیب (۲۶-۵)، به معادله‌ی لاپلاس برای Φ_M تقلیل می‌یابد، و تمام تکنیک‌های ما برای بحث روی مسائل الکترواستاتیک در اینجا نیز می‌توانند مفید واقع شوند. تعداد زیادی از مسائل در این رده جای می‌گیرند، اما بحث در مورد آن‌ها را تا بعد (در این فصل) به تعویق می‌اندازیم. دلیل این کار این است که شرایط مرزی با آنچه در الکترواستاتیک با آن‌ها مواجه بودیم تفاوت دارند، و این مسائل معمولاً شامل محیط‌های ماکروسکوپی، با خواص مغناطیسی متفاوت با فضای آزاد (محتوی بارها و جریان‌ها) هستند. یک روش کلی در مواجهه با این مسائل، استفاده و بهره‌برداری از معادله‌ی دوم در (۲۶-۵) است. اگر در هر جایی از فضا، $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ باشد، در این صورت \mathbf{B} بایستی کرل یک میدان برداری $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ باشد

که "پتانسیل برداری" نامیده می شود

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{x}) \quad (27-5)$$

درواقع تاکنون نیز \mathbf{B} را به صورت فوق در (۱۶-۵) نوشته ایم. به وضوح از (۱۶-۵)، صورت کلی \mathbf{A} عبارت خواهد بود با

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x' + \nabla \Psi(\mathbf{x}) \quad (28-5)$$

گردان اضافه شده ی یک تابع اسکالر اختیاری Ψ نشان می دهد که برای یک القای مغناطیسی مشخص \mathbf{B} ، پتانسیل برداری را می توان آزادانه طبق رابطه ی زیر تبدیل نمود

$$\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A} + \nabla \Psi \quad (29-5)$$

این تبدیل، یک تبدیل پیمانه ای نامیده می شود. یک چنین تبدیلاتی روی \mathbf{A} امکان پذیر هستند، چرا که (۲۷-۵) تنها کرل \mathbf{A} را مشخص می کند. آزادی در تبدیلات پیمانه ای ما را مجاز می کند که $\nabla \cdot \mathbf{A}$ را طوری در بیاریم که هر شکل تابعی مناسبی را که بخواهیم دارا باشد. اگر (۲۷-۵) در اولین معادله ی (۲۶-۵) جایگزین شود، درمی یابیم که

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \mu_0 \mathbf{J} \quad (30-5)$$

یا

$$\nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} = \mu_0 \mathbf{J}$$

حال اگر آزادی اشاره شده در (۲۹-۵) بهره برداری کنیم، می توانیم انتخاب پیمانه ای^۱ مناسب $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ را صورت دهیم. در این صورت هر مؤلفه ی قائمی از پتانسیل برداری، معادله ی پواسن زیر را برآورده می کند

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{J} \quad (31-5)$$

از بحث در مورد الکترواستاتیک واضح است که حل برای \mathbf{A} در فضای نامحدود، همان (۲۸-۵) است با $\Psi = \text{cte}$

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x' \quad (32-5)$$

شرط $\Psi = \text{cte}$ را می توان به صورت ذیل درک نمود. انتخاب پیمانه به صورت $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ ، به $\nabla^2 \Psi = 0$ تقلیل پیدا می کند، چراکه دیورژانس جمله ی اول در رابطه ی (۲۸-۵) صفر است، چون $\nabla' \cdot \mathbf{J} = 0$ است. اگر در تمام فضا $\nabla^2 \Psi = 0$ صادق باشد، Ψ بایستی حداقل یک مقدار ثابت باشد، مشروط بر اینکه هیچ چشمه ای در بینهایت وجود نداشته باشد.

(۱) این انتخاب پیمانه کولن نامیده می شود، به دلیلی که تنها در بخش ۳-۶ آشکار خواهد شد.

۵-۵ پتانسیل برداری و القای مغناطیسی برای یک حلقه‌ی جریان دایروی

به‌عنوان مثالی از محاسبه‌ی میدان مغناطیسی برای توزیع‌های جریان مشخص، همان‌گونه که در شکل ۵-۵ نشان داده شده است، مسئله‌ی یک حلقه‌ی دایروی با شعاع a را در نظر می‌گیریم که در صفحه‌ی $x-y$ قرار دارد، به مرکزیت مبدأ و حامل جریان I که چگالی جریان J ی آن تنها دارای یک مؤلفه در جهت ϕ است

$$J_{\phi} = I \sin \theta' \delta(\cos \theta') \frac{\delta(r' - a)}{a} \quad (۳۳-۵)$$

توابع دلتا، گردش جریان را به یک حلقه با شعاع a محدود می‌کنند. چگالی جریان برداری J را می‌توان به‌صورت زیر نوشت

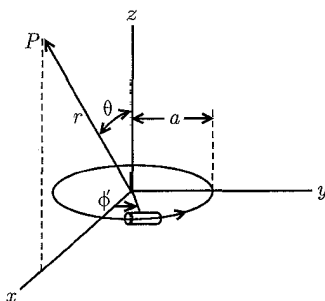
$$\mathbf{J} = -J_{\phi} \sin \phi' \mathbf{i} + J_{\phi} \cos \phi' \mathbf{j} \quad (۳۴-۵)$$

چون هندسه‌ی مسئله به‌طور استوانه‌ای متقارن است، می‌توانیم برای محاسبه، نقطه‌ی مشاهده را در صفحه‌ی $x-z$ ، $\phi = 0$ انتخاب کنیم. چون انتگرال‌گیری سمتی در (۳۲-۵)، حول $\phi' = 0$ متقارن است، مؤلفه‌ی x جریان سهمی در انتگرال‌گیری نخواهد داشت. این موضوع تنها مؤلفه‌ی y را که همان A_{ϕ} است باقی می‌گذارد. بدین ترتیب

$$A_{\phi}(r, \theta) = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \int r'^2 dr' d\Omega' \frac{\sin \theta' \cos \phi' \delta(\cos \theta') \delta(r' - a)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \quad (۳۵-۵)$$

که در آن

$$|\mathbf{x} - \mathbf{x}'| = [r^2 + r'^2 - 2rr'(\cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \cos \phi')]^{\frac{1}{2}}$$



شکل ۵-۵:

ابتدا محاسبه‌ی سرراستی از (۳۵-۵) را مورد بررسی قرار می‌دهیم. انتگرال‌گیری روی توابع دلتا نتیجه‌ی زیر را باقی می‌گذارد

$$A_{\phi}(r, \theta) = \frac{\mu_0 I a}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos \phi' d\phi'}{(a^2 + r^2 - 2ar \sin \theta \cos \phi')^{\frac{1}{2}}} \quad (۳۶-۵)$$

این انتگرال را می‌توان برحسب انتگرال‌های بیضوی کامل K و E بیان کرد

$$A_\phi(r, \theta) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Ia}{\sqrt{a^2 + r^2 + 2ar \sin \theta}} \left[\frac{(2 - k^2)K(k) - 2E(k)}{k^2} \right] \quad (37-5)$$

که در آن شناسه k از انتگرال‌های بیضوی طبق رابطه‌ی زیر تعریف می‌شود

$$k^2 = \frac{2ar \sin \theta}{a^2 + r^2 + 2ar \sin \theta}$$

مؤلفه‌های الفای مغناطیسی زیر را نیز می‌توان برحسب انتگرال‌های بیضوی بیان کرد

$$\left. \begin{aligned} B_r &= \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_\phi) \\ B_\theta &= -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_\phi) \\ B_\phi &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (38-5)$$

اما نتایج فوق به‌طور اخص شفاف نیستند (اگرچه برای محاسبه مفیدند).

به‌ازای $a \ll r$, $a \gg r$ یا $\theta \ll 1$, یک بسط دیگر از (36-5) برحسب توان‌های $\frac{a^2 r^2 \sin^2 \theta}{(a^2 + r^2)^2}$

منجر به رابطه‌ی تقریبی زیر برای پتانسیل برداری می‌شود

$$A_\phi(r, \theta) = \frac{\mu_0 I a^2 r \sin \theta}{4(a^2 + r^2)^{3/2}} \left[1 + \frac{15 a^2 r^2 \sin^2 \theta}{8(a^2 + r^2)^2} + \dots \right] \quad (39-5)$$

با دقتی مشابه، مؤلفه‌های متناظر میدان عبارتند از

$$\left. \begin{aligned} B_r &= \frac{\mu_0 I a^2 \cos \theta}{2(a^2 + r^2)^{3/2}} \left[1 + \frac{15 a^2 r^2 \sin^2 \theta}{4(a^2 + r^2)^2} + \dots \right] \\ B_\theta &= -\frac{\mu_0 I a^2 \sin \theta}{4(a^2 + r^2)^{5/2}} \left[2a^2 - r^2 + \frac{15 a^2 r^2 \sin^2 \theta (4a^2 - 3r^2)}{8(a^2 + r^2)^2} + \dots \right] \end{aligned} \right\} \quad (40-5)$$

این روابط را می‌توان به راحتی به سه ناحیه تقسیم‌بندی کرد؛ نزدیک محور ($\theta \ll 1$)، نزدیک مرکز حلقه ($r \ll a$)، و دور از حلقه ($r \gg a$).

از موارد خاص مدنظر، تعیین میدان در فواصل دور از حلقه است

$$\left. \begin{aligned} B_r &= \frac{\mu_0}{4\pi} (I\pi a^2) \frac{\cos \theta}{r^3} \\ B_\theta &= \frac{\mu_0}{4\pi} (I\pi a^2) \frac{\sin \theta}{r^3} \end{aligned} \right\} \quad (41-5)$$

مقایسه با میدان‌های دوقطبی الکترواستاتیکی (۴-۱۲) نشان می‌دهد که میدان‌های مغناطیسی در فواصل دور از حلقه‌ی جریان دایروی، از لحاظ مشخصه، همان میدان‌های دوقطبی هستند. با شباهت با الکترواستاتیک، گشتاور دوقطبی مغناطیسی حلقه را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$m = \pi I a^2 \quad (42-5)$$

در بخش آینده خواهیم دید که این مورد یک حالت خاص از یک نتیجه کلی است - توزیع‌های جریان جایگزیده، میدان‌های دوقطبی را در فواصل دور نتیجه می‌دهند؛ گشتاور مغناطیسی یک حلقه‌ی جریان تخت عبارت است از حاصل ضرب مساحت حلقه در جریان موجود در آن.

اگرچه یک جواب کامل برای این مسئله برحسب انتگرال‌های بیضوی به دست آورده‌ایم، ولی در اینجا استفاده از یک بسط هارمونیک کروی را جهت اشاره به شباهت‌ها و اختلاف‌های بین مسائل مگنتواستاتیک و الکترواستاتیک مورد بررسی قرار می‌دهیم. بدین ترتیب به رابطه‌ی (۵-۳۵) برگشته و بسط هارمونیک کروی (۳-۷۰) را برای $|x - x'|^{-1}$ جایگزین می‌کنیم

$$A_\phi = \frac{\mu_0 I}{a} \text{Re} \sum_{l,m} \frac{Y_{lm}(\theta, \phi)}{2l+1} \int r'^2 dr' d\Omega' \delta(\cos \theta') \delta(r' - a) e^{i\phi'} \frac{r_{<}^l}{r_{>}^{l+1}} Y_{lm}^*(\theta', \phi') \quad (43-5)$$

حضور $e^{i\phi'}$ بدین معنی است که تنها $m = +1$ در این جمع سهم خواهد داشت. از این رو

$$A_\phi = 2\pi\mu_0 I a \sum_{l=1}^{\infty} \frac{Y_{l,1}(\theta, \phi)}{2l+1} \frac{r_{<}^l}{r_{>}^{l+1}} \left[Y_{l,1} \left(\frac{\pi}{2}, \phi \right) \right] \quad (44-5)$$

که در آن $r_{<} < r < r_{>}$ مقدار کوچک‌تر (بزرگ‌تر) a و r است. کمیت داخل کروشه عددی است که به l بستگی دارد

$$[\dots] = \begin{cases} \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi l(l+1)}} P_l^1(\phi) & \text{برای } l \text{ زوج} \\ \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi l(l+1)}} \left[\frac{(-1)^{n+1} \Gamma\left(n + \frac{3}{2}\right)}{\Gamma(n+1) \Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} \right] & \text{برای } l = 2n+1 \end{cases} \quad (45-5)$$

بنابراین A_ϕ را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$A_\phi = -\frac{\mu_0 I a}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n-1)!!}{2^n (n+1)!} \frac{r_{<}^{2n+1}}{r_{>}^{2n+2}} P_{2n+1}^1(\cos \theta) \quad (46-5)$$

که در آن؛ $1 \times 3 \times 5 \times \dots = (2n-1)(2n-3)\dots(2n-1)!!$ ، و ضرب $n = 0$ در این جمع طبق تعریف برابر واحد است. برای تعیین مؤلفه‌ی شعاعی B از (۳۸-۵) نیاز به رابطه‌ی زیر داریم

$$\frac{d}{dx}[\sqrt{1-x^2}P_l(x)] = l(l+1)P_l(x) \quad (47-5)$$

در این صورت درمی‌یابیم که

$$B_r = \frac{\mu_0 I a}{2r} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n+1)!!}{2^n n!} \frac{r_{<}^{2n+1}}{r_{>}^{2n+2}} P_{2n+1}(\cos \theta) \quad (48-5)$$

مشابهاً مؤلفه θ برای B عبارت است از

$$B_\theta = -\frac{\mu_0 I a}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n+1)!!}{2^n (n+1)!} \left\{ \begin{array}{l} -\left(\frac{2n+2}{2n+1}\right) \frac{1}{a^3} \left(\frac{r}{a}\right)^{2n} \\ \frac{1}{r^3} \left(\frac{a}{r}\right)^{2n} \end{array} \right\} P_{2n+1}(\cos \theta) \quad (49-5)$$

خط بالا برای $r < a$ صادق است، و خط پایین برای $r > a$ ، برای $r \gg a$ تنها جمله‌ی $n = 0$ در این سری مهم است. بدین ترتیب چون $P_1(\cos \theta) = -\sin \theta$ است بنابراین (۴۸-۵) و (۴۹-۵) به (۴۱-۵) تقلیل پیدا می‌کنند. برای $r \ll a$ ، جمله‌ی عمده مجدداً $n = 0$ است. بنابراین میدان‌ها، معادل با یک القای مغناطیسی $\frac{\mu_0 I}{2a}$ در جهت z هستند، نتیجه‌ای که می‌توان با روش‌های مقدماتی نیز بدان دست یافت.

در اینجا به یک اختلاف اختصاصی بین این مسئله، و یک مسئله‌ی الکترواستاتیکی متقارن استوانه‌ای متناظر اشاره می‌کنیم. چندجمله‌ای‌های لژاندر وابسته، همانند چندجمله‌ای‌های لژاندر معمولی حضور می‌یابند. علت این موضوع را می‌توان در طبیعت برداری جریان و پتانسیل برداری جستجو نمود، در نقطه‌ی مقابل با خواص اسکالری بار و پتانسیل الکترواستاتیک.

روش دیگری برای مواجهه با مسئله‌ی حلقه‌ی تخت، به‌کارگیری یک بسط برحسب امواج استوانه‌ای است. به‌جای (۳-۷) که نمایشی از $|x - x'|^{-1}$ است می‌توان شکل استوانه‌ای (۳-۱۴۸) یا (۳-۱۴۹) یا رابطه‌ی مربوط به مسئله‌ی (۳-۱۶) ب) را مورد استفاده قرار داد. کاربرد این تکنیک برای حلقه‌ی دایروی به مسائل واگذار خواهد شد.

۵-۶ میدان‌های مغناطیسی ناشی از یک توزیع جریان جایگزیده،

گشتاور مغناطیسی

حال خواص یک توزیع جریان کلی که در ناحیه‌ی کوچکی از فضا [”کوچک“ نسبت به مقیاس طول مورد نظر مشاهده‌گر] جایگزیده شده است را مورد بررسی قرار می‌دهیم. بحث کاملی از این مسئله را می‌توان

با شباهت با بسط چندقطبی الکترواستاتیک، با استفاده از هارمونیک‌های کروی برداری انجام داد^۱. این موضوعات در فصل ۹ در رابطه با تابش چندقطبی ارائه شده‌اند. در اینجا ما تنها به پایین‌ترین مرتبه‌ی تقریب قناعت می‌کنیم. با فرض $|x| \gg |x'|$ ، مخرج (۵-۳۲) را برحسب توان‌های x' [که نسبت به یک مبدأ مناسب در محل توزیع جریان جایگزیده اندازه‌گیری شده و به‌طور طرح‌وار نیز در شکل ۵-۶ نشان داده شده است]، بسط می‌دهیم

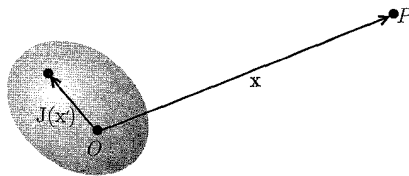
$$\frac{1}{|x - x'|} = \frac{1}{|x|} + \frac{x \cdot x'}{|x|^3} + \dots \quad (5-50)$$

بنابراین یک مؤلفه‌ی مشخص از پتانسیل برداری، دارای بسط زیر خواهد بود

$$A_i(x) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\frac{1}{|x|} \int J_i(x') d^3x' + \frac{x}{|x|^3} \cdot \int J_i(x') x' d^3x' + \dots \right] \quad (51-5)$$

این حقیقت که \mathbf{J} یک توزیع جریان بدون واگرایی جایگزیده است، ساده‌سازی و تبدیل بسط (۵۱-۵) را امکان‌پذیر می‌کند. فرض کنیم $f(x')$ و $g(x')$ توابع خوش‌رفتاری از x' باشند که به‌صورت زیر انتخاب شده‌اند. در صورتی‌که $\mathbf{J}(x')$ جایگزیده باشد، و نه لزوماً بدون واگرایی، اتحاد زیر را خواهیم داشت

$$\int (f \mathbf{J} \cdot \nabla' g + g \mathbf{J} \cdot \nabla' f) + (f g \nabla' \cdot \mathbf{J}) d^3x' = 0 \quad (52-5)$$



شکل ۵-۶: چگالی جریان جایگزیده $\mathbf{J}(x')$ باعث به‌وجود آمدن یک القای مغناطیسی در نقطه P با مختصات x می‌شود.

این موضوع را می‌توان با انتگرال‌گیری جزء‌به‌جزء روی جمله‌ی دوم که از بسط $f \nabla' \cdot (g \mathbf{J})$ نتیجه می‌شود اثبات کرد. با $f = x'_i$ و $g = x'_j$ ، همراه با (۵۲-۵) اثبات می‌کند که

$$\int J_i(x') d^3x' = 0$$

(۱) این تنها راه ممکن نیست، پتانسیل‌های اسکالر را نیز می‌توان استفاده کرد. مرجع زیر را ببینید:

بنابراین، جمله‌ی اول در (۵۱-۵)، که متناظر با جمله‌ی تک قطبی در بسط الکترواستاتیک است حضور ندارد با $f = x'_i$, $g = x'_j$ و $\nabla' \cdot \mathbf{J} = 0$ (۵۲-۵) نتیجه می‌دهد

$$\int (x'_i J_j + x'_j J_i) d^3 x' = 0$$

بنابراین انتگرال در جمله دوم (۵۱-۵) را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\begin{aligned} \mathbf{x} \cdot \int \mathbf{x}' J_i d^3 x' &\equiv \sum_j x_j \int x'_j J_i d^3 x' \\ &= -\frac{1}{4} \sum_j x_j \int (x'_i J_j - x'_j J_i) d^3 x' \\ &= -\frac{1}{4} \sum_{j,k} \varepsilon_{ijk} x_j \int (\mathbf{x}' \times \mathbf{J})_k d^3 x' \\ &= -\frac{1}{4} \left[\mathbf{x} \times \int (\mathbf{x}' \times \mathbf{J}) d^3 x' \right]_i \end{aligned}$$

تعریف چگالی گشتاور مغناطیسی یا مغناطش به صورت زیر مرسوم است

$$\mathbf{M}(\mathbf{x}) = \frac{1}{4} [\mathbf{x} \times \mathbf{J}(\mathbf{x})] \quad (53-5)$$

و انتگرالش را به عنوان گشتاور مغناطیسی \mathbf{m}

$$\mathbf{m} = \frac{1}{4} \int \mathbf{x}' \times \mathbf{J}(\mathbf{x}') d^3 x' \quad (54-5)$$

بنابراین پتانسیل برداری، با توجه به جمله‌ی دوم در (۵۱-۵) پتانسیل برداری دوقطبی مغناطیسی است

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{m} \times \mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^3} \quad (55-5)$$

که پایین‌ترین جمله‌ی غیرصفر در بسط A برای یک توزیع حالت پایدار جایگزیده است. القای مغناطیسی \mathbf{B} در خارج از چشمه‌ی جایگزیده را می‌توان مستقیماً با تعیین کرل (۵۵-۵) محاسبه نمود

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\frac{3\mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{m}) - \mathbf{m}}{|\mathbf{x}|^3} \right] \quad (56-5)$$

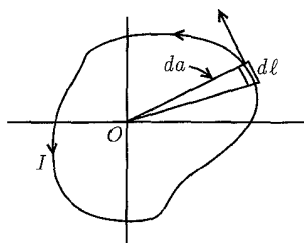
که در اینجا \mathbf{n} یک بردار واحد در جهت \mathbf{x} است. القای مغناطیسی (۵۶-۵) دقیقاً دارای شکل (۴-۱۳) برای میدان یک دوقطبی است. این مورد تعمیمی از نتیجه‌ای است که برای یک حلقه‌ی دایروی در بخش

گذشته یافت شد. دور از هر توزیع جریان جایگزیده‌ای، القای مغناطیسی همان القای مغناطیسی یک دوقطبی مغناطیسی با گشتاور دوقطبی‌ای است که با (۵۴-۵) مشخص شده است. در صورتی که جریان محدود به یک صفحه بوده ولی از طرفی حلقه دارای شکلی اختیاری باشد، گشتاور مغناطیسی را می‌توان به صورت ساده‌ای بیان کرد. اگر جریان I در یک مدار بسته که عنصر خطی آن $d\mathbf{l}$ است جاری شود، (۵۴-۵) به صورت زیر درمی‌آید

$$\mathbf{m} = \frac{I}{c} \oint \mathbf{x} \times d\mathbf{l}$$

برای یک حلقه‌ی تخت، همانند شکل ۷-۵، گشتاور مغناطیسی عمود بر صفحه‌ی حلقه‌ی است. چون $\frac{1}{c} |\mathbf{x} \times d\mathbf{l}| = da$ که در آن da المان مثلثی سطحی است که با دو انتهای $d\mathbf{l}$ و مبدأ تعریف شده است. به این ترتیب انتگرال بسته مساحت کل حلقه را مشخص خواهد کرد. بنابراین گشتاور مغناطیسی صرف‌نظر از شکل مدار، اندازه‌ی زیر را داراست

$$|\mathbf{m}| = I \times (\text{مساحت}) \quad (57-5)$$



شکل ۷-۵:

اگر توزیع جریان، با تعدادی از ذرات باردار با بار q_i و جرم M_i که با سرعت‌های v_i حرکت می‌کنند ایجاد شده باشد، در این حالت گشتاور مغناطیسی را می‌توان برحسب اندازه‌ی حرکت زاویه‌ای مداری ذرات بیان کرد. چگالی جریان عبارت خواهد بود با

$$\mathbf{J} = \sum_i q_i \mathbf{v}_i \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i)$$

که در آن \mathbf{x}_i مکان ذره‌ی i ام است. در این صورت گشتاور مغناطیسی (۵۴-۵) به صورت زیر درمی‌آید

$$\mathbf{m} = \frac{1}{c} \sum_i q_i (\mathbf{x}_i \times \mathbf{v}_i)$$

حاصل ضرب خارجی $(\mathbf{x}_i \times \mathbf{v}_i)$ با اندازه‌ی حرکت زاویه‌ای مداری ذره i ام یعنی $\mathbf{L}_i = M_i(\mathbf{x}_i \times \mathbf{v}_i)$ متناسب است. بدین ترتیب گشتاور به صورت زیر درمی‌آید

$$\mathbf{m} = \sum \frac{q_i}{2M_i} \mathbf{L}_i \quad (58-5)$$

اگر تمام ذرات در حال حرکت، دارای نسبت بار به جرم مساوی $\left(\frac{q_i}{M_i} = \frac{e}{M}\right)$ باشند، در این صورت گشتاور مغناطیسی را می‌توان برحسب اندازه حرکت زاویه‌ای مداری کل \mathbf{L} به صورت زیر نوشت

$$\mathbf{m} = \frac{e}{2M} \sum_i \mathbf{L}_i = \frac{e}{2M} \mathbf{L} \quad (59-5)$$

این رابطه، همان رابطه‌ی به‌خوبی شناخته‌شده‌ی کلاسیکی بین اندازه‌ی حرکت زاویه‌ای و گشتاور مغناطیسی است که برای حرکت مداری [اربیتالی؛ م] حتی در مقیاس اتمی نیز صادق است. اما این رابطه‌ی کلاسیکی برای گشتاور ذاتی الکترون‌ها و دیگر ذرات بنیادی ناقص است. با جایگزینی اندازه‌ی حرکت زاویه‌ای اسپینی S به جای L برای الکترون‌ها، گشتاور ذاتی اندکی بیش از دو برابر بزرگی آن چیزی است که در (59-5) لحاظ شده است.

بدین ترتیب صحبت از الکترونی می‌کنیم که دارای یک عامل g به اندازه‌ی $2(1/0.116)$ است. انحراف گشتاور مغناطیسی از مقدار کلاسیکی آن، ریشه‌هایی در نسبیت و اثرات کوانتوم مکانیکی آن دارد که نمی‌توانیم در اینجا آن را مورد بررسی قرار دهیم.

قبل از خروج از موضوع میدان‌های ناشی از یک توزیع جریان جایگزیده، انتگرال حجمی کروی القای مغناطیسی \mathbf{B} را بررسی می‌کنیم. دقیقاً همانند حالت الکترواستاتیک که در انتهای بخش ۴-۱، مورد بحث قرار گرفت، دو حالت حدی مدنظر است؛ یکی که در آن کره‌ای با شعاع R محتوی تمام جریان‌ها باشد، و دیگری؛ که در آن جریان به‌طور کامل خارج از حجم کره قرار گرفته باشد. انتگرال حجمی \mathbf{B} عبارت است از

$$\int_{r < R} \mathbf{B}(\mathbf{x}) d^3x = \int_{r < R} \nabla \times \mathbf{A} d^3x \quad (60-5)$$

انتگرال حجمی کرل \mathbf{A} را می‌توان برای به‌دست آوردن یک انتگرال سطحی به انجام رساند. بدین ترتیب

$$\int_{r < R} \mathbf{B} d^3x = R^2 \int d\Omega \mathbf{n} \times \mathbf{A}$$

که در آن \mathbf{n} عمودی است که به طرف خارج جهت یافته است. جایگزینی (5-32) برای \mathbf{A} و تبدیل مرتبه‌های انتگرال‌گیری، امکان می‌دهد که رابطه‌ی بالا را به صورت زیر بنویسیم

$$\int_{r < R} \mathbf{B} d^3x = -\frac{\mu_0}{4\pi} R^2 \int d^3x' \mathbf{J}(\mathbf{x}') \times \int d\Omega \frac{\mathbf{n}}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}$$

انتگرال زاویه‌ای مشابه چیزی است که در وضعیت الکترواستاتیکی آن اتفاق افتاد. بنابراین با انجام بهره‌گیری از (۴-۱۶) برای انتگرال \mathbf{B} روی یک حجم کروی، درمی‌یابیم که

$$\int_{r < R} \mathbf{B} d^3x = \frac{\mu_0}{3} \int \left(\frac{R^2 r_{<}}{r' r_{>}^2} \right) \mathbf{x}' \times \mathbf{J}(\mathbf{x}') d^3x' \quad (۴۱-۵)$$

که در آن ($r_{<}, r_{>}$) مقادیر کوچک‌تر و بزرگ‌تر r' و R هستند. در صورتی که تمام چگالی جریان، در داخل کره جای داده شود، $r_{>} = r'$ و $r_{<} = R$. بنابراین

$$\int_{r < R} \mathbf{B} d^3x = \frac{2\mu_0}{3} \mathbf{m} \quad (۴۲-۵)$$

که در آن \mathbf{m} گشتاور مغناطیسی کل (۵-۵۴) است.

برای طرف مقابل، که در آن تمام جریان در خارج از کره قرار دارد، با توجه به خاصیت (۵-۱۴) داریم

$$\int_{r < R} \mathbf{B} d^3x = \frac{4\pi R^3}{3} \mathbf{B}(\circ) \quad (۴۳-۵)$$

نتایج (۴۲-۵) و (۴۳-۵) را می‌توان با همتهای الکترواستاتیکی آن‌ها یعنی (۴-۱۸) و (۴-۱۹) مقایسه نمود. اختلاف بین (۴۲-۵) و (۴-۱۸) به اختلاف در مبادی میدان‌ها، که یکی از بارها و دیگری از جریان‌های دوار ناشی می‌شود مربوط است. اگر بخواهیم اطلاعات (۴۲-۵) را در میدان دوقطبی مغناطیسی (۵-۵۶) لحاظ کنیم، بایستی سهم یک تابع دلتا را نیز اضافه کنیم

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\frac{3\mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{m}) - \mathbf{m}}{|\mathbf{x}|^3} + \frac{4\pi}{3} \mathbf{m} \delta(\mathbf{x}) \right] \quad (۴۴-۵)$$

جمله‌ی تابع دلتا در عبارت مربوط به ساختار فوق ریز حالت‌های S اتمی وارد می‌شود.

۵-۷ انرژی، نیرو و گشتاور مؤثر بر یک توزیع جریان جایگزیده در یک

القای مغناطیسی خارجی

اگر یک توزیع جریان جایگزیده، در یک القای مغناطیسی خارجی \mathbf{B} قرار گیرد، طبق قوانین آمپر نیروها و گشتاورهایی را حس می‌کند. روابط کلی برای نیرو و گشتاور نیروی کل با (۵-۱۲) و (۵-۱۳) مشخص شده‌اند. اگر القای مغناطیسی خارجی، روی ناحیه جریان به‌آرامی تغییر کند، برای یافتن جملات غالب در نیرو و گشتاور نیرو می‌توان بسط سری تیلور را مورد استفاده قرار داد. یک مؤلفه از B را می‌توان حول یک مبدأ مناسب بسط داد

$$B_k(\mathbf{x}) = B_k(\circ) + \mathbf{x} \cdot \nabla B_k(\circ) + \dots \quad (۴۵-۵)$$

در این صورت مؤلفه‌ی i ام نیروی (۵-۱۲) به صورت زیر درمی‌آید

$$F_i = \sum_{jk} \varepsilon_{ijk} \left[B_k(\circ) \int \mathbf{J}_j(\mathbf{x}') d^3x' + \int J_j(\mathbf{x}') \mathbf{x}' \cdot \nabla B_k(\circ) d^3x' + \dots \right] \quad (۵-۶۶)$$

در اینجا ε_{ijk} یک تانسور واحد پادمقارن کامل است [برای؛ $k=3, j=2, i=1$ و برای هر جایگشت دوره‌ای (سیکلیک)، $\varepsilon_{ijk} = -1$ است و برای سایر جایگشت‌ها $\varepsilon_{ijk} = 1$ و برای دو یا چند اندیس مساوی $\varepsilon_{ijk} = 0$]. انتگرال حجمی J برای جریان‌های پایدار صفر است؛ پایین‌ترین مرتبه سهم برای نیرو، از جمله‌ی دوم در (۵-۶۶) ناشی می‌شود. نتیجه‌ی بالای رابطه‌ی (۵-۵۳) را می‌توان جهت رسیدن به رابطه‌ی زیر مورد استفاده قرار داد [با $\mathbf{x} \rightarrow \nabla B_k(\circ)$]

$$F_i = \sum_{jk} \varepsilon_{ijk} (\mathbf{m} \times \nabla)_j B_k(\mathbf{x}) \quad (۵-۶۷)$$

پس از مشتق‌گیری از $B_k(\mathbf{x})$ ، \mathbf{x} باید مساوی صفر قرار گیرد. می‌توان رابطه‌ی فوق را از لحاظ برداری به صورت زیر نوشت

$$\mathbf{F} = (\mathbf{m} \times \nabla) \times \mathbf{B} = \nabla(\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}) - \mathbf{m}(\nabla \cdot \mathbf{B}) \quad (۵-۶۸)$$

چون به‌طور کلی $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ است، پایین‌ترین مرتبه‌ی نیروی وارد بر یک توزیع جریان جایگزیده در یک میدان مغناطیسی خارجی \mathbf{B} عبارت است از

$$\mathbf{F} = \nabla(\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}) \quad (۵-۶۹)$$

این نیرو مبین آهنگ تغییر اندازه‌ی حرکت مکانیکی کل (شامل "اندازه حرکت مکانیکی پنهان" وابسته به حضور اندازه‌ی حرکت الکترومغناطیسی) است (مسئله‌ی ۶-۵ و ۱۲-۸ و مراجعی که در انتهای فصل ۱۲ آمده‌اند را ملاحظه کنید). (۵-۶۹) همان نیروی مؤثر در معادله‌ی حرکت نیوتن یعنی حاصل ضرب جرم در شتاب است، که $\left(\frac{d}{dt}\right) \left(\frac{\mathbf{m}}{c^2}\right) (\mathbf{E} \times \mathbf{m})$ به آن افزوده شده است، که در آن \mathbf{E} میدان الکتریکی خارجی در مکان دوقطبی است. جدا از عوامل زاویه‌ای، اندازه‌ی نسبی دو سهم فوق برحسب $\left(\frac{E}{\lambda}\right)$ ،

$\left(\frac{cB}{L}\right)$ است، که در آن L مقیاس طولی است که روی آن \mathbf{B} به‌طور قابل ملاحظه‌ای تغییر می‌کند، و λ طول موج فضای آزاد مربوط به تابش در فرکانس‌های نوعی حاضر در یک تجزیه فوریه از میدان الکتریکی متغیر با زمان است.

یک توزیع جریان جایگزیده در یک القای مغناطیسی غیریکنواخت، نیرویی را تجربه می‌کند که با گشتاور مغناطیسی \mathbf{m} آن متناسب است و توسط (۵-۶۹) مشخص می‌شود. کاربرد ساده‌ای از این نتیجه،

نیروی میانگین‌گیری شده‌ی زمانی روی یک ذره‌ی باردار است که در یک میدان مغناطیسی غیریکنواخت دارای حرکت ماریپیچی است. همان‌گونه که به خوبی مشخص شده است، یک ذره‌ی باردار در یک القای مغناطیسی یکنواخت، در یک مسیر دایروی و تحت زاویه قائمه نسبت به میدان، و با سرعتی ثابت و به موازات میدان حرکت می‌کند، طوری که یک مسیر ماریپیچ از خود برجا می‌گذارد.

حرکت دایروی فوق از لحاظ میانگین زمانی، معادل با یک حلقه‌ی دایروی جریان است و دارای یک گشتاور مغناطیسی است که توسط (۵-۵۷) مشخص می‌شود. اگر میدان یکنواخت نباشد، و دارای یک گرادیان کوچک نیز باشد (طوری که در یک دور چرخش حول این ماریپیچ ذره قدرت میدان‌ها را به‌گونه‌ی قابل ملاحظه‌ای متفاوت احساس نکند)، در این صورت حرکت ذره را می‌توان برحسب نیروی وارد بر گشتاور مغناطیسی معادل مورد بحث قرار داد. ملاحظات مربوط به علائم گشتاور و نیرو نشان می‌دهد که ذرات باردار، مستقل از علامت بار آن‌ها، تمایل به دفع شدن توسط ناحیه‌ای با چگالی شار بالا را دارند. این موضوع اساس "آینه‌های مغناطیسی" است که در موضوع محدود کردن پلاسماها دارای اهمیت است. گشتاور کل وارد بر توزیع جریان جایگزیده، به‌گونه‌ای مشابه، با اعمال بسط (۵-۶۵) و (۵-۱۳) به دست می‌آید. در اینجا جمله‌ی مرتبه‌ی صفرم در این بسط سهیم است. با حفظ تنها این جمله‌ی عمده داریم

$$\mathbf{N} = \int \mathbf{x}' \times [\mathbf{J} \times \mathbf{B}(\circ)] d^3 x' \quad (70-5)$$

با نوشتن تفصیلی ضرب برداری سه‌گانه، به دست می‌آوریم

$$\mathbf{N} = \int [(\mathbf{x}' \cdot \mathbf{B})\mathbf{J} - (\mathbf{x}' \cdot \mathbf{J})\mathbf{B}] d^3 x'$$

انتگرال اول دارای شکلی است شبیه به آنچه در (۵-۶۶) بررسی شد. بنابراین می‌توانیم مقدار آن را بی‌درنگ یادداشت کنیم. انتگرال دوم چنانکه می‌توان این موضوع را از (۵-۵۲) نیز به‌ازای $f = g = r'$ ملاحظه کرد، برای یک توزیع جریان جایگزیده صفر می‌شود. بنابراین جمله‌ی عمده در این گشتاور عبارت است از

$$\mathbf{N} = \mathbf{m} \times \mathbf{B}(\circ) \quad (71-5)$$

این فرمول رابطه‌ی آشنایی برای گشتاور مؤثر وارد بر یک دوقطبی است، که در بخش (۵-۱) به‌عنوان یکی از راه‌های تعریف اندازه و جهت القای مغناطیسی مورد بحث قرار گرفت.

انرژی پتانسیل مربوط به یک گشتاور مغناطیسی دائمی (یا دوقطبی) در یک میدان مغناطیسی خارجی را می‌توان یا از طریق نیروی (۵-۶۹) و یا از طریق گشتاور (۵-۷۱) به دست آورد. اگر نیرو را به صورت منفی گرادیان انرژی پتانسیل U تعبیر کنیم، درمی‌یابیم که

$$U = -\mathbf{m} \cdot \mathbf{B} \quad (72-5)$$

برای یک گشتاور مغناطیسی در یک میدان یکنواخت، گشتاور نیروی (۷۱-۵) را می‌توان به‌عنوان منفی مشتق U نسبت به زاویه‌ی بین \mathbf{B} و \mathbf{m} تعبیر نمود. نتیجه‌ی به‌خوبی شناخته‌شده‌ی فوق برای انرژی پتانسیل یک دوقطبی نشان می‌دهد که دوقطبی تمایل به هم‌جهت نمودن خود به موازات میدان، در وضعیتی با پایین‌ترین انرژی پتانسیل را دارا است.

به‌طور گذرا اشاره می‌کنیم که (۷۲-۵) انرژی کل گشتاور مغناطیسی در یک میدان خارجی نیست. برای آوردن دوقطبی \mathbf{m} در وضعیت نهایی‌اش در میدان، (جهت حفظ جریان \mathbf{J} که باعث ایجاد \mathbf{m} ثابت می‌شود) باید کار انجام داد. هرچند که وضعیت نهایی یک حالت پایدار است اما، در ابتدا یک دوره‌ی زمانی گذرائی وجود دارد که در آن میدان‌های مربوطه دارای بستگی زمانی هستند. این موضوع خارج از بررسی‌های کنونی ما است، در نتیجه بحث انرژی میدان‌های مغناطیسی را به بخش (۲-۶)، پس از بررسی قانون القای فارادی موکول می‌کنیم.

رابطه‌ی مربوط به انرژی (۷۲-۵) را می‌توان در بحث مربوط به اثرات مغناطیسی، در سطوح انرژی اتمی همانند اثر زیمنان، یا برای ساختار ریز و فوق‌ریز اعمال نمود. می‌توان چنین تصور کرد که ساختار ریز از تفاوت‌های موجود در انرژی گشتاور مغناطیسی ذاتی الکترون یعنی μ_e [در یک میدان مغناطیسی که در چارچوب ساکن الکترون ملاحظه می‌شود] به‌وجود می‌آید. ساختار ریز با پیچیدگی ظریف و دقیق مربوط به حرکت تقدیمی توماس، به‌طور خلاصه در فصل ۱۱ مورد بحث قرار گرفته است. برهم‌کنش فوق ریز همان برهم‌کنش مربوط به گشتاور مغناطیسی μ_N هسته، با میدان مغناطیسی ایجاد شده توسط الکترون است. هامیلتونی برهم‌کنشی [در ساختار فوق ریز، μ] همان (۷۲-۵) است با $\mathbf{m} = \mu_N \mathbf{B}$ که مساوی میدان مغناطیسی ناشی از الکترون است که در مکان هسته ($\mathbf{x} = \mathbf{0}$) تعیین می‌شود. این میدان شامل دو قسمت است؛ یکی میدان دوقطبی (۵-۶۴) و دیگری میدان مغناطیسی ایجادشده توسط حرکت مداری بار الکترون. دومی به‌طور غیرنسبیتی با (۵-۵) مشخص می‌شود و می‌تواند به‌صورت $\mathbf{B}(\mathbf{0}) = \frac{\mu_0 e \mathbf{L}}{4\pi m r^3}$ مداری بیان شود، که در آن $\mathbf{L} = \mathbf{x} \times m\mathbf{v}$ ، اندازه‌ی حرکت زاویه‌ای مداری الکترون حول هسته است. بنابراین هامیلتونین فوق‌ریز عبارت است از

$$\mathcal{H}_{HFS} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left\{ -\frac{\lambda\pi}{3} \mu_e \cdot \mu_N \delta(\mathbf{x}) + \frac{1}{r^3} \left[\mu_e \cdot \mu_N - 3 \frac{(\mathbf{x} \cdot \mu_e)(\mathbf{x} \cdot \mu_N)}{r^2} - \frac{e}{m} \mathbf{L} \cdot \mu_N \right] \right\} \quad (72-5)$$

مقادیر چشمداشتی این هامیلتونین در حالت‌های مختلف اتمی (و اسپین هسته) جابه‌جایی‌های^۱ انرژی فوق‌ریز را نتیجه می‌دهند. برای حالت‌های متقارن گروه S ، جمله دوم در (۷۳-۵) مقدار چشمداشتی

1) shifts

صفر را نتیجه می‌دهد. انرژی فوق‌ریز منحصرأً از جمله اول به دست می‌آید

$$\Delta E = -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\lambda\pi}{3} |\psi_e(\theta)|^2 \langle \mu_e \cdot \mu_N \rangle \quad (۷۴-۵)$$

برای $\theta \neq 0$ ، انرژی فوق‌ریز به‌طور کامل از جمله‌ی دوم در (۷۳-۵) به دست می‌آید، چراکه توابع موج به‌ازای $\theta \neq 0$ در مبدأ صفر هستند. این روابط نتیجه‌ی کارهای فرمی^۱ است که آن‌ها را از معادله‌ی دیراک (۱۹۳۰) به دست آورد. در به‌کارگیری (۷۳-۵) و (۷۴-۵) باید یادآوری کنیم که بار e منفی است و اینکه جهت μ_e در خلاف جهت اسپین الکترون است. اختلاف انرژی (۷۴-۵) بین حالت‌های یکتایی و سه‌تایی مربوط به حالت $1S$ در هیدروژن اتمی، سرمنشأً خط مشهور 21cm در آستروفیزیک است.

تفاوت جمله‌ی تماسی^۲ در (۷۳-۵) با شکل دوقطبی الکتریکی در (۴-۲۰) به ما امکان می‌دهد که در ارتباط با طبیعت گشتاورهای مغناطیسی ذاتی، نتیجه‌ای را ترسیم کنیم. در عین اینکه گشتاورهای مغناطیسی مداری به‌وضوح با چرخش جریان‌ها به‌وجود می‌آیند، یک احتمال مطرح می‌شود و آن اینکه گشتاور مغناطیسی ذاتی ذرات بنیادی، همچون الکترون، پوزیترون، میون، پروتون و نوترون همگی توسط بارهای مغناطیسی (که از لحاظ مغناطیسی در وضعیت‌های خنثایی مرتب شده‌اند) به‌وجود آمده باشند (عدم وجود بار مغناطیسی خالص). در صورتی که گشتاورهای مغناطیسی پروتون و الکترون توسط گروه‌هایی از بارهای مغناطیسی ایجاد شده باشند، ضریب $\frac{\lambda\pi}{3}$ در (۷۴-۵) بایستی با $-\frac{4\pi}{3}$ عوض می‌شد! خط فوق‌ریز آستروفیزیکی هیدروژن اتمی، بایستی در طول موج 42cm می‌بود، و حالت‌های یکتایی و سه‌تایی نیز معکوس می‌شدند. نتایج آزمایشگاهی روی پوزیترونیوم و میونیوم، و همچنین پراکندگی مغناطیسی نوترون‌ها حامی مضاعف پرقدرتی دال بر این نتیجه هستند که گشتاور مغناطیسی ذاتی ذرات می‌توانند به جریان‌های الکتریکی منتسب شوند و نه به بارهای مغناطیسی*.

۸-۵ معادلات ماکروسکوپی، شرایط مرزی روی H و B

تاکنون با قوانین اساسی (۲۶-۵) میدان‌های مغناطیسی حالت پایدار به‌صورت معادلاتی میکروسکوپی در متن مقدمه و فصل ۴ سروکار داشتیم. در آنجا چنین فرض کرده‌ایم که چگالی جریان J یک تابع

1) Fermi 2) Contact term

(* نکته‌ای وجود دارد و آن این است که تمامی ذرات باید منشأً یکسانی برای گشتاورهایشان داشته باشند. برای یک بحث فنی در مورد این آزمایش‌های ببینید

J. D. Jackson, The nature of intrinsic magnetic dipole moments, Report No. 77-17, CERN, Geneva (1977).

که مجدداً در

International Community of Physicists: Essays on Physics and Society in Honor of Victor Frederick Weisskopf, ed. V. Stefan, AIP Press, Springer-Verlag, New York (1997).

به چاپ رسید.

کاملاً مشخص از مکان است. در مسائل ماکروسکوپی این موضوع غالباً صحیح نیست. اتم‌ها در ماده، حاوی الکترون‌هایی هستند که باعث ایجاد جریان‌های اتمی مؤثر می‌شوند و چگالی جریان مربوط به آن نیز، یک کمیت سریعاً افت و خیزکننده است. تنها میانگین این کمیت روی یک حجم ماکروسکوپی، شناخته شده و مناسب است. به علاوه الکترون‌های اتمی، گشتاور مغناطیسی ذاتی را علاوه بر گشتاور ناشی از حرکت مداری‌شان ارائه می‌کنند. تمامی این گشتاورها می‌توانند باعث ایجاد میدان‌های دوقطبی‌ای شوند که به‌گونه‌ای محسوس در مقیاس ابعاد اتمی نیز تغییر می‌کنند.

فرایند میانگین‌گیری از معادلات میکروسکوپی برای به‌دست آوردن یک توصیف ماکروسکوپی از میدان‌های مغناطیسی در محیط‌های حساس^۱، در فصل ۶ به‌طور دقیق بحث شده است. در اینجا نیز دقیقاً همانند فصل ۴ موضوع را تنها به شکل مقدماتی بحث می‌کنیم. اولین گام، مشاهده این موضوع است که میانگین‌گیری معادله‌ی $\nabla \cdot \mathbf{B}_{\text{micro}} = 0$ ، منجر به معادله‌ی مشابه زیر برای القاء مغناطیسی ماکروسکوپی می‌شود

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (75-5)$$

بدین ترتیب هنوز می‌توانیم از مفهوم پتانسیل برداری $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ که کرل آن \mathbf{B} را نتیجه می‌دهد استفاده کنیم. تعداد زیادی از مولکول‌ها یا اتم‌ها بر واحد حجم، هر کدام با گشتاور مغناطیسی مولکولی \mathbf{m}_i خود، منجر به پیدایش یک مغناطش ماکروسکوپی میانگین یا چگالی گشتاور مغناطیسی می‌شوند

$$\mathbf{M}(\mathbf{x}) = \sum_i N_i \langle \mathbf{m}_i \rangle \quad (76-5)$$

که در آن N_i میانگین تعداد بر واحد حجم مولکول‌های نوع i ، و $\langle \mathbf{m}_i \rangle$ گشتاور مولکولی میانگین در یک حجم کوچک در نقطه‌ی \mathbf{x} است. علاوه بر مغناطش حجمی^۲، فرض می‌کنیم که به جهت جاری شدن بار آزاد در محیط، یک چگالی جریان ماکروسکوپی $\mathbf{J}(\mathbf{x})$ نیز وجود داشته باشد. در این صورت پتانسیل برداری ناشی از یک حجم کوچک ΔV در نقطه‌ی \mathbf{x}' عبارت خواهد بود با

$$\Delta \mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}') \Delta V}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} + \frac{\mathbf{M}(\mathbf{x}') \times (\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} \Delta V \right]$$

این رابطه مشابه مغناطیسی (۴-۳) است. جمله‌ی دوم، پتانسیل برداری دوقطبی (۵-۵۵) است. با فرض اینکه ΔV از لحاظ ماکروسکوپی به‌صورت بسیار کوچک $d^3 x'$ درآید، پتانسیل برداری کل در نقطه‌ی \mathbf{x} را می‌توان به‌صورت یک انتگرال روی کل فضا نوشت

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \left[\frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} + \frac{\mathbf{M}(\mathbf{x}') \times (\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} \right] d^3 x' \quad (77-5)$$

جمله‌ی مغناطش را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\int \frac{\mathbf{M}(\mathbf{x}') \times (\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} d^3x' = \int \mathbf{M}(\mathbf{x}') \times \nabla' \left(\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right) d^3x'$$

در اینجا یک انتگرال‌گیری جزء‌به‌جزء، عملگر گرادیان را روی بردار مغناطش برده، و یک انتگرال سطحی را نتیجه خواهد داد. اگر $\mathbf{M}(\mathbf{x}')$ خوش‌رفتار و جایگزیده باشد، انتگرال سطحی صفر خواهد شد. در این صورت پتانسیل برداری (۷۷-۵) به صورت زیر درمی‌آید

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{[\mathbf{J}(\mathbf{x}') + \nabla' M(\mathbf{x}')] }{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x' \quad (78-5)$$

ملاحظه می‌شود که بردار مغناطش، چگالی جریان مؤثر

$$\mathbf{J}_M = \nabla \times \mathbf{M} \quad (79-5)$$

را در مسئله وارد می‌کند. معادل ماکروسکوپی معادله‌ی میکروسکوپی $\nabla \times B_{\text{micro}} = \mu_0 J_{\text{micro}}$ می‌توان از (۷۸-۵) استنباط نمود. اگر جواب معادلات (۲۶-۵)، (۳۲-۵) می‌بود، در آن صورت (۷۸-۵) ایجاب می‌کرد که $\mathbf{J} + \mathbf{J}_M$ نقش جریان را در معادل ماکروسکوپی بازی کند یعنی

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 [\mathbf{J} + \nabla \times \mathbf{M}] \quad (80-5)$$

جمله‌ی $\nabla \times \mathbf{M}$ را می‌توان همواره با \mathbf{B} ، برای تعریف یک میدان ماکروسکوپی جدید \mathbf{H} ، که میدان مغناطیسی نامیده می‌شود ترکیب نمود

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} - \mathbf{M} \quad (81-5)$$

در این صورت معادلات ماکروسکوپی به‌جای (۲۶-۵) عبارتند از

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{H} &= \mathbf{J} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \end{aligned} \quad (82-5)$$

معرفی \mathbf{H} به‌عنوان یک میدان ماکروسکوپی، کاملاً مشابه معرفی \mathbf{D} برای میدان الکترواستاتیکی است. معادلات ماکروسکوپی (۸۲-۵) همتاهای الکترواستاتیکی زیر خود را دارا هستند

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{D} &= \rho \\ \nabla \times \mathbf{E} &= 0 \end{aligned} \quad (83-5)$$

تأکید می‌کنیم که میدان‌های اصلی همان میدان‌های \mathbf{E} و \mathbf{B} هستند. این میدان‌ها معادلات همگن در (۸۲-۵) و (۸۳-۵) را برآورده می‌کنند. میدان‌های اقتباس شده \mathbf{D} و \mathbf{H} برای راحتی کار معرفی شده‌اند تا با این کار مجاز باشیم با یک روش میانگین سهم بارهای اتمی و جریان‌های ρ و \mathbf{J} را به حساب آوریم. برای کامل کردن توصیف مگنتواستاتیک ماکروسکوپی، بایستی یک رابطه‌ی ساختاری بین H و B وجود داشته باشد. همان‌گونه که در مقدمه نیز بحث شد، برای مواد همسانگرد^۱ دیامغناطیس و پارامغناطیس رابطه‌ی خطی ساده‌ی

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \quad (۸۴-۵)$$

صادق است. μ پارامتر مشخصه‌ی محیط است و تراوایی مغناطیسی نامیده می‌شود. نوعاً $\frac{\mu}{\mu_0}$ با واحد تنها به اندازه‌ی چند صد هزارم تفاوت دارد ($\mu > \mu_0$ برای مواد پارامغناطیس و $\mu < \mu_0$ برای مواد دیامغناطیس). برای مواد فرومغناطیس، (۸۴-۵) باید با یک رابطه‌ی تابعی غیرخطی جایگزین شود

$$\mathbf{B} = \mathbf{F}(\mathbf{H}) \quad (۸۵-۵)$$

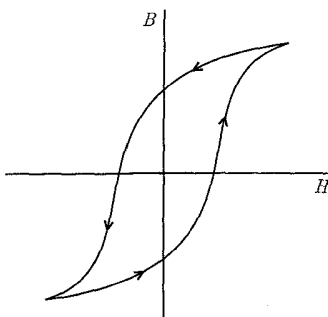
پدیده‌ی هیستریزیس که به‌طور طرح‌وار در شکل ۸-۵ نشان داده شده است، اشاره می‌کند که \mathbf{B} یک تابع تک‌مقدار از \mathbf{H} نیست. در حقیقت تابع $F(\mathbf{H})$ بستگی به تاریخچه‌ی تهیه‌ی ماده دارد. نفوذپذیری نموی $\mu(\mathbf{H})$ به‌صورت مشتق \mathbf{B} نسبت به \mathbf{H} تعریف می‌شود، با فرض اینکه \mathbf{B} و \mathbf{H} موازی باشند. برای مواد با تراوایی بالا $\frac{\mu(\mathbf{H})}{\mu_0}$ می‌تواند به بزرگی 10^6 باشد. بسیاری از مواد فرومغناطیس بحث نشده، دارای رابطه خطی (۸۴-۵) بین \mathbf{B} و \mathbf{H} برای میدان‌های بسیار کوچک هستند. مقادیر نوعی تراوایی‌های نسبی اولیه از 10^4 تا 10^6 تغییر می‌کنند. رابطه‌ی پیچیده‌ی بین \mathbf{B} و \mathbf{H} در مواد فرومغناطیس، بررسی مسائل مقدار مرزی مغناطیسی را ذاتاً بسیار مشکل‌تر از مسائل الکترواستاتیکی مشابه می‌کند. اما مقادیر بسیار بزرگ تراوایی‌های نسبی گاهی اوقات انجام فرض‌های ساده‌کننده‌ای را روی شرایط مرزی امکان‌پذیر می‌کند. شرایط مرزی برای \mathbf{B} و \mathbf{H} در فصل مشترک بین دو محیط در بخش ۱-۵ به‌دست آمدند. در آنجا نشان داده شد که مؤلفه‌های عمودی \mathbf{B} و مماسی \mathbf{H} روی دو طرف مرز طبق روابط زیر به هم مربوط می‌شوند

$$(\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (۸۶-۵)$$

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = \mathbf{K} \quad (۸۷-۵)$$

که در آن \mathbf{n} عمود واحدی است که جهت آن از ناحیه‌ی (۱) به ناحیه (۲) است و \mathbf{K} یک چگالی جریانی سطحی ایده‌آل است. برای محیط‌های برآورده‌کننده‌ی روابط خطی‌ای هم چون (۸۴-۵)، شرایط مرزی را می‌توان به‌گونه‌ای دیگر به‌صورت زیر بیان کرد

$$\mathbf{B}_2 \cdot \mathbf{n} = \mathbf{B}_1 \cdot \mathbf{n}, \quad \mathbf{B}_2 \times \mathbf{n} = \frac{\mu_2}{\mu_1} \mathbf{B}_1 \times \mathbf{n} \quad (۸۸-۵)$$

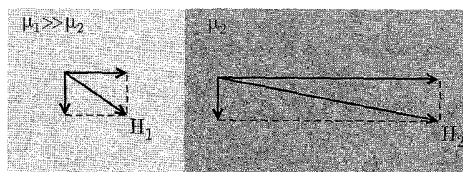


شکل ۸-۵: حلقه هیستریزیس که B را به صورت تابعی از H در یک ماده فرومغناطیس ارائه می‌دهد.

یا

$$\mathbf{H}_2 \cdot \mathbf{n} = \frac{\mu_1}{\mu_2} \mathbf{H}_1 \cdot \mathbf{n}, \quad \mathbf{H}_2 \times \mathbf{n} = \mathbf{H}_1 \times \mathbf{n} \quad (۸۹-۵)$$

اگر $\mu_1 \gg \mu_2$ باشد، مؤلفه عمودی H_2 بسیار بزرگ‌تر از مؤلفه‌ی عمودی H_1 خواهد بود، درست همان‌گونه که در شکل (۹-۵) نشان داده شده است. در حد $\left(\frac{\mu_1}{\mu_2}\right) \rightarrow \infty$ ، مستقل از جهت H_1 ، میدان مغناطیسی H_2 عمود بر سطح مرزی است (به جز حالت خاصی که در آن H_1 کاملاً موازی با سطح مشترک است). بدین ترتیب شرط مرزی روی H در سطح یک ماده با تراوایی بسیار بالا، مشابه با این شرط مرزی برای میدان الکتریکی در سطح یک رسانا است. بنابراین می‌توانیم نظریه‌ی پتانسیل الکترواستاتیک را برای میدان مغناطیسی استفاده کنیم. سطوح مربوط به مواد با تراوایی بالا به طور تقریبی ”هم‌پتانسیل“ اند، و خطوط H بر این سطوح هم‌پتانسیل عمودند. از این شباهت در بسیاری از مسائل مربوط به طراحی آهن‌ربا استفاده می‌شود. نوع میدان در بالا معین شد، و وجه قطب‌ها طوری شکل داده شدند که سطوحی هم‌پتانسیل باشند. برای بحث بیشتر بخش ۵-۱۴ را ملاحظه کنید.



شکل ۹-۵:

۹-۵ روش‌های حل مسائل مقدار مرزی در مگنتواستاتیک

معادلات اساسی مگنتواستاتیک عبارتند از

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} \quad (۹۰-۵)$$

همراه با تعدادی رابطه‌ی ساختاری دیگر بین \mathbf{H} و \mathbf{B} .
تنوع وضعیت‌هایی که در عمل می‌تواند اتفاق بیافتد به‌گونه‌ای است که بررسی تکنیک‌های مختلف، جهت حل مسائل مقدار مرزی در مگنتواستاتیک بارزش خواهد بود.

الف) روش کلی قابل کاربرد برای پتانسیل برداری
به جهت وجود معادله‌ی اول در (۵-۹۰)، همواره می‌توانیم یک پتانسیل برداری $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ را به‌گونه‌ای معرفی کنیم که

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

اگر یک رابطه‌ی صریح ساختاری به صورت $\mathbf{H} = \mathbf{H}[\mathbf{B}]$ داشته باشیم، در این صورت معادله‌ی دوم در (۵-۹۰) را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\nabla \times \mathbf{H}[\nabla \times \mathbf{A}] = \mathbf{J}$$

در حالت کلی این رابطه یک معادله‌ی دیفرانسیلی بسیار پیچیده است، حتی اگر توزیع جریان دارای شکل ساده‌ای باشد. مگر اینکه \mathbf{H} و \mathbf{B} به‌گونه‌ای ساده به هم مربوط باشند. برای محیط‌های خطی با $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$ معادله به صورت

$$\nabla \times \left(\frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{A} \right) = \mathbf{J} \quad (۹۱-۵)$$

درمی‌آید. اگر μ روی ناحیه‌ی محدودی از فضا ثابت باشد، در این صورت در آن ناحیه (۵-۹۱) را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} = \mu\mathbf{J} \quad (۹۲-۵)$$

با انتخاب پیمانه‌ی کولنی ($\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$) رابطه‌ی بالا به صورت رابطه‌ی (۵-۳۱) درمی‌آید همراه با یک چگالی جریان اصلاح شده‌ی $\mathbf{J} \left(\frac{\mu}{\mu_0} \right)$. این وضعیت دقیقاً به موازات بحث محیط‌های دی‌الکتریک همسانگرد یکنواخت است که در آن چگالی بار مؤثر در معادله‌ی پواسن، $\frac{\epsilon_0 \rho}{\epsilon}$ است. با استفاده از شرایط مرزی (۵-۸۸) یا (۵-۸۹)، جواب‌های (۵-۹۲) در محیط‌های خطی متفاوت، بایستی در دو طرف سطوح مرزی تطبیق کنند.

ب) $\mathbf{J} = 0$ ؛ پتانسیل اسکالر مغناطیسی

در صورتی که چگالی جریان در یک ناحیه محدود از فضا صفر شود، معادله‌ی دوم در (۵-۹۰) به صورت $\nabla \times \mathbf{H} = 0$ درمی‌آید. این موضوع ایجاب می‌کند که می‌توانیم یک پتانسیل اسکالر مغناطیسی Φ_M را طوری معرفی کنیم که

$$\mathbf{H} = -\nabla\Phi_M \quad (۹۳-۵)$$

دقیقاً همانند $\mathbf{E} = -\nabla\Phi$ در الکترواستاتیک.

با یک رابطه‌ی ساختاری صریح، به شکل $\mathbf{B} = \mathbf{B}[\mathbf{H}]$ ، $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\nabla \cdot \mathbf{B}[-\nabla\Phi_M] = 0$$

مجدداً این رابطه یک معادله‌ی دیفرانسیلی بسیار پیچیده است، مگر اینکه محیط خطی باشد، که در آن حالت این معادله به صورت زیر درمی‌آید

$$\nabla \cdot [\mu \nabla\Phi_M] = 0 \quad (۹۴-۵)$$

اگر μ حداقل "ثابت قطعه‌ای"^۱ باشد، در هر ناحیه‌ای پتانسیل اسکالر مغناطیسی معادله‌ی لاپلاس زیر را برآورده خواهد کرد

$$\nabla^2 \Phi_M = 0$$

جواب‌ها در ناحیه‌های متفاوت از طریق شرایط مرزی (۸۹-۵) به هم مربوط می‌شوند. دقت کنید که در این وضعیت آخر (مربوط به ثابت بودن قطعه‌ای μ) می‌توانیم بنویسیم: $\mathbf{B} = -\nabla\Psi_M$ ، با $\nabla^2\Psi_M = 0$. با این نوع از پتانسیل اسکالر نیز شرایط مرزی (۸۸-۵) مناسب هستند. مفهوم پتانسیل اسکالر مغناطیسی را می‌توان به گونه‌ای سودمند برای حلقه‌های بسته جریان مورد استفاده قرار داد. می‌توان نشان داد که Ψ_M با زاویه‌ی فضایی دربرگرفته شده توسط مرز حلقه در نقطه‌ی مشاهده متناسب است. مسئله‌ی ۱-۵ را ببینید. یک چنین پتانسیلی، به گونه‌ای واضح چند مقداری است.

ج) فرومغناطیس‌های سخت (M مشخص و $\mathbf{J} = 0$)

یک وضعیت کاربردی معمول که به فرومغناطیس‌های "سخت" ارتباط دارد، داشتن مغناطشی است که اساساً مستقل از میدان‌های اعمال شده (برای قدرت‌های میدانی متوسط) باشد. یک چنین موادی را می‌توان این گونه تلقی کرد که گویی دارای یک مغناطش ثابت مشخص $\mathbf{M}(\mathbf{x})$ هستند.

الف) پتانسیل اسکالر

چون $\mathbf{j} = 0$ است، می‌توان پتانسیل اسکالر مغناطیسی Ψ_M را به کار گرفت. معادله‌ی اول در (۹۰-۵) به صورت زیر نوشته می‌شود

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \mu_0 \nabla \cdot (\mathbf{H} + \mathbf{M}) = 0$$

1) Piecewise Constant

در این صورت با توجه به (۹۳-۵)، این معادله به صورت یک معادله‌ی پواسن در مگنتواستاتیک درمی‌آید

$$\nabla^2 \Phi_M = -\rho_M \quad (۹۵-۵)$$

با چگالی بار مغناطیسی موثر

$$\rho_M = -\nabla \cdot \mathbf{M} \quad (۹۶-۵)$$

در صورتی که سطح مرزی نداشته باشیم، جواب برای پتانسیل Φ_M عبارت است از

$$\Phi_M(\mathbf{x}) = -\frac{1}{4\pi} \int \frac{\nabla' \cdot \mathbf{M}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x' \quad (۹۷-۵)$$

در صورتی که \mathbf{M} خوش رفتار و جایگزیده باشد، می‌توان یک انتگرال‌گیری جزء به جزء انجام داد تا نتیجه‌ی زیر به دست آید

$$\Phi_M(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi} \int \mathbf{M}(\mathbf{x}') \cdot \nabla' \left(\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right) d^3x'$$

سپس

$$\nabla' \left(\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right) = -\nabla \left(\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right)$$

را می‌توان برای به دست آوردن نتیجه زیر مورد استفاده قرار داد

$$\Phi_M(\mathbf{x}) = -\frac{1}{4\pi} \nabla \cdot \int \frac{\mathbf{M}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x' \quad (۹۸-۵)$$

به طور گذرا ملاحظه می‌کنیم که دور از ناحیه‌ای که در آن مغناطش غیر صفر است پتانسیل را می‌توان با رابطه‌ی زیر تقریب زد

$$\Phi_M(\mathbf{x}) \simeq -\frac{1}{4\pi} \nabla \left(\frac{1}{r} \right) \cdot \int \mathbf{M}(\mathbf{x}') d^3x' = \frac{\mathbf{m} \cdot \mathbf{x}}{4\pi r^3}$$

که در آن، $\mathbf{m} = \int \mathbf{M} d^3x$ گشتاور مغناطیسی کل است. این رابطه پتانسیل اسکالر ناشی از یک دوقطبی است، چنانکه می‌توان از (۴-۱۰) در الکترواستاتیک نیز این موضوع را ملاحظه کرد. بدین ترتیب یک توزیع اختیاری جایگزیده از مغناطش، از لحاظ مجانبی دارای یک میدان دوقطبی است با قدرتی که توسط گشتاور مغناطیسی کل مربوط به این توزیع مشخص می‌شود.

در عین اینکه توزیع فیزیکی مغناطش از لحاظ ریاضی خوش رفتار و بدون انفصال است، اما گاهی مناسب است واقعیت موجود را به صورت ایده‌آل بررسی کرده و روی $\mathbf{M}(\mathbf{x})$ در صورت وجود انفصال

بحث کنیم. بدین ترتیب اگر با یک فرومگنت "سخت" دارای حجم V و سطح S مواجه شدیم، $\mathbf{M}(\mathbf{x})$ را در داخل V مشخص می‌کنیم و فرض می‌کنیم که $[\mathbf{M}(\mathbf{x})]$ در سطح S به‌طور ناگهانی به سمت صفر افت کند. کاربرد قضیه‌ی دیورژانس برای ρ_M [(۹۶-۵)] در یک جعبه قرص‌گوسی که در دو طرف سطح قرار گرفته است، نشان می‌دهد که یک چگالی بار سطحی مغناطیسی مؤثر به‌صورت زیر وجود دارد

$$\sigma_M = \mathbf{n} \cdot \mathbf{M} \quad (۹۹-۵)$$

که در آن \mathbf{n} بردار یکانی عمودی است که به طرف خارج از سطح جهت یافته است. در این صورت به‌جای (۹۷-۵)، پتانسیل با رابطه‌ی زیر مشخص می‌شود

$$\Phi_M(\mathbf{x}) = -\frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\nabla' \cdot \mathbf{M}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x' + \frac{1}{4\pi} \oint_S \frac{\mathbf{n}' \cdot \mathbf{M}(\mathbf{x}') da'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \quad (۱۰۰-۵)$$

یک حالت خاص مهم، به یکنواخت بودن مغناطش در سرتاسر حجم V مربوط است. در این صورت جمله اول صفر می‌شود و تنها انتگرال سطحی روی σ_M سهم خواهد داشت.

توجه به این نکته مهم است که (۹۸-۵) به‌طور کلی حتی برای حد توزیع‌های انفصالی \mathbf{M} قابل کاربرد است، چراکه می‌توانیم پس از تبدیل (۹۷-۵) به (۹۸-۵)، به‌منظور بحث روی انفصال‌های موجود در \mathbf{M} ، یک فرآیند حدی معرفی کنیم [هرگز انتگرال سطحی σ_M را با (۹۸-۵) ترکیب نکنید!]

ب) پتانسیل برداری

اگر $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ را برای برآورده شدن اتوماتیک وار $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ انتخاب کنیم، در این صورت معادله‌ی دوم (۹۰-۵) را به‌صورت زیر می‌نویسیم

$$\nabla \times \mathbf{H} = \nabla \times \left(\frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M} \right) = 0$$

این کار منجر به معادله‌ی یواسن برای \mathbf{A} در پیمانه‌ی کولنی می‌شود

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{J}_M \quad (۱۰۱-۵)$$

که در آن چگالی جریان مغناطیسی مؤثر (۷۹-۵) است. جواب برای پتانسیل برداری در غیاب سطوح مرزی عبارت است از

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\nabla' \times \mathbf{M}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x' \quad (۱۰۲-۵)$$

همان‌گونه که این موضوع تاکنون در رابطه‌ی (۷۸-۵) نیز نشان داده شده است. شکل دیگری برای پتانسیل برداری \mathbf{A} توسط جمله مغناطش در (۷۷-۵) ارائه شده است. اگر توزیع مغناطش انفصالی باشد، لازم است

یک انتگرال سطحی به (۱۰۲-۵) اضافه کنیم. با شروع از (۷۷-۵) می‌توان برای \mathbf{M} نشان داد که به‌طور انحصالی در سطح S (محدودکننده‌ی حجم V) به صفرافت می‌کند. تعمیم (۱۰۲-۵) عبارت است از

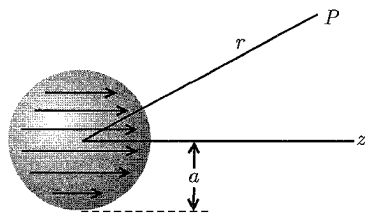
$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\nabla' \times \mathbf{M}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x' + \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_S \frac{\mathbf{M}(\mathbf{x}') \times \mathbf{n}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} da' \quad (103-5)$$

همچنین می‌توان جریان سطحی مؤثر $(\mathbf{M} \times \mathbf{n})$ را با بیان شرط مرزی (۸۷-۵) برای مؤلفه‌ی مماسی \mathbf{H} برحسب \mathbf{B} و \mathbf{M} درک کرد. مجدداً در صورتی که \mathbf{M} در سرتاسر حجم فوق ثابت باشد، تنها انتگرال سطحی باقی خواهد ماند.

۱۰-۵ کره‌ی مغناطیده‌ی یکنواخت

برای بررسی روش‌های مختلف ممکن برای حل مسئله‌ی مقدار مرزی در مگنتواستاتیک، در شکل ۱۰-۵، مسئله‌ی ساده‌ی کره‌ای با شعاع a ، و با مغناطش دائمی یکنواخت \mathbf{M} (با مقدار M_0) را که موازی محور z است در نظر می‌گیریم که در یک محیط غیرقابل نفوذ مغناطیسی فرو رفته است. ساده‌ترین روش حل، از طریق پتانسیل اسکالر مغناطیسی در مختصات کروی و چگالی بار مغناطیسی سطحی $\sigma_M(\theta)$ است (مربوط به قسمت $C(a)$ در بخش قبل). با $\mathbf{M} = M_0 \mathbf{e}_3$ و $\mathbf{M} = M_0 \cos \theta \mathbf{n}$ ، جواب (۱۰۵-۵) برای پتانسیل عبارت است از

$$\Phi_M(r, \theta) = \frac{M_0 a^2}{4\pi} \int d\Omega' \frac{\cos \theta}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}$$



شکل ۱۰-۵:

با بسط (۳۸-۳) یا (۷۰-۳) برای فاصله‌ی معکوس، تنها جمله‌ی $l = 1$ باقی می‌ماند. لذا پتانسیل برابر است با

$$\Phi_M(r, \theta) = \frac{1}{3} M_0 a^2 \frac{r_{<}}{r_{>}^2} \cos \theta \quad (104-5)$$

که در آن $(r_{<}, r_{>})$ مقادیر کوچک‌تر و بزرگ‌تر $(a$ و $r)$ هستند. در داخل کره $r_{<} = a$ و $r_{>} = r$ بدین ترتیب

$$\Phi_M = \left(\frac{1}{3}\right) M_0 a r \cos \theta = \left(\frac{1}{3}\right) M_0 z$$

بنابراین، میدان مغناطیسی و القای مغناطیسی در داخل کره عبارتند از

$$\mathbf{H}_{\text{in}} = -\frac{1}{3}\mathbf{M}, \quad \mathbf{B}_{\text{in}} = \frac{2\mu_0}{3}\mathbf{M} \quad (105-5)$$

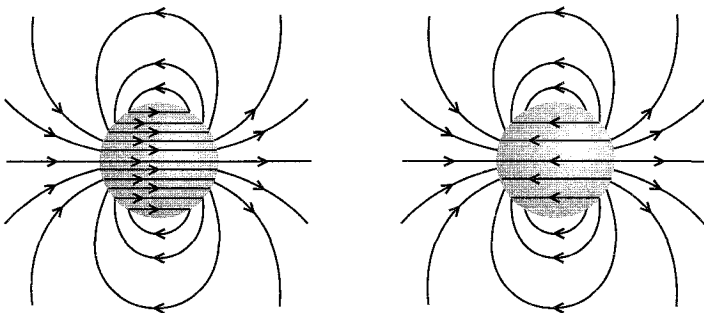
اشاره می‌کنیم که \mathbf{B}_{in} موازی با \mathbf{M} است، درحالی‌که \mathbf{H}_{in} پادموازی است. در خارج کره $r < a$ ، و $r > a$ بدین ترتیب پتانسیل عبارت است از

$$\Phi_M = \frac{1}{3}M_0 a^3 \frac{\cos\theta}{r^2} \quad (106-5)$$

این رابطه پتانسیل ناشی از یک دوقطبی با گشتاور دوقطبی زیر است

$$\mathbf{m} = \frac{4\pi a^3}{3}\mathbf{M} \quad (107-5)$$

برای کره‌ای با مغناطش یکنواخت، میدان‌ها نه تنها از لحاظ مشخصه به‌طور مجانبی دوقطبی‌اند، بلکه نزدیک به کره نیز هستند. برای این هندسه‌ی خاص (و فقط همین هندسه) چندقطبی‌های مرتبه بالاتری وجود ندارد. خطوط \mathbf{B} و \mathbf{H} در شکل (۱۱-۵) نشان داده شده‌اند. خطوط B مسیرهایی بسته و متصل هستند، اما خطوط \mathbf{H} روی سطح خاتمه می‌یابند که این به جهت وجود یک چگالی بار سطحی مؤثر σ_M است.



شکل ۱۱-۵: خطوط \mathbf{B} و خطوط \mathbf{H} برای یک کره‌ی مغناطیده‌ی یکنواخت. خطوط B منحنی‌های بسته‌ای هستند، اما خطوط \mathbf{H} از سطح کره نشأت می‌گیرند که در آنجا "بار" مغناطیسی سطحی مؤثر σ_M مستقر است.

در به‌کارگیری (۹۸-۵) به‌جای (۱۰۰-۵) باید اشاره‌ی کوتاهی داشته باشیم. با $\mathbf{M} = M_0 \mathbf{e}_z$ در داخل کره، (۹۸-۵) نتیجه می‌دهد

$$\Phi_M(r, \theta) = -\frac{1}{4\pi}M_0 \frac{\partial}{\partial z} \int_0^a r'^2 dr' \int \frac{d\Omega'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \quad (108-5)$$

در اینجا فقط جمله‌ی $l = 0$ در بسط فاصله‌ی معکوس $[|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^{-1}]$ انتگرال‌گیری زاویه‌ای را حفظ خواهد کرد، و انتگرال فقط تابعی از r خواهد بود. با $\frac{\partial r}{\partial z} = \cos \theta$ ، پتانسیل عبارت است از

$$\Phi_M(r, \theta) = -M \cdot \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} \int_0^a \frac{r'^2 dr'}{r >}$$

انتگرال‌گیری روی r' مستقیماً منجر به رابطه‌ی (۱۰۴-۵) برای Φ_M می‌شود. با پتانسیل برداری و (۱۰۳-۵) می‌توان جواب دیگری برای این منظور ترتیب داد. چون \mathbf{M} در داخل کره یکنواخت است بنابراین چگالی جریان حجمی \mathbf{J}_M صفر می‌شود، اما هنوز یک سهم سطحی وجود دارد. با $\mathbf{M} = M_0 \mathbf{e}_z$ ، داریم

$$\begin{aligned} \mathbf{M} \times \mathbf{n}' &= M_0 \sin \theta' \mathbf{e}_\phi \\ &= M_0 \sin \theta' (-\sin \phi' \mathbf{e}_1 + \cos \phi' \mathbf{e}_2) \end{aligned}$$

به جهت تقارن سمتی در این مسئله، دقیقاً همانند بخش ۵-۵، می‌توانیم نقطه‌ی مشاهده را در صفحه $x - z$ ($\phi = 0$) انتخاب کنیم. در این صورت تنها مؤلفه‌ی y مربوط به $\mathbf{M} \times \mathbf{n}'$ ، انتگرال‌گیری سمتی را حفظ خواهد کرد، و یک مؤلفه‌ی سمتی از پتانسیل برداری ارائه می‌دهد

$$A_\phi(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} M_0 a^2 \int d\Omega' \frac{\sin \theta' \cos \phi'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \quad (109-5)$$

که در آن \mathbf{x}' دارای مختصات (a, θ', ϕ') است. عامل زاویه‌ای را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\sin \theta' \cos \phi' = -\sqrt{\frac{8\pi}{3}} \text{Re}[Y_{1,1}(\theta', \phi')] \quad (110-5)$$

بدین ترتیب با بسط (۷۰-۳) برای $|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$ ، تنها جمله‌ی $l = 1$ ، $m = 1$ باقی خواهد ماند. در نتیجه

$$A_\phi(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{3} M_0 a^2 \left(\frac{r <}{r >} \right) \sin \theta \quad (111-5)$$

که در آن $r <$ مقدار کوچک‌تر (بزرگ‌تر) r و a است. با تنها یک مؤلفه‌ی ϕ از \mathbf{A} ، مؤلفه‌های القای مغناطیسی \mathbf{B} توسط (۳۸-۵) مشخص می‌شوند. معادله‌ی (۱۱۱-۵) به وضوح میدان یکنواخت \mathbf{B} را در داخل، و میدان دوقطبی را در خارج ارائه می‌دهد. همان‌گونه که قبلاً نیز دریافتیم.

۱۱-۵ کره‌ی مغناطیده در یک میدان خارجی؛ آهنرباهای دائمی

در بخش ۱۰-۵، میدان‌های یک کره‌ی مغناطیده‌ی یکنواخت را مورد بحث قرار دادیم. به جهت خطی بودن معادلات میدان، می‌توانیم یک القای مغناطیسی یکنواخت $\mathbf{B}_0 = \mu_0 \mathbf{H}_0$ را در سرتاسر تمام فضا برهم نهی

کنیم. بنابراین مسئله‌ی یک کره‌ی مغناطیده یکنواخت در یک میدان خارجی را داریم. از (۵-۱۰۵) اکنون درمی‌یابیم که القای مغناطیسی و میدان داخل کره عبارتند از

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{B}_{in} &= \mathbf{B}_0 + \frac{2\mu_0}{3}\mathbf{M} \\ \mathbf{H}_{in} &= \frac{1}{\mu_0}\mathbf{B}_0 - \frac{1}{3}\mathbf{M} \end{aligned} \right\} \quad (112-5)$$

حال فرض می‌کنیم کره‌ی فوق یک شی مغناطیده‌ی دائمی نباشد، بلکه به‌جای آن یک ماده پارامغناطیس یا دیامغناطیس با تراوایی μ باشد. در این صورت مغناطش \mathbf{M} نتیجه‌ای از اعمال میدان خارجی است. برای یافتن اندازه‌ی \mathbf{M} ، (۵-۸۴) را مورد استفاده قرار می‌دهیم

$$\mathbf{B}_{in} = \mu\mathbf{H}_{in} \quad (113-5)$$

بدین ترتیب

$$\mathbf{B}_0 + \frac{2\mu_0}{3}\mathbf{M} = \mu \left(\frac{1}{\mu_0}\mathbf{B}_0 - \frac{1}{3}\mathbf{M} \right) \quad (114-5)$$

این رابطه مغناطش زیر را ارائه می‌دهد

$$\mathbf{M} = \frac{3}{\mu_0} \left(\frac{\mu - \mu_0}{\mu + 2\mu_0} \right) \mathbf{B}_0 \quad (115-5)$$

اشاره می‌کنیم که این مغناطش کاملاً شبیه رابطه‌ی (۴-۵۷) برای قطبش \mathbf{P} یک کره‌ی دی‌الکتریک در یک میدان الکتریکی یکنواخت است.

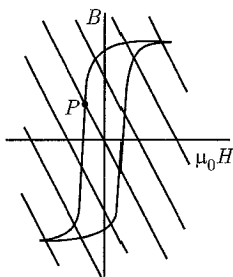
برای یک ماده‌ی فرومغناطیس، دلایل ارائه شده در پاراگراف قبل موفقیت‌آمیز نیستند. معادله‌ی (۵-۱۱۵) اشاره می‌کند که وقتی میدان خارجی صفر می‌شود، مغناطش نیز صفر می‌شود. وجود آهنرباهای دائمی این نتیجه را نقض می‌کنند. رابطه‌ی غیرخطی (۵-۸۵) و پدیده‌ی هیستریزیس، به‌وجود آمدن آهنرباهای دائمی را امکان‌پذیر می‌کنند. می‌توانیم معادله‌ی (۵-۱۱۲) را برای به‌دست آوردن یک رابطه بین \mathbf{H}_{in} و \mathbf{B}_{in} با حذف \mathbf{M} ، حل کنیم

$$\mathbf{B}_{in} + 2\mu_0\mathbf{H}_{in} = 3\mathbf{B}_0 \quad (116-5)$$

منحنی هیستریزیس رابطه‌ی دیگری را بین \mathbf{H}_{in} و \mathbf{B}_{in} مهیا می‌کند، به‌گونه‌ای که بتوان مقادیر خاص را برای هر میدان خارجی پیدا نمود. معادله‌ی (۵-۱۱۶) [در شکل (۵-۱۱۲)] با خطی با شیب -2 روی دیاگرام هیستریزیس با محل تلاقی $3\mathbf{B}_0$ روی محور y متناظر است. فرض کنید برای مثال میدان خارجی تا به اشباع رسیدن کره‌ی فرومغناطیس افزایش بیابد و سپس به صفر کاهش پیدا کند. \mathbf{B} و \mathbf{H} در داخل

کره، پس از آن، با نقطه‌ای که در شکل ۵-۱۲، با P علامت زده شده است مشخص می‌شوند. مغناطش را می‌توان با $B_0 = 0$ از (۵-۱۱۲) پیدا کرد.

رابطه‌ی (۵-۱۱۶) بین B_{in} و H_{in} رابطه‌ی خاصی برای این کره است. برای هندسه‌های دیگر روابط دیگری مناسب هستند. مسئله‌ی بیضی‌گون را می‌توان به‌طور دقیق حل کرد، و نشان داد که شیب خطوط (۵-۱۱۶) از مقدار صفر برای یک دیسک تخت، تا $-\infty$ برای یک شی میله‌ای بلند تغییر می‌کند. بنابراین یک القای مغناطیسی داخلی بزرگ‌تر را می‌توان به‌جای اشکال کروی یا کره‌وار مایل، با یک هندسه میله‌ای شکل به‌دست آورد.



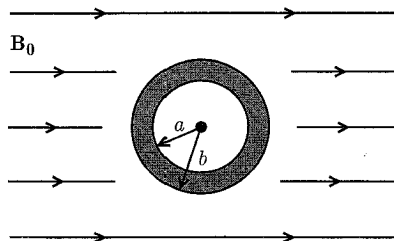
شکل ۵-۱۲:

۱۲-۵ حفاظت مغناطیسی، پوسته‌ای کروی از یک ماده‌ی تراوا در یک میدان یکنواخت

فرض کنید در ابتدا یک القای مغناطیسی مشخص $B_0 = \mu_0 H_0$ در ناحیه‌ای از فضای خالی وجود داشته باشد. حال یک جسم تراوا در این ناحیه قرار می‌دهیم. با این کار خطوط القای مغناطیسی تغییر خواهند کرد. با توجه به اظهاراتمان در انتهای بخش ۵-۸، در ارتباط با محیط‌هایی با تراوایی بسیار بالا، انتظار داریم خطوط میدان، تمایل به عمود بودن بر سطح جسم را حفظ کنند. با انجام شباهت بیشتر با رساناها، در صورتی که جسم توخالی باشد، انتظار خواهیم داشت که میدان داخل حفره کوچک‌تر از میدان خارجی باشد، و در حد $\mu \rightarrow \infty$ صفر شود. گفته می‌شود که یک چنین کاهش در میدان، ناشی از حفاظت مغناطیسی است که توسط ماده‌ی تراوا فراهم شده است. این موضوع از اهمیت کاربردی قابل ملاحظه‌ای برخوردار است، چراکه اساساً نواحی خالی از میدان برای مقاصد آزمایشگاهی و یا برای کار دقیق روی قطعات الکترونیکی اغلب لازم و مطلوب‌اند.

به‌عنوان مثالی از پدیده‌ی حفاظت مغناطیسی همچنانکه در شکل ۵-۱۳ نشان داده شده است، پوسته‌ای کروی را در نظر می‌گیریم، با شعاع داخلی (خارجی) $(b), (a)$ ، که از ماده‌ای با تراوایی مغناطیسی μ

ساخته شده و از ابتدا در یک القای مغناطیسی ثابت یکنواخت \mathbf{B} قرار گرفته است. می‌خواهیم میدان‌های \mathbf{H} و \mathbf{B} را در هر جایی از فضا و بیش‌تر به‌طور اخص درون حفره ($r < a$) به‌صورت تابعی از μ بیابیم. چون هیچ جریانی در فضا حضور ندارد، میدان مغناطیسی \mathbf{H} از یک پتانسیل اسکالر، به‌صورت $\mathbf{H} = -\nabla\Phi_M$ قابل استخراج است. علاوه‌بر این چون $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$ است، معادله‌ی $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ در نواحی مختلف، به‌صورت $\nabla \cdot \mathbf{H} = 0$ درمی‌آید. بدین‌ترتیب پتانسیل Φ_M معادله‌ی لاپلاس را در هر جایی از فضا برآورده خواهد کرد. این مسئله به یافتن جواب‌هایی مناسب در نواحی مختلف، جهت برآورده شدن شرایط مرزی (۸۹-۵) در $r = a$ و $r = b$ منجر خواهد شد.



شکل ۵-۱۳:

برای به‌وجود آوردن میدان یکنواخت $\mathbf{H} = \mathbf{H}_0$ در فواصل دور، برای $r > b$ پتانسیل باید به‌صورت زیر باشد

$$\Phi_M = -H_0 r \cos \theta + \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\alpha_l}{r^{l+1}} P_l(\cos \theta) \quad (117-5)$$

برای نواحی داخلی، پتانسیل بایستی به‌صورت زیر باشد

$$a < r < b \quad \Phi_M = \sum_{l=0}^{\infty} \left(\beta_l r^l + \gamma_l \frac{1}{r^{l+1}} \right) P_l(\cos \theta) \quad (118-5)$$

$$r < a \quad \Phi_M = \sum_{l=0}^{\infty} \delta_l r^l P_l(\cos \theta)$$

شرایط مرزی در $r = a$ و $r = b$ این است که H_θ و B_r متصل باشند. برحسب پتانسیل Φ_M این

شرایط به‌صورت زیر درمی‌آیند

$$\frac{\partial \Phi_M}{\partial \theta}(b_+) = \frac{\partial \Phi_M}{\partial \theta}(b_-) \quad \frac{\partial \Phi_M}{\partial \theta}(a_+) = \frac{\partial \Phi_M}{\partial \theta}(a_-) \quad (119-5)$$

$$\mu_0 \frac{\partial \Phi_M}{\partial r}(b_+) = \mu \frac{\partial \Phi_M}{\partial r}(b_-) \quad \mu \frac{\partial \Phi_M}{\partial r}(a_+) = \mu_0 \frac{\partial \Phi_M}{\partial r}(a_-)$$

نماد b_{\pm} بدین معنی است که حد $r \rightarrow b$ از $r \geq b$ به‌دست آمده است و مشابهاً برای a_{\pm} .

این چهار شرط که برای تمام زوایای θ صادق هستند، برای تعیین ثابت‌های مجهول در (۱۱۷-۵) و (۱۱۸-۵) کافی است. تمامی ضرایب با $1 \neq l$ صفر می‌شوند و برای $l = 1$ چهار معادله‌ی همزمان زیر را برآورده می‌کنند

$$\begin{aligned} \alpha_1 - b^3 \beta_1 - \gamma_1 &= b^3 H. \\ 2\alpha_1 + \mu' b^3 \beta_1 - 2\mu' \gamma_1 &= -b^3 H. \\ a^3 \beta_1 + \gamma_1 - a^3 \delta_1 &= 0 \\ \mu' a^3 \beta_1 - 2\mu' \gamma_1 - a^3 \delta_1 &= 0 \end{aligned} \quad (120-5)$$

در اینجا نمادگذاری $\mu' = \frac{\mu}{\mu_0}$ را برای ساده‌سازی معادلات مورد استفاده قرار داده‌ایم. جواب‌ها برای α_1 و δ_1 عبارتند از

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \left[\frac{(2\mu' + 1)(\mu' - 1)}{(2\mu' + 1)(\mu' + 2) - 2\frac{a^3}{b^3}(\mu' - 1)^2} \right] (b^3 - a^3) H. \\ \delta_1 &= - \left[\frac{9\mu'}{(2\mu' + 1)(\mu' + 2) - 2\frac{a^3}{b^3}(\mu' - 1)^2} \right] H. \end{aligned} \quad (121-5)$$

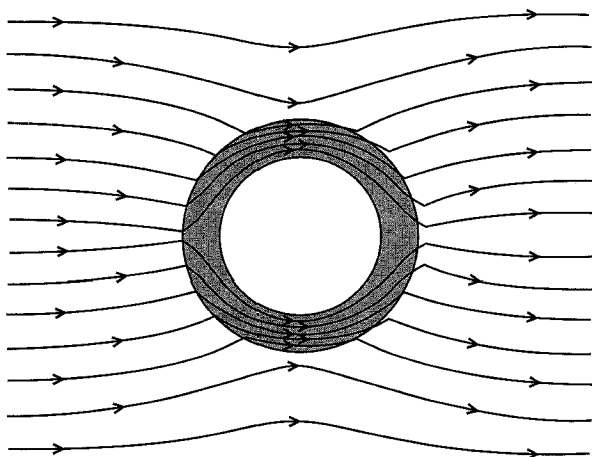
پتانسیل در خارج از پوسته‌ی کروی، متناظر است با یک میدان یکنواخت \mathbf{H} . به علاوه‌ی میدان دوقطبی (۴۱-۵)، با گشتاور دوقطبی α_1 که جهت آن به موازات \mathbf{H} است. در داخل حفره یک میدان مغناطیسی یکنواخت به موازات \mathbf{H} و از لحاظ اندازه مساوی با δ_1 وجود دارد. برای $\mu \gg \mu_0$ گشتاور دوقطبی α_1 و میدان داخلی δ_1 - به صورت زیر درمی‌آیند

$$\begin{aligned} \alpha_1 &\rightarrow b^3 H. \\ -\delta_1 &\rightarrow \frac{9\mu_0}{2\mu \left(1 - \frac{a^3}{b^3} \right)} H. \end{aligned} \quad (122-5)$$

ملاحظه می‌کنیم که میدان داخلی با μ^{-1} متناسب است. در نتیجه یک حفاظ مغناطیسی ساخته شده از ماده‌ای با تراوایی بالا با $10^3 \sim \frac{\mu}{\mu_0}$ تا 10^6 ، حتی با یک پوسته‌ی نسبتاً نازک نیز باعث یک کاهش عمده در میدان داخل پوسته می‌شود. شکل (۱۴-۵) رفتار خطوط میدان \mathbf{B} را نشان می‌دهد. این خطوط تمایل دارند در صورت ممکن از میان محیط تراوای مغناطیسی عبور کنند.

۱۳-۵ اثر یک حفره‌ی دایروی در یک صفحه‌ی رسانای کامل با یک میدان مغناطیسی مماسی یکنواخت مجانبی روی یک وجه

بخش ۳-۱۳، مسئله‌ی الکترواستاتیک یک حفره‌ی دایروی در یک صفحه رسانا، با یک میدان الکتریکی یکنواخت مجانبی عمود را مورد بحث قرار داد. همتای مغناطیسی آن به‌طور مجانبی دارای یک میدان مغناطیسی مماسی یکنواخت است. این دو مثال در بحث حفره‌های کوچک در موج‌برها و حفره‌های تشدید مفید خواهند بود (بخش ۵-۹ را ملاحظه کنید).

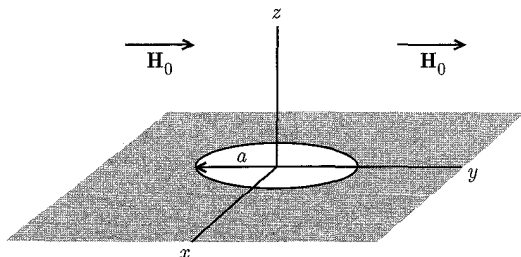


شکل ۵-۱۴: اثرات حفاظتی پوسته‌ای از ماده‌ی با تراوایی بالا.

قبل از طرح جواب مسئله‌ی مقدار مرزی مگنتواستاتیک، باید روی منظورمان از رسانای کامل بحث کنیم. میدان‌های مغناطیسی ایستا، در رساناها حتی در انواع عالی آن هم نفوذ می‌کنند. رسانا تنها به‌جهت خواص مغناطیسی خود میدان‌ها را تغییر می‌دهد، و نه به‌جهت رسانایی‌اش؛ مگر اینکه البته جریانی جاری در داخل رسانا وجود داشته باشد. در مورد میدان‌های مغناطیسی متغیر با زمان، غالباً قضیه به‌گونه‌ی دیگری است. در بخش ۵-۱۸ نشان داده شده است که در فصل مشترک بین رسانا و غیررسانا، میدان‌هایی با بستگی

زمانی هارمونیک، تنها با فاصله‌ای از مرتبه‌ی $\frac{1}{3} \left(\frac{2}{\mu\omega\sigma} \right)$ در داخل رسانا نفوذ می‌کنند، که در آن فرکانس و σ رسانایی است. بنابراین برای هر مقدار غیرصفر ω عمق پوسته δ ، وقتی $\sigma \rightarrow \infty$ میل می‌کند، به سمت صفر میل خواهد کرد. میدان‌های مغناطیسی و الکتریکی نوسان‌کننده در درون یک رسانای کامل وجود ندارد. مسائل مگنتواستاتیک را با رساناهای کامل، به‌صورت حد میدان‌های متغیر هارمونیک تعریف می‌کنیم (وقتی $\omega \rightarrow 0$ میل می‌کند) مشروط بر اینکه در همان زمان $\omega\sigma \rightarrow \infty$ میل کند. در این صورت

میدان مغناطیسی می‌تواند در خارج و در روی سطح رسانا وجود داشته باشد و نه در داخل آن. شرایط مرزی (۸۶-۵) و (۸۷-۵) نشان می‌دهد که در سطح رسانا $\mathbf{B} \cdot \mathbf{n} = 0$ و $\mathbf{n} \times \mathbf{H} = \mathbf{K}$ هستند. این شرایط مرزی، همتهای مگنتواستاتیکی شرایط مرزی الکترواستاتیکی، $\mathbf{E}_{tan} = 0$ و $\mathbf{D} \cdot \mathbf{n} = \sigma$ در سطح یک رسانا هستند، که در آن در این رابطه‌ی آخر، σ چگالی بار سطحی است و نه رسانایی!



شکل ۵-۱۵:

یک صفحه‌ی رسانای کامل در $z = 0$ با سوراخی به شعاع a و به مرکزیت مبدأ همانند شکل ۵-۱۵، در نظر می‌گیریم. برای سادگی کار فرض می‌کنیم که محیط اطراف صفحه یکنواخت و همسانگرد خطی باشد، و یک میدان مغناطیسی مماسی یکنواخت \mathbf{H} نیز در جهت y در ناحیه $z > 0$ دور از سوراخ وجود داشته باشد و به‌طور مجانبی برای $z < 0$ میدان صفر شود. سایر موارد ممکن را می‌توان با برهم‌نهی خطی به‌دست آورد. از آنجا که جریانی به‌غیر از جریان موجود در روی سطح $z = 0$ حضور ندارد، می‌توانیم رابطه‌ی $\mathbf{H} = -\nabla\Phi_M$ را مورد استفاده قرار دهیم، همراه با پتانسیل اسکالر مغناطیسی $\Phi_M(x)$ که معادله‌ی لاپلاس را با شرایط مرزی آمیخته مناسب برآورده می‌کند. در این صورت می‌توانیم به‌موازات جواب بخش ۳-۱۳ پیش برویم.

پتانسیل به‌صورت زیر نوشته می‌شود

$$\Phi_M(x) = \begin{cases} -H_0 y + \Phi^{(1)} & \text{برای } z > 0 \\ -\Phi^{(1)} & \text{برای } z < 0 \end{cases} \quad (۵-۱۲۳)$$

وارونگی علامت برای پتانسیل اضافه‌شده‌ی $\Phi^{(1)}$ در زیر صفحه، نتیجه‌ای از خواص تقارنی میدان‌های اضافی است - $H_z^{(1)}$ و $H_y^{(1)}$ برحسب z فردند، در حالی‌که $H_z^{(1)}$ و $\Phi^{(1)}$ برحسب z زوج هستند. این موضوع را می‌توان از (۵-۱۴) با این واقعیت که جریان مؤثر فقط روی سطح $z = 0$ جاری است درک نمود، همانند چگالی بار مغناطیسی مؤثر که تعیین‌کننده‌ی پتانسیل اسکالر $\Phi^{(1)}$ است.

از (۳-۱۰۶) پتانسیل اضافه‌شده را می‌توان در مختصات استوانه‌ای به صورت زیر نوشت

$$\Phi^{(1)}(\mathbf{x}) = \int_0^\infty dk A(k) e^{-k|z|} J_1(k\rho) \sin \phi \quad (124-5)$$

تنها جمله‌ی $m = 1$ وارد می‌شود، چراکه حفره دارای تقارن استوانه‌ای است و میدان مجانبی به صورت $y = \rho \sin \phi$ تغییر می‌کند. از شرایط مرزی روی مؤلفه‌ی عمودی \mathbf{B} و مماسی \mathbf{H} درمی‌یابیم که شرایط مرزی روی پتانسیل کامل Φ_M عبارتند از

$$\text{برای } 0 \leq \rho < a \quad \phi_M \text{ در عبور از } z = 0 \text{ متصل است}$$

$$\text{برای } a < \rho < \infty \quad \frac{\partial \Phi_M}{\partial z} = 0, \quad (z = 0 \text{ در})$$

این شرایط معادلات انتگرالی دوگانه‌ی زیر را ایجاب می‌کنند

$$\int_0^\infty dk A(k) J_1(k\rho) = \frac{H_0 \rho}{\gamma} \quad \text{برای } 0 \leq \rho < a \quad (125-5)$$

$$\int_0^\infty dk k A(k) J_1(k\rho) = 0 \quad \text{برای } a < \rho < \infty$$

این روابط دقیقاً به مجموعه‌ی الکترواستاتیکی (۳-۱۷۸) یا (۳-۱۷۹) (اما متفاوت با آن‌ها) مربوط می‌شوند. جفت معادلات لازم در اینجا عبارتند از

$$\int_0^\infty dy g(y) J_n(yx) = x^n \quad \text{برای } 0 \leq x < 1 \quad (126-5)$$

$$\int_0^\infty dy y g(y) J_n(yx) = 0 \quad \text{برای } 1 < x < \infty$$

با جواب

$$g(y) = \frac{\gamma \Gamma(n+1)}{\sqrt{\pi} \Gamma\left(n + \frac{1}{\gamma}\right)} j_n(y) = \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma\left(n + \frac{1}{\gamma}\right)} \left(\frac{\gamma}{y}\right)^{\frac{1}{\gamma}} J_{n+\frac{1}{\gamma}}(y) \quad (127-5)$$

در رابطه‌ی (۵-۱۲۵) داریم، $n = 1$ ، $x = \frac{\rho}{a}$ و $y = ka$ بنابراین

$$A(k) = \frac{\gamma H_0 a^\gamma}{\pi} j_1(ka) \quad (128-5)$$

بنابراین پتانسیل اضافه‌شده عبارت است از

$$\Phi^{(1)}(\mathbf{x}) = \frac{\gamma H_0 a^\gamma}{\pi} \int_0^\infty dk j_1(ka) e^{-k|z|} J_1(k\rho) \sin \phi \quad (129-5)$$

با روش‌هایی مشابه با روش‌های بخش (۳-۱۳) می‌توان نشان داد که دور از سوراخ، پتانسیل اضافه‌شده دارای شکل مجانبی زیر است

$$\Phi^{(1)}(\mathbf{x}) \rightarrow \frac{2H_0 a^3}{3\pi} \cdot \frac{y}{r^3} \quad (۱۳۰-۵)$$

رابطه‌ی فوق پتانسیل ناشی از یک دوقطبی است که در جهت y ، یعنی جهت H_0 تراز شده باشد. به‌خاطر علائم موجود در (۵-۱۲۳) حفره‌ی دایروی در فواصل دور با یک دوقطبی مغناطیسی باگشتاور زیر معادل است

$$\mathbf{m} = \pm \frac{8a^3}{3} H_0. \quad z \geq 0 \text{ برای } \quad (۱۳۱-۵)$$

که در آن H_0 میدان مغناطیسی مماسی روی طرف $z = 0^+$ صفحه‌ی فوق در غیاب حفره است. در آینده (در شکل ۹-۴) به‌طور کیفی چگونگی واپیچش خطوط میدان مغناطیسی که باعث ایجاد میدان دوقطبی می‌شوند را نشان خواهیم داد. در خود سوراخ ($0 \leq \rho < a$, $z = 0$) مؤلفه‌های عمودی و مماسی میدان مغناطیسی عبارتند از

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_{\tan} &= \frac{1}{2} \mathbf{H}_0. \\ H_z(\rho, 0) &= \frac{2H_0}{\pi} \frac{\rho}{\sqrt{a^2 - \rho^2}} \sin \phi \end{aligned} \quad (۱۳۲-۵)$$

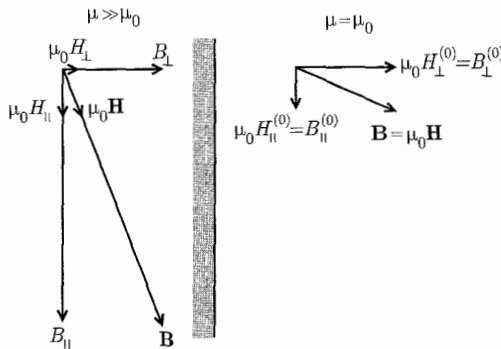
مقایسه با مسئله‌ی الکترواستاتیکی متناظر در بخش ۳-۱۳، تفاوت‌ها و شباهت‌ها را نشان می‌دهد. قطع نظر از جزئیات، در اینجا نقش مؤلفه‌های عمودی و مماسی میدان با یکدیگر عوض شده است. جهت دوقطبی‌های مؤثر، به سمت میدان‌های مجانبی است، اما برای قدرت‌های میدانی مشابه، گشتاور مغناطیسی (۵-۱۳۱)، ۲ برابر بزرگ‌تر از گشتاور الکترواستاتیکی (۳-۱۸۳) است. برای سوراخ‌هایی با شکل اختیاری، میدان دور در حالت الکترواستاتیکی، هنوز همان میدان یک دوقطبی عمود بر صفحه است، درحالی‌که مورد مغناطیسی دوقطبی مؤثر خودش را در صفحه داراست، اما در اینجا جهت دوقطبی مغناطیسی، بستگی به، هم جهت میدان و هم جهت‌گیری سوراخ دارد (سوراخ دارای پذیرایی ویژه مغناطیسی ناهمسانگردی است).

۱۴-۵ روش‌های عددی برای میدان‌های مغناطیسی دوبعدی

میدان‌های مغناطیسی در حضور آهن یا سایر مواد با تراوایی بالا را می‌توان به‌طور عددی در دو بعد با روش واهلس^۱ (که در بخش ۱-۱۳ توصیف شد) یا به‌طور کلی‌تر، با روش آنالیز جزء محدود بخش ۲-۱۲ مورد ارزیابی قرار داد. این مسائل را می‌توان به‌صورت مسائل ”درونی“ و ”بیرونی“ طبقه‌بندی کرد، بسته به اینکه آیا گردش جریان و (با) ماده‌ی مغناطیده و میدان موردنظر در یک ناحیه مشابه قرار داشته باشند یا خیر.

1) Relaxation

ابتدا شرایط مرزی برای مؤلفه‌های میدان را در فصل مشترک یک محیط هموار با تراوایی بالا و یک محیط ناتراوا بررسی می‌کنیم. به‌طور موضعی، فصل مشترک را می‌توان با یک صفحه تقریب زد. شرایط مرزی عبارتند از اینکه، اگر جریان‌های سطحی وجود نداشته باشند، مؤلفه‌ی مماسی H و عمودی B در عبور از فصل مشترک متصل خواهند بود. شکل ۵-۱۶ مشابه با شکل ۵-۹، طرحی از رفتار مؤلفه‌های میدان را نشان می‌دهد. این طرح هر دو مؤلفه‌ی B و H را نشان می‌دهد.



شکل ۵-۱۶: بررسی تأثیر تراوایی بالا روی مؤلفه‌های القای مغناطیسی و میدان مغناطیسی در دو طرف یک فصل مشترک. شکل دارای $\mu \simeq 5\mu_0$ است و نه یک تراوایی بسیار بالا!

برای یک میدان “خارجی” مشخص $B^{(0)}$ در ناحیه‌ای ناتراوا، مؤلفه‌های B و H در محیطی با تراوایی بالا [نسبت به محیط قبلی] به‌گونه بسیار نزدیک‌تری به فصل مشترک موازی با آن هستند. اندازه‌ی القای مغناطیسی دقیقاً درون محیط با تراوایی بالا عبارت است از

$$|B|^2 = B_{\perp}^{(0)2} + \frac{\mu^2}{\mu_0^2} B_{\parallel}^{(0)2}$$

درحالی‌که انرژی بر واحد حجم (بخش ۵-۱۶ را ملاحظه کنید) در آنجا عبارت است از

$$\frac{1}{2\mu} |B|^2 = \frac{1}{2\mu} B_{\perp}^{(0)2} + \frac{\mu^2}{2\mu_0^2} B_{\parallel}^{(0)2}$$

بی‌شک این دو رابطه در یادگیری شرایط مرزی مسائل “خارجی” و “داخلی” در حالت حدی $\frac{\mu}{\mu_0} \rightarrow \infty$ مفیدند. آشناترین میدان‌های مغناطیسی استاتیک میدان اطراف یک آهنربای دائمی با تراوایی بالا یا یک هسته‌ی آهنی با سیم‌پیچ‌های حامل جریانی است که از راه دور تحریک می‌شود. ناحیه‌ی موردنظر، ناحیه‌ای خواهد بود ناتراوا که با وجه قطب (یا وجه قطب‌هایی) با تراوایی بالا احاطه شده است - این است نمونه‌ای از یک مسئله‌ی “بیرونی”.

اگر فرض کنیم انرژی انباشته شده در درون ناحیه‌ی باتراوایی بالا، محدود باشد، رابطه‌ی انرژی نشان می‌دهد که وقتی $\frac{\mu}{\mu_0} \rightarrow \infty$ میل می‌کند، مؤلفه‌ی موازی میدان مغناطیسی در خارج باید صفر شود؛ میدان مغناطیسی "خارجی" در سطح، عمود بر فصل مشترک است.

همان‌گونه که در انتهای بخش ۸-۵ گفتیم، این‌ها دقیقاً شرایط مرزی برای میدان الکترواستاتیک در سطح مرزی یک رسانا هستند. اگر جریانی درون ناحیه‌ی ناتراوای موردنظر وجود نداشته باشد. در این صورت در آنجا $\nabla \times \mathbf{H} = 0$ است و می‌توانیم بنویسیم؛ $\mathbf{H} = -\nabla \Phi_M$. پتانسیل اسکالر مغناطیسی معادله‌ی لاپلاس $\nabla^2 \Phi_M = 0$ را برآورده می‌کند، با "تعدادی قطب" که سطوحی با پتانسیل ثابت‌اند؛ شباهت با الکترواستاتیک در اینجا کامل است.

جهت سادگی کار، بحث خودمان را به مسائل "داخلی" دوبعدی، با جریانی پایدار که فقط در جهت سوم در یک محیط یکنواخت رسانا با تراوایی بالا جاری است، محدود می‌کنیم. در اینجا به تعیین القای مغناطیسی درون این محیط علاقه‌مندیم (برای مثال ریل سوم آهنی بلند یک سیستم راه‌آهن زیرزمینی). گردش جریان باعث ایجاد یک القای مغناطیسی، هم در درون و هم در بیرون از محیط می‌شود. مقادیر مؤلفه‌های عمود و موازی دقیقاً در خارج هر چه باشند، شرایط مرزی اطمینان می‌دهد که \mathbf{B} ، وقتی $\frac{\mu}{\mu_0} \rightarrow \infty$ میل می‌کند، دقیقاً در درون محیط موازی سطح محیط است. اگر چگالی جریان تنها دارای یک مؤلفه‌ی z ؛ یعنی $J_z(x, y)$ باشد، پتانسیل برداری A تنها مؤلفه‌ی z ، یعنی $A_z(x, y)$ را خواهد داشت، که معادله‌ی پواسن $\nabla^2 A_z = -\mu J_z$ را برآورده می‌کند. مؤلفه‌های میدان عبارتند از

$$B_x = \frac{\partial A_z}{\partial y}, \quad B_y = -\frac{\partial A_z}{\partial x}, \quad B_z = 0.$$

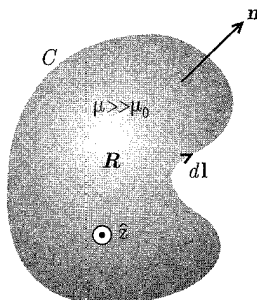
اگر میدان داخلی \mathbf{B} مماس با مرز C در ناحیه R باشد که در شکل ۱۷-۵ رسم شده است، روی مرز C خواهیم داشت

$$\mathbf{n} \cdot (\nabla_{\perp} \times \mathbf{A}) = (\mathbf{n} \times \nabla_{\perp}) \cdot \mathbf{A} = 0.$$

عملگر گرادیان در صفحه‌ی $x-y$ را می‌توان به دو مؤلفه‌ی موازی و عمود بر \mathbf{n} تجزیه کرد. بنابراین شرط مرزی به صورت زیر درمی‌آید

$$\frac{\partial A_z}{\partial l} = 0.$$

که در آن dl ، المان طول قوس در امتداد C است. پتانسیل برداری در امتداد منحنی مرزی C ثابت است. علاوه بر این می‌توانیم این نکته را درک کنیم که در ناحیه‌ی درونی R ، خطوط میدان مغناطیسی به موازات مسیرهای ثابت A_z هستند. چون $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ است، چگالی خطوط نیرو، با مشتق A_z در راستای عمود بر سطوح با مقدار ثابت مشخص می‌شوند؛ فضای بین مسیرهایی با A_z ثابت، با نواحی مساوی در A_z ، شدت میدان و همچنین جهت آن را نشان می‌دهند. در تکمیل روش‌های عددی حل معادله‌ی



شکل ۵-۱۷: سطح مقطع یک رسانای استوانه‌ای بلند با تراوای بالا، همراه با جریانی که در طول آن جاری است.

پواسن $\nabla^2 A_z = -\mu J_z$ ، شرایط مرزی باید مشخص شوند. به نظر می‌رسد این کار به معنی تعیین مقدار ثابت A_z روی مسیر C باشد. اما پتانسیل برداری تا حد جمع گرادیان یک تابع اسکالر χ اختیاری است. با انتخاب، $\chi = -A_0 \cdot z$ ، که در آن A_0 مقدار تاکنون تعیین نشده‌ی A_z روی C است، تعریف می‌کنیم؛ $A'_z = A_z(x, y) - A_0$. مسئله‌ی معادله‌ی پواسنی که در این صورت بایستی درون ناحیه R ، با شرط مرزی همگن $A'_z = 0$ روی C حل شود، به صورت $\nabla^2 A'_z = \mu J_z$ درمی‌آید. مقدار A_z روی C از لحاظ فیزیکی با معنی نبوده و مورد لزوم هم نیست. با $J_z(x, y)$ مشخص، جواب با روش واهلش، همانند بخش ۱-۱۳، حاصل خواهد شد. قوانین عددی پر قدرتی برای حل مسائل واقع بینانه‌تر میدان مغناطیسی وجود دارد که در آن برای مثال مواد ناتراوای مختلف دارای مقادیر بزرگ $\frac{\mu}{\mu_0}$ ، (اما نه نامتناهی) هستند. مراجع مربوطه در انتهای این فصل ارائه شده‌اند.

۵-۱۵ قانون القای فارادی

اولین مشاهدات کمی ربط‌دهنده‌ی میدان‌های مغناطیسی و الکتریکی، توسط فارادی (۱۸۳۱) در آزمایش‌هایی روی بررسی رفتار جریان، در مدارهایی انجام گرفت که در میدان‌های مغناطیسی متغیر با زمان قرار داشتند. فارادی مشاهده کرد که در یک مدار، جریان گذرا القا خواهد شد اگر

(الف) گردش پایدار جریان در یک مدار مجاور، خاموش یا روشن شود.

(ب) مدار مجاور با گردش جریان پایدارش نسبت به مدار اول حرکت داده شود.

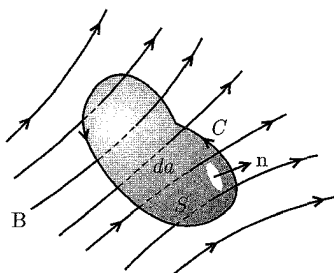
(ج) یک آهنربای دائمی درون یک مدار فرو رود یا بیرون آورده شود.

هیچ جریانی جاری نخواهد شد مگر اینکه یا جریان مجاور تغییر کند یا حرکت نسبی‌ای وجود داشته باشد. فارادی جریان جاری گذرا را به تغییر در شار مغناطیسی‌ای که به مدار پیوند خورده بود نسبت داد. شار متغیر، باعث القاء یک میدان الکتریکی در اطراف مدار می‌شود، که انتگرال خطی آن نیروی الکتروموتیو \mathcal{E} نامیده می‌شود. این نیروی الکتروموتیو طبق قانون اهم باعث جاری شدن جریان خواهد شد.

حال مشاهدات فارادی را برحسب عبارات کمی ریاضی بیان می‌کنیم. فرض کنید مدار C همانند شکل ۱۸-۵ توسط سطح باز S با عمود یکانی \mathbf{n} محدود شده باشد. القای مغناطیسی در همسایگی این مدار B است و شار مغناطیسی‌ای که با مدار پیوند می‌خورد توسط

$$F = \int \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} da \quad (۱۳۳-۵)$$

تعریف می‌شود. نیروی الکتروموتیو حول این مدار عبارت است از



شکل ۱۸-۵:

$$\mathcal{E} = \oint_C \mathbf{E}' \cdot d\mathbf{l} \quad (۱۳۴-۵)$$

که در آن \mathbf{E}' میدان الکتریکی در محل المان $d\mathbf{l}$ از مدار C است. مشاهدات فارادی در قانون ریاضی

$$\mathcal{E} = -k \frac{dF}{dt} \quad (۱۳۵-۵)$$

خلاصه شده‌اند. نیروی الکتروموتیو القایی حول این مدار، با آهنگ زمانی تغییر شار مغناطیسی پیوند خورده با مدار متناسب است. علامت توسط قانون لنز تعیین می‌شود؛ این قانون بیان می‌کند که جریان القایی (و شار مغناطیسی همراه آن) در جهتی است که با تغییر شار گذرنده از مدار مخالفت می‌کند.

ثابت تناسب K بستگی به انتخاب واحدها برای کمیت‌های میدان مغناطیسی و الکتریکی دارد. چنانکه که در ابتدا ممکن است تصور شود، ثابت K یک ثابت تجربی مستقل نیست که بشود آن را از آزمایش تعیین کرد. همان‌طوری که بی‌درنگ نیز ملاحظه خواهیم کرد، همین‌که واحدها و ابعاد در قانون آمپر انتخاب شوند، اندازه و ابعاد k ، از فرض ناوردایی گالیله‌ای برای قانون فارادی نتیجه می‌شود. برای سیستم واحدهای SI، $k = 1$ است؛ برای واحدهای گوسی $k = c^{-1}$ ، که در آن c سرعت نور است.

قبل از گسترش نسبیت خاص (و حتی پس از آن؛ هنگامی که محققین با سرعت‌هایی سروکار داشتند که در مقایسه با سرعت نور کوچک بود)، این موضوع فهمیده شده بود، اگرچه اغلب صریحاً توسط تمامی

فیزیکدانان بیان نشد[که قوانین فیزیک بایستی تحت تبدیلات گالیه‌ای ناوردا باشند. این بدان معنی است که پدیده‌های فیزیکی وقتی توسط دو ناظری نظاره شوند که با سرعت ثابت v نسبت به یکدیگر در حالت حرکتند مشابه خواهند بود، با این شرط که مختصات فضا و زمان با تبدیل گالیه‌ای $x' = x - vt, t' = t$ به هم مربوط شوند.

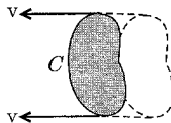
به طور اخص مشاهدات فارادی را در نظر بگیرید. این موضوع انتظار می‌رفت و به لحاظ تجربی نیز اثبات شد که در یک مدار ثانویه، اعم از اینکه حرکت کند (در حالی که مدار اولیه‌ای که جریان از آن در حال جاری شدن است ساکن باشد) یا ثابت بماند (در حالی که مدار اولیه به طریقی نسبتاً مشابه با حرکت مدار ثانویه حرکت بکند) جریان یکسانی در مدار ثانویه القا خواهد شد. حال بیایید قانون فارادی را برای یک مدار متحرک بررسی و نتایج ناوردایی گالیه‌ای را عملاً ملاحظه کنیم. با بیان (۵-۱۳۵) برحسب انتگرال‌هایی روی \mathbf{E}' و \mathbf{B} داریم

$$\oint_C \mathbf{E}' \cdot d\mathbf{l} = -k \frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} da \quad (5-136)$$

نیروی الکتروموتیو القایی با مشتق زمانی کل شار متناسب است - شار با تغییر القای مغناطیسی یا با تغییر شکل یا جهت‌گیری و یا تغییر مکان مدار می‌تواند تغییر کند. در صورت معادله‌ی (۵-۱۳۶) تعمیم دوررسی از قانون فارادی داریم. مدار C را می‌توان (نه الزاماً منطبق با یک مدار الکتریکی) به شکل هر مسیر هندسی بسته‌ای در فضا تصور نمود. در این صورت (۵-۱۳۶) به صورت رابطه‌ای بین خود میدان‌ها درمی‌آید.

گرچه اشاره به این نکته مهم است که میدان الکتریکی \mathbf{E}' ، میدان الکتریکی در محل $d\mathbf{l}$ ، در سیستم مختصات یا محیطی است که در آن $d\mathbf{l}$ در حالت سکون است، چراکه اگر مداری واقعاً حضور داشته باشد این میدان است که باعث جاری شدن جریان می‌شود.

اگر مدار C ، همان‌گونه که در شکل ۵-۱۹ نشان داده شده است، با سرعت v در یک جهت خاص در حال حرکت باشد، مشتق زمانی کل در (۵-۱۳۶) بایستی این حرکت را نیز به حساب بیاورد.



شکل ۵-۱۹:

شارگذرنده از مدار ممکن است تغییر کند چراکه

(الف) شار در یک نقطه با زمان تغییر می‌کند، یا اینکه

(ب) انتقال مدار، مکان مرز را تغییر می‌دهد.

نشان دادن این نکته که نتیجه‌ی مشتق زمانی کل شار گذرنده از مدار متحرک به صورت زیر باشد کار ساده‌ای است*

$$\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} da = \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \mathbf{n} da + \oint_C (\mathbf{B} \times \mathbf{v}) \cdot d\mathbf{l} \quad (۱۳۷-۵)$$

حال می‌توان (۱۳۶-۵) را به صورت زیر نوشت

$$\oint_C [\mathbf{E}' - k(\mathbf{v} \times \mathbf{B})] \cdot d\mathbf{l} = -k \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \mathbf{n} da \quad (۱۳۸-۵)$$

این رابطه بیانی معادل از قانون فارادی است که برای مدار متحرک C اعمال شد. اما می‌توانیم تعبیر این رابطه را به گونه‌ای متفاوت انتخاب کنیم. می‌توانیم مدار C و سطح S را به طور لحظه‌ای در یک مکان مشخص در فضا و در آزمایشگاه تصور کنیم. با اعمال قانون فارادی (۱۳۶-۵) برای آن مدار ثابت، درمی‌یابیم که

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -k \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \mathbf{n} da \quad (۱۳۹-۵)$$

که در اینجا \mathbf{E} میدان الکتریکی در آزمایشگاه است. فرض ناوردایی گالیه‌ای ایجاب می‌کند که طرف‌های سمت - چپ (۱۳۸-۵) و (۱۳۹-۵) بایستی مساوی باشند. این بدان معنی است که میدان الکتریکی \mathbf{E}' در سیستم مختصات متحرک مدار عبارت است از

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E} + k(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (۱۴۰-۵)$$

برای تعیین ثابت k ، تنها اهمیت \mathbf{E}' را مورد ملاحظه قرار می‌دهیم. یک ذره‌ی باردار (مثلاً یکی از الکترون‌های رسانشی) که اساساً در یک مدار متحرک در حال سکون است، نیروی $q\mathbf{E}'$ را تجربه خواهد کرد. وقتی موضوع از چارچوب مرجع آزمایشگاه مشاهده شود، بار فوق جریان $\mathbf{J} = qv\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$ را به وجود می‌آورد. از قانون نیروی مغناطیسی (۷-۵) یا (۱۲-۵) واضح است که این جریان نیرویی را تجربه می‌کند که در توافق با (۱۴۰-۵) است، مشروط بر اینکه ثابت k مساوی با واحد (در سیستم SI) یا $\frac{1}{c}$ (در سیستم گوسی) باشد.

* برای یک میدان برداری کلی، جمله اضافی، $\int_S (\nabla \cdot \mathbf{B}) \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} da$ وجود دارد که سهم چشمه‌های میدان برداری جاروب شده توسط مدار متحرک را مشخص می‌کند. نتیجه‌ی کلی بسیار راحت با استفاده از مشتق جابه‌جایی زیر (convective derivative) نتیجه می‌شود

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla$$

بدین ترتیب

$$\frac{d\mathbf{B}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{B} = \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \nabla \times (\mathbf{B} \times \mathbf{v}) + \mathbf{v}(\nabla \cdot \mathbf{B})$$

که در آن \mathbf{v} به عنوان یک بردار ثابت در مشتق‌گیری تلقی می‌شود. استفاده از قضیه‌ی استوکس روی جمله‌ی دوم، (۱۳۷-۵) را نتیجه می‌دهد.

بدین ترتیب با توجه به انتخاب‌مان در ارتباط با واحدهای مربوط به بار و جریان ملاحظه می‌کنیم که، هموردایی^۱ گالیه‌ای ایجاب می‌کند که ثابت حاضر k با ثابتی که در تعریف میدان مغناطیسی (۴-۵) ظاهر شد مساوی باشد. بنابراین قانون فارادی (۵-۱۳۶) نشان می‌دهد که

$$\oint_C \mathbf{E}' \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} da \quad (۵-۱۴۱)$$

که در آن \mathbf{E}' میدان الکتریکی در محل $d\mathbf{l}$ ، در چارچوب مختصات ساکن مربوط به آن است. مشتق زمانی در سمت راست یک مشتق زمانی کل در (۵-۱۳۷) است. به‌عنوان یک نتیجه‌ی فرعی تاکنون دریافته‌ایم که میدان الکتریکی \mathbf{E}' در یک چارچوب مختصات متحرک با سرعت \mathbf{v} نسبت به آزمایشگاه عبارت است از

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (۵-۱۴۲)$$

از آنجا که یک تبدیل گالیه‌ای را مدنظر قرار دادیم، نتیجه (۵-۱۴۲) برای سرعت‌هایی که در مقایسه با سرعت نور کوچک هستند، تنها به‌طور تقریبی معتبر خواهد بود (روابط نسبیتی در بخش ۱۱-۱۰ به‌دست آمده‌اند). هرچند که قانون فارادی یک تقریب نیست. تبدیل گالیه‌ای تنها برای تعیین ثابت k در (۵-۱۳۵) استفاده شد، کاری که برای آن این تبدیل کاملاً مناسب بود.

قانون فارادی (۵-۱۴۱) را می‌توان با استفاده از قضیه‌ی استوکس به‌صورت دیفرانسیلی درآورد، مشروط بر اینکه مدار در چارچوب مرجع انتخابی ثابتی نگه داشته شود (جهت داشتن تعریف \mathbf{E} و \mathbf{B} در یک چارچوب مرجع مشابه). تبدیل انتگرال نیروی الکتروموتیو به یک انتگرال سطحی منجر می‌شود به

$$\int_S \left(\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) \cdot \mathbf{n} da = 0$$

چون مدار C و سطح محدودکننده‌ی S اختیاری هستند، انتگرالده بایستی در تمام نقاط فضا صفر شود. بدین ترتیب شکل دیفرانسیلی قانون فارادی عبارت است از

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0 \quad (۵-۱۴۳)$$

اشاره می‌کنیم که این رابطه تعمیم وابسته به زمان عبارت، $\nabla \times \mathbf{E} = 0$ برای میدان‌های الکترواستاتیکی است.

۱۶-۵ انرژی در میدان مغناطیسی

در بحث میدان‌های مغناطیسی حالت پایدار در ۱۴ بخش ابتدای این فصل، از سؤال مربوط به چگالی انرژی و انرژی میدانی اجتناب کردیم. دلیل این امر آن بود که به‌وجود آمدن یک وضعیت پایدار از جریان‌ها و میدان‌های مغناطیسی وابسته، مستلزم وجود یک دوره‌ی زمانی گذرای اولیه‌ای بود که در طی آن جریان‌ها

1) Covariance

و میدان‌ها از صفر تا مقادیر نهایی‌شان می‌رسیدند. برای یک چنین میدان‌های متغیر با زمانی، نیروهای الکتروموتیو القا شده‌ای وجود دارد که باعث می‌شود منابع جریان کار انجام دهند. چون انرژی درون میدان طبق تعریف، کار کل انجام شده برای برقرار نمودن آن است، لذا باید سهم فوق را نیز در نظر بگیریم. برای یک لحظه فرض کنید که تنها یک تک‌مدار داریم که در آن جریان ثابت I جاری است. در صورتی که شار گذرنده از این مدار تغییر کند، یک نیروی الکتروموتیو \mathcal{E} حول آن القاء می‌شود. برای ثابت نگه داشتن جریان، چشمه‌های جریان باید کار انجام دهند. برای تعیین آهنگ انجام کار، اشاره می‌کنیم که آهنگ زمانی تغییر انرژی یک ذره با تندی \mathbf{v} که نیروی \mathbf{F} به آن وارد می‌شود، عبارت است از

$$\frac{dE}{dt} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{F}$$

با یک شار در حالت تغییر، میدان اضافه شده‌ی \mathbf{E}' روی هر الکترون رسانشی با بار q و تندی میانگین \mathbf{v} باعث یک تغییر در انرژی بر واحد زمان به اندازه‌ی $q\mathbf{v} \cdot \mathbf{E}'$ به ازای هر الکترون خواهد شد. با جمع زدن روی تمام الکترون‌های موجود در مدار، درمی‌یابیم که برای ابقاء جریان، چشمه‌های موجود با آهنگ

$$\frac{dW}{dt} = -I\mathcal{E} = I \frac{dF}{dt}$$

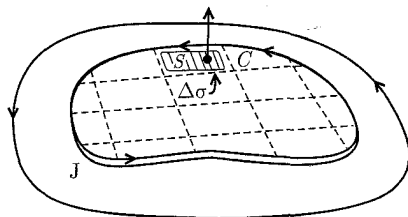
کار انجام می‌دهند. علامت منفی از قانون لنز نتیجه می‌شود. این علاوه بر افت‌های اهمی در مدار است، که البته نباید در محتوای انرژی مغناطیسی لحاظ شود. بدین‌گونه اگر تغییر شار گذرنده از یک مدار حامل جریان I به اندازه‌ی δF باشد، کار صورت گرفته توسط چشمه عبارت است از

$$\delta W = I\delta F$$

حال مسئله‌ی کار انجام شده در تثبیت یک توزیع حالت پایدار از جریان‌ها و میدان‌ها را مورد بررسی قرار می‌دهیم. ممکن است چنین تصور کنیم که فرآیند تجمع با یک آهنگ جزئی، طوری اتفاق می‌افتد که $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$ با هر درجه‌ی مطلوبی از دقت صادق است. بدین ترتیب می‌توان توزیع جریان را به شبکه‌ای از حلقه‌های جریان المانی کوچک تجزیه کرد. یک نمونه از این فرآیند همان‌گونه که در شکل ۵-۲۰ نشان داده شده است یک لوله‌ی المانی جریان با مساحت سطح مقطع $\Delta\sigma$ است که پی‌گیرنده‌ی مسیر بسته‌ی C است و توسط سطح S با عمود \mathbf{n} پوشش داده می‌شود. می‌توانیم نمو کار انجام شده بر علیه emf القایی را برحسب تغییر در القای مغناطیسی گذرنده از حلقه بیان کنیم

$$\Delta(\delta W) = J\Delta\sigma \int_S \mathbf{n} \cdot \delta \mathbf{B} da$$

که در آن علامت اضافه Δ به این جهت که در حال بررسی تنها یک مدار المانی هستیم ظاهر شده است.



شکل ۵-۲۰: توزیعی از چگالی جریان که به صورت حلقه‌های المانی جریان تجزیه شده است.

اگر \mathbf{B} را برحسب پتانسیل برداری \mathbf{A} بیان کنیم در این صورت داریم

$$\Delta(\delta W) = J\Delta\sigma \int_S (\nabla \times \delta\mathbf{A}) \cdot \mathbf{n} da$$

با به‌کارگیری قضیه‌ی استوکس این رابطه را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\Delta(\delta W) = J\Delta\sigma \oint_C \delta\mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}$$

اما طبق تعریف $\mathbf{J}\Delta\sigma d\mathbf{l}$ ، مساوی $\mathbf{J}d^3x$ است، چراکه $d\mathbf{l}$ به موازات \mathbf{J} است. به‌وضوح نتیجه‌ی جمع روی تمام یک چنین حلقه‌هایی المانی، انتگرال حجمی خواهد بود. بنابراین افزایش کل کار انجام‌شده توسط چشمه‌های خارجی، ناشی از تغییر $\delta\mathbf{A}(\mathbf{x})$ در پتانسیل برداری، عبارت است از

$$\delta W = \int \delta\mathbf{A} \cdot \mathbf{J}d^3x \quad (۱۴۴-۵)$$

رابطه‌ی دیگری که شامل میدان‌های مغناطیسی، به‌جای \mathbf{J} و $\delta\mathbf{A}$ باشد را می‌توان با استفاده از قانون آمپر به‌دست آورد

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}$$

در این صورت

$$\delta W = \int \delta\mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{H})d^3x \quad (۱۴۵-۵)$$

اتحاد برداری

$$\nabla \cdot (\mathbf{P} \times \mathbf{Q}) = \mathbf{Q} \cdot (\nabla \times \mathbf{P}) - \mathbf{P} \cdot (\nabla \times \mathbf{Q})$$

را می‌توان برای تبدیل (۱۴۵-۵) مورد استفاده قرار داد

$$\delta W = \int [\mathbf{H} \cdot (\nabla \times \delta\mathbf{A}) + \nabla \cdot (\mathbf{H} \times \delta\mathbf{A})]d^3x \quad (۱۴۶-۵)$$

اگر توزیع میدان به صورت جایگزیده فرض شود، انتگرال دوم در رابطه بالا صفر خواهد شد. با توجه به تعریف \mathbf{B} بر حسب \mathbf{A} ، نمو انرژی را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\delta W = \int \mathbf{H} \cdot \delta \mathbf{B} d^3x \quad (147-5)$$

این رابطه معادل مغناطیسی معادله‌ی الکترواستاتیکی (۴-۸۶) است. در شکل حاضرش این رابطه برای تمام محیط‌های مغناطیسی با مواد فرومغناطیس، قابل کاربرد است. در صورتی که فرض کنیم محیط پارا یا دیا مغناطیس باشد، طوری که یک رابطه‌ی خطی بین \mathbf{H} و \mathbf{B} وجود داشته باشد، در این صورت داریم

$$\mathbf{H} \cdot \delta \mathbf{B} = \frac{1}{\chi} \delta(\mathbf{H} \cdot \mathbf{B})$$

حال اگر میدان‌ها را از مقدار صفر تا مقادیر نهایی‌شان تغییر دهیم، انرژی مغناطیسی کل عبارت خواهد بود با

$$W = \frac{1}{\chi} \int \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} d^3x \quad (148-5)$$

این رابطه مشابه مغناطیسی (۴-۸۹) است. با فرض وجود یک رابطه‌ی خطی بین \mathbf{J} و میدان \mathbf{A} ، معادل مغناطیسی (۴-۸۳) را که در آن انرژی الکترواستاتیکی بر حسب چگالی بار و پتانسیل بیان شده باشد را می‌توان از (۵-۱۴۴) به دست آورد. بدین ترتیب انرژی مغناطیسی را به صورت زیر به دست می‌آوریم

$$W = \frac{1}{\chi} \int \mathbf{J} \cdot \mathbf{A} d^3x \quad (149-5)$$

مسئله‌ی مغناطیسی تغییر در انرژی، وقتی جسمی با تراوایی μ_1 در یک میدان مغناطیسی قرار داده شود که چشمه‌های جریانش ثابت‌اند را می‌توان در تشابهی نزدیک با بحث الکترواستاتیکی بخش ۴-۷، تصور کرد. نقش \mathbf{E} توسط \mathbf{B} و نقش \mathbf{D} توسط \mathbf{H} اجرا می‌شود. محیط اصلی دارای تراوایی μ_0 است و القای مغناطیسی موجود نیز \mathbf{B} . بعد از اینکه شیء در محل قرار گرفت، میدان‌ها \mathbf{B} و \mathbf{H} خواهند بود. اثبات اینکه برای چشمه‌های ثابت میدان، تغییر در انرژی به صورت زیر است. به عنوان یک تمرین به خواننده واگذار می‌شود

$$W = \frac{1}{\chi} \int_{V_1} (\mathbf{B} \cdot \mathbf{H}_0 - \mathbf{H} \cdot \mathbf{B}_0) d^3x$$

که با انتگرال‌گیری روی حجم جسم انجام گرفته است. این رابطه را می‌توان به شکل‌های دیگری هم نوشت

$$W = \frac{1}{\chi} \int_{V_1} (\mu_1 - \mu_0) \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}_0 d^3x = \frac{1}{\chi} \int_{V_1} \left(\frac{1}{\mu_0} - \frac{1}{\mu_1} \right) \mathbf{B} \cdot \mathbf{B}_0 d^3x$$

هر دو مقدار μ_0 و μ_1 می‌توانند توابعی از مکان باشند، اما فرض شده است که مستقل از قدرت میدان هستند. در صورتی که این شیء در فضای آزاد دیگری قرار داشته باشد، تغییر در انرژی را می‌توان برحسب مغناطش به صورت زیر بیان کرد

$$W = \frac{1}{2} \int_{V_1} \mathbf{M} \cdot \mathbf{B}_0 \cdot d^3x \quad (5-150)$$

باید به این نکته اشاره نمود که (5-150) به جز در علامت، معادل با نتیجه‌ی الکترواستاتیکی (4-93) است. تغییر در علامت، به این جهت مطرح می‌شود که انرژی W شامل کل تغییر انرژی‌ای است که در هنگام وارد کردن جسم تراوا در میدان اتفاق می‌افتد، که مشتمل بر کار انجام شده توسط چشمه‌ها علیه نیروهای الکتروموتیو القایی است. در این خصوص یک مسئله‌ی مغناطیسی با جریان‌های ثابت مشابه یک مسئله‌ی الکترواستاتیک با پتانسیل‌های ثابت روی سطوحی است که تعیین‌کننده‌ی میدان‌ها هستند. با یک تجزیه و تحلیل، معادل با تجزیه و تحلیل انتهای بخش 4-7 می‌توانیم نشان دهیم که برای یک جابه‌جایی کوچک، کار انجام شده علیه emf القایی، از لحاظ بزرگی دو برابر تغییر در انرژی پتانسیل جسم است و از لحاظ علامت، مخالف با تغییر علامت آن. بدین ترتیب برای یافتن نیروی وارد بر جسم، جابه‌جایی تعمیم‌یافته‌ی ξ را در نظر می‌گیریم و مشتق مثبت W را نسبت به این جابه‌جایی محاسبه می‌کنیم

$$F_\xi = \left(\frac{\partial W}{\partial \xi} \right)_J \quad (5-151)$$

اندیس J ، بر چشمه‌های ثابت جریان دلالت دارد.

تفاوت بین رابطه‌ی (5-150) و انرژی پتانسیل (5-72) برای یک گشتاور مغناطیسی دائمی در یک میدان خارجی (جدا از عامل $\frac{1}{2}$ که به خاطر رابطه خطی فرض شده‌ی بین \mathbf{M} و \mathbf{B} پدیدار شده است) از این واقعیت ناشی می‌شود که رابطه‌ی (5-150) انرژی کل لازم برای ایجاد وضعیت فوق است، در حالی که (5-72) فقط شامل کار انجام شده در ثابت نگه داشتن گشتاور مغناطیسی دائمی در میدان است، و نه کار انجام شده در به وجود آوردن گشتاور مغناطیسی و حفظ دائمی بودن آن.

5-17 خودالقاها و القاهای متقابل

الف) ضرایب خود - القا و القای متقابل

دقیقاً همان‌طور که مفهوم ضرایب ظرفیت برای سیستمی از رساناها که در پتانسیل‌های الکترواستاتیکی متفاوت نگه داشته شده‌اند، مفید است، (بخش 1-11)، مفهومی القاها و خودالقاها نیز برای سیستمی از مدارهای حامل جریان مفید است. سیستمی از N مدار مجزای حامل جریان را در نظر بگیرید، که i امین مدار، حامل جریان کل I_i بوده و از طرف دیگر فضای اطراف خالی باشد. مدارها لزوماً سیم‌های نازکی

نیستند (آن‌ها می‌توانند سیم‌های اتومبیل و غیره نیز باشند). اما برای حال حاضر چنین فرض شده است که ناتراوایند. انرژی کل (۵-۱۴۹) را می‌توان برحسب یک انتگرال از $\frac{\mathbf{J} \cdot \mathbf{A}}{\rho}$ به صورت زیر بیان نمود

$$W = \frac{1}{\rho} \sum_{i=1}^N L_i I_i^2 + \sum_{i=1}^N \sum_{j>i}^N M_{ij} I_i I_j \quad (۱۵۲-۵)$$

که در آن L_i خودالقایی i امین مدار است و M_{ij} القای متقابل بین مدارهای i ام و j ام است. برای اثبات این نتیجه، ابتدا از (۵-۳۲) برای پتانسیل برداری برای تبدیل (۵-۱۴۹) به رابطه‌ی زیر استفاده می‌کنیم

$$W = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3x \int d^3x' \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{J}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \quad (۱۵۳-۵)$$

حال می‌توان انتگرال‌های فوق را به صورت مجموعی از انتگرال‌های جداگانه روی هر مدار جدا نمود

$$W = \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_{i=1}^N \int d^3x_i \sum_{j=1}^N \int d^3x'_j \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}_i) \cdot \mathbf{J}(\mathbf{x}'_j)}{|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}'_j|}$$

در این مجموع، جملاتی با $i = j$ و جملاتی با $i \neq j$ وجود دارند. اولی، معرف اولین جمع در (۵-۱۵۲) و دومی، معرف دومین جمع است. به‌وضوح ضرایب L_i و M_{ij} با روابط زیر مشخص می‌شوند

$$L_i = \frac{\mu_0}{4\pi I_i^2} \int_{C_i} d^3x_i \int_{C_i} \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}_i) \cdot \mathbf{J}(\mathbf{x}'_i)}{|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}'_i|} d^3x'_i \quad (۱۵۴-۵)$$

و

$$M_{ij} = \frac{\mu_0}{4\pi I_i I_j} \int_{C_i} d^3x_i \int_{C_j} d^3x'_j \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}_i) \cdot \mathbf{J}(\mathbf{x}'_j)}{|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}'_j|} \quad (۱۵۵-۵)$$

دقت کنید که ضرایب القاء متقابل M_{ij} برحسب i و j متقارنند.

روابط کلی فوق برای خودالقایی و القای متقابل، شرحی پیچیده (برحسب پیوند شار) از تعاریفی بسیار مقدماتی هستند. برای اثبات این روابط، رابطه‌ی القای متقابل را در نظر بگیرید (که برای آن ابهام‌های موجود در تعریف جفت‌شدگی شار برای خودالقایی حضور ندارد). انتگرال روی d^3x' ضربدر $\frac{\mu_0}{4\pi}$ ، دقیقاً همان رابطه‌ی (۵-۳۲) برای پتانسیل برداری $\mathbf{A}(\mathbf{x}_i)$ در محل \mathbf{x}_i درون i امین مدار است که توسط جریان I_j که در j امین مدار جاری است ایجاد می‌شود. در صورتی‌که تصور شود i امین مدار از لحاظ سطح مقطع، در مقایسه با مقیاس کلی هر دو مدار قابل صرف‌نظر کردن است، می‌توانیم انتگرال‌دهی $\mathbf{J}(\mathbf{x}_i) d^3x$ برای انتگرال‌گیری روی حجم i امین مدار را به صورت $\mathbf{J}_{||} d\mathbf{a} dl = \mathbf{J} d^3x$ بنویسیم، که در آن da المان تعریف‌شده‌ی موضعی از مساحت سطح مقطع است و $d\mathbf{l}$ مشتق جهت‌دار طولی در جهت شارش جریان

است. با توجه به پتانسیل برداری که به‌گونه‌ای محسوس در انتگرال سطح مقطع عرضی، در یک مکان ثابت در امتداد مدار ثابت است، القای متقابل به‌صورت زیر درمی‌آید

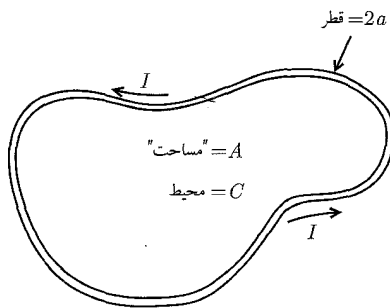
$$M_{ij} = \frac{1}{I_i I_j} \cdot I_i \oint_{C_i} \mathbf{A}_{ij} \cdot d\mathbf{l} = \frac{1}{I_j} \int_{S_i} (\nabla \times \mathbf{A}_{ij}) \cdot n d\mathbf{a}$$

که در آن \mathbf{A}_{ij} پتانسیل برداری است که توسط i امین مدار در نقطه‌ی انتگرال‌گیری روی i امین مدار ایجاد شده است، و فاکتور I_i نیز از انتگرال روی سطح مقطع ناشی می‌شود. برای به‌دست آوردن شکل دوم (در معادله‌ی بالا) قضیه‌ی استوکس مورد استفاده قرار گرفته است. از آنجا که کرل \mathbf{A} القاء مغناطیسی \mathbf{B} است، انتگرال سطحی عیناً همان پیوند شار مغناطیسی (۵-۱۳۳) است. بدین ترتیب در نهایت القاء متقابل عبارت خواهد بود با

$$M_{ij} = \frac{1}{I_j} F_{ij} \quad (5-156)$$

که در آن F_{ij} شار مغناطیسی‌ای است که از مدار j به درون مدار i پیوندخورده است. برای موضوع خودالقایی بحث فیزیکی مشابه قبل است، اما ابهام در معنی پیوند خود شار^{۱)}، F_{ii} بازگشت به رابطه‌ی مشکل (۵-۱۵۴) را می‌طلبد که براساس انرژی مغناطیسی به‌دست آمده است.

برای هر دو موضوع خودالقایی و القاء متقابل، تعاریف انرژی اصولی هستند. اگر هر یک از رساناهای حامل جریان یا محیط بین آن‌ها تراوا باشند ($\mu \neq \mu_0$)، (۵-۱۵۲) معتبر خواهد بود در حالی‌که (۵-۱۵۳) این‌گونه نیست. در این صورت بهتر است در محاسبه‌ی ضرایب القاء رابطه‌ی (۵-۱۴۸) برای انرژی مغناطیسی برحسب میدان، در طرف سمت چپ (۵-۱۵۲) مورد استفاده قرار گیرد. حضور عباراتی همچون $\frac{M_{12} dI_2}{dt}$ یا $\frac{L dI}{dt}$ برای تعدیل ولتاژ در معادلات مربوط به مدارهای فشرده قطعاً از ارتباط مشتق زمانی شار پیوندی $\left(\frac{dF}{dt}\right)$ به emf القایی \mathcal{E} در (۵-۱۳۵) ناشی می‌شود.



شکل ۵-۲۱: مدار بسته‌ی حامل جریان که از یک سیم با شعاع a ، طول C و سطح (تصویرشده) A درست شده است.

ب) تخمین خودالقایی برای مدارهای ساده

خودالقایی المان‌های ساده‌ی حامل جریان را می‌توان با بررسی انرژی مغناطیسی تخمین زد. فرض کنید که سیم دایروی با شعاع سطح مقطع عرضی a و حامل یک جریان پایدار I ، تشکیل یک حلقه با محیط دایروی C و با "مساحت" A را بدهد، [نشان نقل قول (با علامت ")] یادآوری می‌کند که چون ممکن است حلقه تخت نباشد، لذا امکان دارد A نماینده‌ی یک مساحت تصویری باشد. به جهت شکل نسبتاً اختیاری، فرض می‌کنیم سیم حاوی تاب‌هایی که شعاع انحناء آن‌ها به کوچکی اندازه‌ی سیم است در خود نباشد. یک مثال در این مورد در شکل ۲۱-۵ مطرح شده است. در اینجا سه مقیاس طول وجود دارد - شعاع سیم، ابعاد حلقه که با $\frac{C}{2\pi}$ یا $A^{\frac{1}{2}}$ نشان داده شده است و ناحیه بیرونی $\frac{C}{2\pi} \gg r$. از (۱۵۲-۵) یعنی رابطه‌ی بین خودالقایی و انرژی مغناطیسی، درمی‌یابیم که

$$L = \frac{1}{I^2} \int \frac{\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}}{\mu} d^3x \quad (157-5)$$

برآورد القای مغناطیسی به یک برآورد از القا (اندوکتانس) منجر خواهد شد. در مقیاس طولی شعاع سیم، می‌توانیم از انحناء صرف‌نظر کنیم و میدان را در داخل و خارج سیم به‌گونه‌ای در نظر بگیریم که گویی سیم بینهایت بلند و راست است. در صورتی که چگالی جریان در سرتاسر درون سیم یکنواخت باشد، با توجه به تقارن و قانون آمپر (۲۵-۵) القای مغناطیسی سمتی بوده و برابر است با

$$B_\phi = \frac{\mu_0 I \rho <}{2\pi a \rho >}$$

که در آن $\rho <$ مقدار کوچک‌تر (بزرگ‌تر) a و ρ است. فرض کرده‌ایم که سیم و محیط اطراف آن ناتراوا هستند. سهم مربوط به القا بر واحد طول از داخل و خارج سیم، تماماً تا یک شعاع ρ_{\max} ، عبارتند از

$$\frac{dL_{\text{in}}}{dl} = \frac{\mu_0}{4\pi} \quad ; \quad \frac{dL_{\text{out}}(\rho_{\max})}{dl} = \frac{\mu_0}{4\pi} \ln \left(\frac{\rho_{\max}^2}{a^2} \right)$$

انتگرال شعاعی در بیرون از سیم به $\rho < \rho_{\max}$ محدود شده است، چراکه رابطه‌ی مربوط به B_ϕ برای نشان دادن القای مغناطیسی در فواصلی از مرتبه‌ی مقیاس طول میانی، عاجز است. اگر به درون حلقه نظر کنیم، واضح است که برای $\rho = O(C/2\pi) = O(A^{\frac{1}{2}})$ سیم راست عایق‌بندی‌شده یک نمایش بسیار ضعیف برای الگوی جریان خواهد بود. بدین ترتیب انتظار داریم؛ $\rho_{\max} = O(A^{\frac{1}{2}})$ باشد. البته سهمی برای القاء از ناحیه خارج در فواصلی فراتر از ρ_{\max} نیز وجود دارد. در آنجا در فواصل بزرگ در مقایسه با $A^{\frac{1}{2}}$ ، کاهش آرام القای مغناطیسی (به صورت $\frac{1}{\rho}$) با الگوی میدان یک دوقطبی با $|\mathbf{B}| = O\left(\frac{\mu_0 m}{4\pi r^3}\right)$

(* اگر شکل مدار به‌گونه‌ای است که $A \ll C^2$ ، همانند یک حلقه‌ی کشیده) تخمینی متفاوت با ρ_{\max} می‌تواند مفید واقع شود [یعنی، $\rho_{\max} = O\left(\frac{A}{C}\right)$].

جایگزین می‌شود، که در آن $m = O(IA)$ ، گشتاور مغناطیسی حلقه‌ی سیم است. به جهت کاهش سریع میدان در فواصلی فراتر از ρ_{\max} ، سهم بر واحد طول القاء برای فواصل بزرگ (یعنی $\rho \geq A^{\frac{1}{2}}$) را می‌توان به صورت زیر تخمین زد

$$\frac{dL_{\text{dipole}}}{dl} = O\left(\frac{4\pi}{\mu_0 I^2 C} \int_{\rho_{\max}}^{\infty} r^2 \left(\frac{\mu_0 IA}{4\pi r^2}\right)^2 dr\right) = O\left(\frac{\mu_0 A^2}{4\pi \rho_{\max}^2 C}\right)$$

اگر قرار دهیم $\rho_{\max} = (\xi' A)^{\frac{1}{2}}$ ، که در آن ξ' عددی از مرتبه‌ی واحد است (که از عدم آگاهی ما نشأت می‌گیرد)، خواهیم داشت

$$\frac{dL_{\text{dipole}}}{dl} = O\left(\frac{\mu_0 A^{\frac{3}{2}}}{4\pi C}\right)$$

که در مقایسه‌ی با لگاریتم بالا سهمی از مرتبه‌ی واحد است. با ترکیب سهم‌های مختلف، القاء حلقه به صورت زیر تخمین زده می‌شود

$$L \approx \frac{\mu_0}{4\pi} C \left[\ln\left(\frac{\xi A}{a^2}\right) + \frac{1}{2} \right] \quad (158-5)$$

در اینجا ما به طور صریح سهم مربوط به داخل را نمایش داده‌ایم و عدم قطعیت در مقدار خاص ρ_{\max} و اندازه‌ی سهم بیرونی را از طریق عدد ξ (با مرتبه‌ی واحد) مشخص کرده‌ایم.

چهار نظریه در اینجا مطرح است: اول اینکه اگر سیم دارای تراوایی μ باشد، سهم مربوط به داخل به صورت $\frac{1}{4} \rightarrow \frac{\mu}{4\mu_0}$ درمی‌آید. دوم اینکه برای یک سیم خمیده‌ی نازک که به صورت دایره‌ای با شعاع بزرگ در مقایسه با شعاع سیم خم شده باشد، یک محاسبه‌ی دقیق (مسئله‌ی ۵-۳۲ را ملاحظه کنید) نشان می‌دهد که، $\xi = \frac{64}{\pi e^4} \approx 0,373$. سوم اینکه در فرکانس‌های به قدر کافی بالا، برای اطمینان از اینکه عمق پوسته سیم در مقایسه با شعاعش کوچک باشد، سهم مربوط به داخل حضوری نخواهد داشت، چراکه جریان به نزدیک سطح سیم محدود می‌شود (بخش بعدی را ملاحظه کنید). چهارم اینکه اگر این تک‌دور سیم با یک سیم‌پیچ محکم شامل N دور سیم با شعاع سطح مقطع مؤثر کلاف a ، جایگزین شود، خودالقایی آن N^2 برابر رابطه‌ی بالا خواهد بود.

تمرین

مداری را در نظر بگیرید که از دو سیم دایروی ناتراوای موازی بلند، با شعاع‌های a_1 و a_2 ساخته شده است که با فاصله‌ی بزرگ d در مقایسه با بزرگ‌ترین شعاع، از یکدیگر قرار گرفته‌اند. جریان از یک سیم به

طرف بالا جاری شده و در طول سیم دیگر برمی‌گردد. از انتهای سیم‌ها صرف نظر کنید. روش بالا را برای نشان دادن اینکه خودالفا بر واحد طول عبارت است از

$$\frac{dL}{dl} \approx \frac{\mu_0}{\pi} \left[\ln \left(\frac{\xi d}{\sqrt{a_1 a_2}} \right) + \frac{1}{4} \right]$$

مورد استفاده قرار دهید. که در آن ξ از مرتبه‌ی واحد است. آیا می‌توانید یک مقدار معتبر برای ξ در حدود تقریب‌های بیان شده بیابید؟

۱۸-۵ میدان‌های مغناطیسی نیمه‌ساکن^۱ در رساناها؛ جریان‌های گردابی^۲؛

انتشار مغناطیسی^۳

مگنتواستاتیک مربوط به ۱۴ بخش اول این فصل، براساس قانون آمپر و عدم حضور بارهای مغناطیسی استوار شد. همان‌گونه که در بخش ۵-۱۵ ملاحظه کردیم، اگر القای مغناطیسی برحسب زمان تغییر کند، طبق قانون فارادی یک میدان الکتریکی ایجاد خواهد شد؛ این میدان به‌هیچ‌وجه به‌طور خالص در سرشت خود مغناطیسی نیست. با وجود این، در صورتی که تغییرات زمانی خیلی سریع نباشد، میدان‌های مغناطیسی غالب هستند و این رفتار را می‌توان نیمه‌ساکن نامید. "نیمه‌ساکن" به رفتاری اشاره می‌کند که برای آن سرعت محدود نور را می‌توان صرف نظر نمود و میدان‌ها را به این صورت تصور کرد که گوئی به‌صورت لحظه‌ای انتشار می‌یابند. برحسب کلماتی معادل به‌گونه‌ای دیگر بگوئیم؛ نیمه‌ساکن رفتاری است که در آن سیستم در مقایسه با طول موج الکترومغناطیسی وابسته به مقیاس زمانی غالب در این مسئله کوچک باشد. همان‌گونه که در فصل‌های بعدی فرا خواهیم گرفت یک چنین روشی صرف نظر کردن از سهم مربوط به جریان جابه‌جایی ماکسول در قانون آمپر را مجاز می‌شمرد. یک چنین میدان‌هایی را در محیط‌های رسانا بررسی می‌کنیم که در آن‌ها قانون اهم میدان الکتریکی را به چگالی جریان مربوط می‌کند و بدین ترتیب از طریق معادله‌ی آمپر، به میدان مغناطیسی برمی‌گردد. معادلات مربوطه عبارتند از

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0, \quad \mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} \quad (159-5)$$

با $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ قانون فارادی نشان می‌دهد که کرل $\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$ صفر می‌شود. به‌عنوان یک نتیجه، می‌توانیم رابطه‌ی $\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \Phi$ را بنویسیم. با فرض قابل صرف نظر بودن بار آزاد، و تغییرات زمانی B به‌عنوان تنها چشمه‌ی انحصاری میدان الکتریکی، می‌توانیم پتانسیل اسکالر Φ را مساوی صفر قرار داده و داشته باشیم $\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$. دقت کنید که شرایط اضافی $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ و $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ را نیز داریم. برای محیط‌های

یکنواخت مستقل از فرکانس با تروایی μ ، قانون آمپر را می‌توان به صورت $\nabla \times \mathbf{B} = \mu \mathbf{J} = \mu \sigma \mathbf{E}$ نوشت. با حذف \mathbf{B} و \mathbf{E} به نفع \mathbf{A} ، و استفاده از اتحاد برداری، $\nabla \times \nabla \mathbf{A} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$ ، معادله‌ی پخش را برای پتانسیل برداری نتیجه می‌گیریم

$$\nabla^2 \mathbf{A} = \mu \sigma \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad (۱۶۰-۵)$$

این معادله، که به‌وضوح برای میدان الکتریکی \mathbf{E} نیز صادق است، برای تغییرات فضایی اما مستقل از فرکانس σ نیز معتبر است. در صورتی‌که رسانایی در فضا ثابت باشد، القای مغناطیسی B و چگالی جریان J نیز معادله‌ی پخش مشابهی را برآورده می‌کنند.

ساختار (۱۶۰-۵) به ما امکان می‌دهد که زمان τ را برای استحالتهای وضعیت اولیه میدان‌هایی با تغییرات فضایی نوعی [که با طول L تعریف می‌شود] تخمین بزنیم.

قرار می‌دهیم

$$\nabla^2 \mathbf{A} = O\left(\frac{A}{L^2}\right) \quad \text{و} \quad \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = O\left(\frac{A}{\tau}\right)$$

بدین ترتیب

$$\tau = O(\mu \sigma L^2) \quad (۱۶۱-۵)$$

به‌طریقی دیگر، رابطه‌ی (۱۶۱-۵) را می‌توان برای تخمین فاصله‌ی L (که میدان‌های موجود در یک رسانا در این فاصله از خارج در معرض میدان‌هایی با تغییرات هارمونیک‌ای با فرکانس $\nu = \frac{1}{\tau}$ قرار دارند) مورد استفاده قرار داد

$$L = O\left(\frac{1}{\sqrt{\mu \sigma \nu}}\right) \quad (۱۶۲-۵)$$

برای یک کره‌ی مسی با شعاع ۱cm، زمان استحالتهای یک میدان اولیه‌ی \mathbf{B} در درون کره، از مرتبه‌ی زمانی ۱۰ - ۵ میلی‌ثانیه است؛ برای هسته‌ی آهنی گذاخته‌ی زمین، این زمان از مرتبه‌ی ۱۰^۵ سال است. این عدد آخر [مربوط به زمین] با اطلاعات مغناطیس‌شناسی^۱ هماهنگ است - آخرین وارونگی در پلاریته‌ی میدان زمین حدود ۱۰^۶ سال پیش اتفاق افتاد؛ گواهی برای تنزل نزدیک به صفر این کمیت در حدود ۱۰^۴ × ۵ سال پیش و بازگشت صعودی آن به مقدار کنونی‌اش وجود دارد.

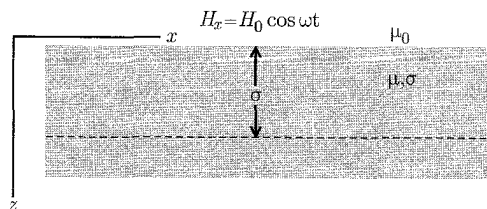
الف) عمق پوسته، جریان‌های گردابی، گرمایش القایی

مثال تا اندازه‌ای ساده از میدان‌هایی که توسط (۱۶۰-۵) توصیف شد، با وضعیت نشان داده شده در شکل ۲۲-۵ فراهم شده است، که در آن یک رسانای نیمه‌بینهایت، با رسانایی یکنواخت σ و تروایی μ فضای $z > 0$ را پر کرده است.

1) Paleomagnetic

سطح موجود در $z = 0^-$ در معرض یک میدان مغناطیسی ثابت از لحاظ فضایی، اما متغیر با زمان، به صورت $H_x(t) = H_0 \cos \omega t$ (در جهت x) قرار دارد. ما در جستجوی یک جواب حالت پایدار از (۵-۱۶) برای $z > 0$ هستیم که تابع شرایط مرزی مناسب در $z = 0$ ، و محدودیت موجود در $z = +\infty$ باشد. پیوستگی مؤلفه‌ی مماسی H و عمودی B در عبور از $z = 0$ لازم می‌دارد که در $z = 0^+$ میدان مغناطیسی تنها دارای یک مؤلفه‌ی x ، یعنی $H_x(t) = H_0 \cos \omega t$ باشد. خطی بودن (۵-۱۶) ایجاب می‌کند که تنها یک مؤلفه‌ی x در سرتاسر نیم‌فضای $z > 0$ وجود داشته باشد، و این مؤلفه تابعی از z و t به صورت $H_x(z, t)$ باشد. چون معادله‌ی پخش از لحاظ مشتق‌های فضایی از مرتبه‌ی دوم و از لحاظ مشتق‌های زمانی از مرتبه‌ی اول است، بنابراین استفاده از نمادگذاری مختلط مناسب خواهد بود، البته با درک اینکه میدان‌های فیزیکی با گرفتن بخش حقیقی جواب‌ها به دست می‌آیند. بدین ترتیب مقدار مرزی روی H_x عبارت است از $H_x = H_0 e^{-i\omega t}$ ، که موضوع استخراج بخش حقیقی آن نیز درک شد. بدین ترتیب جواب حالت پایدار برای $H_x(z, t)$ را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$H_x(z, t) = h(z)e^{-i\omega t}$$



شکل ۵-۲۲: در سطح یک محیط تراوی نیمه‌بینهایت رسانا، میدان مغناطیسی فضایی ثابت $H_x(t) = H_0 \cos \omega t$ به موازات سطح $z = 0^-$ اعمال شده است. یک میدان مغناطیسی جایگزیده و یک جریان درون محیط در ناحیه‌ی $z < O(\delta)$ وجود دارد.

که در آن با توجه به (۵-۱۶)، $h(z)$ معادله‌ی زیر را برآورده می‌کند

$$\left(\frac{d^2}{dz^2} + i\mu\sigma\omega \right) h(z) = 0 \quad (۵-۱۶۳)$$

یک جواب بدیهی به صورت $h(z) = e^{ikz}$ ، منجر به شرط زیر می‌شود

$$k^2 = i\mu\sigma\omega \quad \text{یا} \quad k = \pm(1+i)\sqrt{\frac{\mu\sigma\omega}{2}} \quad (۵-۱۶۴)$$

ریشه‌ی مربعی، ابعاد یک طول معکوس را داراست که مشخصه‌ای از محیط و فرکانس است [(۵-۱۶۲)]

را ملاحظه کنید]. این طول عمق پوسته‌ی δ نامیده می‌شود

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu\sigma\omega}} \quad (۱۶۵-۵)$$

برای مس در درجه حرارت اتاق ($\sigma^{-1} = 1,68 \times 10^{-8} \Omega \cdot m$)، $\delta = 6,52 \times 10^{-2} / \sqrt{\nu(\text{Hz})} m$ ، است که در آن $\nu = \frac{\omega}{2\pi}$ است. برای آب دریا، $\delta \simeq 240 / \sqrt{\nu(\text{Hz})} m$ (شکل ۹-۷ و متن همراه آن را ملاحظه کنید).

جواب برای H_x با A و B به عنوان اعدادی مختلط، بخش حقیقی تابع زیر است

$$H_x(z, t) = A e^{-\frac{z}{\delta}} e^{i(\frac{z}{\delta} - \omega t)} + B e^{\frac{z}{\delta}} e^{-i(\frac{z}{\delta} + \omega t)}$$

$B = 0$ را باید جهت اجتناب از میدان‌های نمایی بزرگ (وقتی $z \rightarrow \infty$ میل می‌کند) انتخاب کنیم. مقایسه‌ی جواب برای مقدار مرزی $H_x(0^+, t) = H_0 e^{-i\omega t}$ نشان می‌دهد که $A = H_0$ ، و جواب برای $z > 0$ عبارت است از

$$H_x(z, t) = H_0 e^{-\frac{z}{\delta}} \cos\left(\frac{z}{\delta} - \omega t\right) \quad (۱۶۶-۵)$$

میدان مغناطیسی با یک نوسان فضایی در جهت z با مقیاسی مشابه، طوری به شکل نمایی افت می‌کند که عمده‌تاً به عمقی کم‌تر از عمق پوسته δ محدود شود.

چون میدان برحسب زمان تغییر می‌کند، یک میدان الکتریکی کوچک نیز همراه آن وجود خواهد داشت. با توجه به قوانین آمپر و اهم همراه با وجود تنها مؤلفه‌ی $H_x(z, t)$ درمی‌یابیم که تنها یک مؤلفه از \mathbf{E} وجود دارد، که توسط رابطه‌ی زیر مشخص می‌شود

$$E_y = \frac{1}{\sigma} \frac{dH_x}{dz} = \frac{-1+i}{\sigma\delta} H_0 e^{-\frac{z}{\delta}} e^{\frac{iz}{\delta} - i\omega t}$$

با گرفتن بخش حقیقی و با نوشتن $\frac{1}{\sigma\delta} = \frac{\mu\delta\omega}{2}$ ، داریم

$$E_y = \frac{\mu\omega\delta}{\sqrt{2}} H_0 e^{-\frac{z}{\delta}} \cos\left(\frac{z}{\delta} - \omega t + \frac{3\pi}{4}\right) \quad (۱۶۷-۵)$$

برای مقایسه‌ی اندازه‌ی میدان الکتریکی و القای مغناطیسی، (با فرض نیمه‌ساکن بودن) نسبت بدون بعد زیر را تشکیل می‌دهیم

$$\frac{E_y}{c\mu H_x} = O\left(\frac{\omega\delta}{c}\right) \ll 1$$

میدان‌ها عمدتاً مغناطیسی هستند (همراه با یک میدان الکتریکی مماسی کوچک). میدان فوق به یک چگالی جریان جایگزیده وابسته است، (برای $z > 0$)

$$J_y = \sigma E_y = \frac{\sqrt{2}}{\delta} H_0 e^{-\frac{z}{\delta}} \cos\left(\frac{z}{\delta} - \omega t + \frac{3\pi}{4}\right) \quad (168-5)$$

که انتگرال آن برحسب z یک جریان سطحی مؤثر است

$$K_y(t) \equiv \int_0^{\infty} J_y(z, t) dz = -H_0 \cos \omega t$$

برای عمق پوسته بسیار کوچک جریان حجمی [جاری در ناحیه‌ای در حدود $O(\delta)$ از سطح] به صورت یک جریان سطحی عمل می‌کند که اندازه و جهت آن به‌گونه‌ای است که باعث کاهش میدان مغناطیسی به اندازه‌ی صفر برای $\delta \gg z$ می‌شود. برای بحث بیش‌تر در مورد موج‌برها و حفره‌ها، بخش ۸-۱ را ملاحظه کنید.

در یک رسانا گرمای مقاومتی وجود دارد. توان میانگین‌گیری‌شده‌ی زمانی ورودی بر واحد حجم عبارت است از: $P = \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} = \frac{V^2}{R}$ P را در یک مدار مقاومت فشرده‌ی ساده به‌یاد آورید. با توجه به (۱۶۷-۵) و (۱۶۸-۵) درمی‌یابیم که

$$P_{\text{مقاوم}} = \frac{1}{4} \mu \omega H_0^2 e^{-\frac{2z}{\delta}} \quad (169-5)$$

گرمای محیط رسانا، تا عمقی از مرتبه‌ی عمق پوسته، اساس کوره‌های القایی فولادهای سخت و خوراک‌پزهای میکروویو در آشپزخانه‌ها است (که در آن رسانایی آب یا خیلی صحیح‌تر، بخش تلف‌کننده‌ی پذیرایی ویژه‌ی دی‌الکتریک آن، باعث این افت در انرژی می‌شود. شکل ۷-۹ را ملاحظه کنید). مراجعی با مباحث ماهرانه‌تر، در مورد جریان‌های گردابی و گرمای القایی، در انتهای این بخش یافت می‌شود.

ب) انتشار میدان‌های مغناطیسی در محیط‌های دی‌الکتریک

انتشار میدان‌های مغناطیسی در محیط‌های رسانا را می‌توان با مثال ساده‌ای توسط دو ورقه‌ی جریان یکنواخت نامتناهی بررسی کرد که به موازات هم و با فاصله جدایی $2a$ از یکدیگر در $z = -a$ و $z = +a$ و در درون یک محیط رسانای نامتناهی با تراوی μ و رسانایی σ قرار گرفته‌اند. جریان‌ها به‌گونه‌ای هستند که در ناحیه‌ی $a < |z| < \infty$ ، یک میدان مغناطیسی ثابت \mathbf{H}_0 در جهت x وجود دارد، و در خارج از این ناحیه میدان صفر است. به‌وضوح چگالی جریان \mathbf{J} در جهت y است و داریم

$$J_y = H_0 [\delta(z+a) - \delta(z-a)]$$

در لحظه‌ی $t = 0$ ، جریان به‌طور ناگهانی قطع می‌شود. پتانسیل برداری و میدان مغناطیسی طبق رابطه‌ی (۱۶۰-۵)، با تعبیری تنها برحسب z و t ، استحاله می‌یابند. در این مرحله ما روش تبدیل لاپلاس را مورد استفاده قرار می‌دهیم.

بستگی‌های زمانی و مکانی را با نوشتن رابطه‌ی زیر جدا کنید

$$H_x(z, t) = \int_0^\infty e^{-pt} \bar{h}(p, z) dp$$

جایگزینی در معادله‌ی انتشار (۱۶۰-۵) برای H_x ، منجر به معادله‌ی موج زیر می‌شود

$$\left(\frac{d^2}{dz^2} + k^2 \right) \bar{h}(p, z) = 0$$

که در آن $k^2 = \mu\sigma p$ است. چون این وضعیت حول $z = 0$ متقارن است، جواب مناسب عبارت است از، $\bar{h} \propto \cos(kz)$. با یک تغییر متغیر از p به k در انتگرال تبدیلی^۱، به‌صورت زیر درمی‌آید

$$H_x(z, t) = \int_0^\infty e^{-\frac{k^2 t}{\mu\sigma}} h(k) \cos(kz) dk \quad (170-5)$$

تابع ضریب $h(k)$ با شرایط اولیه تعیین می‌شود. در $t = 0^+$ ، میدان مغناطیسی عبارت است از

$$H_x(z, 0^+) = \int_0^\infty h(k) \cos(kz) dk = H_0 [\Theta(z+a) - \Theta(z-a)] \quad (171-5)$$

که در آن $\Theta(x)$ تابع پله‌ای واحد^۲ است، و برای $x < 0$ ، $\Theta = 0$ و برای $x > 0$ ، $\Theta(x) = 1$ است. با بهره‌برداری از تقارن برحسب z ، می‌توانیم کسینوس را برحسب توابع نمایی بیان کرده و بنویسیم

$$\frac{1}{2} \int_{-\infty}^\infty h(k) e^{ikz} dk = H_0 [\Theta(z+a) - \Theta(z-a)] \quad (172-5)$$

که در آن $h(-k) = h(k)$. وارونگی انتگرال فوریه، $h(k)$ را به‌صورت زیر نتیجه می‌دهد

$$h(k) = \frac{H_0}{\pi} \int_{-a}^a e^{-ikz} dz = \frac{2H_0}{\pi k} \sin(ka) \quad (173-5)$$

بنابراین، جواب برای میدان مغناطیسی در تمام زمان‌های $t > 0$ عبارت است از

$$H_x(z, t) = \frac{2H_0}{\pi} \int_0^\infty e^{-\nu t k^2} \frac{\sin k}{k} \cos \left[\left(\frac{z}{a} \right) k \right] dk \quad (174-5)$$

که در آن $\nu = (\mu\sigma a^2)^{-1}$ مشخصه‌ی آهنگ استحاله است [۱۶۱-۵] را ببینید]. انتگرال موجود در (۱۷۴-۵) را می‌توان به صورت مجموع دو جمله بیان کرد که هر کدام با یک نمایش از تابع خطا^۱ مشخص می‌شوند

$$\Phi(\xi) \equiv \frac{2}{\pi} \int_0^\xi e^{-x^2} dx = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty e^{-\frac{x^2}{\xi^2}} \frac{\sin x}{x} dx \quad (175-5)$$

نتیجه عبارت است از

$$H_x(z, t) = \frac{H_0}{2} \left[\Phi \left(\frac{1 + |z|}{2\sqrt{\nu t}} \right) + \Phi \left(\frac{1 - |z|}{2\sqrt{\nu t}} \right) \right] \quad (176-5)$$

جهت درک کیفی معنی جواب، اولاً اشاره می‌کنیم که، $\Phi(-\xi) = -\Phi(\xi)$ ، دوم اینکه برای $\xi \rightarrow \infty$

$$\Phi(\xi) \rightarrow 1 - \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}} \right) \left[1 - \frac{1}{2\xi^2} + \dots \right] \exp(-\xi^2)$$

و سوم اینکه برای $1 \ll |\xi|$

$$\Phi(\xi) \approx \left(\frac{2\xi}{\sqrt{\pi}} \right) \left(1 - \frac{\xi^2}{3} + \dots \right)$$

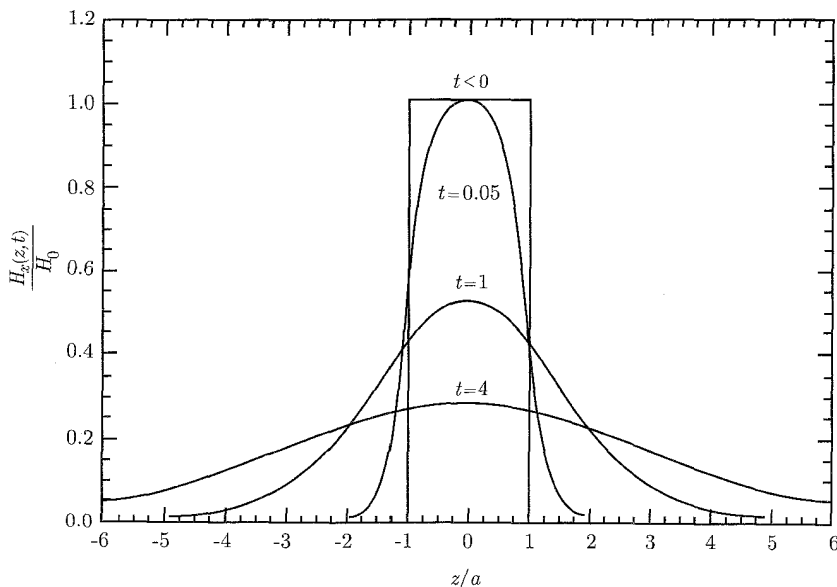
برای $\nu t \rightarrow 0$ ، شناسه‌های موجود در (۱۷۶-۵) از لحاظ اندازه بزرگ‌اند؛ جواب چنانکه لازم است به وضوح به طرف سمت راست (۱۷۲-۵) کاهش پیدا می‌کند. برای زمان‌های طولانی ($1 \ll |\xi|$)، $H_x(z, t) \rightarrow \frac{H_0}{\sqrt{\pi\nu t}}$ میل می‌کند که به جهت کنترل مرتبه در بسط برحسب $\frac{1}{\sqrt{\nu t}}$ ، مستقل از $\frac{|z|}{a}$ است. هرچند که این نتیجه گمراه‌کننده است، چرا که ضرایب جملات بالاتر برحسب $\frac{1}{\nu t}$ وابسته به z هستند. یک نتیجه‌ی واضح‌تر با بسط توابع خطا به صورت سری تیلور برحسب $\frac{1}{2\sqrt{\nu t}}$ تا مرتبه‌ی سوم به دست می‌آید، نتیجه عبارت است از

$$H_x(z, t) \approx \frac{H_0}{\sqrt{\pi\nu t}} e^{-\frac{|z|^2}{4\nu t a^2}} \left[1 + \frac{1}{12\nu t} \left(\frac{|z|^2}{2\nu t a^2} - 1 \right) + \dots \right] \quad (177-5)$$

دقت کنید که رابطه‌ی تقریبی فوق، وقتی $\nu t \rightarrow 0$ میل می‌کند، صفر خواهد شد، همان‌طوری‌که برای هر $|z| > a$ باید این‌گونه باشد، و به ازای $\nu t \gg \frac{|z|}{2a}$ به سمت $H_x \approx \frac{H_0}{\sqrt{\pi\nu t}}$ میل خواهد کرد. برای $\frac{|z|}{a} < 5$ ، این رابطه‌ی تقریبی، به ازای هر $\nu t > 1$ حدوداً چند درصدی بیش‌تر نیست [منظور نسبت H_x

1) error function

به H_0 . میدان فوق به صورت تابعی از زمان در یک مکان مشخص، دارای ماکزیمی در $\frac{|z|^2}{2a^2} \approx vt$ است [دقیقاً برای تقریب (۱۷۷-۵)]، که با کاهش بسیارکندی به صورت $t^{-\frac{1}{2}}$ همراه است. شکل (۲۳-۵) توزیع فضایی میدان مغناطیسی را در زمان‌های ثابت مختلف نشان می‌دهد.



شکل ۲۳-۵: توزیع میدان‌های مغناطیسی که توسط (۱۷۲-۵) مشخص شده است. برای $vt < 0$ و رابطه‌ی (۱۷۶-۵) برای $vt = 0, 1, 4$ به صورت تابعی از $\frac{z}{a}$. پدیده‌ی پخش بیرونی با زمان به ازای $t > 0$ از روی این شکل واضح است. افت و خیز میدان برحسب زمان در یک مکان ثابت را می‌توان به ازای $1 < \frac{|z|}{a} < 2$ مورد توجه قرار داد.

مراجع و خواندنی‌های پیشنهادی

با تعویض چگالی جریان با چگالی جریان جابه‌جایی، و رسانایی با ثابت دی‌الکتریک، مسائل مربوط به گردش جریان حالت پایدار در یک محیط مقاوم گسترده، شبیه به مسائل پتانسیل الکترواستاتیک می‌شوند. اما شرایط مرزی به‌طور کلی در این دو حالت متفاوتند. گردش جریان حالت پایدار در مراجع زیر بحث شده است.

Jeans, Chapters IX and X

Smythe, Chapter VI

میدان‌های مغناطیسی ناشی از توزیع جریان‌های مشخص و مسائل مقدار مرزی در مگنتواستاتیک مثال‌های متعدد توسط

Durand, Chapters XIV and XV

Smythe, Chapter VII and XII

مورد بحث قرار گرفته است.

نظریه‌ی اتمی خواص مغناطیسی، مستقیماً در قلمرو مکانیک کوانتومی قرار می‌گیرد. بحث‌های نیمه‌کلاسیکی در این مورد توسط

Abraham and Becker, Band II, Sections 29-34

Durand, pp. 551-573, and Chapter XVII

Landua and Lifshitz, *Electrodynamics of Continuous Media*

Rosenfeld, Chapter IV

ارائه شده است.

بحث‌های بسیار دقیق‌تر از این موضوع، شامل جنبه‌های کریستالوگرافی، و مبحث مربوط به قلمروهای فرومغناطیس را می‌توان در

Chakravarty

Craik

Kittel

Ziman, Chapter 10

پیدا کرد.

یک مرجع دایرة‌المعارف‌گونه برای خواص مغناطیسی آلیاژها و دیگر اطلاعات تجربی، و همچنین اطلاعات نظری در این مورد عبارت است از

R. M. Bozorth, *Ferromagnetism*, Van Nostrand, New York (1978).

روش‌های عددی در مغناطیسی در

Ida and Bastos

Zhou

مورد بحث قرار گرفته‌اند و نیز در سایر مراجع که در "مراجع و خواندنی‌های پیشنهادی" انتهای فصل ۲ قرار دارند.

کاربرد قانون القای فارادی، تا اندازه‌ای برای مدارهای متحرک، همانند دیسک‌های فارادی یا ژنراتور هموپلار دشوار است. بحث‌های متعددی از این سوالات وجود دارند. یک نمونه از یک ژورنال مقالات زیر را شامل می‌شود

D. R. Corson, *Am. J. Phys.* **24**, 126 (1956)

D. L. Webster, *Am. J. Phys.* **31**, 590 (1963)

E. M. Pugh, *Am, J. Phys.* **32**, 879 (1964)

P. J. Scanlon, R. N. Hendriksen, and J. R. Allen, *Am, J. Phys.* **37**, 698 (1969)

R. D. Eagleton, *Am, J. Phys.* **55**, 621 (1987)

یک بحث خوب راجع به انرژی جریان‌های شبه ایستا، و نیروهای مؤثر بر مدارهای حامل جریان متفاوت با آنچه در این مورد قبلاً بحث کردیم، توسط

Panofsky and Phillips, Chapter 10

Stratton, Chapter 11

ارائه شده است.

محاسبات مربوط به اندوکتانس و نیروها، به‌گونه‌ای واضح توسط

Abraham and Becker, Band 1, Chpaters VIII and IX

و در بسیاری از کتاب‌های درسی مهندسی مورد بحث قرار گرفته است.

موضوع تقریباً مورد غفلت قرار گرفته‌شده‌ی جریان‌های ادی و گرمایش القایی^۱ با مثال‌های متعدد در

Smythe, Chapter XX

مورد بحث قرار گرفته است.

میدان‌های مغناطیسی در سیالات رسانا یا پلاسماها، نقشی کلیدی در آستروفیزیک بازی می‌کنند (از دینام‌ها^۲ در درون سیارات گرفته تا کهکشان‌ها). دو مرجع در این مورد عبارت است از

E. N. Parker. *Cosmical Magnetic fields*, Oxford University Press, Oxford (1979).

Ya. B. Zel'dovich, A. A. Ruzmaikin and D. D. Sokoloff, *Magnetic Fields in Astrophysics*, Gordon & Breach, New York (1983).

مسائل

۱-۵ با شروع از رابطه‌ی دیفرانسیلی

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} d\mathbf{l}' \times \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3}$$

برای القای مغناطیسی در نقطه‌ی P با مختصه‌ی \mathbf{x} ، که با نمو جریان $I d\mathbf{l}'$ در \mathbf{x}' ایجاد شده است، به‌طور صریح نشان دهید که برای یک حلقه‌ی بسته‌ی حامل جریان I ، القای مغناطیسی در نقطه‌ی P عبارت است از

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \nabla \Omega$$

که در آن Ω زاویه‌ی فضایی در برگرفته شده توسط حلقه در نقطه‌ی P است. این موضوع با یک پتانسیل اسکالر مغناطیسی، $\Phi_M = -\frac{\mu_0 I \Omega}{4\pi}$ ، متناظر است.

قرارداد علامت برای زاویه‌ی فضایی به این صورت است که اگر نقطه‌ی P "درون" سطح پدیدآورنده‌ی حلقه را مشاهده کند، Ω مثبت خواهد بود. یعنی اینکه اگر یک بردار یکانی عمود \mathbf{n} (بر سطح فوق) با جهت گردش جریان طبق قاعده‌ی دست راست تعریف شود؛ Ω مثبت خواهد بود اگر \mathbf{n} به خارج از نقطه‌ی P اشاره کند، و در غیر این صورت منفی است. این موضوع مشابه قراردادی است که در بخش ۶-۱ برای لایه‌ی دو قطبی الکتریکی انجام دادیم.

۲-۵ یک سولونوئید ایده‌آل استوانه‌ای راست بلند با سطح مقطع اختیاری، با انباشتن تعداد زیادی از حلقه‌های حامل جریان مشابه یکی بر روی دیگری تشکیل شده است، با N پیچه بر واحد طول که هر حلقه آن حامل جریان I است. [در عمل یک چنین سولونوئیدی را می‌توان روی یک قرقره‌ی استوانه‌ای با سطح مقطع اختیاری پیچید و بعد از اینکه سیم پیچ سفت شد (مثلاً با اپوکسی)، قرقره را برداشت].

الف) با این تقریب که پیچه‌ی سولونوئید را یک صفحه‌ی جریان ایده‌آل بینهایت بلند فرض کنیم، با استفاده از مسئله‌ی ۱-۵ اثبات کنید که در هر نقطه‌ای در داخل این پیچه میدان مغناطیسی محوری بوده و برابر است با

$$H = NI$$

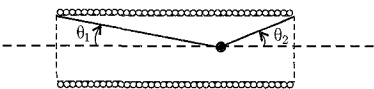
و برای هر نقطه خارج از پیچه $H = 0$ است.

ب) برای یک سولونوئید واقعی با سطح مقطع دایروی با شعاع a ($Na \gg 1$)، اما هنوز با طول نامتناهی، نشان دهید که میدان مغناطیسی هموار^۱، در خارج از سولونوئید (که به‌طور محوری روی چندین دور میانگین‌گیری شده است) دقیقاً صفر نیست، اما از لحاظ مقدار و جهت همانند یک تک سیم حامل جریان I روی محور است، حتی اگر $Na \rightarrow \infty$ میل کند.

میدان‌ها را در داخل و خارج سولونوئید با یکدیگر مقایسه کنید.

۳-۵ یک سولونوئید راست دایروی با طول متناهی L ، و شعاع a ، دارای N دور سیم بر واحد طول است و حامل جریان I . نشان دهید که القای مغناطیسی روی محور استوانه در حد $NL \rightarrow \infty$ عبارت است از

$$B_z = \frac{\mu_0 NI}{\rho} (\cos \theta_1 + \cos \theta_2)$$



که در آن زاویه‌ها در شکل زیر تعریف شده‌اند.

۴-۵ یک القای مغناطیسی \mathbf{B} در یک ناحیه خالی از جریان، و در یک محیط یکنواخت، به‌طور استوانه‌ای متقارن است، با مؤلفه‌های $B_z(\rho, z)$ و $B_\rho(\rho, z)$ و با یک $B_z(0, z)$ مشخص روی محور تقارن، که در آن اندازه‌ی میدان محوری به آرامی به جهت z تغییر می‌کند.

1) Smoothed

الف) نشان دهید که نزدیک محور، مؤلفه‌های محوری و شعاعی القای مغناطیسی، به‌طور تقریب عبارتند از

$$B_z(\rho, z) \approx B_z(\circ, z) - \left(\frac{\rho^2}{4}\right) \left[\frac{\partial^2 B_z(\circ, z)}{(\partial z^2)}\right] + \dots$$

$$B_\rho(\rho, z) \approx -\left(\frac{\rho}{2}\right) \left[\frac{\partial B_z(\circ, z)}{\partial z}\right] + \left(\frac{\rho^3}{16}\right) \left[\frac{\partial^3 B_z(\circ, z)}{\partial z^3}\right] + \dots$$

ب) مقادیر جملات صرف‌نظرشده چه هستند و یا معادل آن ملاک تعریف برای "نزدیک" محور چیست؟

۵-۵) الف) نتایج مسائل ۴-۵ و ۳-۵ را برای یافتن مؤلفه‌های شعاعی و محوری القای مغناطیسی در ناحیه مرکزی ($|z| \ll \frac{L}{4}$) برای سولونوئیدی یکنواخت و بلند با شعاع a ، که دو انتهای آن در $z = \pm \frac{L}{4}$ قرار دارند مورد استفاده قرار دهید (به انضمام مقدار B_z دقیقاً در داخل پیچه $(\rho = a^-)$)

ب) قانون آمپر را استفاده کنید و نشان دهید که القای مغناطیسی طول دقیقاً در خارج پیچه به‌طور تقریب عبارت است از

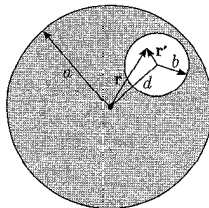
$$B_z(\rho = a^+, z) \approx -\left(\frac{2\mu_0 N I a^2}{L^2}\right) \left(1 + \frac{12z^2}{L^2} - \frac{9a^2}{L^2} + \dots\right)$$

برای $L \gg a$ ، میدان در خارج در مقایسه با داخل قابل اغماض است. چگونه این مؤلفه‌ی محوری از لحاظ اندازه، با مؤلفه‌ی سمتی مسئله‌ی ۲-۵ مقایسه می‌شود.

ج) نشان دهید که در انتهای سولونوئید القای مغناطیسی در نزدیک محور دارای مؤلفه‌های زیر است

$$B_z \simeq \frac{\mu_0 N I}{2}, \quad B_\rho \approx \pm \frac{\mu_0 N I}{4} \left(\frac{\rho}{a}\right)$$

۶-۵) یک رسانای استوانه‌ای با شعاع a دارای یک سوراخ با شعاع b است که به موازات با محور استوانه در آن ایجاد شده، و در فاصله d از محور استوانه مرکبیت یافته است ($d + b < a$). چگالی جریان در سرتاسر مابقی فلز این استوانه یکنواخت بوده و موازی محور آن است. قانون آمپر و اصل برهم‌نهمش خطی را برای یافتن مقدار و جهت چگالی شار مغناطیسی در این حفره مورد استفاده قرار دهید.



۷-۵) یک سیم پیچ دایروی فشرده با شعاع a و حامل جریان I داریم. (احتمالاً N دور، هر دور با جریان I) که در صفحه‌ی $x - y$ در مبدأ مرکبیت یافته است.

الف) با روش‌های مقدماتی [معادله‌ی (۵-۴)] القای مغناطیسی را در هر نقطه روی محور z بیابید.

ب) یک سیم‌پیچ یکسان، با مقدار و جهت جریان مشابه، روی همان محور به‌طور موازی و در فاصله‌ی b در بالای سیم‌پیچ اول به‌طور ثابت قرار گرفته است.

با قرار دادن مجدد مبدأ مختصات در نقطه میانی بین مراکز این دو سیم‌پیچ، القای مغناطیسی را روی محور نزدیک مبدأ، به‌صورت بسط برحسب توان‌های z تا z^4 تعیین کنید

$$B_z = \left(\frac{\mu_0 I a^2}{d^3} \right) \left[1 + \frac{3(b^2 - a^2)z^2}{2d^4} + \frac{15(b^4 - 6b^2a^2 + 2a^4)z^4}{16d^8} + \dots \right]$$

$$d^2 = \frac{a^2 + b^2}{4}$$

ج) نشان دهید که دور از محور نزدیک مبدأ مؤلفه‌های شعاعی و محوری با تصحیح تا مرتبه‌ی دوم در مختصات، شکل زیر را به‌خود می‌گیرند

$$B_z = \sigma_0 + \sigma_2 \left(z^2 - \frac{\rho^2}{4} \right); \quad B_\rho = -\sigma_2 z \rho$$

د) برای دو سیم‌پیچ موردنظر در قسمت (ب) نشان دهید که القای مغناطیسی روی محور z برای $|z|$ بزرگ، با بسط برحسب توان‌های فرد معکوس $|z|$ مشخص می‌شود، که از بسط z کوچک در قسمت (ب) با جایگذاری رسمی $|Z| \rightarrow d$ به‌دست می‌آیند.

ه) اگر $b = a$ باشد، دو سیم‌پیچ به‌عنوان یک جفت سیم‌پیچ هلمهولتز شناخته می‌شوند. برای این هندسه‌ی منتخب، جمله‌ی دوم در بسط‌های قسمت‌های (ب) و (د) حضور ندارد ($\sigma_2 = 0$) در قسمت (ج). در این صورت میدان در نزدیک مبدأ بسیار یکنواخت است. اگر میدان محوری به مقدار یک در 10^4 ، یا یک در 10^2 یکنواخت باشد، حداکثر مقدار مجاز $\frac{|Z|}{a}$ چیست؟

۸-۵ یک توزیع جریان متقارن استوانه‌ای جایگزیده، به‌گونه‌ای است که جریان فقط در جهت سمتی جریان می‌یابد؛ چگالی جریان تنها تابعی از r و θ است یا (z, ρ) : $\mathbf{J} = \hat{\varphi} J(r, \theta)$. در اینجا توزیع جریان به‌اصطلاح حفره دارد به این معنی که در نزدیکی مبدأ ناحیه‌ای داریم (درون توزیع) که فاقد جریان است، درست همانند فضای بیرون از این توزیع بار.

الف) نشان دهید که می‌توان میدان مغناطیسی را از مؤلفه‌ی سمتی پتانسیل برداری با بسط چندقطبی

$$A_\phi(r, \theta) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \sum_L m_L r^L P_L^1(\cos \theta)$$

برای ناحیه‌ی داخل و

$$A_{\phi}(r, \theta) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \sum_L \mu_L r^{-L-1} P_L^1(\cos \theta)$$

برای خارج از توزیع جریان استخراج نمود.

(ب) نشان دهید که گشتاورهای چندقطبی داخلی و خارجی عبارتند از

$$m_L = -\frac{1}{L(L+1)} \int d^3x r^{-L-1} P_L^1(\cos \theta) J(r, \theta)$$

$$\mu_L = -\frac{1}{L(L+1)} \int d^3x r^L P_L^1(\cos \theta) J(r, \theta)$$

۹-۵ دو سیم‌پیچ دایروی با شعاع a و فاصله‌ی جدایی b در مسئله ۷-۵ را می‌توان در مختصات استوانه‌ای با چگالی جریان

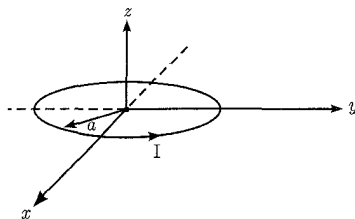
$$\mathbf{J} = \hat{\phi} I \delta(\rho - a) \left[\delta\left(z - \frac{b}{2}\right) + \delta\left(z + \frac{b}{2}\right) \right]$$

توصیف نمود.

الف) با استفاده از صورت‌بندی مسئله‌ی ۸-۵، گشتاورهای چندقطبی داخلی و خارجی را برای $L = 0, 1, 2, \dots$ محاسبه کنید.

ب) با استفاده از بسط چندقطبی داخلی مسئله‌ی ۸-۵، به‌طور صریح، رابطه‌ای برای B_z روی محور z بنویسید و آن را به جواب مسئله‌ی ۷-۵ مربوط کنید.

۱۰-۵ یک حلقه‌ی جریان دایروی با شعاع a ، حامل جریان I ، با مرکزیت مبدأ در صفحه‌ی $x-y$ قرار گرفته است.



الف) نشان دهید که تنها مؤلفه‌ی غیرصفر پتانسیل برداری عبارت است از

$$A_{\Phi}(\rho, z) = \frac{\mu_0 I a}{\pi} \int_0^{\infty} dk \cos kz I_1(k\rho_{<}) K_1(k\rho_{>})$$

که در آن $\rho_{<} < \rho_{>}$ مقدار کوچک‌تر (بزرگ‌تر) a و ρ است.

ب) نشان دهید که یک رابطه‌ی دیگر برای A_{Φ} عبارت است از

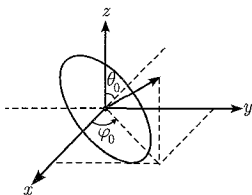
$$A_{\Phi}(\rho, z) = \frac{\mu_0 I a}{2} \int_0^{\infty} dk e^{-k|z|} J_1(ka) J_1(k\rho)$$

ج) با استفاده از روابط قسمت‌های (الف) و (ب) روابط انتگرالی را برای مؤلفه‌های القای مغناطیسی بنویسید.

با انجام انتگرال‌گیری‌های لازم به‌طور صریح مؤلفه‌های \mathbf{B} را روی محور z تعیین کنید.

۱۱-۵ مرکز یک حلقه‌ی سیمی دایروی حامل جریان I در مبدأ مختصات قرار گرفته است، و بردار یکانی عمود بر صفحه‌ی آن دارای زوایای کروی θ_0 و ϕ_0 است. یک میدان مغناطیسی با مؤلفه‌های زیر روی این سیستم اعمال می‌کنیم

$$\begin{cases} B_x = B_0 (1 + \beta y) \\ B_y = B_0 (1 + \beta x) \end{cases}$$

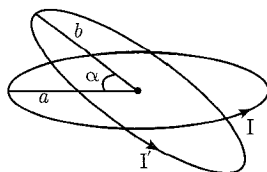


الف) نیروی وارد بر حلقه را بدون انجام هیچ‌گونه تقریبی محاسبه کنید. نتیجه‌ی خودتان را با نتیجه‌ی تقریبی (۶۹-۵) مقایسه نموده و در نهایت نتیجه را تفسیر کنید.

ب) گشتاور را در پایین‌ترین مرتبه خود محاسبه کنید. آیا می‌توانید چیزی در مورد سهم گشتاورهای مرتبه‌ی بالاتر نتیجه‌گیری کنید. آیا گشتاورهای فوق برای این حلقه دایروی صفر می‌شوند؟ در مورد سایر شکل‌ها چطور؟

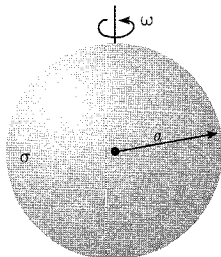
۱۲-۵ دو حلقه دایروی هم‌مرکز با شعاع‌های a و b ، به‌ترتیب دارای جریان‌های I و I' بوده ($b < a$) و زاویه‌ی α را بین صفحات خود دارا هستند. نشان دهید که گشتاور زاویه‌ای روی یکی از حلقه‌ها حول خط تقاطع بین دو صفحه (شامل حلقه‌ها) بوده، و دارای اندازه‌ی زیر است

$$N = \frac{\mu_0 \pi I I' b^2}{2a} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)}{(2n+1)} \left[\frac{\Gamma\left(n + \frac{3}{2}\right)}{\Gamma(n+2)\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} \right]^2 \left(\frac{b}{a}\right)^{2n} P_{2n+1}'(\cos \alpha)$$

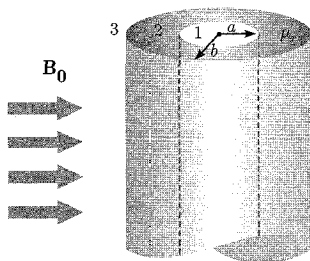


که در آن $P_{2n+1}'(\cos \alpha)$ یک چندجمله‌ای لژاندر وابسته است. جهت گشتاور را وقتی α یک زاویه‌ی حاده باشد و جریان‌ها در یک جهت (مخالف جهت) باشند تعیین کنید.

۱۳-۵ یک کره به شعاع a حامل توزیع بار سطحی σ است. این کره حول یک قطر خود با سرعت زاویه‌ای ثابت ω دوران می‌کند. پتانسیل برداری و چگالی شار مغناطیسی را هم برای درون و هم برای بیرون از کره بیابید؟



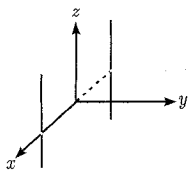
۱۴-۵ یک استوانه‌ی دایره‌ی راست توخالی بلند با شعاع داخلی (خارجی) a (b) و تراوایی مغناطیسی نسبی در یک ناحیه با چگالی شار مغناطیسی یکنواخت اولیه‌ی \mathbf{B}_0 و تحت زاویه‌ی قائمه نسبت به میدان قرار داده شده است. چگالی شار را در تمام نقاط فضا بیابید، و لگاریتم نسبت مقادیر \mathbf{B} روی محور استوانه را به \mathbf{B}_0 به صورت تابعی از μ_r به ازای $\log_{10} \mu_r = 0.1, 0.5$ رسم کنید. از اثرات انتهایی نیز صرف نظر نمایید.



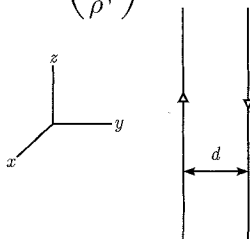
۱۵-۵ دو سیم راست بلند و موازی با محور z را در نظر بگیرید که با فاصله d از یکدیگر قرار گرفته‌اند و حامل جریان‌های I در جهت‌های مخالفند. میدان مغناطیسی \mathbf{H} را برحسب یک پتانسیل اسکالر مغناطیسی Φ_M با $\mathbf{H} = -\nabla\Phi_M$ توصیف کنید.

(الف) در صورتی که سیم‌ها در مکان‌های $x = \pm \frac{d}{2}$ و $y = 0$ موازی با محور z باشند، نشان دهید که در حد فاصله‌ی جدایی کوچک، پتانسیل به‌طور تقریب، پتانسیل یک دوقطبی دوبعدی است

$$\Phi_M \approx -\frac{Id \sin \phi}{2\pi\rho} + O\left(\frac{d^2}{\rho^2}\right)$$



(ب)

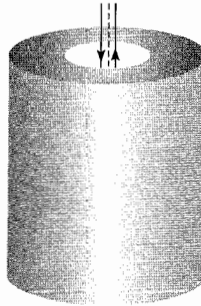


(الف)

که در آن ρ و ϕ مختصات قطبی معمول هستند.

(ب) حال سیم‌هایی که به دقت نسبت به یکدیگر فاصله گرفته‌اند، در یک استوانه‌ی دایره‌ی راست توخالی از جنس فولاد با شعاع داخلی (خارجی) a (b) و تراوایی مغناطیسی $\mu = \mu_r \mu_0$ ، مرکزیت می‌یابند. پتانسیل اسکالر مغناطیسی را در سه ناحیه $0 < \rho < a$ ، $a < \rho < b$ و $\rho > b$ تعیین کنید. نشان دهید که میدان در خارج از استوانه‌ی فولادی یک میدان دوقطبی دویعدی است، (همانند قسمت (الف)) اما با قدرتی که با عامل زیر کاهش یافته است

$$F = \frac{4\mu_r b^2}{(\mu_r + 1)^2 b^2 - (\mu_r - 1)^2 a^2}$$



(ج)

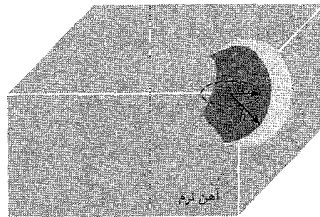
نتیجه را به مسئله‌ی ۱۴-۵ ربط دهید.

(ج) با فرض $\mu_r \gg 1$ و $b = a + t$ که در آن ضخامت $t \ll b$ است، یک رابطه‌ی تقریبی برای F بنویسید و مقدار عددی آن را به ازای $\mu_r = 200$ (مقدار تراوایی مغناطیسی نوعی فولاد در 20°C) $b = 1.25\text{cm}$ و $t = 3\text{mm}$ ، تعیین کنید. اثر سپر سازی^۱ برای کاهش میدان‌های پراکنده^۲ در سیم‌کشی‌های مسکونی^۳ و تجاری 60Hz ، 110 یا 220 ولت، مهم است. شکل زیر اثر سپر سازی را برای $\frac{a}{b} = 0.9$ و $\mu_r = 100$ ، نشان داده است.

۱۶-۵ یک حلقه‌ی دایره‌ی سیمی با شعاع a و ضخامت قابل اغماض و حامل جریان I داریم. حلقه در یک حفره‌ی کروی با شعاع $b > a$ در یک بلوک بزرگ از جنس آهن نرم مرکزیت یافته است. فرض کنید تراوایی نسبی آهن به طور مؤثر بینهایت، و تراوایی محیط درون حفره یک باشد.

(الف) نشان دهید در تقریب $b \gg a$ ، میدان مغناطیسی در مرکز حلقه با حضور آهن، با عامل $\left(1 + \frac{a^3}{2b^3}\right)$ افزایش می‌یابد.

ب) شعاع "تصویر" حلقه‌ی جریان (حامل جریانی مشابه) که اثر آهن را برای $r < b$ شبیه‌سازی می‌کند چیست؟



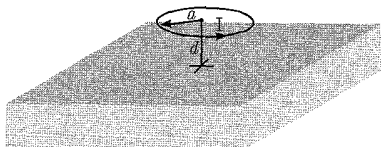
۱۷-۵ یک توزیع جریان $\mathbf{J}(x)$ داریم در ناحیه‌ای با تراوایی مغناطیسی نسبی واحد؛ در مجاورت یک بره‌ی نیمه - بینهایت از ماده‌ای با تراوایی مغناطیسی نسبی μ_r که نیم‌فضای $z < 0$ را پر کرده است. الف) نشان دهید که برای $z > 0$ القای مغناطیسی را می‌توان با جایگذاری محیطی با تراوایی μ_r ، با یک توزیع جریان تصویری \mathbf{J}^* ، با مؤلفه‌های

$$\left(\frac{\mu_r - 1}{\mu_r + 1}\right) J_x(x, y, -z) ; \left(\frac{\mu_r - 1}{\mu_r + 1}\right) J_y(x, y, -z) - \left(\frac{\mu_r - 1}{\mu_r + 1}\right) J_z(x, y, -z)$$

محاسبه نمود.

ب) نشان دهید که برای $z < 0$ ، به‌نظر می‌رسد القای مغناطیسی، ناشی از یک توزیع جریان $\mathbf{J} \left[\frac{2\mu_r}{(\mu_r + 1)} \right]$ در محیطی با تراوایی نسبی واحد باشد.

۱۸-۵ فاصله‌ی مرکزی یک حلقه دایروی سیمی با شعاع a و حامل جریان I از یک بره‌ی نیمه - بینهایت با نفوذپذیری μ که در خلأ قرار دارد d است. نیروی وارد بر حلقه را بیابید وقتی که



۱. صفحه‌ی حلقه موازی وجه بره باشد.

۲. صفحه‌ی حلقه، عمود بر وجه بره باشد.

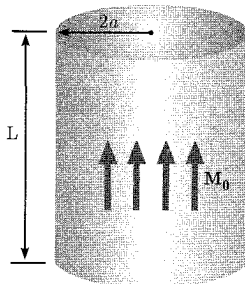
۳. شکل حدی جوابتان را برای قسمت‌های a و b ، وقتی

$d \gg a$ است تعیین کنید. آیا می‌توانید این مقادیر حدی را با یک روش مستقیم و آسان به‌دست آورید؟

۱۹-۵ یک ماده‌ی "سخت" مغناطیسی به‌صورت یک استوانه‌ی دایروی راست به طول L و شعاع $2a$ داریم. این استوانه دارای مغناطش دائمی \mathbf{M} است که در سرتاسر حجم استوانه یکنواخت بوده و موازی با محورش است.

الف) میدان مغناطیسی \mathbf{H} و القای مغناطیسی \mathbf{B} را در تمام نقاط روی محور استوانه، هم در داخل و هم در خارج آن تعیین کنید.

ب) نسبت‌های $\frac{\mathbf{B}}{\mu_0 M_0}$ و $\frac{\mathbf{H}}{M_0}$ را روی محور، به صورت توابعی از z برای $\frac{L}{a} = 5$ ، رسم کنید.

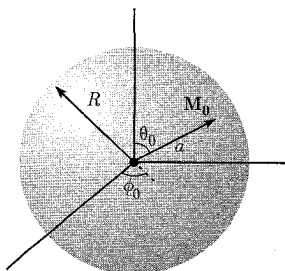


۲۰-۵ الف) با شروع از معادله‌ی نیروی (۵-۱۲)، و این حقیقت که مغناطش \mathbf{M} در داخل یک حجم V محدود به سطح S ، با یک چگالی جریان حجمی $\mathbf{J}_M = (\nabla \times \mathbf{M})$ و یک چگالی جریانی سطحی $(\mathbf{M} \times \mathbf{n})$ هم‌ارز است، نشان دهید که در غیاب جریان‌های رسانشی ماکروسکوپی، نیروی مغناطیسی کل روی این جسم را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\mathbf{F} = - \int_V (\nabla \cdot \mathbf{M}) \mathbf{B}_e d^3x + \int_S (\mathbf{M} \cdot \text{ovn}) \mathbf{B}_e da$$

که در آن \mathbf{B}_e القای مغناطیسی است (نه شامل القای مغناطیسی جسم مورد سؤال). در اینجا این نیرو برحسب چگالی‌های بار مؤثر ρ_M و σ_M بیان شد. اگر توزیع مغناطش متصل نباشد، سطح می‌تواند در بینهایت باشد و نیرو دقیقاً با انتگرال حجمی مشخص شود.

ب) مرکز یک کره با شعاع R و با مغناطش یکنواخت در مبدأ مختصات است و جهت بردار مغناطش آن زوایای θ_0 و ϕ_0 را با سیستم مختصات می‌سازد. اگر میدان مغناطیسی خارجی، مشابه مسئله‌ی ۱۱-۵ باشد، رابطه‌ی قسمت الف) را برای تعیین مؤلفه‌های نیروی وارد بر کره مورد استفاده قرار دهید.



۲۱-۵ یک میدان مگنتواستاتیک به‌طور کامل از یک توزیع جایگزیده‌ی دائم ناشی شده است.

$$\int \mathbf{B} \cdot \mathbf{H} d^3x = 0 \quad \text{(الف) نشان دهید که؛}$$

مشروط بر اینکه انتگرال روی تمام فضا گرفته شود.

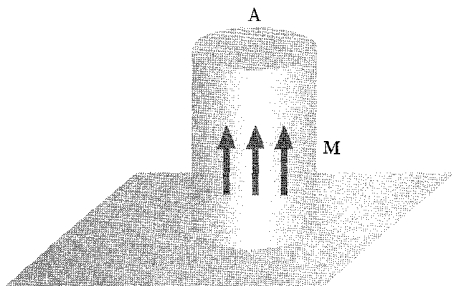
ب) با توجه به انرژی پتانسیل (۵-۷۲) ناشی از یک دوقطبی در یک میدان خارجی، نشان دهید که برای یک توزیع متصل مغناطش دائم، انرژی مگنتواستاتیکی را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$W = \frac{\mu_0}{2} \int \mathbf{H} \cdot \mathbf{H} d^3x = -\frac{\mu_0}{2} \int \mathbf{M} \cdot \mathbf{H} d^3x$$

جدا از یک ثابت جمعی، که مستقل از جهت‌گیری یا مکان اجزاء مختلف تشکیل‌دهنده‌ی اجسام مغناطیده است.

۲۲-۵ نشان دهید که در حالت کلی، یک میله مستقیم بلند با سطح مقطع یکنواخت A با مغناطش طولی یکنواخت M ، وقتی با انتهای تخت خود روی یک سطح تخت تراوای بینهایت قرار می‌گیرد، با نیرویی که به‌طور تقریب با

$$F \simeq \frac{\mu_0}{2} AM^2$$



مشخص می‌شود، خواهد چسبید. بحث‌تان را به ملاحظات الکترواستاتیکی بخش ۱-۱۱ مربوط کنید.

۲۳-۵ یک استوانه‌ی دایروی راست با طول L و شعاع a ، دارای مغناطش طول یکنواخت M است.

الف) نشان دهید که وقتی این استوانه با انتهای تخت خود بر روی یک سطح تراوای تخت بینهایت قرار گیرد، با نیروی

$$F = 2\mu_0 aLM^2 \left[\frac{K(k) - E(k)}{k} - \frac{K(k_1) - E(k_1)}{k_1} \right]$$

به سطح خواهد چسبید، که در آن

$$k = \frac{2a}{\sqrt{4a^2 + L^2}}, \quad k_1 = \frac{a}{\sqrt{a^2 + L^2}}$$

ب) اگر $L \gg a$ باشد شکل حدی را برای این نیرو بیابید.

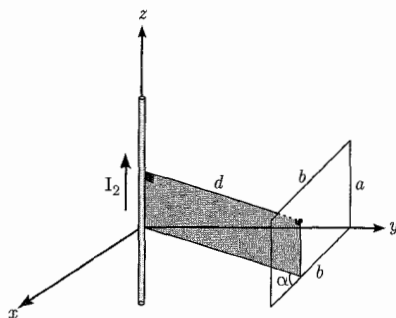
۲۴-۵ (الف) برای صفحه‌ی رسانای کامل بخش ۵-۱۳ با حفره‌ی دایروی موجود در آن و میدان مغناطیسی مماسی یکنواخت مجانبی \mathbf{H}_0 روی یک طرف آن، میدان مغناطیسی مماسی اضافه شده $\mathbf{H}^{(1)}$ را در طرفی از صفحه که شامل \mathbf{H}_0 است محاسبه کنید. نشان دهید که مؤلفه‌های میدان برای $\rho > a$ عبارتند از

$$H_x^{(1)} = \frac{2H_0 a^2}{\pi} \frac{xy}{\rho^2 \sqrt{\rho^2 - a^2}}$$

$$H_y^{(1)} = \frac{2H_0 a^2}{\pi} \frac{y^2}{\rho^2 \sqrt{\rho^2 - a^2}} + \frac{H_0}{\pi} \left[\frac{a}{\rho} \sqrt{1 - \frac{a^2}{\rho^2}} - \sin^{-1} \left(\frac{a}{\rho} \right) \right]$$

(ب) خطوط گردش جریان سطحی در همسایگی حفره را روی دو طرف صفحه رسم کنید.

۲۵-۵ یک حلقه‌ی مستطیلی راست تخت حامل جریان ثابت I_1 ، در نزدیکی یک سیم راست بلند حامل جریان I_2 قرار گرفته است. جهت حلقه طوری است که مرکز آن در فاصله عمودی d از سیم قرار دارد؛ اضلاع با طول a موازی سیم هستند و اضلاع با طول b ، زاویه α را با صفحه‌ی شامل سیم و مرکز حلقه می‌سازند. جهت جریان I_1 مشابه با جهت جریان I_2 در ضلعی از مستطیل است که نزدیک‌ترین فاصله را با سیم دارد.



(الف) نشان دهید که انرژی مغناطیسی برهم‌کنشی

$$W_{12} = \int \mathbf{J}_1 \cdot \mathbf{A}_2 d^3x = I_1 F_2$$

(که در آن شار مغناطیسی ناشی از جریان I_2 است که از مدار مستطیلی حامل جریان I_1 عبور می‌کند) عبارت است از

$$W_{12} = \frac{\mu_0 I_1 I_2 a}{4\pi} \ln \left[\frac{4d^2 + b^2 + 4db \cos \alpha}{4d^2 + b^2 - 4db \cos \alpha} \right]$$

(ب) نیروی بین حلقه و سیم را برای جریان‌های ثابت محاسبه کنید.

(ج) محاسبه را برای یک حلقه‌ی دایروی با شعاع a ، که صفحه‌ی آن زاویه‌ی α را نسبت به صفحه‌ی شامل مرکز حلقه و سیم می‌سازد تکرار کنید.

نشان دهید که انرژی برهم‌کنشی عبارت است از

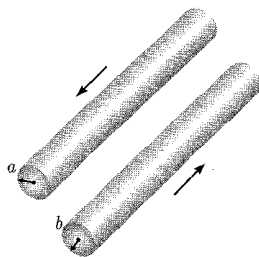
$$W_{12} = \mu_0 I_1 I_2 d \operatorname{Re} \left[e^{i\alpha} - \sqrt{e^{2i\alpha} - \frac{a^2}{d^2}} \right]$$

و در آخر نیرو را بیابید.

(د) برای هر دو حلقه، نشان دهید وقتی b و $a \gg d$ است، انرژی برهم‌کنشی به $W_{12} \approx \mathbf{m} \cdot \mathbf{B}$ کاهش می‌یابد، که در آن گشتاور مغناطیسی حلقه است. علامت را توضیح دهید.

۲۶-۵ یک خط انتقال دو سیمه شامل یک جفت سیم موازی ناتراوا با شعاع‌های a و b است که با فاصله $d > a + b$ از یکدیگر قرار گرفته‌اند. جریان از یک سیم جاری شده و به دیگری برمی‌گردد. این جریان به‌طور یکنواخت روی سطح مقطع هر دو سیم توزیع شده است. نشان دهید که خودالقایی بر واحد طول عبارت است از

$$L = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[1 + 2 \ln \left(\frac{d^2}{ab} \right) \right]$$



۲۷-۵ یک مدار شامل یک لایه‌ی رسانای نازک بلند با شعاع a ، و یک سیم برگشتی موازی با شعاع b روی محور داخلی است. اگر فرض شود جریان به‌طور یکنواخت در سرتاسر سطح مقطع سیم توزیع شده باشد، خودالقایی بر واحد طول را محاسبه کنید. اگر رسانای داخلی یک لوله توخالی نازک باشد خودالقایی چیست؟

۲۸-۵ نشان دهید که القاء متقابل دو حلقه‌ی هم‌محور دایروی، در یک محیط همگن با تراوایی μ عبارت است از

$$M_{12} = \mu \sqrt{ab} \left[\left(\frac{2}{k} - k \right) K(k) - \frac{2}{k} E(k) \right]$$

که در آن

$$k^2 = \frac{4ab}{(a+b^2) + d^2}$$

و a و b شعاع حلقه‌ها بوده و d فاصله بین مراکز آنها است و K و E انتگرال‌های کامل بیضوی هستند. مقدار حدی را در حالت $a, b \ll d$ و $a \simeq b$ بیابید.

۲۹-۵ شکل زیر یک خط انتقال شامل دو رسانای کامل موازی، با سطح مقطع اختیاری اما ثابت را نشان می‌دهد. جریان از یک رسانا سرازیر و از طریق دیگری برمی‌گردد.



نشان دهید که حاصل ضرب القاء بر واحد طول L ، و ظرفیت بر واحد طول C عبارت است از

$$LC = \mu\epsilon$$

که در آن μ و ϵ تراوایی و گذردهی ویژه‌ی محیط اطراف رسانا هستند. (بحث میدان‌های مغناطیسی در نزدیکی رساناهای کامل در شروع بخش ۵-۱۳ را ملاحظه کنید.)

۳۰-۵ (الف) نشان دهید که یک چگالی جریان سطحی $K(\phi) = \frac{I \cos \phi}{2R}$ که در جهت محوری روی یک سطح استوانه‌ای دایروی راست با شعاع R جاری است، باعث ایجاد یک القای مغناطیسی بکنواخت $B_\phi = \frac{\mu_0 I}{4R}$ در درون استوانه و در جهت عمود بر محور آن می‌شود. نشان دهید که میدان در خارج از استوانه، همان میدان ناشی از یک دوقطبی دوبعدی است.

(ب) انرژی میدان مگنتواستاتیک کل بر واحد طول را محاسبه کنید. چگونه این انرژی در داخل و خارج از استوانه تقسیم می‌شود.

(ج) القا بر واحد طول این سیستم، چه خواهد بود وقتی به‌عنوان مدار حامل جریانی در نظر گرفته شود

$$L = \frac{\pi\mu_0}{8} \quad \text{که از یک طرف استوانه جاری شده و از طرف دیگر آن برگردد. جواب:}$$

۳۱-۵ آهنربای خمیده‌ی یک شتابدهنده، شامل N دور کابل ابر رساناست، که آرایش جریان آن را می‌توان تقریباً با چگالی جریان محوری زیر توصیف نمود

$$J_z(\rho, \phi) = \left(\frac{NI}{2R} \right) \cos \phi \delta(\rho - R)$$

استوانه‌ی دایروی راست حامل جریان، روی محوری یک استوانه‌ی آهنی توخالی با شعاع داخلی R' ($R' > R$) مرکزیت یافته است. ابعاد نسبی (R و R' چند سانتی‌متر و آهنربایی با طول چند متر)، حداقل برای فواصل دور از دو انتهای آهنربا استفاده از یک تقریب دوبعدی را امکان‌پذیر می‌کند. فرض کنید که تراوایی نسبی آهن را بتوان بینهایت در نظر گرفت، [در این صورت شعاع خارجی آهن مناسبی ندارد].

الف) نشان دهید که میدان مغناطیسی در درون غلاف جریان، عمود بر محور استوانه و در جهتی است که توسط $\phi = \pm \frac{\pi}{4}$ تعریف می‌شود و دارای اندازه‌ی زیر است

$$B_0 = \left(\frac{\mu_0 NI}{4R} \right) \left[1 + \frac{R^2}{R'^2} \right]$$

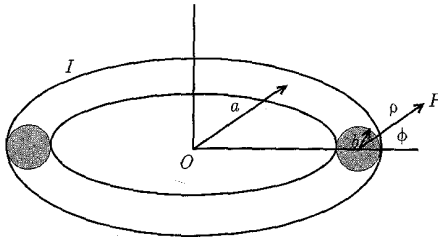
ب) نشان دهید که انرژی مغناطیسی نسبت به مقادیر انرژی در غیاب آهن درون ناحیه‌ی $R = R'$ افزایش می‌یابد (و در خارج آن کاسته می‌شود). (قسمت ب) از مسئله ۵-۳۰ را مقایسه کنید).

ج) نشان دهید که اندوکتانس بر واحد طول عبارت است از

$$\frac{dL}{dz} = \left(\frac{\pi \mu_0 N^2}{\lambda} \right) \left[1 + \frac{R^2}{R'^2} \right]$$

۲۲-۵ یک حلقه‌ی دایروی با شعاع میانگین a ، از سیمی با سطح مقطع دایروی و با شعاع b ($b \ll a$) ساخته شده است.

طرح زیر ابعاد و مختصات مربوطه را برای این مسئله نشان می‌دهد.



الف) با استفاده از (۳۷-۵) یعنی رابطه‌ی پتانسیل برداری برای یک حلقه‌ی دایروی رشته‌ای و استفاده از تقریب‌های مناسب برای انتگرال‌های بیضوی، نشان دهید که پتانسیل برداری در نقطه‌ی P نزدیک سیم به‌طور تقریب عبارت است از

$$A_\phi = \left(\frac{\mu_0 I}{2\pi} \right) \left[\ln \left(\frac{\lambda a}{\rho} \right) - 2 \right]$$

که در آن ρ مختصه‌ی عرضی در شکل است، و تصحیحات از مرتبه‌ی $\left(\frac{\rho}{a} \right) \cos \phi$ و $\left(\frac{\rho}{a} \right)^2$ هستند.

ب) چون پتانسیل برداری در قسمت (الف)، جدا از یک مقدار ثابت، دقیقاً همان پتانسیل ناشی از یک سیم دایروی راست حامل جریان I است، با در نظر گرفتن اینکه جریان از لحاظ چگالی

در درون سیم، یکنواخت است، پتانسیل برداری را در داخل سیم ($\rho < b$) با تقریبی مشابه، و با ضرورت اتصال A_ϕ و مشتق شعاعی اش در $\rho = b$ تعیین کنید

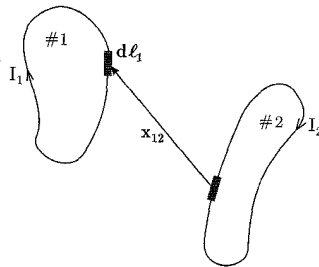
$$A_\phi = \left(\frac{\mu_0 I}{4\pi} \right) \left(1 - \frac{\rho^2}{b^2} \right) + \left(\frac{\mu_0 I}{2\pi} \right) \left[\ln \left(\frac{\lambda a}{b} \right) - 2 \right], \quad \rho < b$$

ج) رابطه‌ی (۵-۱۴۹) را برای یافتن انرژی مغناطیسی و پس از آن خودالقایی، مورد استفاده قرار دهید

$$L = \mu_0 a \left[\ln \left(\frac{\lambda a}{b} \right) - \frac{7}{4} \right]$$

آیا تصحیحاتی از مرتبه‌ی $\frac{b}{a}$ یا $\left(\frac{b}{a} \right)^2$ وجود دارند؟ اگر فرض شود جریان تنها روی سطح سیم جاری است، تغییر در L چه خواهد بود؟ (چنانکه این مورد در فرکانس‌های بالا وقتی عمق پوسته^۱ در مقایسه با b کوچک باشد اتفاق می‌افتد).

۳۳-۵ دو حلقه‌ی جریان را در نظر بگیرید (همانند شکل ۵-۳) که جهت آن‌ها در فضا ثابت است اما جدایی نسبی آن‌ها می‌تواند تغییر کند. فرض کنید O_1 و O_2 مبدأها در دو حلقه بوده که نسبت به هر حلقه ثابت هستند، و \mathbf{x}_1 و \mathbf{x}_2 به ترتیب مختصات المان‌های dl_1 و dl_2 برای این حلقه‌ها باشند که به مبدأهای نسبی منتسب می‌شوند. فرض کنید \mathbf{R} مختصه‌ی نسبی مبدأها باشد که جهت آن از حلقه‌ی ۲ به حلقه‌ی ۱ است.



الف) با شروع از (۵-۱۰) یعنی رابطه‌ی موجود برای نیروی بین حلقه‌ها، نشان دهید که آن را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\mathbf{F}_{12} = I_1 I_2 \nabla_{\mathbf{R}} M_{12}(\mathbf{R})$$

که در آن M_{12} القای متقابل بین حلقه‌های فوق است

$$M_{12}(\mathbf{R}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint \oint \frac{dl_1 \cdot dl_2}{|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 + \mathbf{R}|}$$

و فرض شده است که جهت‌گیری حلقه‌ها با \mathbf{R} تغییری نمی‌کند.

1) Skin depth

ب) نشان دهید که القای متقابل که به صورت تابعی از \mathbf{R} در نظر گرفته می‌شود، جوابی از معادله‌ی لاپلاس زیر است

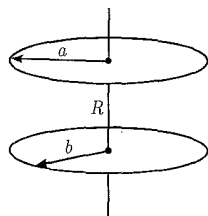
$$\nabla_R^2 M_{12}(\mathbf{R}) = 0$$

اهمیت این نتیجه در آن است که یکتایی جواب‌های معادله‌ی لاپلاس استفاده از خواص یک چنین جواب‌هایی را امکان‌پذیر می‌کند، مشروط بر اینکه بتوان برای یک مقدار خاص R جوابی پیدا کرد.

۳۴-۵ دو حلقه‌ی دایروی مشابه با شعاع a ، در ابتدا در فاصله‌ی R ، جدا از یکدیگر روی محور مشترک عمود بر صفحاتشان قرار گرفته‌اند.

الف) از رابطه‌ی $W_{12} = \int d^3x \mathbf{J}_1 \cdot \mathbf{A}_2$ و نتیجه‌ی به دست آمده برای A_ϕ از مسئله ۵-۱۰ (ب)، نشان دهید که القاء متقابل این حلقه‌ها عبارت است از

$$M_{12} = \mu_0 \pi a^2 \int_0^\infty dk e^{-kR} J_1^2(ka)$$



ب) نشان دهید که برای $R > 2a$ ، M_{12} دارای بسط زیر است

$$M_{12} = \frac{\mu_0 \pi a}{2} \left[\left(\frac{a}{R}\right)^3 - 3 \left(\frac{a}{R}\right)^5 + \frac{75}{8} \left(\frac{a}{R}\right)^7 + \dots \right]$$

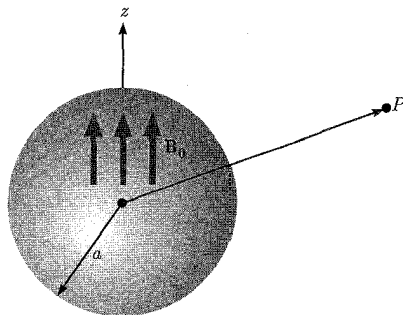
ج) روش‌های بخش ۳-۳ برای جواب‌های معادله‌ی لاپلاس را استفاده کنید و نشان دهید که القاء متقابل برای دو حلقه‌ی دایروی مشابه هم‌صفحه با شعاع a ، که مراکزشان با فاصله $R > 2a$ از هم جدا شده‌اند عبارت است از

$$M_{12} = -\frac{\mu_0 \pi a}{4} \left[\left(\frac{a}{R}\right)^3 - \frac{9}{4} \left(\frac{a}{R}\right)^5 + \frac{375}{64} \left(\frac{a}{R}\right)^7 + \dots \right]$$

د) نیروهای موجود بین حلقه‌ها را در وضعیت‌های (الف) محور مشترک و (ب) هم‌صفحه، محاسبه کنید. جواب‌هایتان را به جواب‌های مسئله‌ی ۵-۱۸ ربط دهید.

۳۵-۵ یک سیم عایق‌بندی‌شده، روی سطح یک کره با شعاع a ، به‌گونه‌ای پیچیده شده است که باعث ایجاد یک القای مغناطیسی یکنواخت B_0 در جهت z در داخل کره، و یک میدان دوقطبی در خارج از

کره می‌شود. محیط داخل و خارج کره دارای رسانایی یکنواخت σ و تراوایی مغناطیسی μ است.



الف) چگالی جریان سطحی لازم \mathbf{K} را یافته، و نشان دهید که پتانسیل برداری توصیف‌کننده‌ی میدان مغناطیسی، تنها دارای یک مؤلفه‌ی سمتی است که توسط

$$A_{\phi} = \frac{B_0 a^2 r_{<}}{2 r_{>}^2} \sin \theta$$

مشخص می‌شود؛ که در آن $r_{<} < r < r_{>}$ مقدار کوچک‌تر (بزرگ‌تر) a و r است.

ب) در $t = 0$ جریان موجود در سیم قطع می‌شود [حضور سیم را از این زمان به بعد می‌توان نادیده انگاشت]. با صرف نظر از جریان جابه‌جایی ماکسول، استحاله‌ی میدان مغناطیسی با معادله‌ی پخش^۱ (۵-۱۶) توصیف می‌شود. با استفاده از یک تبدیل لاپلاس و بسط تابع بسل کروی (۳-۱۱۳)

نشان دهید که پتانسیل برداری در زمان‌های $t > 0$ با رابطه‌ی زیر مشخص می‌شود

$$A_{\phi} = \frac{2 B_0 a}{\pi} \sin \theta \int_0^{\infty} e^{-\nu t k^2} j_1(k) j_1\left(\frac{kr}{a}\right) dk$$

که در آن $\nu = \frac{1}{\mu \sigma a^2}$ ، مشخصه‌ای از آهنگ استحاله و $j_1(x)$ تابع بسل کروی از مرتبه‌ی یک است. نشان دهید که میدان مغناطیسی در مرکز کره را می‌توان به‌طور صریح برحسب تابع خطای $\phi(x)$ به‌صورت زیر نوشت

$$B_z(0, t) = B_0 \left[\Phi\left(\frac{1}{\sqrt{4\nu t}}\right) - \frac{1}{\sqrt{\pi\nu t}} \exp\left(-\frac{1}{4\nu t}\right) \right]$$

ج) نشان دهید که انرژی مغناطیسی کل در $t > 0$ را می‌توان به‌صورت زیر نوشت

$$W_m = \frac{6 B_0^2 a^3}{\mu} \int_0^{\infty} e^{-2\nu t k^2} [j_1(k)]^2 dk$$

1) diffusion equation

نشان دهید که در زمان‌های طولانی ($vt \gg 1$)، انرژی مغناطیسی به‌طور مجانبی به‌صورت زیر استحاله می‌یابد

$$W_m \rightarrow \frac{\sqrt{2\pi} B_0^2 a^3}{24\mu (vt)^{\frac{3}{2}}}$$

د) رابطه‌ای متناظر برای شکل مجانبی پتانسیل برداری بیابید (در r, θ ثابت و $vt \rightarrow \infty$) و علاوه بر آن نشان دهید که این رابطه به‌صورت $(vt)^{-\frac{3}{2}}$ کاهش می‌یابد.

از آنجایی که انرژی به‌لحاظ قدرت میدان مجذوری است لذا به‌نظر می‌رسد که در اینجا یک معما وجود داشته باشد. با روش‌های عددی یا تحلیلی نشان دهید که رفتار میدان مغناطیسی در زمان t به‌گونه‌ای است که برای فواصل کوچک در مقایسه با $a = a(vt)^{\frac{1}{2}} \gg a$ ، میدان با قدرت $(vt)^{-\frac{3}{2}} \left(\frac{B_0}{6\pi^{\frac{1}{2}}}\right)$ یکنواخت است و برای فواصل بزرگ در مقایسه با R ، میدان اساساً همان میدان دوقطبی اصلی است. از لحاظ فیزیکی دلیل این مورد را توضیح دهید.

۳۶-۵ میدان مغناطیسی متغیر با زمان برای $t > 0$ در مسئله‌ی (۳۵-۵) یک میدان الکتریکی را القا کرده و باعث گردش جریان می‌شود.

الف) چه مؤلفه‌هایی از میدان الکتریکی وجود دارند؟ روابط انتگرالی را برای مؤلفه‌های میدان الکتریکی تعیین، و یک شکل صریح ساده برای چگالی جریان $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$ در $t = 0^+$ بیابید. نتیجه را با چگالی جریان مسئله‌ی (الف) ۳۵-۵ مقایسه کرده و رفتار مجانبی میدان‌های الکتریکی را برحسب زمان بیابید.

ب) با استفاده از قانون اهم و میدان‌های الکتریکی به‌دست آمده در قسمت (الف)، نشان دهید که توان کل تلف شده در محیط مقاوم را می‌توان به‌صورت زیر نوشت

$$P = \frac{12B_0^2 a^3 \nu}{\mu} \int_0^\infty e^{-2\nu t k^2} [k j_1(k)]^2 dk$$

دقت کنید که توان، منفی مشتق زمانی انرژی مغناطیسی W_m است.

ج) طبق قانون اهم، انرژی الکتریکی کل عبارت است از

$$W_e = \frac{\varepsilon_0 P}{\nu \sigma}$$

از طرفی انرژی کل عبارت است از مجموع W_m و W_e ، لذا مشتق زمانی آن باید منفی اتلاف توان باشد. نشان دهید که با مرتبه‌ی مشابهی از تقریب، چشم‌پوشی از انرژی در میدان الکتریکی، مشابه چشم‌پوشی از جریان جابه‌جایی در معادلات ناظر بر میدان مغناطیسی است.

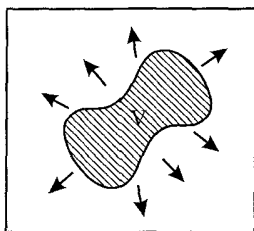
پیوست فصل ۵

در این پیوست نیز سیاست پیوست‌های قبل پیگیری شده است.

اثبات معادله پیوستگی

حجمی را در نظر بگیرید که شامل بار الکتریکی $Q = \int \rho dv$ است. اگر با گذشت زمان بار از درون حجم V خارج شود، برای جریانی که از سطح بسته‌ی این حجم عبور می‌کند داریم:

$$I = \int_S \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} da \quad (۱)$$



حاصل این انتگرال همان مقدار باری است که در واحد زمان از حجم V خارج می‌شود و لذا بار درون حجم V با آهنگ $\frac{dQ}{dt}$ کاهش می‌یابد. طبق قانون بقای بار می‌توان نوشت:

$$I = \oint_S \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} da = -\frac{dQ}{dt} = -\frac{d}{dt} \int \rho dv = -\int \frac{\partial \rho}{\partial t} dv \quad (۲)$$

در رابطه اخیر چون ρ به‌طور کلی وابسته به مکان و زمان است لذا از مشتقات جزئی استفاده کرده‌ایم. از قضیه واگرایی داریم:

$$\oint_S \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} da = \int_V \nabla \cdot \mathbf{J} dv \quad (۳)$$

$$\begin{aligned} (۲, ۳) &\Rightarrow \int \nabla \cdot \mathbf{J} dv = -\int \frac{\partial \rho}{\partial t} dv \\ &\Rightarrow \int_V \left(\nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} \right) dv = 0 \Rightarrow \nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (۵-۲) \end{aligned}$$

اگر $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ باشد یعنی توزیع بار نسبت به زمان ثابت باشد خواهیم داشت

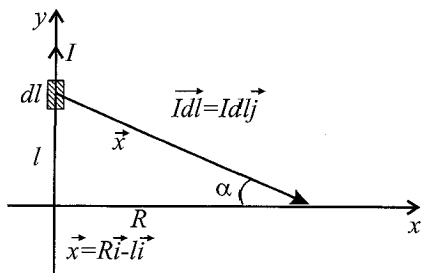
$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \Rightarrow \nabla \cdot \mathbf{J} = 0 \quad \text{یا} \quad I = \oint_S \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} da = 0$$

یعنی اینکه جریان خالص عبوری از یک سطح بسته، صفر است و یا اصلاً جریانی وجود ندارد.

میدان ناشی از یک سیم راست حامل جریان

می‌خواهیم به کمک قانون بیو-سوار میدان ناشی از یک سیم حامل جریان بسیار طویل را محاسبه کنیم.

شکل زیر را در نظر بگیرید:



از قانون بیو-سوار داریم:

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idl \times \mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{(Idl\mathbf{j}) \times (R\mathbf{i} - l\mathbf{j})}{(R^2 + l^2)^{3/2}}$$

$$\Rightarrow dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{RI dl(-\mathbf{k})}{(R^2 + l^2)^{3/2}}$$

$$\Rightarrow \mathbf{B} = -\frac{\mu_0}{4\pi} IR(\mathbf{k}) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dl}{(R^2 + l^2)^{3/2}}$$

برای حل انتگرال از تغییر متغیر زیر استفاده می‌کنیم:

$$l = R \tan \alpha \Rightarrow dl = R(1 + \tan^2 \alpha) d\alpha$$

$$\int \frac{dl}{(R^2 + l^2)^{3/2}} = \int \frac{R(1 + \tan^2 \alpha) d\alpha}{(R^2 + R^2 \tan^2 \alpha)^{3/2}}$$

$$= \frac{R}{R^3} \int \frac{(1 + \tan^2 \alpha) d\alpha}{(1 + \tan^2 \alpha)^{3/2}} = \frac{1}{R^2} \int \frac{d\alpha}{(1 + \tan^2 \alpha)^{1/2}}$$

$$1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Rightarrow \int \frac{dl}{(R^2 + l^2)^{3/2}} = \frac{1}{R^2} \int \cos \alpha d\alpha = \frac{1}{R^2} \sin \alpha$$

مطابق شکل قبل برای $\sin \alpha$ داریم:

$$\sin \alpha = \frac{l}{\sqrt{R^2 + l^2}}$$

به این ترتیب داریم:

$$\mathbf{B} = -\frac{\mu_0}{4\pi} IR(\mathbf{k}) \left(\frac{1}{R^2} \frac{l}{\sqrt{R^2 + l^2}} \right)_{-\infty}^{+\infty}$$

$$\Rightarrow \mathbf{B} = -\frac{\mu_0 I}{4\pi R} (1 - (-1)) = -\frac{\mu_0 I}{2\pi R} \mathbf{k} \Rightarrow |\mathbf{B}| = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \quad (5-6)$$

اگر سیم حامل جریانی در یک میدان مغناطیسی قرار گیرد به آن نیروی زیر وارد می‌شود:

$$d\mathbf{F} = I(d\mathbf{l} \times \mathbf{B})$$

از طرفی یک مدار حامل جریان طبق قانون بیو-ساوار، میدان مغناطیسی تولید می‌کند، لذا دو مدار حامل جریان که در مجاورت هم واقع‌اند به هم نیرو وارد می‌کنند. در واقع هر یک خود را در میدان مغناطیسی ناشی از دیگری احساس می‌کند. برای این دو مدار می‌توان نوشت:

$$d\mathbf{F}_{12} = I_1(d\mathbf{l}_1 \times \mathbf{B}_2) \quad (5-7)$$

که در آن \mathbf{B}_2 میدان ناشی از مدار (۲) و $d\mathbf{F}_{12}$ المان نیروی وارد بر مدار (۱) از طرف مدار (۲) است. برای \mathbf{B}_2 داریم:

$$\mathbf{B}_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} I_2 \oint_2 \frac{d\mathbf{l}_2 \times \mathbf{x}_{12}}{|\mathbf{x}_{12}|^3} \quad (5-7-1)$$

که در آن $\mathbf{x}_{12} = \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2$ می‌باشد.

$$d\mathbf{F}_{12} = I_1 d\mathbf{l}_1 \times \frac{\mu_0}{4\pi} I_2 \oint_2 \frac{d\mathbf{l}_2 \times \mathbf{x}_{12}}{|\mathbf{x}_{12}|^3} \quad (5-7-2)$$

$$\Rightarrow \mathbf{F}_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 I_2 \oint_1 \oint_2 \frac{d\mathbf{l}_1 \times (d\mathbf{l}_2 \times \mathbf{x}_{12})}{|\mathbf{x}_{12}|^3} \quad (5-8)$$

طبق قانون سوم نیوتن باید داشته باشیم $\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}$. یعنی از لحاظ ریاضی معادله (۵-۸) باید نسبت به $d\mathbf{l}_1$ و $d\mathbf{l}_2$ متقارن باشد. برای اثبات این موضوع از اتحاد برداری زیر شروع می‌کنیم:

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})$$

با توجه به رابطه فوق انتگرالده در رابطه (۵-۸) را به فرم زیر می‌نویسیم:

$$\frac{d\mathbf{l}_1 \times (d\mathbf{l}_2 \times \mathbf{x}_{12})}{|\mathbf{x}_{12}|^3} = \frac{d\mathbf{l}_2 (d\mathbf{l}_1 \cdot \mathbf{x}_{12})}{|\mathbf{x}_{12}|^3} - \frac{\mathbf{x}_{12} (d\mathbf{l}_1 \cdot d\mathbf{l}_2)}{|\mathbf{x}_{12}|^3} \quad (5-9)$$

سهم جمله اول در انتگرال صفر است زیرا:

$$\oint_1 \frac{d\mathbf{l}_1 \cdot \mathbf{x}_{12}}{|\mathbf{x}_{12}|^3} = \oint_1 d\mathbf{l}_1 \cdot \frac{\mathbf{x}_{12}}{|\mathbf{x}_{12}|^3} = \oint_1 d\mathbf{l}_1 \cdot \left[-\nabla \left(\frac{1}{|\mathbf{x}_{12}|} \right) \right]$$

می‌دانیم که:

$$\oint_C dl \cdot \nabla \varphi = \oint d\varphi = 0$$

لذا:

$$\oint dl_1 \cdot \left[-\nabla \left(\frac{1}{|x_{12}|} \right) \right] = - \oint d \left(\frac{1}{|x_{12}|} \right) = 0 \quad (\text{چون مسیر بسته است})$$

روش دوم برای صفر کردن سهم جمله اول

$$\begin{aligned} \oint_{C_1} \frac{dl_1 \cdot x_{12}}{|x_{12}|^3} &= \int_{S_1} \nabla \times \frac{x_{12}}{|x_{12}|^3} \cdot nda \\ &= \int \nabla \times \left[-\nabla \left(\frac{1}{|x_{12}|} \right) \right] \cdot nda = 0 \end{aligned}$$

چون کرل هرگرادیان صفر است:

$$\nabla \times \nabla \varphi = 0$$

به این ترتیب داریم:

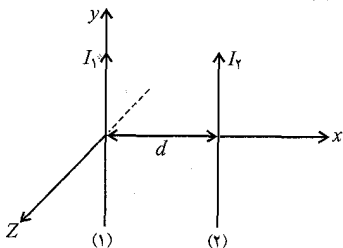
$$F_{12} = -\frac{\mu_0}{4\pi} I_1 I_2 \oint_1 \oint_2 \frac{(dl_1 \cdot dl_2)}{|x_{12}|^3} x_{12} \quad (5-10)$$

در صورت تعویض اندیس‌های ۱ و ۲ با هم داریم:

$$F_{21} = -\frac{\mu_0}{4\pi} I_2 I_1 \oint_2 \oint_1 \frac{dl_2 \cdot dl_1}{|x_{12}|^3} x_{21}$$

با توجه به اینکه $x_{12} = -x_{21}$ خواهیم داشت:

$$F_{21} = -F_{12}$$



نیروی بین دو سیم راست و موازی حامل جریان

به‌عنوان مثالی از نیرویی که دو مدار حامل جریان به هم وارد

می‌کنند، دو سیم راست و موازی حامل جریان که به فاصله d از

هم واقع‌اند را بررسی می‌کنیم:

$$dF_{21} = I_2 dl_2 \times B_1$$

طبق رابطه (۵-۶) برای B_1 داریم:

$$\begin{aligned} B_1 &= -\frac{\mu_0 I_1}{2\pi d} \mathbf{k} \\ \Rightarrow dF_{21} &= (I_2 dl_2 \mathbf{j}) \times \left(-\frac{\mu_0 I_1}{2\pi d} \mathbf{k} \right) \\ dl_2 &= dl_2 \mathbf{j} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow d\mathbf{F}_{21} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I_1 I_2}{d} dl_2 (-\mathbf{j} \times \mathbf{k}) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I_1 I_2}{d} dl_2 \mathbf{i} \\ \Rightarrow \frac{d\mathbf{F}_{21}}{dl_2} &= -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I_1 I_2}{d} \mathbf{i} \quad \text{یا} \quad \frac{|d\mathbf{F}_{21}|}{dl_2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I_1 I_2}{d} \end{aligned} \quad (5-11)$$

علامت منفی نشان می‌دهد که نیرو جاذبه‌ای است. اگر جریان I_2 در خلاف جهت I_1 می‌بود این نیرو دافعه‌ای بود.

اثبات اینکه $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ است

میدان مغناطیسی ناشی از یک چگالی جریان $\mathbf{J}(\mathbf{x})$ را می‌توان با توجه به رابطه (۵-۴) و با تبدیل Idl به $\mathbf{J}d^3x$ به صورت زیر نوشت:

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \mathbf{J}(\mathbf{x}') \times \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} d^3x' \quad (5-14)$$

می‌دانیم که:

$$\frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} = -\nabla \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}$$

رابطه (۵-۱۴) را می‌توان به فرم زیر بازنویسی کرد:

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(\mathbf{x}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \mathbf{J}(\mathbf{x}') \times \left[-\nabla \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right] d^3x' \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \left[\nabla \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right] \times \mathbf{J}(\mathbf{x}') d^3x'; \quad (\mathbf{A} \times \mathbf{B} = -\mathbf{B} \times \mathbf{A}) \quad (1-5-14) \end{aligned}$$

از اتحاد برداری زیر استفاده می‌کنیم:

$$\nabla \times (\varphi \mathbf{F}) = \varphi \nabla \times \mathbf{F} + \nabla \varphi \times \mathbf{F} \quad (2-5-14)$$

$$\nabla \times \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} = \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \nabla \times \mathbf{J}(\mathbf{x}') + \nabla \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \times \mathbf{J}(\mathbf{x}')$$

جمله اول صفر است زیرا عملگر دل در دستگاه بدون پریم است در حالی که $\mathbf{J}(\mathbf{x}')$ وابسته به مختصات پریم دار است.

$$\nabla \times \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} = \nabla \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \times \mathbf{J}(\mathbf{x}') \quad (3-5-14)$$

$$\begin{cases} (1-5-14) \\ (2-5-14) \end{cases} \Rightarrow \mathbf{B}(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \nabla \times \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x'$$

$$\Rightarrow \mathbf{B}(x) = \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \times \int \frac{\mathbf{J}(x')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x' \quad (5-16)$$

عملگر ∇ را خارج کردیم زیرا به مختصات پریم دار وابسته نیست.

رابطه اخیر نشان می‌دهد که \mathbf{B} را می‌توان کرل یک بردار در نظر گرفت (بعدها این بردار را پتانسیل برداری می‌نامیم).

با توجه به اینکه دیورژانس کرل یک تابع برداری صفر است: $\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{F} = 0$ لذا داریم؛ $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ که همان رابطه‌ی (5-17) است.

این اولین معادله مگنتواستاتیک است و متناظر با $\nabla \times \mathbf{E} = 0$ در الکترواستاتیک.

روش دیگر در اثبات $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$

$$(1-5-14) \Rightarrow \mathbf{B}(x) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \nabla \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \times \mathbf{J}(x') d^3x'$$

اتحاد برداری زیر را داریم:

$$\nabla \cdot (\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = -\mathbf{F} \cdot \nabla \times \mathbf{G} + \mathbf{G} \cdot \nabla \times \mathbf{F}$$

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{B} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int - \left[\nabla \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right] \cdot \nabla \times \mathbf{J}(x') d^3x' \\ &+ \frac{\mu_0}{4\pi} \int \mathbf{J}(x) \cdot \nabla \times \left[\nabla \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right] d^3x' \end{aligned}$$

جمله اول صفر است زیرا $\mathbf{J}(x')$ در دستگاه پریم دار است $\nabla \times \mathbf{J}(x') = 0$. جمله دوم نیز صفر است زیرا کرل هر گرادیان صفر است ($\nabla \times \nabla \varphi = 0$) لذا داریم:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (5-17)$$

اثبات $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}$

دیدیم که \mathbf{B} را می‌توان به صورت کرل یک تابع برداری نوشت:

$$\mathbf{B}(x) = \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \times \int \frac{\mathbf{J}(x')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x' \quad (5-16)$$

اکنون کرل \mathbf{B} را محاسبه می‌کنیم

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \times \nabla \times \int \frac{\mathbf{J}(x')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x' \quad (5-18)$$

از اتحاد برداری زیر داریم:

$$\begin{aligned}\nabla \times (\nabla \times \mathbf{F}) &= \nabla(\nabla \cdot \mathbf{F}) - \nabla^2 \mathbf{F} \\ \nabla \times \mathbf{B} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \int \nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{J}(x')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right) d^3x' \\ &\quad - \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla^2 \int \frac{\mathbf{J}(x')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x'\end{aligned}\quad (۱۵-۱۸)$$

برای جمله اول داریم:

$$\begin{aligned}\nabla \cdot (\varphi \mathbf{F}) &= \mathbf{F} \cdot \nabla \varphi + \varphi \nabla \cdot \mathbf{F} \\ \nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{J}(x')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right) &= \mathbf{J}(x') \cdot \nabla \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} + \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \nabla \cdot \mathbf{J}(x')\end{aligned}\quad (۲-۵-۱۸)$$

جمله دوم صفر است چون $\mathbf{J}(x')$ در مختصات پیریم داراست لذا (۱۵-۱۸) را می توان به صورت زیر نوشت:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \int \mathbf{J}(x') \cdot \nabla \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x' - \frac{\mu_0}{4\pi} \int \mathbf{J}(x') \nabla^2 \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x'\quad (۵-۱۹)$$

داریم:

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} &= -\nabla' \cdot \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \\ \nabla^2 \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} &= -4\pi \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')\end{aligned}$$

برای جمله دوم داریم:

$$\int \mathbf{J}(x') [-4\pi \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')] d^3x' = -4\pi \mathbf{J}(x)$$

لذا داریم:

$$\nabla \times \mathbf{B} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \int \mathbf{J}(x') \cdot \nabla' \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x' + \mu_0 \mathbf{J}(x)\quad (۵-۲۰)$$

برای جمله اول طبق (۲-۵-۱۸) داریم:

$$\begin{aligned}\nabla' \cdot \frac{\mathbf{J}(x')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} &= \mathbf{J}(x') \cdot \nabla' \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} + \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \nabla' \cdot \mathbf{J}(x') \\ \int \mathbf{J}(x') \cdot \nabla' \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x' &= \int \nabla' \cdot \frac{\mathbf{J}(x')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x' - \int \frac{\nabla' \cdot \mathbf{J}(x')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x'\end{aligned}\quad (۱-۵-۲۰)$$

انتگرال اول را طبق قضیه واگرایی به انتگرال سطحی تبدیل می‌کنیم:

$$\int_V \nabla' \cdot \frac{\mathbf{J}(x')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x' = \int_S \frac{\mathbf{J}(x')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \cdot \mathbf{n} da = 0 \quad (\text{جریان‌های جایگزیده})$$

پس داریم:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \int \frac{\nabla' \cdot \mathbf{J}(x')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x' + \mu_0 \mathbf{J}(x') \quad (5-21)$$

اما برای جریان‌های پایا $\nabla' \cdot \mathbf{J}(x') = 0$ است لذا:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}(x) \quad (5-22)$$

دیدیم که \mathbf{B} در معادلات زیر صدق می‌کند:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (5-26)$$

از آنجا که دیورژانس هر کرل صفر است لذا می‌توان \mathbf{B} را به صورت کرل یک تابع برداری مثل \mathbf{A} تعریف کرد:

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \Rightarrow \nabla \cdot \mathbf{B} = \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$$

و نیز از آنجا که کرل هر گرادیان صفر است می‌توان به \mathbf{A} جمله $\nabla f(x)$ را نیز اضافه نمود:

$$\begin{cases} \nabla \times (\mathbf{A} + \nabla f) = \nabla \times \mathbf{A} + \nabla \times \nabla f = \nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B} \\ \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A} + \nabla f(x) \end{cases}$$

از طرفی داریم:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} \Rightarrow \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \mu_0 \mathbf{J}$$

$$\Rightarrow \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} = \mu_0 \mathbf{J} \quad (5-30)$$

که در آن از اتحاد زیر استفاده کرده‌ایم:

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{F}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{F}) - \nabla^2 \mathbf{F}$$

اگر $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ باشد داریم:

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{J} \quad \text{یا} \quad \nabla^2 A_i = -\mu_0 J_i$$

از مقایسه با الکترواستاتیک داریم:

$$\nabla^2 \varphi = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \Rightarrow \varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(x')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x'$$

$$\nabla^2 A_i = -\mu_0 J_i \Rightarrow A_i = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{J_i(x')}{|x - x'|} d^3 x'$$

و یا به‌طور کلی داریم:

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J}(x')}{|x - x'|} d^3 x' \quad (5-32)$$

که همان چیزی است که در رابطه (۵-۱۶) به‌دست آوردیم.

اکنون دو نکته را بررسی می‌کنیم یکی اینکه تابع $f(x)$ چیست و دیگر اینکه آیا برای \mathbf{A} در رابطه (۵-۳۲) $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ است؟

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0 \Rightarrow \nabla \cdot (\mathbf{A} + \nabla f) = 0 \Rightarrow \nabla^2 f = 0$$

یعنی اینکه f در معادله لاپلاس صدق می‌کند و این تنها شرطی است که روی تابع f است لذا آن را برابر صفر در نظر می‌گیریم ($f = 0$).
حال دیورژانس \mathbf{A} را بررسی می‌کنیم:

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \cdot \int \frac{\mathbf{J}(x')}{|x - x'|} d^3 x' = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{J}(x')}{|x - x'|} \right) d^3 x'$$

$$\nabla \cdot \frac{\mathbf{J}(x')}{|x - x'|} = \frac{\nabla \cdot \mathbf{J}(x')}{|x - x'|} + \mathbf{J}(x') \cdot \nabla \frac{1}{|x - x'|}$$

$$\nabla \cdot (\varphi \mathbf{F}) = \mathbf{F} \cdot \nabla \varphi + \varphi \nabla \cdot \mathbf{F} \quad (\text{اتحاد برداری})$$

جمله اول در بسط فوق صفر است زیرا $\mathbf{J}(x')$ در دستگاه پیریم دار است. از طرفی داریم:

$$\begin{aligned} \nabla \frac{1}{|x - x'|} &= -\nabla' \frac{1}{|x - x'|} \\ \Rightarrow \nabla \cdot \frac{\mathbf{J}(x')}{|x - x'|} &= -\mathbf{J}(x') \cdot \nabla' \frac{1}{|x - x'|} \end{aligned}$$

بار دیگر از اتحاد برداری بالا استفاده می‌کنیم

$$\nabla' \cdot \frac{\mathbf{J}(x')}{|x - x'|} = \frac{\nabla' \cdot \mathbf{J}(x')}{|x - x'|} + \mathbf{J}(x') \cdot \nabla' \frac{1}{|x - x'|}$$

که در این رابطه جمله اول برای جریان‌های پایا صفر است $\nabla' \cdot \mathbf{J}(x') = 0$. به این ترتیب داریم:

$$\nabla \cdot \frac{\mathbf{J}(x')}{|x - x'|} = -\nabla' \cdot \frac{\mathbf{J}(x')}{|x - x'|}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \nabla' \cdot \frac{\mathbf{J}(x')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x'$$

با استفاده از قضیه واگرایی و تبدیل انتگرال حجمی به انتگرال سطحی داریم:

$$\int_V \nabla' \cdot \frac{\mathbf{J}(x')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x' = \oint_S \frac{\mathbf{J}(x')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \cdot \mathbf{n} da$$

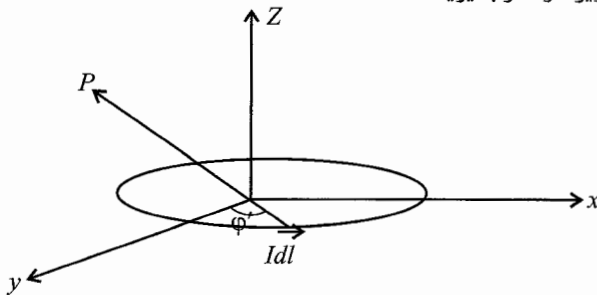
که با انتخاب سطح بسته‌ای که شامل جریان \mathbf{J} نباشد حاصل انتگرال برابر صفر است و لذا داریم:

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$$

پتانسیل برداری و میدان ناشی از یک حلقه جریان

به‌عنوان مثالی از کاربرد پتانسیل برداری در محاسبه میدان، برای یک حلقه جریان میدان \mathbf{B} را از پتانسیل برداری \mathbf{A} به‌دست می‌آوریم.

حلقه‌ای دایروی به شعاع a که در صفحه‌ی $x - y$ و به مرکزیت مبدأ قرار دارد و حامل جریان I است را مطابق شکل زیر در نظر بگیرید:



واضح است که \mathbf{J} تنها دارای مؤلفه‌ای در جهت φ است که می‌توان آن را به کمک تابع دلتا به فرم زیر نوشت:

$$J_\varphi = I \sin \theta' \delta(\cos \theta') \frac{\delta(r' - a)}{a} \quad (5-33)$$

\mathbf{J} را می‌توان در دستگاه دکارتی به صورت زیر نوشت:

$$\mathbf{J} = -J_\varphi \sin \varphi' \mathbf{i} + J_\varphi \cos \varphi' \mathbf{j} \quad (5-34)$$

$$\Rightarrow A_\varphi = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{J_\varphi(x')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x'$$

$$\mathbf{x} = r \mathbf{r} = r \sin \theta \cos \varphi \mathbf{i} + r \sin \theta \sin \varphi \mathbf{j} + r \cos \theta \mathbf{k}$$

$$\mathbf{x}' = r' \mathbf{r}' = r' \sin \theta' \cos \varphi' \mathbf{i}' + r' \sin \theta' \sin \varphi' \mathbf{j}' + r' \cos \theta' \mathbf{k}'$$

$$\Rightarrow |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^2 = (r \sin \theta \cos \varphi - r' \sin \theta' \cos \varphi')^2$$

$$+ (r \sin \theta \sin \varphi - r' \sin \theta' \sin \varphi')^2$$

$$+ (r \cos \theta - r' \cos \theta')^2$$

$$\Rightarrow |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^2 = r^2 \sin^2 \theta \cos^2 \varphi + r'^2 \sin^2 \theta' \cos^2 \varphi'$$

$$- 2rr' \sin \theta \sin \theta' \cos \varphi \cos \varphi'$$

$$+ r^2 \sin^2 \theta \sin^2 \varphi + r'^2 \sin^2 \theta' \sin^2 \varphi' - 2rr' \sin \theta \sin \theta' \sin \varphi \sin \varphi'$$

$$+ r^2 \cos^2 \theta + r'^2 \cos^2 \theta' - 2rr' \cos \theta \cos \theta'$$

$$\Rightarrow |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^2 = r^2 [\sin^2 \theta (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) + \cos^2 \theta]$$

$$+ r'^2 [\sin^2 \theta' (\cos^2 \varphi' + \sin^2 \varphi') + \cos^2 \theta']$$

$$- 2rr' [\sin \theta \sin \theta' (\cos \varphi \cos \varphi' + \sin \varphi \sin \varphi') + \cos \theta \cos \theta']$$

به علت وجود تقارن استوانه‌ای برای سادگی می‌توان نقطه مشاهده را در صفحه $x - y$ یا $\varphi = 0$ انتخاب کرد که در این صورت داریم:

$$|\mathbf{x} - \mathbf{x}'| = [r^2 + r'^2 - 2rr'(\sin \theta \sin \theta' \cos \varphi' + \cos \theta \cos \theta')]^{\frac{1}{2}}$$

به این ترتیب داریم:

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{(-J_\varphi \sin \varphi' \mathbf{i} + J_\varphi \cos \varphi' \mathbf{j}) r'^2 \sin \theta' dr' d\theta' d\varphi'}{[r^2 + r'^2 - 2rr'(\sin \theta \sin \theta' \cos \varphi' + \cos \theta \cos \theta')]^{\frac{3}{2}}}$$

این انتگرال شامل دو جمله است. جمله‌ای در راستای \mathbf{i} و دیگری در راستای \mathbf{j} . به علت وجود تقارن، سهم مؤلفه x جریان در انتگرال صفر است. این موضوع به راحتی قابل اثبات است: انتگرال مؤلفه x را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$D = \int_0^{2\pi} \frac{\sin \varphi' d\varphi'}{\sqrt{A + B \cos \varphi'}}$$

که در آن A و B ضرایبی هستند که نسبت به φ' ثابت اند.

$$A + B \cos \varphi' = u \Rightarrow -B \sin \varphi' d\varphi' = du \Rightarrow D = \int \frac{-\frac{1}{B} du}{\sqrt{u}} = -\frac{2}{B} \sqrt{u}$$

$$= -\frac{2}{B} \sqrt{A + B \cos \varphi'} \Big|_0^{2\pi} = 0$$

به این ترتیب داریم:

$$A_{\varphi} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{I \sin \theta' \delta(\cos \theta') \frac{\delta(r' - a)}{a} \cos \varphi'}{[r^2 + r'^2 - 2rr'(\sin \theta \sin \theta' \cos \varphi' + \cos \theta \cos \theta')]^{3/2}}$$

$$r'^2 \sin \theta' d\theta' d\varphi' dr'$$

$$\int f(t) \delta(t - t_0) dt = f(t_0)$$

$$\Rightarrow A_{\varphi} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\left(\frac{I}{a}\right) a^2 \cos \varphi' d\varphi'}{(r^2 + a^2 - 2ra \sin \theta \cos \varphi')^{3/2}}$$

$$\Rightarrow A_{\varphi} = \frac{\mu_0 I a}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos \varphi' d\varphi'}{(r^2 + a^2 - 2ra \sin \theta \cos \varphi')^{3/2}} \quad (5-36)$$

برای حل این انتگرال به ترتیب زیر عمل می‌کنیم:

$$\varphi' = 2\alpha \Rightarrow d\varphi' = 2d\alpha$$

$$\Rightarrow A_{\varphi} = \frac{\mu_0 I a}{4\pi} \int_0^{\pi} \frac{(\cos 2\alpha)(2d\alpha)}{(r^2 + a^2 - 2ra \sin \theta \cos 2\alpha)^{3/2}}$$

$$\Rightarrow A_{\varphi} = \frac{2\mu_0 I a}{4\pi} (2) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 2\alpha d\alpha}{(r^2 + a^2 - 2ra \sin \theta \cos 2\alpha)^{3/2}}$$

$$\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$$

$$\Rightarrow A_{\varphi} = \frac{4\mu_0 I a}{4\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(2 \cos^2 \alpha - 1) d\alpha}{(r^2 + a^2 + 2ra \sin \theta - 4ra \sin \theta \cos^2 \alpha)^{3/2}}$$

در مخرج کسرها جمله $(r^2 + a^2 + 2ra \sin \theta)$ در زیر رادیکال فاکتور می‌گیریم:

$$A_{\varphi} = \frac{4\mu_0 I a}{4\pi} \frac{1}{\sqrt{r^2 + a^2 + 2ra \sin \theta}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(2 \cos^2 \alpha - 1) d\alpha}{\sqrt{1 - k^2 \cos^2 \alpha}}$$

که در آن داریم:

$$k^2 = \frac{2ra \sin \theta}{r^2 + a^2 + 2ra \sin \theta}$$

کمی روی انتگرال ده کار می‌کنیم:

$$S = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2 \cos^2 \alpha - 1}{\sqrt{1 - k^2 \cos^2 \alpha}} d\alpha = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\left(\frac{2k^2 \cos^2 \alpha + 2 - 2}{k^2}\right) - 1}{\sqrt{1 - k^2 \cos^2 \alpha}} d\alpha$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2}{k^2} \frac{1 - k^2 \cos^2 \alpha}{\sqrt{1 - k^2 \cos^2 \alpha}} d\alpha + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{2}{k^2} - 1 \right) \frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \cos^2 \alpha}} d\alpha \\
 &= -\frac{2}{k^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2 \cos^2 \alpha} d\alpha + \left(\frac{2}{k^2} - 1 \right) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \cos^2 \alpha}} d\alpha
 \end{aligned}$$

انتگرالهای فوق به انتگرالهای بیضوی معروفند:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - k^2 \cos^2 \alpha)^{\frac{1}{2}} d\alpha = E(k)$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - k^2 \cos^2 \alpha)^{-\frac{1}{2}} d\alpha = K(k)$$

به این ترتیب داریم:

$$\begin{aligned}
 A_\varphi &= \frac{2\mu_0 I a}{4\pi} \frac{1}{\sqrt{r^2 + a^2 + 2ra \sin \theta}} \left[\left(-\frac{2}{k^2} \right) E(k) + \left(\frac{2}{k^2} - 1 \right) K(k) \right] \\
 \Rightarrow A_\varphi &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2Ia}{\sqrt{r^2 + a^2 + 2ra \sin \theta}} \left[\frac{(2 - k^2)K(k) - 2E(k)}{k^2} \right] \quad (5-37)
 \end{aligned}$$

اکنون با معلوم بودن \mathbf{A} می‌توان \mathbf{B} را محاسبه کرد:

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \Rightarrow \begin{cases} B_r = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin A_\varphi) \\ B_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_\varphi) \\ B_\varphi = 0 \end{cases} \quad (5-38)$$

به رابطه (5-36) برمی‌گردیم و روش تقریبی را بررسی می‌کنیم:

$$A_\varphi = \frac{\mu_0 I a}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos \varphi' d\varphi'}{(r^2 + a^2 - 2ar \sin \theta \cos \varphi')^{\frac{1}{2}}}$$

در مخرج کسر از $\sqrt{a^2 + r^2}$ فاکتور می‌گیریم:

$$\frac{1}{(r^2 + a^2 - 2ar \sin \theta \cos \varphi')^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + r^2}} \frac{1}{\left[1 - \frac{2ar \sin \theta}{a^2 + r^2} \cos \varphi' \right]^{\frac{1}{2}}}$$

اگر جمله $\frac{2ar \sin \theta}{a^2 + r^2}$ خیلی کوچک‌تر از یک باشد می‌توان کسر فوق را بسط داد:

$$(1 - x)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + \frac{15}{64}x^3 + \dots$$

$$A_\varphi = \frac{\mu_0 I a}{4\pi\sqrt{a^2+r^2}} \int_0^{2\pi} d\varphi' \cos\varphi' \left[1 + \frac{1}{2} \frac{2ra \sin\theta}{a^2+r^2} \cos\varphi' + \frac{3}{8} \frac{a^2 r^2 \sin^2\theta \cos^2\varphi'}{(a^2+r^2)^2} \right]$$

اما داریم:

$$\int_0^{2\pi} \cos^{2n+1}\varphi' d\varphi' = 0; \quad \int_0^{2\pi} \cos^2\varphi' d\varphi' = \pi; \quad \int_0^{2\pi} \cos^4\varphi' d\varphi' = \frac{3}{8}(2\pi)$$

لذا داریم:

$$\begin{aligned} A_\varphi &= \frac{\mu_0 I a}{4\pi\sqrt{a^2+r^2}} \left[0 + \frac{ar \sin\theta}{a^2+r^2}(\pi) + 0 + \frac{15}{48} \left[\frac{\lambda a^2 r^2 \sin^2\theta}{(a^2+r^2)^2} \right] \frac{6}{8}\pi + \dots \right] \\ &= \frac{\mu_0 I a}{4\pi\sqrt{a^2+r^2}} \pi \frac{ar \sin\theta}{a^2+r^2} \left[1 + \frac{15}{8} \frac{a^2 r^2 \sin^2\theta}{(a^2+r^2)^2} + \dots \right] \\ \Rightarrow A_\varphi &= \frac{\mu_0 I a^2 r \sin\theta}{4(a^2+r^2)^{3/2}} \left[1 + \frac{15}{8} \frac{a^2 r^2 \sin^2\theta}{(a^2+r^2)^2} + \dots \right] \quad (5-39) \end{aligned}$$

به این ترتیب یک عبارت تقریبی برای A_φ به دست آوریم. حال می‌توان مؤلفه‌های میدان \mathbf{B} را طبق روابط (5-38) محاسبه کرد.

$$B_r = \frac{\mu_0 I a^2 (2 \cos\theta)}{4(a^2+r^2)^{3/2}} + \frac{\mu_0 I a^2}{4(a^2+r^2)^{3/2}} \frac{15}{8} \frac{4r^2 \sin^2\theta \cos\theta}{(a^2+r^2)^2} + \dots$$

$$B_r = \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} (\sin\theta A_\varphi)$$

اما داریم

$$\frac{\partial}{\partial\theta} (\sin\theta A_\varphi) = \frac{\mu_0 I a^2 r (2 \sin\theta \cos\theta)}{4(a^2+r^2)^{3/2}} + \frac{\mu_0 I a^2 r}{4(a^2+r^2)^{3/2}} \frac{15}{8} \frac{a^2 r^2 (4 \sin^2\theta \cos\theta)}{(a^2+r^2)^2}$$

+ ...

$$\Rightarrow B_r = \frac{\mu_0 I a^2 \cos\theta}{2(a^2+r^2)^{3/2}} \left[1 + \frac{15}{4} \frac{a^2 r^2 \sin^2\theta}{(a^2+r^2)^2} + \dots \right]$$

(5-40) رابطه بالایی

$$B_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_\varphi)$$

$$\frac{\partial}{\partial r} (r A_\varphi) = \frac{\mu_0 I a^2 \sin\theta}{4} \frac{2r(a^2+r^2)^{3/2} - (r^2) \left(\frac{3}{2} \right) (2r)(a^2+r^2)^{1/2}}{(a^2+r^2)^3}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{\mu_0 I a^r \sin^2 \theta}{r} \frac{1}{\lambda} \frac{r^r (a^r + r^r)^{\frac{r}{\lambda}} - (r^r) \left(\frac{r}{\lambda}\right) (r^r) (a^r + r^r)^{\frac{\delta}{\lambda}}}{(a^r + r^r)^r} \\
 & = \frac{\mu_0 I a^r r \sin \theta}{r} \left[\frac{r}{(a^r + r^r)^{\frac{r}{\lambda}}} - \frac{r^r}{(a^r + r^r)^{\frac{\delta}{\lambda}}} + \frac{a^r \left(\frac{1}{\lambda}\right) (r^r) \sin^2 \theta}{(a^r + r^r)^{\frac{r}{\lambda}}} \right. \\
 & \quad \left. - \frac{a^r \left(\frac{1}{\lambda}\right) (r^r) \sin^2 \theta}{(a^r + r^r)^{\frac{r}{\lambda}}} + \dots \right] \\
 & = \frac{\mu_0 I a^r r \sin \theta}{r (a^r + r^r)^{\frac{\delta}{\lambda}}} \left[r (a^r + r^r) - r^r + \frac{1}{\lambda} \frac{r a^r r^r \sin^2 \theta}{(a^r + r^r)} \right. \\
 & \quad \left. - \frac{1}{\lambda} \frac{r a^r r^r \sin^2 \theta}{(a^r + r^r)^2} + \dots \right] \\
 & = \frac{\mu_0 I a^r r \sin \theta}{r (a^r + r^r)^{\frac{\delta}{\lambda}}} \left[r a^r - r^r + \frac{1}{\lambda} \frac{r a^r r^r (a^r + r^r) - r a^r r^r}{(a^r + r^r)^2} \sin^2 \theta + \dots \right] \\
 \Rightarrow B_\theta & = \frac{-\mu_0 I a^r \sin \theta}{r (a^r + r^r)^{\frac{\delta}{\lambda}}} \left[r a^r - r^r + \frac{1}{\lambda} \frac{a^r r^r \sin^2 \theta (r a^r - r^r)}{(a^r + r^r)^2} + \dots \right]
 \end{aligned}$$

(۵-۴۰) رابطه پایینی

بررسی حالات حدی

در بسط رابطه (۵-۳۶) فرض کردیم که جمله $\frac{a^r r^r \sin^2 \theta}{(a^r + r^r)^2}$ خیلی کوچک تر از یک باشد یعنی یا $a \gg r$ یا $r \gg a$ یا $a \gg 1$ و یا $\theta \ll 1$ باشد. اکنون این حالات را با توجه به روابط (۵-۴۰) بررسی می‌کنیم.

۱-۱. $\theta \ll 1$ (نقاط محوری)

$$\begin{aligned}
 B_r & \approx \frac{\mu_0 I a^r \cos \theta}{r (a^r + r^r)^{\frac{r}{\lambda}}} \xrightarrow{\cos \theta \approx 1} B_r = \frac{\mu_0 I a^r}{r (a^r + r^r)^{\frac{r}{\lambda}}} \\
 B_\theta & = -\frac{\mu_0 I a^r \sin \theta}{r (a^r + r^r)^{\frac{\delta}{\lambda}}} (r a^r - r^r) \xrightarrow{\sin \theta \approx 0} B_\theta \approx 0
 \end{aligned}$$

این میدان را می‌توان با میدان ناشی از حلقه جریان روی محور حلقه مقایسه کرد که دقیقاً همین جواب را دارد. توجه داریم که چون $B_\theta = B_\phi = 0$ است لذا این میدان در جهت محور z ها است.

$$r \ll a . ۲$$

$$\begin{aligned} r \ll a &\Rightarrow \frac{r}{a} \ll 1 \Rightarrow 1 \pm \frac{r^2}{a^2} \simeq 1 \\ \Rightarrow B_r &\simeq \frac{\mu_0 I a^2 \cos \theta}{2 a^2 \left(1 + \frac{r^2}{a^2}\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\mu_0 I \cos \theta}{2 a} \\ &= \frac{\mu_0}{2 \pi} (I \pi a^2) \frac{\cos \theta}{a^3} \\ \Rightarrow B_\theta &= - \frac{\mu_0 I a^2 \sin \theta}{2 a^2 \left(1 + \frac{r^2}{a^2}\right)^{\frac{3}{2}}} \left[a^2 \left(2 - \frac{r^2}{a^2}\right) \right] \\ &= - \frac{\mu_0 I}{2 a} \sin \theta = - \frac{\mu_0}{2 \pi} (I \pi a^2) \frac{\sin \theta}{a^3} \end{aligned}$$

۳. $r \gg a$ (نقاط دور از حلقه)

$$\begin{aligned} r \gg a &\Rightarrow \frac{a}{r} \ll 1 \Rightarrow 1 + \frac{a^2}{r^2} \simeq 1 \\ B_r &\simeq \frac{\mu_0 I a^2 \cos \theta}{2 r^2 \left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\mu_0 I a^2 \cos \theta}{2 r^3} \\ &= \frac{\mu_0}{2 \pi} (I \pi a^2) \frac{\cos \theta}{r^3} \\ B_\theta &= - \frac{\mu_0 I a^2 \sin \theta}{2 r^2 \left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right)^{\frac{3}{2}}} \left[r^2 \left(\frac{2 a^2}{r^2} - 1\right) \right] = \frac{\mu_0 I a^2 \sin \theta}{2 r^3} \\ \Rightarrow B_\theta &= \frac{\mu_0}{2 \pi} (I \pi a^2) \frac{\sin \theta}{r^3} \\ r \gg a &\Rightarrow \begin{cases} B_r = \frac{\mu_0}{2 \pi} (I \pi a^2) \frac{\cos \theta}{r^3} \\ B_\theta = \frac{\mu_0}{2 \pi} (I \pi a^2) \frac{\sin \theta}{r^3} \end{cases} \quad (۵-۴۱) \end{aligned}$$

برای دوقطبی الکتریکی در الکترواستاتیک میدان در فواصل دور طبق روابط (۱۲-۴) عبارت است از:

$$r \gg a : \begin{cases} E_r = \frac{2}{4 \pi \epsilon_0} (P) \frac{\cos \theta}{r^3} \\ E_\theta = \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} (P) \frac{\sin \theta}{r^3} \end{cases}$$

از مقایسه (۵-۴۱) با (۴-۱۲) می‌توان دوقطبی مغناطیسی حلقه را به صورت زیر تعریف کرد:

$$m = I\pi a^2$$

اگر $r \gg a$ باشد برای A_φ داریم:

$$\begin{aligned} (5-39) \quad A_\varphi &\simeq \frac{\mu_0 I a^2 r \sin \theta}{4r^3 \left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right)^{\frac{3}{2}}} \simeq \frac{\mu_0 I a^2 \sin \theta}{4 r^2} \\ \Rightarrow A_\varphi &= \frac{\mu_0}{4\pi} (\pi I a^2) \frac{\sin \theta}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{m \sin \theta}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{|\mathbf{m} \times \mathbf{x}|}{|\mathbf{x}|^3} \\ \Rightarrow \mathbf{A} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{m} \times \mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^3} \end{aligned}$$

این رابطه پتانسیل برداری یک دوقطبی مغناطیسی در فواصل دور از آن می‌باشد. در الکترواستاتیک، پتانسیل یک دوقطبی الکتریکی در فواصل دور از آن به فرم زیر بود:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{P} \cdot \mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^3}$$

میدان ناشی از توزیع جریان در فواصل دور از چشمه

داریم

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x'$$

چون میدان در فواصل دور از چشمه مورد نظر است، یعنی $|\mathbf{x}| \gg |\mathbf{x}'|$ ، عبارت $\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}$ را برحسب توان‌های $|\mathbf{x}'|$ بسط می‌دهیم:

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} &= (|\mathbf{x} - \mathbf{x}'| \cdot |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|)^{-\frac{1}{2}} \\ &= (|\mathbf{x}|^2 - 2\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}' + |\mathbf{x}'|^2)^{-\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{|\mathbf{x}|} \left[1 + \frac{-2\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}' + |\mathbf{x}'|^2}{|\mathbf{x}|^2} \right]^{-\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

با استفاده از بسط زیر:

$$(1 + y)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}y + \dots$$

$$\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} = \frac{1}{|\mathbf{x}|} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{-2\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}' + |\mathbf{x}'|^2}{|\mathbf{x}|^2} + \dots \right)$$

$$\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} = \frac{1}{|\mathbf{x}|} + \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}'}{|\mathbf{x}|^3} + \dots \quad (5-50)$$

لذا داریم:

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{|\mathbf{x}|} \int \mathbf{J}(x') d^3x' + \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^3} \cdot \int \mathbf{x}' \mathbf{J}(x') d^3x' + \dots$$

برای مؤلفه i ام داریم:

$$A_i = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{|\mathbf{x}|} \int J_i(x') d^3x' + \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{x_j}{|\mathbf{x}|^3} \cdot \int x'_j J_i(x') d^3x' + \dots \quad (5-51)$$

برای محاسبه انتگرال‌های فوق از اتحاد زیر استفاده می‌کنیم:

$$\nabla \cdot (fg\mathbf{F}) = f\mathbf{F} \cdot \nabla g + g\mathbf{F} \cdot \nabla f + fg\nabla \cdot \mathbf{F}$$

$$\int \nabla' \cdot (fg\mathbf{J}) d^3x' = \int (f\mathbf{J} \cdot \nabla' g + g\mathbf{J} \cdot \nabla' f + fg\nabla' \cdot \mathbf{J}) d^3x'$$

اگر \mathbf{J} کاملاً جایگزیده باشد با تبدیل انتگرال حجمی طرف چپ به انتگرال سطحی با استفاده از قضیه استوکس داریم:

$$\int_V \nabla' \cdot (fg\mathbf{J}) d^3x' = \oint_S fg\mathbf{J} \cdot \mathbf{n}' da' = 0$$

همچنین برای جریان‌های پایا داریم $\nabla' \cdot \mathbf{J} = 0$ لذا خواهیم داشت:

$$\int (f\mathbf{J} \cdot \nabla' g + g\mathbf{J} \cdot \nabla' f + fg\nabla' \cdot \mathbf{J}) d^3x' = 0 \quad (5-52)$$

$$\Rightarrow \int (f\mathbf{J} \cdot \nabla' g + g\mathbf{J} \cdot \nabla' f) d^3x' = 0$$

f و g توابع دلخواهی از x' هستند. برای محاسبه انتگرال اول در (5-51) با انتخاب $f = 1$ و $g = x'_i$ داریم:

$$\int [(\mathbf{J} \cdot \nabla' x'_i + x'_i \mathbf{J} \cdot \nabla'(1))] d^3x' = 0$$

$$\Rightarrow \int J_i d^3x' = 0$$

لذا جمله اول در بسط (5-51) که معادل پتانسیل برداری تک قطبی مغناطیسی می‌باشد صفر است برای

جمله‌ی دوم در (5-15) با انتخاب $f = x'_j$ و $g = x'_j$ داریم:

$$\int [x'_i \mathbf{J} \cdot \nabla' x'_j + x'_j \mathbf{J} \cdot \nabla' x'_i] d^3x' = 0 \Rightarrow \int (x'_i J_j + x'_j J_i) d^3x' = 0$$

$$\Rightarrow x'_i J_j = -x'_j J_i$$

در جمله دوم داریم:

$$\begin{aligned} \mathbf{x} \cdot \int \mathbf{x}' J_j d^3 x' &= \sum_j x_j \int x'_j J_j d^3 x' \\ x'_j J_j &= -\frac{1}{c} (x'_i J_j - x'_j J_i) = -\frac{1}{c} \varepsilon_{ijk} (\mathbf{x}' \times \mathbf{J})_k \\ \Rightarrow \mathbf{x} \cdot \int \mathbf{x}' J_j d^3 x' &= -\frac{1}{c} \sum \varepsilon_{ijk} x_j \int (\mathbf{x}' \times \mathbf{J})_k d^3 x' \\ &= -\frac{1}{c} [\mathbf{x} \times \int (\mathbf{x}' \times \mathbf{J}) d^3 x']_i \end{aligned}$$

با تعریف چگالی گشتاور مغناطیسی یا مغناطش به صورت زیر

$$\mathbf{M}(x) = \frac{1}{c} [\mathbf{x} \times \mathbf{J}(x)] \quad (5-53)$$

و نیز انتگرال $M(x)$ به عنوان گشتاور مغناطیسی \mathbf{m} :

$$\mathbf{m} = \int \mathbf{M}(x') d^3 x' = \frac{1}{c} \int \mathbf{x}' \times \mathbf{J}(x') d^3 x' \quad (5-54)$$

داریم

$$\mathbf{x} \cdot \int \mathbf{x}' \mathbf{J}(x') d^3 x' = -\mathbf{x} \times \mathbf{m} = \mathbf{m} \times \mathbf{x}$$

در نهایت داریم:

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{|\mathbf{x}|^3} \mathbf{m} \times \mathbf{x} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{m} \times \mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^3} \quad (5-55)$$

این جمله اولین جمله غیرصفر در بسط \mathbf{A} برای یک توزیع جریان پایای جایگزیده است و پتانسیل برداری دوقطبی مغناطیسی نام دارد.

بدین ترتیب به معادله (5-55) رسیدیم به عبارت دیگر رابطه‌ی فوق را اثبات کردیم. گام بعدی رسیدن از معادله (5-55) به معادله (5-56) است که البته گام نسبتاً بزرگی است.

$$\mathbf{A}(x) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{m} \times \mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^3} \quad (5-55)$$

که در آن \mathbf{A} پتانسیل برداری دوقطبی مغناطیسی است. بدون هر توضیح اضافه‌ای داریم:

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \nabla \times \mathbf{A} \\ &= \nabla \times \left[\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{m} \times \mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^3} \right] \end{aligned}$$

اتحاد برداری زیر را داریم:

$$\nabla \times (\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = (\mathbf{G} \cdot \nabla) \mathbf{F} - (\mathbf{F} \cdot \nabla) \mathbf{G} + \mathbf{F} \nabla \cdot \mathbf{G} - \mathbf{G} \nabla \cdot \mathbf{F}$$

با جایگذاری $\mathbf{F} \rightarrow \mathbf{m}$ و $\mathbf{G} \rightarrow \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^3}$ در رابطه بالا داریم: (ضریب $\frac{\mu_0}{4\pi}$ را پیش خودتان فعلاً نگه دارید)

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \underbrace{\left(\frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^3} \cdot \nabla \right)}_{\text{جمله‌ی (۱)}} \mathbf{m} - \underbrace{(\mathbf{m} \cdot \nabla)}_{\text{جمله‌ی (۲)}} \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^3} \\ &+ \underbrace{\mathbf{m} \nabla \cdot \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^3}}_{\text{جمله‌ی (۳)}} - \underbrace{\frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^3} \nabla \cdot \mathbf{m}}_{\text{جمله‌ی (۴)}} \end{aligned}$$

* اپراتور ∇ به مختصات نقطه‌ای میدان (بدون پریم) بستگی دارد و برای \mathbf{m} داریم

$$\begin{aligned} \mathbf{m} &= \frac{1}{4\pi c} \int \mathbf{x}' \times \mathbf{J}(\mathbf{x}') d^3x' \\ \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{جمله (۱)} = \left(\frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^3} \cdot \nabla \right) \mathbf{m} = 0 \\ \text{جمله (۴)} = \left(\frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^3} \nabla \cdot \mathbf{m} \right) = 0 \end{array} \right. \\ \Rightarrow \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} &= \left[-(\mathbf{m} \cdot \nabla) \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^3} + \mathbf{m} \nabla \cdot \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^3} \right] \end{aligned}$$

طبق اتحاد برداری:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\varphi \mathbf{F}) &= (\nabla \varphi \cdot \mathbf{F}) + \varphi \nabla \cdot \mathbf{F} \\ \Rightarrow \nabla \cdot \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^3} &= \nabla \cdot \left(\frac{1}{|\mathbf{x}|^3} \right) \cdot \mathbf{x} + \frac{1}{|\mathbf{x}|^3} \nabla \cdot \mathbf{x} \\ &= -\frac{3}{|\mathbf{x}|^4} \mathbf{x} \cdot \mathbf{x} + \frac{1}{|\mathbf{x}|^3} \nabla \cdot \mathbf{x} \end{aligned}$$

می‌دانیم که؛ $\nabla \cdot \mathbf{x} = 3$ است لذا خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^3} &= -\frac{3}{|\mathbf{x}|^4} \mathbf{x} \cdot \mathbf{x} + \frac{3}{|\mathbf{x}|^3} = -\frac{3}{|\mathbf{x}|^3} + \frac{3}{|\mathbf{x}|^3} = 0 \\ \Rightarrow \nabla \times \mathbf{A} &= \left[-(\mathbf{m} \cdot \nabla) \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^3} \right] \end{aligned}$$

داریم:

$$\begin{aligned}
 & -m_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^3} \right) = -m_i \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{x_j \hat{x}_j}{[x_k x_k]^{3/2}} \\
 & = -m_i \left\{ \frac{\hat{x}_j \frac{\partial x_j}{\partial x_i}}{[x_k x_k]^{3/2}} - \frac{3}{2} \times 2 x_j \hat{x}_j \frac{\partial x_k}{\partial x_i} x_k [x_k x_k]^{-5/2} \right\} \\
 & = -m_i \left(\frac{\hat{x}_j \delta_{ij}}{x^3} - \frac{3 x_j \hat{x}_j x_k \delta_{ik}}{x^5} \right) \\
 & = - \left(\frac{m_i \hat{x}_j \delta_{ij}}{x^3} - \frac{3 m_i x_i \hat{x}_j x_k \delta_{ij}}{x^5} \right)
 \end{aligned}$$

به ازای $i = j = k$ عبارت‌ها غیر صفر هستند

$$\Rightarrow \nabla \times \mathbf{A} = - \left(\frac{\mathbf{m}}{|\mathbf{x}|^3} - \frac{3(\mathbf{m} \cdot \mathbf{x})\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^5} \right)$$

اگر $\mathbf{n} = \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|}$ باشد خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow \nabla \times \mathbf{A} &= - \left(\frac{\mathbf{m}}{|\mathbf{x}|^3} - \frac{3(\mathbf{m} \cdot \mathbf{x})\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^5} \right) \\
 &= - \left(\frac{\mathbf{m}}{|\mathbf{x}|^3} - \frac{3(\mathbf{m} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}}{|\mathbf{x}|^3} \right)
 \end{aligned}$$

$$\nabla \times \mathbf{A} = \frac{3\mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{m}) - \mathbf{m}}{|\mathbf{x}|^3} = \mathbf{B} \quad (1)$$

حال ضریب $\frac{\mu_0}{4\pi}$ را جلوی کسر بالا قرار دهید کار تمام است.

* دقت کنید که میدان \mathbf{B} در فرمول (۱) در بالا به شکل هندسی مدار بستگی ندارد مدار دایروی باشد یا خیر فرقی نمی‌کند. این میدان فقط به \mathbf{m} بستگی دارد. از طرفی فرمول (۱) از نظر ظاهری همانند میدان الکتریکی ناشی از یک دوقطبی الکتریکی است و این توجیهی است برای اینکه به این میدان، میدان دوقطبی مغناطیسی بگوییم و \mathbf{m} را گشتاور دوقطبی مغناطیسی بنامیم. نکته دیگر اینکه برای یک مدار دایروی، یا یک مدار با شکل غیر منظم و کلاً برای هر توزیع جریان همبسته‌ای میدان در فواصل دور از فرمول (۱) محاسبه می‌شود.

حالت خاص

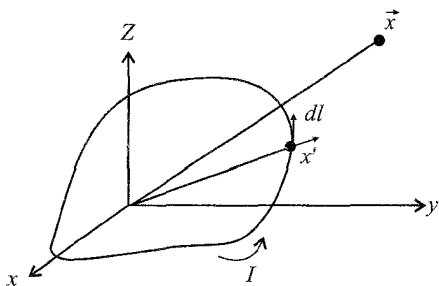
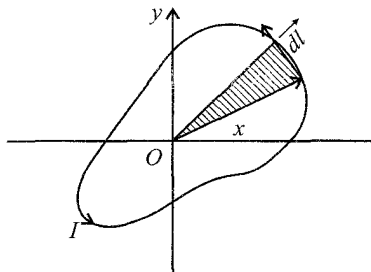
اگر با یک جریان حلقه‌ای بسته که در یک صفحه قرار دارد سروکار داشته باشیم خواهیم داشت:

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2c} \int \mathbf{x}' \times \mathbf{J}(\mathbf{x}') d^3 x'$$

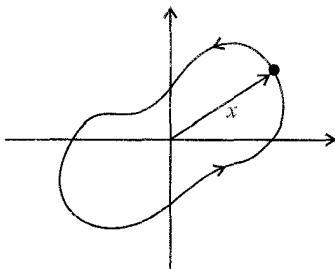
جریان خطی $Jdv \rightarrow Idl$ & $x' \rightarrow x$

بنابراین برای جریان خطی داریم

$$\mathbf{m} = \frac{I}{2c} \oint \mathbf{x} \times d\mathbf{l}$$



(A)؛ حلقه‌ی جریان در فضا



نتیجه‌ی ضرب خارجی \mathbf{x} و $d\mathbf{l}$ برداری است که بر صفحه‌ی xy عمود و به طرف خارج صفحه است.

$$\frac{1}{r} |\mathbf{x} \times d\mathbf{l}| = da$$

$$\frac{1}{r} (|\mathbf{x}| |d\mathbf{l}| \sin 90^\circ) = da$$

da مساحت مثلثی است که در شکل نشان داده شده است واضح است که

$$|\mathbf{m}| = \frac{I}{2c} \oint |\mathbf{x} \times d\mathbf{l}| = \frac{I}{c} \times (\text{Area})$$

Area مساحت محصور توسط حلقه‌ی جریان است.

ادامه می‌دهیم:

در اینجا توزیع جریانی را در نظر بگیریم که توسط ذرات بار داری با بار q و جرم M و با سرعت v ایجاد می‌شود:

$$\mathcal{J} = \sum_i q_i v_i \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i)$$

چراکه اگر المان حجمی با طول $d\mathbf{l}$ در جهت جریان را مطابق شکل در نظر بگیریم در فاصله‌ای زمانی $dt = \frac{dl}{v}$ تمام بارهایی به اندازه‌ی $\rho ds dl$ از این حجم خارج خواهند شد. طبق تعریف جریان داریم

$$dI = \frac{\rho ds dl}{dt} = \rho v ds$$

$$\frac{dI}{ds} = \rho v \Rightarrow J = \rho v$$

J و v در یک جهت هستند. داریم

$$\begin{cases} \rho(r) = \sum q_i \delta(r - r_i) \\ \rho(x) = \sum q_i \delta(x - x_i) \end{cases}$$

چراکه:

$$\begin{aligned} Q &= \int \rho(x) d^3x = \int \sum_{i=1}^n q_i \delta(x - x_i) d^3x \\ &= \sum_{i=1}^n q_i \int \delta(x - x_i) d^3x = \sum_{i=1}^n q_i = Q \end{aligned}$$

از طرفی داریم:

$$J = \rho v$$

$$J = \sum_i q_i v_i \delta(x - x_i) \quad (۱)$$

* v_i سرعت ذره‌ی i ام با جرم M_i و بار q_i است و x_i مکان ذره‌ی i ام است. قبلاً داشتیم

$$\mathbf{m} = \frac{1}{rc} \int \mathbf{x} \times \mathbf{J}(x) d^3x$$

و با توجه به رابطه‌ی (۱) در بالا خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \mathbf{m} &= \frac{1}{rc} \int [\sum_i q_i (\mathbf{x}_i \times \mathbf{v}_i)] \delta(x - x_i) d^3x \\ &= \frac{1}{rc} \sum_i q_i (\mathbf{x}_i \times \mathbf{v}_i) \int \delta(x - x_i) d^3x \\ &= \frac{1}{rc} \sum_i q_i (\mathbf{x}_i \times \mathbf{v}_i) \end{aligned} \quad (*)$$

داشتیم:

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$$

$$\mathbf{L} = \mathbf{x} \times M\mathbf{v}$$

و برای ذره i ام:

$$\mathbf{L}_i = M_i(\mathbf{x}_i \times \mathbf{v}_i)$$

و با توجه به رابطه‌ی (*) داریم

$$\mathbf{m} = \sum_i \frac{q_i}{\sqrt{M_i c}} \mathbf{L}_i$$

اگر تمام ذرات دارای نسبت بار به جرم یکسانی حذف باشند یعنی $\frac{q_i}{M_i} = \frac{e}{M}$ داریم:

$$\begin{aligned} \mathbf{m} &= \sum_i \frac{q_i}{M_i} \left(\frac{1}{\sqrt{c}} \mathbf{L}_i \right) \\ &= \frac{e}{M} \sum_i \frac{1}{\sqrt{c}} \mathbf{L}_i = \frac{e}{\sqrt{M c}} \sum \mathbf{L}_i = \frac{e}{\sqrt{M c}} \mathbf{L} \Rightarrow \mathbf{m} = \frac{e}{\sqrt{M c}} \mathbf{L} \end{aligned}$$

که در آن \mathbf{L} اندازه‌ی حرکت زاویه‌ای مداری کل (برای تمام ذرات) خواهد بود. برای ارتباط بین \mathbf{S} و \mathbf{m} داریم

$$\mathbf{m}' = \frac{eg}{\sqrt{mc}} \mathbf{S} \quad (g \text{ factor} \cong 2)$$

\mathbf{m}' گشتاور دوقطبی ذاتی ذره است که یک چنین شکلی را در کلاسیک نداریم.

اما محاسبه‌ی انتگرال حجمی میدان \mathbf{B}

در اینجا نیز همانند حالت الکترواستاتیک، دو حالت حدی مورد توجه ما است. یکی کره‌ای به شعاع R که شامل تمام جریان‌ها در درون خودش است و دوم اینکه جریان کلاً در خارج از کره قرار داشته باشد

$$\int_{r < R} B(x) d^3x = \int \nabla \times \mathbf{A} d^3x \quad (1)$$

رابطه یا اتحاد برداری زیر را داریم

$$\int_V \nabla \times \mathbf{F} = \oint \mathbf{n} \times \mathbf{F} da$$

طبق اتحاد برداری فوق برای رابطه‌ی (۱) داریم

$$\int B(x) d^3x = \int \mathbf{n} \times \mathbf{A} da, \quad da = R^2 d\Omega$$

$$\int B(x) d^3x = \int \mathbf{n} \times \mathbf{A} (R^2 d\Omega) = R^2 \int (\mathbf{n} \times \mathbf{A}) d\Omega$$

\mathbf{n} بردار یکانی عمود بر کره است (کره‌ای که انتگرال‌گیری روی آن انجام می‌شود) و جهت آن به سمت خارج از کره است.

$$\mathbf{A}(x) = \frac{1}{c} \int \frac{J(x')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x'$$

$$\int_{r < R} B(x) d^3x = \frac{R^3}{c} \int \mathbf{n} \times \left[\int \frac{\mathbf{J}(x')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x' \right] d\Omega$$

با توجه به $\mathbf{n} \times \mathbf{J} = -\mathbf{J} \times \mathbf{n}$ خواهیم داشت

$$\int_{r < R} B(x) d^3x = -\frac{R^3}{c} \int d^3x' \mathbf{J}(x') \underbrace{\int d\Omega \frac{\mathbf{n}}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}}_{\text{انتگرال زاویه‌ای}}$$

انتگرال زاویه‌ای در قسمت الکترواستاتیک ثابت شد (پیوست فصل ۳) که مقدار آن برابر بود با *

$$\int d\Omega \frac{\mathbf{n}}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} = \frac{r_{<}}{r_{>}^2} \times \frac{4\pi}{3} \mathbf{n}$$

$$\Rightarrow \int B(x) d^3x = -\frac{R^3}{c} \int d^3x' \mathbf{J}(x') \times \left(\frac{r_{<}}{r_{>}^2} \times \frac{4\pi}{3} \mathbf{n}' \right)$$

$$= -\frac{4\pi}{3c} R^3 \int d^3x' \mathbf{J}(x') \times \left(\frac{r_{<}}{r_{>}^2} \mathbf{n}' \right)$$

با توجه به $\mathbf{n}' = \frac{\mathbf{x}'}{r}$ و $\mathbf{J} \times \mathbf{n}' = -\mathbf{n}' \times \mathbf{J}$ داریم:

$$\int B(x) d^3x = \frac{4\pi}{3c} \int \left(\frac{R^3 r_{<}}{r' r_{>}^2} \right) \mathbf{x}' \times \mathbf{J}(x') d^3x'$$

که در آن $r_{<}$ و $r_{>}$ مقادیر بزرگ‌تر و کوچک‌تر r' و R هستند.
حالت (۱): اگر تمامی دانسیته‌ی جریان در داخل کره باشد داریم:

$$r_{<} = r' \quad \& \quad R_{>} = R$$

$$\therefore \int B d^3x = \frac{4\pi}{3c} \int \left(\frac{R^3 r'}{r' R^2} \right) \mathbf{x}' \times \mathbf{J}(x') d^3x'$$

$$= \frac{4\pi}{3c} \int \mathbf{x}' \times \mathbf{J}(x') d^3x' \quad (۱)$$

یادآوری می‌کنیم:

$$\mathbf{m} = \frac{1}{c} \int \mathbf{x}' \times \mathbf{J}(x') d^3x' \quad (۲)$$

(* در پیوست فصل (۳) این رابطه اثبات شد.

که \mathbf{m} گشتاور مغناطیسی کل است. در نتیجه از (۱) و (۲) در بالا خواهیم داشت

$$\int_{r < R} B d^3x = \frac{\lambda\pi}{3} \mathbf{m}$$

حالت (۲): اگر تمام جریان‌ها در خارج از کره باشد خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{l} r < = R \\ r > = r' \end{array} \right] &\Rightarrow \int_{r < R} B d^3x = \frac{4\pi}{3c} \int \left(\frac{R^3 R_{<}}{r' r_{>}^3} \right) \mathbf{x}' \times \mathbf{J}(x') d^3x' \\ &= \frac{4\pi}{3c} \int \frac{R^3 R}{r' r'^3} \mathbf{x}' \times \mathbf{J}(x') d^3x' \\ &= \frac{4\pi}{3c} \int \frac{R^3}{r'^3} \mathbf{x}' \times \mathbf{J}(x') d^3x' \\ \int_{r < R} \mathbf{B} d^3x &= \frac{4\pi R^3}{3c} \int \frac{\mathbf{x}'}{r'^3} \times \mathbf{J}(x') d^3x' \end{aligned} \quad (۱)$$

از طرفی داشتیم:

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(x) &= \frac{1}{c} \int \mathbf{J}(x') \times \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} d^3x' \\ \Rightarrow \mathbf{B}(\circ) &= \frac{1}{c} \int \mathbf{J}(x') \times \frac{(-\mathbf{x}')}{|\mathbf{x}'|^3} d^3x' \\ &= -\frac{1}{c} \int \mathbf{J}(x') \times \frac{\mathbf{x}'}{|\mathbf{x}'|^3} d^3x'; \quad \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}'|} = \mathbf{n}' \\ &= \frac{1}{c} \int \mathbf{x}' \times \frac{\mathbf{J}(x')}{|\mathbf{x}'|^3} d^3x' \end{aligned} \quad (۲)$$

$$\begin{aligned} (۱) \ \&\ (۲) \Rightarrow \frac{4\pi}{3} \mathbf{B}(\circ) = \frac{4\pi}{3c} \int \frac{\mathbf{x}'}{|\mathbf{x}'|^3} \times \mathbf{J}(x') d^3x' \\ \Rightarrow \int_{r < R} B d^3x &= \frac{4\pi}{3} R^3 \mathbf{B}(\circ) \end{aligned} \quad (۶۳-۵)$$

بدین ترتیب از رابطه‌ی (۵-۶۰) شروع کردیم و با اثبات فرمول‌ها به رابطه‌ی (۵-۶۳) رسیدیم.

قدم بعدی اثبات رابطه‌ی (۵-۶۴) است. داریم

(مگنتواستاتیک)

$$(*) \quad \left[\begin{array}{l} (۱) \quad \int B d^3x = \frac{\lambda\pi}{3} \mathbf{m} \quad \text{جریان داخل کره} \\ (۲) \quad \int B d^3x = \frac{4\pi}{3} R^3 \mathbf{B}(\circ) \quad \text{جریان خارج از کره} \end{array} \right.$$

(الکترواستاتیک)

$$\left[\begin{array}{l} (۱) \quad \int_{r < R} E(x) d^3x = -\frac{4\pi}{3} P \\ (۲) \quad \int_{r < R} E(x) d^3x = \frac{4\pi}{3} R^3 E(0) \end{array} \right.$$

برای اینکه رابطه‌ی میدان دوقطبی مغناطیسی که قبلاً محاسبه شد با رابطه (*) سازگار باشد باید یک تابع دلتا به میدان دوقطبی مغناطیسی قبلی اضافه شود:

$$\Rightarrow \mathbf{B}(\mathbf{x}) = \frac{\mathfrak{r} \mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{m}) - \mathbf{m}}{|\mathbf{x}|^3} + \frac{\Lambda \pi}{3} \mathbf{m} \delta(\mathbf{x})$$

که در آن

$$\int \frac{\mathfrak{r} \mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{m}) - \mathbf{m}}{|\mathbf{x}|^3} d^3x = \int r^2 dr \mathbf{n} \cdot \int \frac{\mathfrak{r} \mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{m}) - \mathbf{m}}{x^3} \cdot \mathbf{n} \sin \theta d\theta d\varphi$$

با توجه به اینکه $\mathbf{n} \cdot \mathbf{m} = |m| \cos \theta$ است خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} &= \int r^2 dr \mathbf{n} \cdot \int \frac{\mathfrak{r} (|m| \cos \theta) - m \cos \theta}{|\mathbf{x}|^3} \sin \theta d\theta d\varphi \\ &= \int r^2 dr \mathbf{n} \cdot \int \frac{\mathfrak{r} m - m}{|\mathbf{x}|^3} \cos \theta \sin \theta d\theta d\varphi \\ &= \int r^2 dr \frac{\mathfrak{r} m}{|\mathbf{x}|^3} d\varphi \int_{-1}^{+1} \cos \theta \sin \theta d\theta = [\dots] \cos^2 \frac{\theta}{2} \Big|_{-1}^{+1} = 0 \end{aligned}$$

روی فرمول‌های بخش ۷-۵ کار می‌کنیم.

۷-۵ انرژی، نیرو و گشتاور مؤثر بر یک توزیع جریان جایگزیده در یک القای مغناطیسی خارجی

$$(۱) \quad \left[\begin{array}{l} \mathbf{F} = \oint I d\mathbf{l} \times \mathbf{B} \quad \text{نیروی وارد بر یک مسیر بسته جریان خطی} \\ \boldsymbol{\tau} = I \oint \mathbf{r} \times (d\mathbf{l} \times \mathbf{B}) \end{array} \right.$$

$$(۲) \quad \left[\begin{array}{l} \text{گشتاور نیروی وارد بر یک مسیر بسته‌ی جریان در یک میدان خارجی } B \\ \downarrow \\ d\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times d\mathbf{F} = I \mathbf{r} \times (d\mathbf{l} \times \mathbf{B}) \end{array} \right.$$

برای جریان حجمی داریم، $I d\mathbf{l} \rightarrow \mathbf{J} d^3x$. بنابراین برای نیروی وارد بر جریان حجمی در میدان خارجی داریم:

$$\mathbf{F} = \frac{1}{c} \int \mathbf{J}(\mathbf{x}) \times \mathbf{B}(\mathbf{x}) d^3x \quad (۳)$$

$$\begin{aligned} \& \tau = \oint \mathbf{r} \times (\mathbf{J} \times \mathbf{B}) d^3x \\ &= \oint \mathbf{x} \times (\mathbf{J} \times \mathbf{B}) d^3x \end{aligned} \quad (۴)$$

وقتی یک توزیع جریان جایگزیده در یک میدان مغناطیسی خارجی $B(x)$ قرار می‌گیرد، به آن نیرو وارد می‌شود که طبق روابط (۳) و (۴) می‌توان آن‌ها را محاسبه کرد. اگر میدان مغناطیسی خارجی به آرامی روی ناحیه‌ی وجود جریان تغییر کند (منظور تغییرات مکانی \mathbf{B} در حوالی منطقه‌ی جریان) می‌توان B ی فوق را حول یک مبدأ مناسب ($x_0 = 0$) بسط داد. کلاً داریم:

$$f(x) \Big|_{x=0} = f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) \dots$$

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \dots$$

$$B_i(x) = B_i(0) + x_i \frac{\partial B_i(0)}{\partial x_i}$$

که شکل سه‌بعدی آن عبارت است از:

$$B_i(\mathbf{x}) = B_i(0) + \mathbf{x} \cdot \nabla B(0)$$

داریم

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \frac{1}{c} \int \mathbf{J}(x) \times \mathbf{B}(x) d^3x \\ \Rightarrow \mathbf{F} &= -\frac{1}{c} \mathbf{B}(0) \times \int \mathbf{J}(\mathbf{x}') d^3x' + \frac{1}{c} \int \mathbf{J}(\mathbf{x}') \times [(\mathbf{x}' \cdot \nabla) \mathbf{B}] d^3x' + \dots \end{aligned}$$

اولاً؛ $\int \mathbf{J}(\mathbf{x}') d^3x' = 0$ چون جریان پایا است و داریم

$$\begin{aligned} \nabla(\mathbf{x}' \cdot \mathbf{B}) &= (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{x}' + (\mathbf{x}' \cdot \nabla) \mathbf{B} \\ &+ \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{x}') + \mathbf{x}' \times (\nabla \times \mathbf{B}) \end{aligned}$$

به این دلیل که ∇ بدون پریم است و فقط روی B عمل می‌کند و $\nabla \times \mathbf{B} = 0$ است (برای میدان خارجی)

$$\mathbf{J} \times [(\mathbf{x}' \cdot \nabla) \mathbf{B}] = \mathbf{J} \times \nabla(\mathbf{x}' \cdot \mathbf{B}) = -\nabla \times [\mathbf{J}(\mathbf{x}' \cdot \mathbf{B})]$$

بنابراین نیرو را می‌توانیم به صورت زیر بنویسیم:

$$\mathbf{F} = -\frac{1}{c} \nabla \times \int \mathbf{J}(\mathbf{x}' \cdot \mathbf{B}) d^3x' + \dots$$

داریم:

$$\int (\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}') \mathbf{J}(\mathbf{x}') d^3 x' = -\frac{1}{r} \mathbf{x} \times \int [\mathbf{x}' \times \mathbf{J}(\mathbf{x}')] d^3 x'$$

(این رابطه در به دست آوردن رابطه (۵-۵۵) اثبات شده است.)
با استفاده از این رابطه و قرار دادن \mathbf{B} به جای بردار ثابت \mathbf{x} خواهیم داشت

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= -\frac{1}{c} \nabla \times \left[-\frac{1}{r} \mathbf{B} \times \int [\mathbf{x}' \times \mathbf{J}(\mathbf{x}')] d^3 x' \right] \\ &= \nabla \times \left[\mathbf{B} \times \frac{1}{rc} \int [\mathbf{x}' \times \mathbf{J}(\mathbf{x}')] d^3 x' \right] \\ \mathbf{m} &= \frac{1}{rc} \int \mathbf{x}' \times \mathbf{J}(\mathbf{x}') d^3 x' \Rightarrow \mathbf{F} = \nabla \times [\mathbf{B} \times \mathbf{m}] \end{aligned}$$

اتحاد برداری زیر را داریم:

$$\begin{aligned} \nabla \times (\mathbf{F} \times \mathbf{G}) &= (\nabla \cdot \mathbf{G}) \mathbf{F} - (\nabla \cdot \mathbf{F}) \mathbf{G} + (\mathbf{G} \cdot \nabla) \mathbf{F} - (\mathbf{F} \cdot \nabla) \mathbf{G} \\ \Rightarrow \nabla \times [\mathbf{B} \times \mathbf{m}] &= (\nabla \cdot \mathbf{m}) \mathbf{B} - (\nabla \cdot \mathbf{B}) \mathbf{m} + (\mathbf{m} \cdot \nabla) \mathbf{B} - (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{m} \end{aligned}$$

چراکه $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ است و دوم اینکه \mathbf{m} تابعی است از مختصات پریم دار، در حالی که ∇ بدون پریم است

$$\Rightarrow \mathbf{F} = \nabla \times (\mathbf{B} \times \mathbf{m}) = (\mathbf{m} \cdot \nabla) \mathbf{B} = \nabla(\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}) = \nabla(\mathbf{m} \cdot \mathbf{B})$$

داریم

$$\mathbf{F} = \frac{1}{c} \int \mathbf{J}(\mathbf{x}) \times \mathbf{B}(\mathbf{x}) d^3 x$$

مؤلفه‌ی i ام نیرو عبارت است از:

$$F_i = \frac{1}{c} \sum_{ik} \varepsilon_{ijk} \left[B_k(\mathbf{x}) \int J_j(\mathbf{x}') d^3 x' + \int J_i(\mathbf{x}') x'_j \cdot \nabla B_k(\mathbf{x}) d^3 x' + \dots \right]$$

انتگرال حجمی J برای جریان‌های حالت پایا صفر است یعنی

$$\int J_j(\mathbf{x}') d^3 x' = 0$$

داشتیم:

$$\mathbf{x} \cdot \int \mathbf{x}' \mathbf{J}_i d^3 x' = -\frac{1}{r} \left[\mathbf{x} \times \int (\mathbf{x}' \times \mathbf{J}) d^3 x' \right]_i$$

با نتیجه‌ی فوق و با تعویض $\mathbf{x} \rightarrow \nabla B_k(\circ)$ داریم:

$$F_i = \sum_{jk} \varepsilon_{ijk} (\mathbf{m} \times \nabla)_j B_k(x)$$

بعد از مشتق‌گیری از $B_k(x)$ و قرار دادن $x = \circ$ این رابطه به صورت برداری زیر درمی‌آید

$$\mathbf{F} = (\mathbf{m} \times \nabla) \times \mathbf{B} = \nabla(\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}) - \mathbf{m}(\nabla \cdot \mathbf{B})$$

و چون $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ است.

$$\Rightarrow \mathbf{F} = \nabla(\mathbf{m} \cdot \mathbf{B})$$

روش دیگر

$$\mathbf{F} = \frac{1}{c} \int d^3r \mathbf{J}(r) \times \mathbf{B}(r)$$

$$\& \quad \mathbf{B}_k(\mathbf{r}) = B_k(\circ) + (\mathbf{r} \cdot \nabla) B_k(\circ) + \dots$$

$$\begin{aligned} \therefore F_i &= \frac{1}{c} \int d^3r (\varepsilon_{ijk}) J_j B_k \\ &= \varepsilon_{ijk} \left\{ \int d^3r J_j B_k(\circ) + \int d^3r J_j (\mathbf{r} \cdot \nabla) B_k(\circ) + \dots \right\} \\ &= \frac{1}{c} \varepsilon_{ijk} \left\{ B_k(\circ) \int d^3r J_j + \int d^3r J_j x_l \partial_l B_k(\circ) + \dots \right\} \\ &= \frac{1}{c} \varepsilon_{ijk} \left\{ \int d^3r \mathbf{J}_j(r) x_l \right\} \partial_l B_k(\circ) \end{aligned}$$

داریم:

$$\mathbf{m} = \frac{1}{rc} \int \mathbf{x}' \times \mathbf{J}(x') d^3x' = -\frac{1}{rc} \int \mathbf{J}(x') \times \mathbf{x}' d^3x'$$

$$\therefore F_i = -\varepsilon_{ijk} [(\mathbf{m} \times \nabla)_j B_k(x)]_{x=\circ}$$

$$= -\frac{1}{c} [(\mathbf{m} \times \nabla) \times \mathbf{B}(r)]_{r=\circ}$$

$$\mathbf{F} = -\frac{1}{c} [\nabla(\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}) - \mathbf{m}(\nabla \cdot \mathbf{B})] = -\frac{1}{c} \nabla(\mathbf{m} \cdot \mathbf{B})$$

بنابراین یک توزیع جریان همبسته (localized) در یک میدان مغناطیسی القایی نیرویی متناسب با گشتاور مغناطیسی \mathbf{m} را روی خودش احساس خواهد کرد که توسط رابطه‌ی $\mathbf{F} = \nabla(\mathbf{m} \cdot \mathbf{B})$ داده می‌شود. یک نمونه‌ی کاربرد این قضیه آینه‌های مغناطیسی است.

محاسبه‌ی گشتاور نیروی وارد بر توزیع جریان جایگزیده

$$\mathbf{N} = \frac{1}{c} \int \mathbf{x} \times (\mathbf{J} \times \mathbf{B}) d^3x$$

با قرار دادن رابطه‌ی

$$B_k(\mathbf{x}) = B_k(\circ) + \mathbf{x} \cdot \nabla B_k(\circ) + \dots$$

در رابطه‌ی قبل و نگه داشتن جملات مهم و غالب خواهیم داشت:

$$\mathbf{N} = \frac{1}{c} \int \mathbf{x}' \times [\mathbf{J} \times \mathbf{B}(\circ)] d^3x'$$

با انجام ضرب برداری ^۳گانه خواهیم داشت:

$$\mathbf{N} = \frac{1}{c} \int [(\mathbf{x}' \cdot \mathbf{B})\mathbf{J} - (\mathbf{x}' \cdot \mathbf{J})\mathbf{B}] d^3x'$$

مقدار انتگرال اول در قبل به دست آمد. انتگرال دوم برای یک توزیع جریان حالت پایدار صفر خواهد شد. با استفاده از (۵-۵۲) داریم

$$\int (f\mathbf{J} \cdot \nabla' g + g\mathbf{J} \cdot \nabla' f) d^3x' = 0$$

اگر $f = g = r'$ باشد خواهیم داشت:

$$\Rightarrow \mathbf{N} = \mathbf{m} \times \mathbf{B}(\circ)$$

انرژی پتانسیل یک گشتاور مغناطیسی در یک میدان مغناطیسی خارجی

داریم

$$\mathbf{F} = -\nabla U$$

از طرفی $\mathbf{F} = \nabla(\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}) \Rightarrow U = -\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}$

داریم

$$\mathbf{N} = \mathbf{m} \times \mathbf{B}(\circ)$$

$$|\mathbf{N}| = |\mathbf{m}| |\mathbf{B}(\circ)| \sin \alpha$$

α زاویه بین \mathbf{m} و \mathbf{B} است. از طرفی

$$U = -\mathbf{m} \cdot \mathbf{B} = -mB \cos \alpha$$

یعنی دوقطبی تمایل به هم جهت نمودن خود به موازات میدان و در وضعیتی با پایین ترین انرژی پتانسیل را دارد. به بخش ۵-۸ می رویم

دیدیم که تعداد زیادی مولکول یا اتم‌ها در واحد حجم هر کدام با گشتاور دوقطبی مغناطیسی مولکولی m_i یک بردار مغناطش ماکروسکوپی متوسط را ایجاد می‌کنند که با \mathbf{M} نشان می‌دهیم.

برای یک دوقطبی مغناطیسی بردار پتانسیل مغناطیسی به شکل زیر است

$$A(x) = \frac{\mathbf{m} \times \mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^3}$$

حال برای یک مولکول که مرکزش در نقطه‌ی x_j قرار دارد داریم

$$\mathbf{a}_{\text{mol}}(x) = \frac{\mathbf{m}_{\text{mol}} \times (\mathbf{x} - \mathbf{x}_j)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_j|^3}$$

جمع روی کل ماده:

$$\mathbf{A}_{\text{mol}}(x) = \int \frac{\mathbf{M}(x') \times (\mathbf{x} - \mathbf{x}') d^3 x'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3}$$

بنابراین بردار مغناطیسی کل ناشی از تمام جریان‌ها به صورت زیر درمی‌آید

$$\mathbf{A}(x) = \frac{1}{c} \int \frac{\mathbf{J}(x')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3 x' + \int \frac{\mathbf{M}(x') \times (\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} d^3 x'$$

$\mathbf{M}(x)$ بردار مغناطش ماکروسکوپی است و طبق رابطه‌ی $\mathbf{M} = N \langle m_{\text{mol}} \rangle$ انتگرال مربوط به مغناطش در رابطه‌ی بالا را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\int \mathbf{M}(x') \times \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} d^3 x' = \int M(x') \times \nabla' \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3 x'$$

اتحاد برداری زیر را داریم:

$$\nabla \times (\phi \mathbf{M}) = \nabla \phi \times \mathbf{M} + \phi \nabla \times \mathbf{M}$$

$$\nabla \phi \times \mathbf{M} = \nabla \times \phi \mathbf{M} - \phi \nabla \times \mathbf{M}$$

$$\mathbf{M} \times \nabla \phi = \phi \nabla \times \mathbf{M} - \nabla \times \phi \mathbf{M}$$

$$\Rightarrow \int \mathbf{M}(x') \times \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} d^3 x' = \int \frac{\nabla' \times \mathbf{M}}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3 x' - \int \nabla' \times \frac{\mathbf{M}}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3 x'$$

انتگرال $\int \nabla' \times \left(\frac{\mathbf{M}}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right) d^3 x'$ را می‌توان به یک انتگرال سطحی تبدیل کرد.

$$\Rightarrow \int \nabla' \times \left(\frac{\mathbf{M}}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right) d^3 x' = \int \frac{\mathbf{x}' \times \mathbf{M}}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} da$$

اگر \mathbf{M} از لحاظ ریاضی یک تابع خوش رفتار باشد و در داخل حجم محدود جایگزیده باشد لذا انتگرال سطحی فوق صفر می شود

$$\int \mathbf{M}(x') \times \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} = \int \frac{\nabla' \times \mathbf{M}}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3 x'$$

$$\mathbf{A}(x) = \frac{1}{c} \int \frac{\mathbf{J}(x')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3 x' + \int \frac{\mathbf{M}(x') \times (\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} d^3 x'$$

که به صورت زیر درمی آید:

$$\mathbf{A}(x) = \frac{1}{c} \int \frac{\mathbf{J}(x') + c \nabla' \times \mathbf{M}(x')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3 x'$$

می بینیم که سهم مغناطش در پتانسیل برداری مغناطیسی کل به شکل چگالی جریان مغناطش \mathbf{J}_M است. در واقع $\nabla \times \mathbf{M}$ معادل است با یک چگالی جریان انتقالی که بتواند همان میدان مغناطیسی ایجاد شده به وسیله خود \mathbf{M} را به وجود آورد. این بردار را چگالی جریان مغناطش \mathbf{J}_M می نامند.

$$\mathbf{J}_M = c(\nabla \times \mathbf{M})$$

به رییس فصل ۹ صفحه ۲۳۷ و ۲۳۸ مراجعه کنید.

برای اینکه معادله رابطه‌ی (۵-۲۲) یعنی $\nabla \times B_{\text{micro}} = \frac{4\pi}{c} J_{\text{micro}}$ که تنها برای جریان‌های انتقالی صادق است (که از حرکت الکترون‌های آزاد یا یون‌های باردار به وجود می آیند) را تعمیم دهیم طوری که جریان مغناطش را نیز دربرگیرد به صورت زیر عمل می کنیم
اولاً می توانیم با کرل گرفتن از رابطه‌ی زیر \mathbf{B} را به دست آوریم

$$\mathbf{A}(x) = \frac{1}{c} \int \frac{\mathbf{J}(x') + c \nabla' \times \mathbf{M}(x')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3 x' \quad (*)$$

منتهی این کار را انجام نمی دهیم بلکه با مشابهت با

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J} \quad (۱)$$

$$\mathbf{A}(x) = \frac{1}{c} \int \frac{\mathbf{J}(x')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3 x' \quad (۲)$$

اگر معادله‌ی (۱) جواب (۲) را به عنوان جواب داشته باشد (*) ایجاب می کند که:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J} + 4\pi \nabla \times \mathbf{M}$$

$$\Rightarrow \nabla \times (\mathbf{B} - 4\pi \mathbf{M}) = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}$$

که در آن؛ $\mathbf{B} - 4\pi\mathbf{M} = \mathbf{H}$ است که \mathbf{H} میدان مغناطیسی نامیده می‌شود.

$$\text{بنابراین به جای} \left\{ \begin{array}{l} \nabla \times \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \end{array} \right. \xrightarrow{\text{به دست می‌آید}} \left\{ \begin{array}{l} \nabla \times \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \end{array} \right. \quad (1)^*$$

این‌ها معادلات ماکروسکوپی میدان هستند.

در اینجا \mathbf{H} شبیه \mathbf{D} در الکترواستاتیک است. در حالت الکترواستاتیک داشتیم:

$$\left[\begin{array}{l} \nabla \cdot \mathbf{D} = 4\pi\rho \\ \nabla \times \mathbf{E} = 0 \end{array} \right. \quad (2)^*$$

میدان‌های اصلی \mathbf{E} و \mathbf{B} هستند که دسته‌ی معادلات $(1)^*$ و $(2)^*$ را برآورده می‌کنند.

فرومغناطیس‌های سخت

این مواد دارای یک مغناطش ثابت و مشخص $\mathbf{M}(x)$ هستند. در اینجا چون $\mathbf{J} = 0$ است می‌توانیم از پتانسیل اسکالر مغناطیسی استفاده کنیم:

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \\ \mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M}) \end{array} \right. \Rightarrow \nabla \cdot (\mathbf{H} + \mathbf{M}) = 0 \Rightarrow \nabla \cdot \mathbf{H} = -\nabla \cdot \mathbf{M}$$

اما $\mathbf{H} = -\nabla\varphi_M$ لذا داریم:

$$\nabla^2\varphi_M = \nabla \cdot \mathbf{M}$$

با مقایسه با الکترواستاتیک و معادله پواسون $\nabla^2\varphi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$ می‌توان نوشت

$$\nabla^2\varphi_M = -\rho_M \quad \rho_M = -\nabla \cdot \mathbf{M}$$

باز هم با مقایسه با الکترواستاتیک داریم:

$$\nabla^2\varphi = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \Rightarrow \varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(x')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x'$$

$$\nabla^2\varphi_M = -\rho_M \Rightarrow \varphi_M = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\rho_M(x')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x'$$

$$\Rightarrow \varphi_M(x') = -\frac{1}{4\pi} \int \frac{\nabla' \cdot \mathbf{M}}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x'$$

$$\nabla' \cdot \frac{\mathbf{M}}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} = \mathbf{M} \cdot \nabla' \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} + \frac{\nabla' \cdot \mathbf{M}}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}$$

طبق اتحاد برداری زیر

$$\nabla \cdot (\varphi \mathbf{F}) = \mathbf{F} \cdot \nabla \varphi + \varphi \nabla \cdot \mathbf{F}$$

$$\varphi_M = -\frac{1}{4\pi} \int \nabla' \cdot \frac{\mathbf{M}}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x' + \frac{1}{4\pi} \int \mathbf{M} \cdot \nabla' \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x'$$

انتگرال اول طبق قضیه واگرایی برابر است با:

$$\int \nabla' \cdot \frac{\mathbf{M}}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x' = \oint_S \frac{\mathbf{M}}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \cdot \mathbf{n} da'$$

که اگر سطح S ناحیه حضور \mathbf{M} را دربرنگیرد حاصل این انتگرال صفر است. برای انتگرال دوم از آنجا که

$$\left(-\nabla \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} = \nabla' \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right)$$

است داریم:

$$\int \mathbf{M} \cdot \nabla' \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x' = - \int \mathbf{M} \cdot \nabla \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x'$$

چون عملگر دل به مختصات پریم دار بستگی ندارد لذا خواهیم داشت:

$$\varphi_M(x') = -\frac{1}{4\pi} \nabla \cdot \int \frac{\mathbf{M}(x')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x' \quad (5-98)$$

در حالت خاص برای فواصل دور از \mathbf{M} داریم:

$$\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} = \frac{1}{r} \Rightarrow \varphi_M = -\frac{1}{4\pi} \nabla \cdot \int \frac{1}{r} \mathbf{M} d^3x'$$

$$\nabla \cdot (\varphi \mathbf{F}) = \varphi \nabla \cdot \mathbf{F} + \mathbf{F} \cdot \nabla \varphi$$

$$\Rightarrow \varphi_M = -\frac{1}{4\pi} \left[\nabla \left(\frac{1}{r} \right) \cdot \int \mathbf{M} d^3x' + \frac{1}{r} \nabla \cdot \int \mathbf{M} d^3x' \right]$$

جمله دوم صفر است چون ∇ در مختصات بدون پریم است و نیز داریم:

$$\nabla \frac{1}{r} = -\frac{\mathbf{r}}{r^3} \quad \text{و} \quad \mathbf{m} = \int \mathbf{M} d^3x'$$

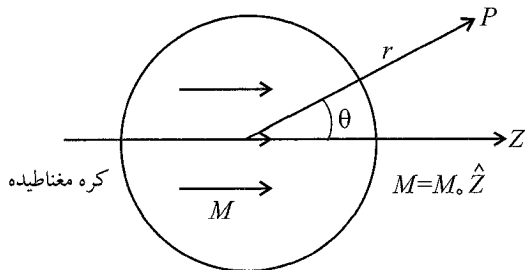
$$\Rightarrow \varphi_M(x) = \frac{1}{4\pi} \frac{\mathbf{m} \cdot \mathbf{r}}{r^3} = \frac{1}{4\pi} \frac{\mathbf{m} \cdot \mathbf{x}}{r^3}$$

کره‌ی مغناطیده‌ی یکنواخت

به‌عنوان کاربردی از رابطه $(5-100)$ می‌خواهیم میدان ناشی از یک کره‌ی مغناطیده را با استفاده از پتانسیل اسکالر مغناطیسی محاسبه کنیم. شکل زیر مفروض است ابتدا چگالی سطحی و حجمی بار مغناطیسی را به‌دست می‌آوریم:

$$\rho_M = -\nabla \cdot \mathbf{M} = 0 \quad \text{چون } \mathbf{M} \text{ یکنواخت است.}$$

$$\sigma_M = \mathbf{M} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{M} \cdot \mathbf{r} = M \cdot \cos \theta$$



$$\varphi_M = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\sigma_M}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} da' = \frac{1}{4\pi} \int \frac{M \cdot \cos \theta'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} a^2 d\Omega'$$

را برحسب هماهنگ‌های کروی (θ, φ) بسط می‌دهیم:

$$\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{4\pi}{2l+1} \left(\frac{r_{<}^l}{r_{>}^{l+1}} \right) Y_{lm}^*(\theta', \varphi') Y_{lm}(\theta, \varphi)$$

برای $\cos \theta'$ داریم:

$$\cos \theta' = \sqrt{\frac{4\pi}{3}} Y_{10}(\theta', \varphi')$$

لذا داریم:

$$\varphi_M = \frac{M_0 a^2}{4\pi} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{4\pi}{2l+1} \left(\frac{r_{<}^l}{r_{>}^{l+1}} \right) \int d\Omega' Y_{lm}^*(\theta', \varphi')$$

$$\sqrt{\frac{4\pi}{3}} Y_{10}(\theta', \varphi') Y_{lm}(\theta, \varphi)$$

$$\int d\Omega' Y_{lm}^*(\theta', \varphi') \sqrt{\frac{4\pi}{3}} Y_{10}(\theta', \varphi') = \sqrt{\frac{4\pi}{3}} \delta_{l,1} \delta_{m,0} \Rightarrow \begin{pmatrix} l=1 \\ m=0 \end{pmatrix}$$

$$\varphi_M = \frac{M_0 a^2}{4\pi} \frac{4\pi}{2(1)+1} \frac{r_{<}^{(1)}}{r_{>}^{(2)}} \underbrace{\sqrt{\frac{4\pi}{3}} Y_{10}(\theta, \varphi)}_{\cos \theta}$$

$$\Rightarrow \varphi_M = \frac{M_0 a^2}{3} \frac{r_{<}}{r_{>}^2} \cos \theta \quad (5-104)$$

برای نواحی درون و بیرون از کره داریم:

$$\text{درون کره} \begin{cases} r_{<} = r \\ r_{>} = a \end{cases} \Rightarrow \varphi_M = \frac{1}{3} M_0 a^2 \frac{r}{a^2} \cos \theta = \frac{1}{3} M_0 r \cos \theta = \frac{1}{3} M_0 z$$

می‌دانیم که $z = r \cos \theta$ است.

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_{in} &= -\nabla \varphi_M = -\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{3} M_0 z \right) \mathbf{k} \\ &= -\frac{1}{3} M_0 \mathbf{k} = -\frac{1}{3} \mathbf{M} \\ \mathbf{B}_{in} &= \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M}) = \mu_0 \left(-\frac{1}{3} \mathbf{M} + \mathbf{M} \right) \\ &= \frac{2\mu_0}{3} \mathbf{M} \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{H}_{in} = -\frac{1}{3} \mathbf{M} \\ \mathbf{B}_{in} = \frac{2\mu_0}{3} \mathbf{M} \end{cases} \quad (5-105) \end{aligned}$$

\mathbf{B} در ناحیه‌ی دورن کره موازی \mathbf{M} است در حالیکه \mathbf{H} درون کره با \mathbf{M} پادموازی است.

$$\text{خارج کره} \begin{cases} r > a \\ r < a \end{cases} \Rightarrow \varphi_M = \frac{1}{3} M_0 a^2 \frac{a}{r^2} \cos \theta = \frac{1}{3} M_0 a^3 \frac{\cos \theta}{r^2} \quad (5-106)$$

اگر گشتاور دوقطبی کره را به صورت زیر تعریف کنیم:

$$\mathbf{m} = \frac{4\pi a^3}{3} \mathbf{M} \quad (5-107)$$

داریم:

$$\varphi_M = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{4\pi}{3} M_0 a^3 \right) \frac{\cos \theta}{r^2} = \frac{1}{4\pi} \frac{m \cos \theta}{r^2} = \frac{1}{4\pi} \frac{\mathbf{m} \cdot \mathbf{r}}{r^3}$$

با تعریف گشتاور دوقطبی کره میدان \mathbf{B} خارج از کره را می‌توان از رابطه (5-56) به دست آورد:

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3\mathbf{n}(\mathbf{m} \cdot \mathbf{n}) - \mathbf{m}}{|\mathbf{x}|^3}$$

$$\begin{cases} \mathbf{x} = \mathbf{r} \\ \mathbf{n} = \mathbf{r} \end{cases} \Rightarrow \mathbf{B}_{out} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\frac{3m \cos \theta \mathbf{r}}{r^3} - \frac{m}{r^3} \mathbf{k} \right]$$

برای \mathbf{k} در مختصات کروی داریم:

$$\mathbf{k} = r \cos \theta - \theta \sin \theta$$

$$\Rightarrow \mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\frac{3m \cos \theta}{r^3} \mathbf{r} - \left(\frac{m \cos \theta}{r^3} \mathbf{r} - \frac{m \sin \theta}{r^3} \theta \right) \right]$$

$$\Rightarrow \mathbf{B}_{out} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\frac{2m \cos \theta}{r^3} \mathbf{r} + \frac{m \sin \theta}{r^3} \theta \right] \quad \& \quad m = \frac{4\pi a^3}{3} M_0$$

همین نتیجه را می توان از رابطه زیر به دست آورد:

$$B_{out} = \mu_0 H_{out} = -\mu_0 \nabla \varphi_M \quad , \quad \varphi_M = \frac{m \cos \theta}{\frac{4}{3}\pi r^2}$$

$$\nabla \varphi_M = \frac{\partial \varphi_M}{\partial r} \mathbf{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_M}{\partial \theta} \boldsymbol{\theta} = \frac{m}{\frac{4}{3}\pi} \cos \theta \left(-\frac{2}{r^3} \right) \mathbf{r} + \frac{m}{\frac{4}{3}\pi} \frac{1}{r^3} (-\sin \theta) \boldsymbol{\theta}$$

$$\mathbf{B}_{out} = -\mu_0 \left[\frac{1}{\frac{4}{3}\pi} \left(-\frac{2m \cos \theta}{r^3} \right) \mathbf{r} + \frac{m \sin \theta}{r^3} \boldsymbol{\theta} \right]$$

$$\Rightarrow \mathbf{B}_{out} = \frac{\mu_0}{\frac{4}{3}\pi} \left(\frac{2m \cos \theta}{r^3} \mathbf{r} + \frac{m \sin \theta}{r^3} \boldsymbol{\theta} \right)$$

که همان نتیجه‌ی قبلی است. حال نشان می دهیم که به جای رابطه (۵-۱۰۰) می توان از رابطه (۵-۹۸) برای محاسبات بهره گرفت:

$$\varphi_M = -\frac{1}{\frac{4}{3}\pi} \nabla \cdot \int \frac{M \cdot \mathbf{k}}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3 x' = -\frac{M_0}{\frac{4}{3}\pi} \frac{\partial}{\partial z} \int_0^a r'^2 dr' \int \frac{d\Omega'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}$$

با استفاده از بسط (۳-۷۰) داریم:

$$\int \frac{d\Omega'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{\frac{4}{3}\pi}{\sqrt{l+1}} \left(\frac{r'_{<}}{r'_{>}} \right) \int d\Omega' Y_{lm}^*(\theta', \varphi') Y_{lm}(\theta', \varphi')$$

$$\int d\Omega' Y_{lm}^*(\theta', \varphi') Y_{lm}(\theta, \varphi) = Y_{lm}(\theta, \varphi) \int d\Omega' Y_{lm}(\theta', \varphi')$$

داریم:

$$Y_{00}(\theta', \varphi') = \frac{1}{\sqrt{\frac{4}{3}\pi}} \Rightarrow \int d\Omega' Y_{lm}^*(\theta', \varphi') = \frac{1}{\sqrt{\frac{4}{3}\pi}} \int d\Omega' Y_{lm}^*(\theta', \varphi') Y_{00}(\theta', \varphi')$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\frac{4}{3}\pi}} \delta_{l,0} \delta_{m,0} = \frac{1}{\sqrt{\frac{4}{3}\pi}} ; \quad \begin{matrix} l=0 \\ m=0 \end{matrix}$$

$$= Y_{lm}(\theta, \varphi) \int d\Omega' Y_{lm}^*(\theta', \varphi') = \frac{1}{\sqrt{\frac{4}{3}\pi}} Y_{00}(\theta, \varphi) = 1$$

$$\Rightarrow \varphi_M = -\frac{M_0}{\frac{4}{3}\pi} \frac{\partial}{\partial z} \int_0^a r'^2 dr' \left(\frac{\frac{4}{3}\pi}{1} \right) \left(\frac{1}{r_{>}} \right) = -M_0 \frac{1}{3} a^3 \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r_{>}} \right)$$

با توجه به اینکه $\frac{\partial}{\partial z} = \cos \theta \frac{\partial}{\partial \theta}$ داریم

$$\Rightarrow \varphi_M = -\frac{M_0 a^3}{3} \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r_{>}} \right) = \frac{1}{3} M_0 a^3 \cos \theta \frac{1}{r_{>}^2}$$

$$= \frac{1}{3} M_0 a^3 \cos \theta \frac{a}{r_{>}^2} = \frac{1}{3} M_0 a^3 \cos \theta \left(\frac{r_{<}}{r_{>}^2} \right)$$

چون برای خارج کره $r_{<} = 0$ است که در مرحله آخر رابطه فوق اعمال شده است. همان گونه که ملاحظه می شود به رابطه (۵-۱۰۴) رسیدیم.

می‌توان میدان را از پتانسیل برداری (رابطه ۱۰۳-۵) نیز به دست آورد. چون \mathbf{M} یکنواخت است لذا $\nabla \times \mathbf{M} = 0$ است:

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint \frac{\mathbf{M} \times \mathbf{n}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} da'$$

$$\begin{aligned} \mathbf{M} \times \mathbf{n}' &= M \cdot \mathbf{k}' \times \mathbf{r}' = M \cdot (\mathbf{r}' \cos \theta' - \theta' \sin \theta') \times \mathbf{r}' = M \cdot \sin \theta' \boldsymbol{\varphi}' \\ &= M \cdot \sin \theta' (-\sin \varphi' \mathbf{x} + \cos \varphi' \mathbf{y}) \end{aligned}$$

در رابطه اخیر از روابط زیر استفاده کرده‌ایم:

$$\mathbf{k} = \mathbf{r} \cos \theta - \theta \sin \theta$$

$$\mathbf{r} \times \theta = -\boldsymbol{\varphi} \quad \& \quad \boldsymbol{\varphi} = -\sin \varphi \mathbf{x} + \cos \varphi \mathbf{y}$$

$$\Rightarrow \mathbf{A}_\varphi = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{M \cdot \sin \theta' (-\sin \varphi' \mathbf{x}' + \cos \varphi' \mathbf{y}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} a'^2 d\Omega'$$

$$Y_{11}(\theta', \varphi') = -\sqrt{\frac{3}{4\pi}} e^{i\varphi'} \sin \theta' = -\sqrt{\frac{3}{4\pi}} \sin \theta' (\cos \varphi' + i \sin \varphi')$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin \theta' \cos \varphi' = -\sqrt{\frac{4\pi}{3}} \operatorname{Re}[Y_{11}(\theta', \varphi')] \\ \sin \theta' \sin \varphi' = -\sqrt{\frac{4\pi}{3}} \operatorname{Im}[Y_{11}(\theta', \varphi')] \end{cases}$$

از بسط (۳-۷۰) استفاده می‌کنیم؛ مؤلفه‌های x و y ؛ A_φ به ترتیب قسمت‌های موهومی و حقیقی انتگرال زیر هستند:

$$\frac{\mu_0}{4\pi} M \cdot a'^2 \sum_{\substack{l < \\ r >}} \frac{4\pi}{4l+1} \left(\frac{r^l}{r^{l+1}} \right) \int d\Omega' Y_{lm}^*(\theta', \varphi') \left(-\sqrt{\frac{4\pi}{3}} \right) Y_{11}(\theta', \varphi') Y_{lm}(\theta, \varphi) \quad (I)$$

$$\int d\Omega' Y_{lm}^*(\theta', \varphi') \left(-\sqrt{\frac{4\pi}{3}} \right) Y_{11}(\theta', \varphi') = -\sqrt{\frac{4\pi}{3}} \delta_{l,1} \delta_{m,1}; \quad \begin{matrix} m = 1 \\ l = 1 \end{matrix}$$

$$\Rightarrow Y_{lm}(\theta, \varphi) \int d\Omega' Y_{lm}^*(\theta', \varphi') \left(-\sqrt{\frac{4\pi}{3}} \right) Y_{11}(\theta, \varphi)$$

$$= -\sqrt{\frac{4\pi}{3}} Y_{11}(\theta, \varphi) = e^{i\varphi} \sin \theta$$

لذا حاصل انتگرال در رابطه (I) برابر $e^{i\varphi} \sin \theta$ است. بنابر تقارن می‌توان نقطه مشاهده را در صفحه‌ی

$x - z$ یا $\varphi = 0$ انتخاب کرد. که در این صورت داریم:

$$e^{i\varphi} \sin \theta = \sin \theta (\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

$$\varphi = 0 \rightarrow e^{i\varphi} \sin \theta = \sin \theta$$

که یک جمله حقیقی است لذا مؤلفه x پتانسیل برداری که قسمت موهومی انتگرال بود صفر است و برای مؤلفه y داریم:

$$A_\varphi = \frac{\mu_0}{4\pi} M_0 a^2 \frac{4\pi}{2(1) + 1} \left(\frac{r_{<}}{r_{>}} \right) \sin \theta y$$

$$\Rightarrow A_\varphi = \frac{\mu_0}{3} M_0 a^2 \left(\frac{r_{<}}{r_{>}} \right) \sin \theta \quad (5-111)$$

مؤلفه‌های میدان از روابط (5-38) به دست می‌آیند.

$$A_\varphi = \begin{cases} \frac{\mu_0}{3} M_0 a^2 \frac{a}{r^2} \sin \theta & (\text{بیرون کره}) \\ \frac{\mu_0}{3} M_0 a^2 \frac{r}{a^3} \sin \theta & (\text{درون کره}) \end{cases}$$

درون کره داریم:

$$B_r = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_\varphi) = \frac{1}{\sin \theta} \left[\frac{\mu_0}{3} M_0 r (2 \sin \theta \cos \theta) \right] = \frac{2\mu_0}{3} M_0 \cos \theta$$

$$B_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_\varphi) = -\frac{1}{r} \left[\frac{\mu_0}{3} M_0 (2r) \sin \theta \right] = -\frac{2\mu_0}{3} M_0 \sin \theta$$

$$\mathbf{B}_{in} = \frac{2\mu_0}{3} M_0 (\cos \theta \mathbf{r} - \sin \theta \boldsymbol{\theta}) = \frac{2\mu_0}{3} M_0 \mathbf{k} = \frac{2\mu_0}{3} \mathbf{M}$$

که همان رابطه (5-105) است.

خارج کره داریم:

$$B_r = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_\varphi) = \frac{1}{r \sin \theta} \left[\frac{\mu_0}{3} M_0 \frac{a^3}{r^2} (2 \sin \theta \cos \theta) \right]$$

$$= \frac{2\mu_0}{3} M_0 a^3 \frac{\cos \theta}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left(\frac{4\pi}{3} M_0 a^3 \right) \frac{\cos \theta}{r^2}$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2m \cos \theta}{r^2}$$

$$B_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_\varphi) = -\frac{1}{r} \left[\frac{\mu_0}{3} M_0 a^3 \left(\frac{-1}{r^2} \right) \sin \theta \right]$$

$$= +\frac{\mu_0}{3} M_0 a^3 \frac{\sin \theta}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left(\frac{4\pi}{3} M_0 a^3 \right) \frac{\sin \theta}{r^2}$$

$$\Rightarrow B_\theta = \frac{\mu_0 m \sin \theta}{4\pi r^3}$$

$$\mathbf{B}_{out} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\frac{2m \cos \theta}{r^3} \mathbf{r} + \frac{m \sin \theta}{r^3} \boldsymbol{\theta} \right]$$

که همان رابطه قبلی است.

حفاظ مغناطیسی

لایه‌ای کروی با شعاع داخلی (خارجی) a (b) از ماده‌ای با تراوایی مغناطیسی μ را در نظر بگیرید که در یک میدان مغناطیسی ثابت یکنواخت B_0 قرار دارد می‌خواهیم میدان‌های \mathbf{B} و \mathbf{H} را در همه نواحی فضا (۳ ناحیه) به دست آوریم. چون در همه جا $\mathbf{J} = 0$ است لذا φ_M در معادله لاپلاس صدق می‌کند همان‌طور که می‌دانیم جواب معادله لاپلاس در مختصات کروی به فرم زیر است:

$$\varphi_M(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} (A_l r^l + B_l r^{-(l+1)}) P_l(\cos \theta)$$

این جواب در نواحی مختلف فضا به شکل زیر درمی‌آید:

$$(۱) \quad r \geq b : r \rightarrow \infty \Rightarrow \varphi_M = -H_0 z = -H_0 r \cos \theta \Rightarrow A_l = 0 ; l \neq 1$$

$$\varphi_M^{(۱)}(r, \theta) = -H_0 r \cos \theta + \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\alpha_l}{r^{l+1}} P_l(\cos \theta)$$

$$(۲) \quad a \leq r \leq b \quad \varphi_M^{(۲)}(r, \theta) = \sum \left(\beta_l r^l + \frac{\gamma_l}{r^{l+1}} \right) P_l(\cos \theta)$$

$$(۳) \quad r \leq a \quad r \rightarrow 0 \Rightarrow \varphi_M \neq \infty \Rightarrow B_l = 0 \quad (\text{به‌ازای همه‌ی اها})$$

$$\varphi_M^{(۳)}(r, \theta) = \sum \delta_l r^l P_l(\cos \theta)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} r \geq b & \varphi_M^{(۱)}(r, \theta) = -H_0 r \cos \theta + \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\alpha_l}{r^{l+1}} P_l(\cos \theta) \\ a \leq r \leq b & \varphi_M^{(۲)}(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \left(\beta_l r^l + \frac{\gamma_l}{r^{l+1}} \right) P_l(\cos \theta) \\ r \leq a & \varphi_M^{(۳)}(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \delta_l r^l P_l(\cos \theta) \end{cases}$$

اکنون با اعمال شرایط مرزی، ضرایب مجهول را تعیین می‌کنیم چهار شرط مرزی داریم:

$$۱) \quad H_\theta^{(۲)}(r=a) = H_\theta^{(۳)}(r=a)$$

$$۲) \quad B_r^{(۲)}(r=a) = B_r^{(۳)}(r=a)$$

$$۳) \quad H_\theta^{(۲)}(r=b) = H_\theta^{(۱)}(r=b)$$

$$۴) \quad B_r^{(\nu)}(r=b) = B_r^{(\lambda)}(r=b)$$

$$\begin{aligned} ۱) \quad &\Rightarrow \frac{\partial \varphi_M^{(\nu)}}{\partial \theta} \Big|_{r=a} = \frac{\partial \varphi_M^{(\lambda)}}{\partial \theta} \Big|_{r=a} \\ &\Rightarrow \sum_{l=0}^{\infty} \left(\beta_l a^l + \frac{\gamma_l}{a^{l+1}} \right) \frac{d}{d\theta} P_l(\cos \theta) = \sum \delta_l a^l \frac{dP_l(\cos \theta)}{d\theta} \end{aligned} \quad (R۱)$$

$$\begin{aligned} ۲) \quad &\Rightarrow \mu \frac{\partial \varphi_M^{(\nu)}}{\partial r} \Big|_{r=a} = \mu_0 \frac{\partial \varphi_M^{(\lambda)}}{\partial r} \Big|_{r=a} \\ &\Rightarrow \mu \sum \left(l \beta_l a^{l-1} - \frac{(l+1)\gamma_l}{a^{l+2}} \right) P_l \cos \theta = \mu_0 \sum \delta_l l a^{l-1} P_l(\cos \theta) \end{aligned} \quad (R۲)$$

$$\begin{aligned} ۳) \quad &\Rightarrow \frac{\partial \varphi_M^{(\nu)}}{\partial \theta} \Big|_{r=b} = \frac{\partial \varphi_M^{(\lambda)}}{\partial \theta} \Big|_{r=b} \\ &\Rightarrow \sum_{l=0}^{\infty} \left(\beta_l b^l + \frac{\gamma_l}{b^{l+1}} \right) \frac{dP_l(\cos \theta)}{d\theta} = H_0 b \sin \theta + \sum \frac{\alpha_l}{b^{l+1}} \frac{dP_l(\cos \theta)}{d\theta} \end{aligned} \quad (R۳)$$

$$\begin{aligned} ۴) \quad &\mu_0 \frac{\partial \varphi_M^{(\nu)}}{\partial r} \Big|_{r=b} = \mu_0 \frac{\partial \varphi_M^{(\lambda)}}{\partial r} \Big|_{r=b} \\ &\Rightarrow \mu \sum \left(l \beta_l b^{l-1} - \frac{(l+1)\gamma_l}{b^{l+2}} \right) P_l(\cos \theta) \\ &= \mu_0 \left(-H_0 \cos \theta + \sum \frac{-(l+1)\alpha_l}{b^{l+2}} P_l(\cos \theta) \right) \end{aligned} \quad (R۴)$$

دو طرف هر ۴ رابطه فوق با هم متحدانند یعنی ضرائب $P_l(\cos \theta)$ در دو طرف هر رابطه باید با هم برابر باشد. به خاطر حضور $\sin \theta$ و $\cos \theta$ در روابط $R۳$ و $R۴$ در همه روابط تنها جملات $P_1(\cos \theta)$ (یعنی $l=1$) باقی می ماند و بقیه صفر می شوند:

$$R۱ \Rightarrow -\left(\beta_1 a + \frac{\gamma_1}{a^2} \right) = -\delta_1 a \Rightarrow \beta_1 a^2 + \gamma_1 = \delta_1 a^2$$

$$R۲ \Rightarrow \mu \left(\beta_1 - \frac{2\gamma_1}{a^2} \right) = \mu_0 (\delta_1) \Rightarrow \frac{\mu}{\mu_0} (\beta_1 a^2 - 2\gamma_1) = \delta_1 a^2$$

$$R۳ \Rightarrow -\beta b - \frac{\gamma_1}{b^2} = H_0 b - \frac{\alpha_1}{b^2} \Rightarrow \beta_1 b^2 + \gamma_1 = \alpha_1 - H_0 b^2$$

$$R۴ \Rightarrow \mu \left(\beta_1 - \frac{2\gamma_1}{b^2} \right) = \mu_0 \left(-H_0 - \frac{2\alpha_1}{b^2} \right)$$

$$\Rightarrow \frac{\mu}{\mu_0} (\beta_1 b^2 - 2\gamma_1) = -H_0 b^2 - 2\alpha_1$$

با تعریف $\mu' = \frac{\mu}{\mu_0}$ دستگاه معادلات را به فرم زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$\begin{cases} \beta_1 a^3 + \gamma_1 - \delta_1 a^3 = 0 \\ \mu' \beta_1 a^3 - 2\mu' \gamma_1 - \delta_1 a^3 = 0 \\ \alpha_1 - \beta_1 b^3 - \gamma_1 = H \cdot b^3 \\ 2\alpha_1 + \mu' \beta_1 b^3 - 2\mu' \gamma_1 = -H \cdot b^3 \end{cases} \quad (۱۲۰-۵)$$

برای سادگی در حل این دستگاه متغیرها را با علامت دیگری نشان می‌دهیم

$$\begin{cases} \alpha_1 = A \\ \beta_1 = B \\ \gamma_1 = C \\ \delta_1 = D \\ \mu' = K \end{cases} \begin{cases} Ba^3 + C - Da^3 = 0 \\ KBa^3 - 2KC - Da^3 = 0 \\ A - Bb^3 - C = H \cdot b^3 \\ 2A + KBb^3 - 2KC = -H \cdot b^3 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} (۱) \text{ و } (۲) \Rightarrow \begin{cases} Ba^3 + C = KBa^3 - 2KC \\ B(K-1)a^3 = C(2K+1) \end{cases} \Rightarrow B = \frac{2K+1}{(K-1)a^3} C \quad (۵) \\ \text{با حذف } D \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (۳) \text{ و } (۴) \Rightarrow (K+2)b^3 B - 3(K-1)C = -3H \cdot b^3 \quad (۶) \\ \text{با حذف } A \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (۵) \text{ و } (۶) \Rightarrow \left[\frac{2K+1}{(K-1)a^3} (K+2)b^3 - 2(K-1) \right] C = -3H \cdot b^3 \\ \Rightarrow C = \frac{-3H \cdot b^3}{\frac{(2K+1)}{(K-1)a^3} (K+2)b^3 - 2(K-1)} \end{aligned}$$

با ضرب صورت و مخرج در $(K-1) \frac{a^3}{b^3}$ داریم:

$$C = \frac{-3H \cdot (K-1)a^3}{(2K+1)(K+2) - 2 \frac{a^3}{b^3} (K-1)^2} \quad (۷)$$

اکنون با استفاده از رابطه (۵) به دست می‌آید:

$$B = \frac{2K+1}{(K-1)a^3} C$$

$$\Rightarrow B = \frac{-3H_0(2K+1)}{(2K+1)(K+2) - 2\frac{a^r}{b^r}(K-1)^2} \quad (۸)$$

با جایگذاری (۷ و ۸) در (۱) محاسبه می‌شود:

$$Da^r = Ba^r + C = \frac{-3H_0(2K+1)a^r}{[\dots]} + \frac{-3H_0(K-1)a^r}{[\dots]}$$

$$D = \frac{-3H_0(2K+1+K-1)}{[\dots]}$$

$$D = \frac{-9K}{(2K+1)(K+2) - 2\frac{a^r}{b^r}(K-1)^2} \quad (۹)$$

برای مقدار A از رابطه (۳) داریم:

$$A = Bb^r + C + H.b^r$$

$$A = \frac{-3H_0(2K+1)b^r}{[\dots]} + \frac{-3H_0(K-1)a^r}{[\dots]} + H.b^r$$

$$A = \frac{-3H_0(2K+1)b^r - 3H_0(K-1)a^r + H.b^r[\dots]}{[\dots]}$$

$$A = \frac{-3H_0(2K+1)b^r - 3H_0(K-1)a^r + H.b^r[(2K+1)(K+2) - \frac{2a^r}{b^r}(K-1)^2]}{[\dots]}$$

$$A = \frac{H.b^r[-3(2K+1) + (2K+1)(K+2)] - H_0.a^r[3(K-1) + 2(K-1)^2]}{[\dots]}$$

$$A = \frac{H.b^r[(2K+1)(-3+K+2)] - H_0.a^r[(K-1)(3+2K-2)]}{[\dots]}$$

$$A = \frac{H.b^r(2K+1)(K-1) - H_0.a^r(K-1)(2K+1)}{[\dots]}$$

$$A = \frac{(2K+1)(K-1)}{(2K+1)(K+2) - \frac{2a^r}{b^r}(K-1)^2} (b^r - a^r)H_0$$

به این ترتیب پتانسیل در تمامی نواحی فضا معین می‌شود. با توجه به اینکه

$$\mathbf{H} = -\nabla\varphi_M$$

می‌توان میدان را در نواحی مختلف به دست آورد

$$\varphi_M^{(1)}(r, \theta) = \left(-H_0.r + \frac{\alpha_1}{r^2}\right) \cos \theta$$

$$\varphi_M^{(2)}(r, \theta) = \left(\beta_1 r + \frac{\gamma_1}{r^2} \right) \cos \theta$$

$$\varphi_M^{(3)}(r, \theta) = \delta_1 r \cos \theta$$

$$H_\theta = \frac{-1}{r} \frac{\partial \varphi_M}{\partial \theta} ; H_r = \frac{-\partial \varphi_M}{\partial r}$$

$$\begin{cases} H_\theta^{(1)} = - \left(-H_0 + \frac{\alpha_1}{r^2} \right) (-\sin \theta) \\ H_r^{(1)} = - \left(-H_0 - \frac{\gamma_1}{r^2} \right) \cos \theta \end{cases} \quad (*)$$

$$\begin{cases} H_\theta^{(2)} = - \left(\beta_1 + \frac{\gamma_1}{r^2} \right) (-\sin \theta) \\ H_r^{(2)} = - \left(\beta_1 - \frac{\gamma_1}{r^2} \right) \cos \theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} H_\theta^{(3)} = -(\delta_1)(-\sin \theta) = \delta_1 \sin \theta \\ H_r^{(3)} = -\delta_1 \cos \theta \end{cases} \Rightarrow \mathbf{H}^{(3)} = \delta_1 \mathbf{k}$$

میدان داخل کاواک موازی \mathbf{H}_0 است.

بررسی حالات حدی

$$K = \frac{\mu}{\mu_0} (\mu \gg \mu_0 \text{ یا } K \gg 1)$$

$$\gamma_1 = C \rightarrow \frac{-3H_0 a^3 K H_0}{(2K^2) - \frac{2a^3}{b^3} K^2} = \frac{-3a^3}{2 \left(1 - \frac{a^3}{b^3} \right) K} H_0$$

$$\beta_1 = B \Rightarrow \frac{-3H_0 (2K) H_0}{(2K^2) - \frac{2a^3}{b^3} K^2} = \frac{-3}{\left(1 - \frac{a^3}{b^3} \right) K} H_0$$

$$\alpha_1 = A \Rightarrow \frac{(2K^2)}{(2K^2) - \frac{2a^3}{b^3} K^2} (b^3 - a^3) H_0 = b^3 H_0 \quad (122-5)$$

$$\delta_1 = D \Rightarrow \frac{-9KH_0}{(2K^2) - \frac{2a^3}{b^3} K^2} = \frac{-9}{2 \left(1 - \frac{a^3}{b^3} \right) K} H_0$$

اگر K خیلی بزرگ باشد ($10^6 - 10^3 \sim K$) آنگاه $\delta_1 \rightarrow 0$ یعنی میدان داخل کاواک به صفر میل

می‌کند و لایه کروی مانند یک حفاظ مانع ورود میدان مغناطیسی به درون کاواک می‌شود.

$$(*) \Rightarrow \begin{cases} H_{\theta}^{(1)} = -H_0 \sin \theta + \frac{\alpha_1 \sin \theta}{r^3} \\ H_r^{(1)} = H_0 \cos \theta + \frac{2\alpha_1 \cos \theta}{r^3} \end{cases}$$

میدان بیرون لایه ($r > b$) را می‌توان معادل با میدان خارجی موجود (H_0) به علاوه میدان ناشی از یک دوقطبی مغناطیسی در مرکز و در راستای z با گشتاور دوقطبی مغناطیسی $\mathbf{m} = \alpha_1 \mathbf{k}$ در نظر گرفت. این مسئله از مقایسه رابطه اخیر با روابط ۴۱-۵ به سادگی فهمیده می‌شود.

قانون القای فارادی برای یک مدار متحرک

طبق قانون القای فارادی داریم:

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -k \frac{d}{dt} \int \mathbf{B} \cdot n d\mathbf{a}$$

اگر مدار C با سرعت \mathbf{V} در یک جهت ثابت در حال حرکت باشد و در یک میدان مغناطیسی قرار داشته باشد که جهت میدان نیز ثابت باشد برای تغییرات زمانی \mathbf{B} داریم:

$$\frac{d}{dt} \int \mathbf{B} \cdot n d\mathbf{a} = \int \frac{d\mathbf{B}}{dt} \cdot n d\mathbf{a}$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}(t, \mathbf{x})$$

$$d\mathbf{B} = \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} dt + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial x} dx + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial y} dy + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial z} dz$$

$$\frac{d\mathbf{B}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial z} \frac{dz}{dt}$$

$$\Rightarrow \frac{d\mathbf{B}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + v_x \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial x} + v_y \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial y} + v_z \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial z}$$

$$\Rightarrow \frac{d\mathbf{B}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{B}$$

توجه داریم که تغییر شار فقط ناشی از تغییرات \mathbf{B} است.

طبق اتحاد برداری زیر:

$$\nabla \times (\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = (\nabla \cdot \mathbf{G})\mathbf{F} - (\nabla \cdot \mathbf{F})\mathbf{G} + (\mathbf{G} \cdot \nabla)\mathbf{F} - (\mathbf{F} \cdot \nabla)\mathbf{G}$$

$$\nabla \times (\mathbf{B} \times \mathbf{v}) = (\nabla \cdot \mathbf{v})\mathbf{B} - (\nabla \cdot \mathbf{B})\mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{B} - (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{v}$$

چون \mathbf{v} یک بردار ثابت است لذا مشتقات مکانی آن صفر است. همچنین می‌دانیم که $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ است

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{B} = \nabla \times (\mathbf{B} \times \mathbf{v}) \Rightarrow \frac{d}{dt} \int \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} da$$

$$= \int \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \mathbf{n} da + \int \nabla \times (\mathbf{B} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} da$$

برای جمله دوم طبق قضیه استوکس داریم:

$$\int \nabla \times (\mathbf{B} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} da = \oint_C (\mathbf{B} \times \mathbf{v}) \cdot d\mathbf{l}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \int \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} da = \int \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \mathbf{n} da + \oint_C (\mathbf{B} \times \mathbf{v}) \cdot d\mathbf{l} \quad (5-137)$$

از قانون القای فارادی برای مدار متحرک داریم:

$$\oint \mathbf{E}' \cdot d\mathbf{l} = -K \left[\int \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \mathbf{n} da + \oint (\mathbf{B} \times \mathbf{v}) \cdot d\mathbf{l} \right]$$

$$\Rightarrow \oint [\mathbf{E}' - K(\mathbf{v} \times \mathbf{B})] \cdot d\mathbf{l} = -K \int \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \mathbf{n} da \quad (5-138)$$

اگر مدار ثابت می‌بود داشتیم:

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -K \int \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \mathbf{n} da \quad (5-139)$$

فرض ناوردایی گالیله‌ای ایجاد می‌کند که طرف‌های سمت چپ روابط (5-138) و (5-139) مساوی باشند:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}' - K(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (5-140)$$

برای تعیین ثابت K ، یک الکترون رسانشی را در مدار متحرک مذکور در نظر می‌گیریم. نسبت به دستگاه مختصاتی که با مدار حرکت می‌کند، این الکترون ساکن است و تنها نیرویی که در آن وارد می‌شود نیروی ناشی از \mathbf{E}' (طبق قانون القای فارادی) می‌باشد:

$$F = qE'$$

اما نسبت به دستگاه آزمایشگاه حرکت مدار را می‌توان معادل با یک چگالی جریان $\mathbf{J} = qv\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$ دانست، که در این صورت علاوه بر نیروی ناشی از میدان \mathbf{E} ، یک میدان ناشی از میدان \mathbf{B} نیز وجود دارد

$$\mathbf{F}_B = \int \mathbf{J}(x) \times \mathbf{B}(x) dx^3 \Rightarrow \mathbf{F}_B = \int qv\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \times \mathbf{B}(x) d^3x$$

$$\Rightarrow \mathbf{F}_B = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}(x_0)$$

به این ترتیب نیروی کل وارد بر بار متحرک عبارت است از:

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

از مقایسه رابطه اخیر با (۵-۱۴۰) مقدار K را برابر واحد در نظر می‌گیریم.

به این ترتیب داریم:

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (۵-۱۴۲)$$

داریم:

$$\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt} \int \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} da = -\int \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \mathbf{n} da$$

طرف چپ را می‌توان از قضیه استوکس به انتگرال سطحی تبدیل کرد:

$$\begin{aligned} \oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} &= \int_S (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{n} da \\ \Rightarrow \int \nabla \times \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} da &= -\int \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \mathbf{n} da \\ \Rightarrow \int \left(\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) \cdot \mathbf{n} da &= 0 \end{aligned}$$

یا

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0 \quad (۵-۱۴۳)$$

معادلات پخش \mathbf{E} ، \mathbf{J} ، \mathbf{A} و \mathbf{B}

معادلات زیر مفروض‌اند

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} \quad ; \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad ; \quad \nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0$$

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$$

$$\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\int \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \mathbf{n} da$$

از قانون القای فارادی داریم:

چون $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ است:

$$\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\int \nabla \times \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \cdot \mathbf{n} da = -\int \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \cdot d\mathbf{l} \quad (\text{طبق قضیه استوکس})$$

$$\Rightarrow \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = 0$$

از طرفی در الکترواستاتیک داشتیم $\mathbf{E} = -\nabla \varphi$ لذا خواهیم داشت:

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \varphi$$

اگر از بارهای آزاد در محیط صرف نظر کنیم می توان قرار داد $\varphi = 0$.

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$$

همچنین داریم:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu \mathbf{J} = \mu \sigma \mathbf{E}$$

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} = \mu \sigma \mathbf{E}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0 \Rightarrow \nabla^2 \mathbf{A} = -\mu \sigma \mathbf{E} \xrightarrow{(1)} \nabla^2 \mathbf{A} = \mu \sigma \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad (5-160)$$

معادله پخش برای \mathbf{J} و \mathbf{E} نیز صادق است:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = -\nabla \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \mathbf{B} = -\frac{\partial}{\partial t} (\mu \mathbf{J}) = -\mu \sigma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E}$$

با $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ داریم:

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \mu \sigma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

$$\mathbf{E} = \sigma \mathbf{J} \Rightarrow \nabla^2 \mathbf{J} = \mu \sigma \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t}$$

برای \mathbf{B} نیز داریم:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu \mathbf{J} = \mu \sigma \mathbf{E}$$

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{B} = \mu \sigma \nabla \times \mathbf{E} = -\mu \sigma \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\nabla(\nabla \cdot \mathbf{B}) - \nabla^2 \mathbf{B} = -\mu \sigma \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \Rightarrow \nabla^2 \mathbf{B} = \mu \sigma \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

تخمین زمان و طول استحال

فرض کنید میدانی در فضایی با طول L وجود دارد:

$$\nabla^2 A = \mu \sigma \frac{\partial A}{\partial t}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla^2 A = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial A}{\partial x} \simeq \frac{A}{L^2} \\ \frac{\partial A}{\partial t} \simeq \frac{A}{\tau} \end{array} \right. \Rightarrow \frac{A}{L^2} \simeq \mu \sigma \frac{A}{\tau}$$

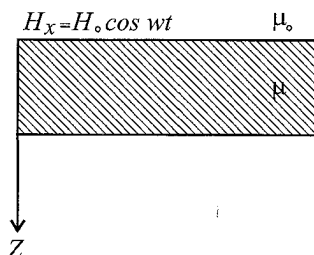
در رابطه فوق τ زمان استحالہ میدان است.

$$\Rightarrow \tau \simeq \mu\sigma L^2 \quad (5-161)$$

$$\tau = \frac{1}{\nu} \quad (\nu \text{ فرکانس})$$

$$\frac{1}{\nu} \simeq \mu\sigma L^2 \Rightarrow L \simeq \frac{1}{\sqrt{\mu\sigma\nu}} \quad (5-162)$$

عمق پوسته



در شکل فوق در ناحیه $z < 0$ و روی سطح $z = 0^-$ یک میدان مغناطیسی وابسته به زمان وجود دارد و ما می‌خواهیم میدان در ناحیه $z > 0$ را با توجه به شرایط مرزی به دست آوریم. معادله پخش \mathbf{B} و خطی بودن محیط:

$$\nabla^2 B = \mu\sigma \frac{\partial B}{\partial t} \Rightarrow B = \mu H \quad ; \quad \nabla^2 H = \mu\sigma \frac{\partial H}{\partial t}$$

ایجاب می‌کند که در $z > 0$ نیز تنها مؤلفه x میدان در سرتاسر ناحیه وجود داشته باشد که تابع مکان و زمان است:

$$H_x = H_x(z, t)$$

برای راحتی از نمادگذاری مختلط بهره می‌گیریم به گونه‌ای که می‌نویسیم:

$$H_x = H_0 e^{-i\omega t}$$

واضح است که قسمت حقیقی عبارت فوق، میدان در ناحیه $z < 0$ را به دست می‌دهد. به همین ترتیب برای ناحیه $z > 0$ داریم:

$$H_x(z, t) = h(z)e^{-i\omega t}$$

با توجه به معادله پخش H داریم:

$$\frac{d^2 H}{dz^2} = \mu\sigma \frac{\partial H}{\partial t} \Rightarrow \frac{d^2 h(z)}{dz^2} = \mu\sigma(-i\omega h(z))$$

$$\Rightarrow \left(\frac{d^2}{dz^2} + i\mu\sigma\omega \right) h(z) = 0 \quad (5-163)$$

این معادله جوابی به فرم $h(z) = e^{ikz}$ دارد که مقدار k عبارت است از:

$$k^2 = i\mu\sigma\omega \Rightarrow k = (\sqrt{\mu\sigma\omega})\sqrt{i}$$

$$\sqrt{i} = \pm \frac{(1+i)}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow k = \pm(1+i)\sqrt{\frac{\mu\sigma\omega}{2}} \quad (5-164)$$

اثبات رابطه‌ی $\sqrt{i} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$

$$z^2 = i \Rightarrow (a+ib)^2 = i \Rightarrow (a^2 - b^2) + i(2ab) = i$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = 0 \Rightarrow a = \pm b \\ 2ab = 1 \Rightarrow ab = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = b = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ a = b = -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

اکنون با تعریف عمق پیوسته‌ی δ داریم:

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu\sigma\omega}} \Rightarrow k = \pm \frac{1}{\delta}(1+i)$$

$$\Rightarrow h(z) = Ae^{+i\frac{z}{\delta}(1+i)} + Be^{-\frac{z}{\delta}(1+i)}$$

$$\Rightarrow h(z) = Ae^{i\left(\frac{z}{\delta} - \frac{z}{\delta}\right)} + Be^{-i\left(\frac{z}{\delta} + \frac{z}{\delta}\right)}$$

$$H_x(z, t) = h(z)e^{-i\omega t} = Ae^{-\frac{z}{\delta}}e^{i\left(\frac{z}{\delta} - \omega t\right)} + Be^{\frac{z}{\delta}}e^{-i\left(\frac{z}{\delta} + \omega t\right)}$$

چون در $\infty \rightarrow z$ میدان بایستی صفر باشد لذا ضریب $B = 0$ خواهد بود.

$$H_x(z, t) = Ae^{-\frac{z}{\delta}}e^{i\left(\frac{z}{\delta} - \omega t\right)}$$

از پیوستگی میدان در $z = 0$ داریم:

$$\begin{aligned} H(0, t) &= H_x(0, t) \Rightarrow H_x(z, t) = H_0 e^{-\frac{z}{\delta}} e^{i\left(\frac{z}{\delta} - \omega t\right)} \\ \Rightarrow H_0 &= A \end{aligned}$$

اما جواب نهایی، قسمت حقیقی عبارت فوق است که برابر است با:

$$H_x(z, t) = H_0 e^{-\frac{z}{\delta}} \cos\left(\frac{z}{\delta} - \omega t\right) \quad (5-166)$$

با توجه به قانون القای فارادی به علت تغییرات زمانی \mathbf{H} یک میدان الکتریکی ایجاد می‌شود که طبق قانون آمپر و اهم داریم

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{H} &= \mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} \Rightarrow \nabla \times H_x = \frac{dH_x}{dz} = \sigma E_y \\ \Rightarrow E_y &= \frac{1}{\sigma} \frac{dH_x}{dz} = \frac{1}{\sigma} (ik) H_x \Rightarrow E_y = \frac{1}{\sigma} i \left(\frac{1+i}{\delta} \right) H_x \\ &= \frac{-1+i}{\sigma \delta} H_0 e^{-\frac{z}{\delta}} e^{i\left(\frac{z}{\delta} - \omega t\right)} \\ \Rightarrow E_y &= \frac{H_0 e^{-\frac{z}{\delta}}}{\sigma \delta} (-1+i) e^{i\left(\frac{z}{\delta} - \omega t\right)}\end{aligned}$$

اما داریم:

$$\begin{aligned}-1+i &= \sqrt{2} e^{i\left(\frac{3\pi}{4}\right)}, \quad \frac{1}{\sigma \delta} = \mu \frac{\delta \omega}{\gamma} \\ \Rightarrow E_y &= \frac{H_0 \mu \delta \omega}{\gamma} e^{-\frac{z}{\delta}} (\sqrt{2}) e^{i\left(\frac{z}{\delta} - \omega t + \frac{3\pi}{4}\right)}\end{aligned}$$

جواب ما قسمت حقیقی عبارت فوق است:

$$E_y = \frac{\mu \delta \omega}{\sqrt{2}} H_0 e^{-\frac{z}{\delta}} \cos \left(\frac{z}{\delta} - \omega t + \frac{3\pi}{4} \right) \quad (5-167)$$

$$J_y = \sigma E_y = \frac{\sqrt{2}}{\delta} H_0 e^{-\frac{z}{\delta}} \cos \left(\frac{z}{\delta} - \omega t + \frac{3\pi}{4} \right) \quad (5-168)$$

یعنی یک جریان جایگزیده به وجود آمده است که چگالی سطحی آن عبارت است:

$$K_y(t) = \int_0^{\infty} J_y(z, t) dz$$

برای انتگرال‌گیری می‌توان دوباره از صورت نمایی J_y یا E_y استفاده کرد:

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty} \frac{\sqrt{2}}{\delta} H_0 e^{-\frac{z}{\delta}} e^{i\left(\frac{z}{\delta} - \omega t + \frac{3\pi}{4}\right)} dz &= \frac{\sqrt{2} H_0}{\delta} e^{i\left(-\omega t + \frac{3\pi}{4}\right)} \int_0^{\infty} e^{z\left(-\frac{1}{\delta} + \frac{i}{\delta}\right)} dz \\ \int_0^{\infty} e^{z\left(-\frac{1}{\delta} + \frac{i}{\delta}\right)} dz &= \frac{1}{-\frac{1}{\delta} + \frac{i}{\delta}} e^{z\left(-\frac{1}{\delta} + \frac{i}{\delta}\right)} \Big|_0^{\infty} \\ &= 0 - \frac{1}{-\frac{1}{\delta} + \frac{i}{\delta}} = \frac{-\delta}{-1+i} = -\delta \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-i\frac{3\pi}{4}}\end{aligned}$$

$$K_y(t) = \frac{\sqrt{2}H_0}{\delta} e^{i\left(-\omega t + \frac{3\pi}{4}\right)} \left(\frac{-\delta}{\sqrt{2}}\right) e^{-i\frac{3\pi}{4}} = -H_0 e^{-i\omega t}$$

که قسمت حقیقی آن مورد نظر است

$$K_y(t) = -H_0 \cos(\omega t)$$

برای گرمای مقاومتی داریم:

$$P = IV = \langle J.E \rangle$$

با توجه به ۵-۱۶۷ و ۵-۱۶۸ داریم:

$$P = \left(\frac{\sqrt{2}}{\delta} H_0 e^{-\frac{z}{\delta}}\right) \left(\frac{\mu\omega\delta}{\sqrt{2}} H_0 e^{-\frac{z}{\delta}}\right) \left\langle \cos^2\left(\frac{z}{\delta} - \omega t + \frac{3\pi}{4}\right) \right\rangle$$

$$\langle \cos^2(\omega t) \rangle = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow P = \frac{1}{2} \mu\omega H_0^2 e^{-\frac{2z}{\delta}} \quad (5-169)$$

فصل ۶

معادلات ماکسول، الکترومغناطیسی

ماکروسکوپی و قوانین بقا

در فصول قبل بیش‌تر با مسائل حالت پایدار در الکتروستاتیک و مغناطیس سروکار داشتیم. در آنجا روش‌های ریاضی مشابهی در این دو مبحث به‌کار گرفته شدند، اما پدیده‌های الکتریکی و مغناطیسی به‌گونه‌ای مستقل از هم در نظر گرفته شدند. تنها پیوند بین آن‌ها این بود که جریان‌هایی که باعث ایجاد میدان‌های مغناطیسی می‌شوند اساساً در نهاد همان بارهای در حال حرکت الکتریکی هستند. طبیعت تقریباً مستقل پدیده‌های الکتریکی و مغناطیسی، هنگامی‌که مسائل وابسته به زمان را نیز در نظر بگیریم از بین خواهد رفت. کشف فارادی در مورد القاء، (بخش ۱۵-۵) این استقلال را از بین خواهد برد.

میدان‌های مغناطیسی متغیر با زمان باعث به‌وجود آمدن میدان‌های الکتریکی و بالعکس می‌شوند. بدین ترتیب به‌جای میدان‌های الکتریکی یا مغناطیسی، باید از میدان‌های الکترومغناطیسی صحبت کنیم. مفهوم کامل رابطه‌ی درونی بین میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی و تطابق ذاتی بین آن‌ها تنها در چارچوب نسبیت خاص مشخص خواهد شد (فصل ۱۱).

در حال حاضر خودمان را مصروف بررسی پدیده‌های اساسی، و استنتاج مجموعه معادلاتی می‌کنیم که به‌عنوان معادلات ماکسول شناخته شده‌اند و رفتار میدان‌های الکترومغناطیسی را توصیف می‌کنند.

پتانسیل‌های برداری و اسکالر، تبدیلات پیمانه‌ای، و توابع گرین برای معادله‌ی موج، بانضمام جواب‌های تأخیری برای میدان‌ها و همچنین پتانسیل، در آینده مورد بررسی قرار خواهند گرفت. در این فصل استخراج معادلات ماکروسکوپی الکترومغناطیس پیگیری می‌شود. قوانین بقای انرژی و اندازه حرکت، و خواص تبدیلی کمیت‌های الکترومغناطیسی، و همچنین موضوع جالب تک‌قطبی‌های مغناطیسی مورد بحث قرار گرفته‌اند.

۱-۶ جریان جابه‌جایی ماکسول؛ معادلات ماکسول

قوانین اساسی الکتریسیته و مغناطیسی را که تاکنون مورد بحث قرار دادیم، می‌توان به صورت دیفرانسیلی با چهار معادله زیر (و نه هنوز معادلات ماکسول) خلاصه نمود

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{D} &= \rho && \text{قانون کولن} \\ \nabla \times \mathbf{H} &= \mathbf{J} && \text{قانون آمپر } (\nabla \cdot \mathbf{J} = 0) \\ \nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= 0 && \text{قانون فارادی} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 && \text{عدم وجود قطب‌های مغناطیسی آزاد} \end{aligned} \quad (1-6)$$

به یاد بیاوریم که تمامی این قوانین، به جز قانون فارادی، از مشاهده‌های حالت پایدار به دست آمده‌اند. در نتیجه از نقطه نظر منطقی هیچ دلیلی برای پذیرش اینکه معادله‌های استاتیک برای میدان‌های وابسته به زمان، بدون تغییر صادق باشند، وجود ندارد. درحقیقت معادلات موجود در مجموعه‌ی (۱-۶) به این صورتی که واقع شده‌اند، ناسازگارند.

این موضوع نبوغ کسی چون جی. سی. ماکسول را می‌طلبید که با ملاحظه عدم سازگاری در معادلات ۱-۶ با مشاهدات تجربی، توسط خود وی برانگیخته شود، و آن‌ها را به صورت یک مجموعه‌ی هماهنگ اصلاح نماید، تا بدین وسیله بتواند پدیده‌های جدید را نیز بفهماند. اما متعاقب آن این مجموعه با تمام جزئیاتش با آزمایش نیز اثبات شد. به‌خاطر این شاهکار زیرکانه در سال ۱۸۶۵، مجموعه‌ی اصلاح شده معادلات، به حق به‌عنوان معادلات ماکسول شناخته شدند.

معادله‌ی ناقص در اینجا قانون آمپر است. این معادله برای پدیده‌های مربوط به جریان حالت پایدار با $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$ نتیجه شده است. لازمی فوق روی دیورژانس \mathbf{J} کاملاً در قانون آمپر لحاظ شده است، چنانکه می‌توان این موضوع را با گرفتن دیورژانس از دو طرف نیز ملاحظه کرد

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) = 0 \quad (2-6)$$

در حالی که $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$ برای مسائل حالت پایدار معتبر است، رابطه‌ی کلی با توجه به معادله پیوستگی بار و جریان مشخص می‌شود

$$\nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (3-6)$$

آنچه ماکسول ملاحظه کرد این بود که معادله پیوستگی می‌تواند با استفاده از قانون کولن [معادله‌ی اول مجموعه (۱-۶)] به یک دیورژانس صفر تبدیل شود. بنابراین

$$\nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = \nabla \cdot \left(\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) = 0 \quad (4-6)$$

بدین ترتیب ماکسول، \mathbf{J} در قانون آمپر را، با تعمیم آن برای میدان‌های وابسته به زمان جایگزین کرد

$$\mathbf{J} \rightarrow \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

و بدین ترتیب قانون آمپر به صورت زیر درآمد

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (5-6)$$

قانونی هنوز مشابه؛ به لحاظ آزمایشی اثبات شده؛ قانونی برای پدیده‌های حالت پایدار و البته اکنون سازگار به لحاظ ریاضی با معادله‌ی پیوستگی (۳-۶) برای میدان‌های وابسته به زمان.

ماکسول جمله‌ی اضافی در (۵-۶) را جریان جابه‌جایی نامید. حضور این جمله بدین معنی است که یک میدان الکتریکی متغیر با زمان، باعث ایجاد یک میدان مغناطیسی می‌شود؛ حتی بدون حضور یک جریان (عکس قانون فارادی).

افزودن این جمله ضروری به قانون آمپر، از اهمیت قاطعی برای میدان‌هایی که به طور سریع افت و خیز می‌کنند برخوردار است. بدون حضور این جمله، تابش الکترومغناطیسی وجود نمی‌داشت، و از بیش‌ترین قسمت باقیمانده این کتاب باید صرف نظر می‌شد. این پیشگویی ماکسول بود که نور یک پدیده‌ی موجی الکترومغناطیسی است، و اینکه امواج الکترومغناطیسی از تمام فرکانس‌ها می‌توانند تولید شوند، که البته این موضوع توجه تمامی فیزیکدانان را نیز به خود جلب کرد و تحقیقات تجربی و نظری زیادی را در الکترومغناطیس در اواخر قرن نوزدهم به خود برانگیخت.

مجموعه‌ی چهار معادله‌ی

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{D} &= \rho & \nabla \times \mathbf{H} &= \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 & \nabla \times \mathbf{E} &+ \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0 \end{aligned} \quad (6-6)$$

که به عنوان معادلات ماکسول شناخته شده‌اند، اساس تمام پدیده‌های الکترومغناطیس کلاسیک را تشکیل می‌دهند. وقتی این معادله‌ها با معادله‌ی نیروی لورنتز و قانون دوم نیوتن برای حرکت ترکیب شوند، توصیفی کامل از دینامیک کلاسیک ذرات باردار برهم‌کنش‌کننده و میدان‌های مغناطیسی را فراهم خواهند کرد (بخش (۷-۶) و فصول ۱۲ و ۱۶ را ملاحظه کنید).

حدود اعتبار معادله‌های ماکسول به صورت پرسش‌هایی در مورد شرایط مرزی روی مؤلفه‌های عمودی و مساسی میدان‌ها در فصل مشترک بین محیط‌های مختلف در مقدمه مورد بحث قرار گرفت. روابط ساختاری مربوطکننده‌ی \mathbf{E} و \mathbf{B} با \mathbf{D} و \mathbf{H} تا اندازه‌ای در مقدمه اشاره شد، و برای پدیده‌های استاتیکی نیز در فصول ۴ و ۵ مورد بحث قرار گرفت. در آینده در این فصل و فصل ۷ بیش‌تر در این مورد سخن گفته خواهد شد. واحدهای به‌کارگرفته‌شده در نوشتن معادلات ماکسول (۶-۶) همان واحدهای فصول قبل هستند یعنی SI. برای خوانندگانی که بیش‌تر با واحدهای دیگری همچون گوسی کار می‌کنند، جدول ۲ی ضمیمه معادلات اساسی را در سیستم‌های معمول‌تر خلاصه کرده است. جدول ۳ی ضمیمه نیز تبدیل هر معادله‌ای را از گوسی به SI و بالعکس امکان‌پذیر می‌کند، در عین اینکه جدول ۴ تبدیلات متناظر را برای مقادیر مشخص هر متغیری ارائه می‌کند.

۶-۲ پتانسیل‌های اسکالر و برداری

معادلات ماکسول مجموعه‌ای از معادلات دیفرانسیل جزئی مرتبه‌ی اول جفت‌شده‌ای هستند که مؤلفه‌های مختلف میدان‌های مغناطیسی و الکتریکی را به هم ربط می‌دهند. این معادلات را می‌توان در وضعیت‌های ساده‌ای که واقع می‌شوند حل نمود.

اما اغلب معرفی پتانسیل‌ها و به‌دست آوردن تعداد کم‌تری از معادلات مرتبه‌ی دوم در عین اینکه تعدادی از معادلات ماکسول را نیز به‌گونه‌ای یکسان برآورده کنند مفید است. تاکنون با این مفهوم در الکترواستاتیک و مگنتواستاتیک آشنا شده‌ایم و در آنجا پتانسیل اسکالر Φ و پتانسیل برداری \mathbf{A} را مورد استفاده قرار داده‌ایم. چون $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ هنوز صادق است، می‌توانیم \mathbf{B} را برحسب یک پتانسیل برداری تعریف کنیم

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (۷-۶)$$

در این صورت معادله همگن دیگر موجود در مجموعه (۶-۶) [یعنی قانون فارادی؛ $\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho$] را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\nabla \times \left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0 \quad (۸-۶)$$

این بدان معنی است که، کمیتی با کرل صفر در (۸-۶) را می‌توان به صورت گرادیان یک پتانسیل اسکالر یعنی تابع اسکالر Φ نوشت

$$\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\nabla \Phi \quad (۹-۶)$$

یا

$$\mathbf{E} = -\nabla \Phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$$

تعریف \mathbf{E} و \mathbf{B} برحسب پتانسیل‌های \mathbf{A} و Φ ، طبق روابط (۶-۷) و (۶-۹) به‌گونه‌ای یکسان دو معادله‌ی همگن ماکسول را برآورده می‌کنند. رفتار دینامیکی \mathbf{A} و Φ با دو معادله‌ی غیرهمگن موجود در مجموعه (۶-۶)، تعیین می‌شود.

در این مرحله مناسب است ملاحظات خودمان را به معادلات ماکسول در خلاء محدود کنیم. در این صورت معادلات غیرهمگن در مجموعه‌ی (۶-۶) را می‌توان برحسب پتانسیل‌ها به صورت زیر نوشت

$$\nabla^2 \Phi + \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \mathbf{A}) = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (10-6)$$

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \nabla \left(\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} \right) = -\mu_0 \mathbf{J} \quad (11-6)$$

حال با این کار مجموعه چهار معادله‌ی ماکسول را به دو معادله کاهش داده‌ایم. اما هنوز آن‌ها معادلاتی جفت شده هستند. جفت‌ناشدگی را می‌توان با بهره‌برداری از اختیاری که در تعریف پتانسیل‌ها لحاظ شده است، به‌انجام رساند. چون \mathbf{B} طبق (۶-۷) برحسب \mathbf{A} تعریف شده است، پتانسیل برداری فوق تا این گستره که بتوان گرادیان یک تابع اسکالر Λ را بدان افزود اختیاری است. بدین ترتیب \mathbf{B} با تبدیل

$$\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla \Lambda \quad (12-6)$$

بدون تغییر باقی می‌ماند. به‌همین ترتیب برای اینکه میدان الکتریکی (۶-۹) بدون تغییر بماند پتانسیل اسکالر نیز باید به‌طور همزمان به صورت زیر تبدیل شود

$$\Phi \rightarrow \Phi' = \Phi - \frac{\partial \Lambda}{\partial t} \quad (13-6)$$

آزادی به‌وجود آمده توسط (۶-۱۲) و (۶-۱۳) بدین معنی است که می‌توانیم مجموعه‌ای از پتانسیل‌های (\mathbf{A}, Φ) را به‌گونه‌ای انتخاب کنیم که شرط لورنتز (۱۸۶۷)* را برآورده کنند

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0 \quad (14-6)$$

این کار جفت‌شدگی معادلات (۶-۱۰) و (۶-۱۱) را برطرف کرده و دو معادله‌ی موج غیرهمگن را باقی خواهد گذاشت؛ یکی برای Φ و یکی برای \mathbf{A}

$$\nabla^2 \Phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (15-6)$$

(* مرجع زیر را ملاحظه کنید

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \mathbf{J} \quad (۱۶-۶)$$

معادلات (۱۵-۶) و (۱۶-۶) به علاوه معادله (۱۴-۶) چنانکه توسط لورنز و دیگران نیز مشاهده شد، تشکیل مجموعه‌ای از معادلات را می‌دهند که در تمامی جنبه‌ها با معادلات ماکسول معادلند.

۳-۶ تبدیلات پیمانه‌ای، پیمانه لورنز، پیمانه کولن

تبدیل (۱۲-۶) و (۱۳-۶) یک تبدیل پیمانه‌ای، و ناوردایی میدان‌ها تحت یک چنین تبدیلاتی ناوردایی پیمانه‌ای نامیده می‌شود. برای ملاحظه اینکه همواره پتانسیل‌ها را می‌توان به‌گونه‌ای یافت که شرط لورنز را برآورده کنند، فرض کنید که پتانسیل‌های \mathbf{A} و Φ که (۱۰-۶) و (۱۱-۶) را برآورده می‌کنند، (۱۴-۶) را برآورده نکنند. در این صورت یک تبدیل پیمانه‌ای برای پتانسیل‌های \mathbf{A}' و Φ' درست می‌کنیم و می‌خواهیم که \mathbf{A}' و Φ' شرط لورنز زیر را برآورده کنند

$$\nabla \cdot \mathbf{A}' + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \Phi'}{\partial t} = 0 = \nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \nabla^2 \Lambda - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial t^2} \quad (۱۷-۶)$$

با توجه به این موضوع، مشروط بر اینکه بتوانیم تابع پیمانه‌ای Λ را طوری پیدا کنیم که رابطه‌ی

$$\nabla^2 \Lambda - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial t^2} = - \left(\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) \quad (۱۸-۶)$$

را برآورده کند، پتانسیل‌های جدید \mathbf{A}' و Φ' شرط لورنز و معادلات موج (۱۵-۶) و (۱۶-۶) را برآورده خواهند کرد.

حتی برای پتانسیل‌هایی که شرط لورنز (۱۴-۶) را برآورده می‌کنند نیز اختیار وجود دارد. به‌وضوح تبدیلی پیمانه‌ای محدودشده‌ی

$$\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A} + \nabla \Lambda \quad ; \quad \Phi \rightarrow \Phi - \frac{\partial \Lambda}{\partial t} \quad (۱۹-۶)$$

که در آن

$$\nabla^2 \Lambda - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial t^2} = 0 \quad (۲۰-۶)$$

شرط لورنز را حفظ می‌کند، مشروط بر اینکه \mathbf{A} و Φ از اول این شرط را برآورده کرده باشند. گفته می‌شود که تمام پتانسیل‌های موجود در این رده‌ی محدود، به پیمانه‌ی لورنز متعلقند.

پیمانه‌ی لورنز معمولاً به دو جهت مورد استفاده قرار می‌گیرد، ابتدا به‌خاطر اینکه این پیمانه منجر به معادلات موج (۱۵-۶) و (۱۶-۶) می‌شود، و دوم به این جهت که این پیمانه مفهومی مستقل از سیستم

مختصات مورد نظر است و به گونه‌ای است که به طور طبیعی با ملاحظات نسبیت خاص نیز جور درمی‌آید (بخش ۹-۱۱ را ملاحظه کنید).

پیمانه‌ی مفید دیگر برای پتانسیل‌ها، پیمانه‌ی کولن، تابشی یا پیمانه‌ی عرضی است. این پیمانه‌ی است که در آن داریم

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0 \quad (21-6)$$

از (۶-۱۰) ملاحظه می‌شود که پتانسیل اسکالر، معادله‌ی پواسن

$$\nabla^2 \Phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (22-6)$$

را برآورده می‌کند همراه با جواب

$$\Phi(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{x}', t')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x' \quad (23-6)$$

پتانسیل اسکالر فوق، همان پتانسیل کولونی لحظه‌ای ناشی از چگالی بار $\rho(\mathbf{x}, t)$ است. این موضوع مبدأ نام ”پیمانه‌ی کولنی“ است.

پتانسیل برداری معادله‌ی موج ناهمگن زیر را برآورده می‌کند

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \mathbf{J} + \frac{1}{c^2} \nabla \frac{\partial \Phi}{\partial t} \quad (24-6)$$

در اصل می‌توان جمله‌ی شامل پتانسیل اسکالر را از (۶-۲۳) محاسبه نمود. چون این جمله عملگر گرادیان را در خود دارد، لذا جمله‌ای غیرچرخشی^۱ است، بدین معنی که دارای کرلی برابر صفر است. این موضوع اشاره می‌کند که امکان حذف یک جزء متناظر از چگالی جریان وجود دارد. چگالی جریان (یا هر میدان برداری دیگری) را می‌توان به صورت مجموع دو جمله‌ی زیر نوشت

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_l + \mathbf{J}_t \quad (25-6)$$

که در آن \mathbf{J}_l ، جریان غیرچرخشی یا طولی نامیده می‌شود و دارای $\nabla \times \mathbf{J}_l = 0$ است، در حالی که \mathbf{J}_t جریان سلونوئیدی یا عرضی نامیده می‌شود و دارای $\nabla \cdot \mathbf{J}_t = 0$. با شروع از اتحاد برداری

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{J}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{J}) - \nabla^2 \mathbf{J} \quad (26-6)$$

همراه با $\left(\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right) = -4\pi\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$ می‌توان نشان داد که \mathbf{J}_l و \mathbf{J}_t را می‌شود به طور صریح از \mathbf{J} ، به صورتی که در زیر آمده است درست کرد

$$\mathbf{J}_l = -\frac{1}{4\pi} \nabla \int \frac{\nabla' \cdot \mathbf{J}}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x' \quad (27-6)$$

$$\mathbf{J}_t = \frac{1}{4\pi} \nabla \times \nabla \times \int \frac{\mathbf{J}}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x' \quad (28-6)$$

با کمک معادله‌ی پیوستگی و معادله‌ی (۲۳-۶) ملاحظه می‌شود که

$$\frac{1}{c^2} \nabla \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \mu_0 \mathbf{J}_t \quad (29-6)$$

بنابراین چشمه‌ی معادله‌ی موج برای \mathbf{A} را می‌توان به‌طور کامل برحسب جریان عرضی (۲۸-۶) بیان نمود

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \mathbf{J}_t \quad (30-6)$$

البته، این معادله میدایی برای نام "پیمانه‌ی عرضی" است.

نام "پیمانه‌ی تابشی" از این واقعیت ناشی می‌شود که میدان‌های تابشی عرضی تنها با پتانسیل برداری مشخص می‌شوند؛ پتانسیل کولونی لحظه‌ای تنها در میدان‌های نزدیک سهیم است. این پیمانه به‌ویژه در الکترودینامیک کوانتومی نیز مفید است و یک توصیف کوانتوم مکانیکی از کوانتس فوٹون‌ها تنها مستلزم وجود پتانسیل برداری است.

پیمانه‌ی کولونی یا پیمانه‌ی عرضی اغلب هنگامی که هیچ چشمه‌ای وجود ندارد مورد استفاده قرار می‌گیرد. در این صورت $\Phi = 0$ بوده و پتانسیل برداری \mathbf{A} معادله‌ی موج همگن را برآورده می‌کند. میدان‌ها توسط روابط زیر مشخص می‌شوند

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad (31-6)$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

در اینجا به یک ویژگی از پیمانه‌ی کولن اشاره می‌کنیم. به‌خوبی شناخته شده است که اغتشاش‌های الکترومغناطیسی با سرعت محدودی منتشر می‌شوند. با این همه معادله‌ی (۲۳-۶) نشان می‌دهد که پتانسیل اسکالر به‌طور لحظه‌ای در هر جایی از فضا منتشر می‌شود. از طرف دیگر، پتانسیل برداری معادله‌ی موج (۳۰-۶) را با سرعت محدود انتشار اشاره‌شده‌ی c در آن برآورده می‌کند. در نظر اجمالی اول، دیدن اینکه چگونه از رفتار غیرفیزیکی فوق به‌طور واضح اجتناب شده است یک معما به‌نظر می‌رسد. یک اظهارنظر مقدماتی این است که، این میدان‌ها هستند و نه پتانسیل‌ها، که ما با آن‌ها در ارتباط هستیم. اظهارنظر دیگر این است که حتی اگر \mathbf{J} جایگزیده باشد* جریان عرضی (۲۸-۶) روی تمام فضا گسترش می‌یابد.

* برای یک بحث دقیق از علیت در پیمانه‌ی کولنی مرجع زیر را ملاحظه کنید

۴-۶ توابع گرین برای معادله‌ی موج

معادلات (۱۵-۶)، (۱۶-۶) و (۳۰-۶) تماماً دارای ساختار اساسی زیرند

$$\nabla^2 \Psi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = -4\pi f(\mathbf{x}, t) \quad (۳۲-۶)$$

که در آن $f(\mathbf{x}, t)$ یک توزیع چشمه مشخص است. عامل c سرعت انتشار در محیط است که در اینجا محیط بدون پاشندگی فرض شده است. برای حل معادله‌ی (۳۲-۶) دقیقاً همانند الکترواستاتیک، یافتن یک تابع گرین مفید است.

برای این کار وضعیت ساده‌ی عدم وجود سطوح مرزی را در نظر می‌گیریم، و با معرفی یک تبدیل فوریه نسبت به فرکانس برای کنار گذاشتن بستگی صریح زمانی اقدام می‌کنیم. فرض می‌کنیم $\Psi(\mathbf{x}, t)$ و $f(\mathbf{x}, t)$ دارای نمایش‌های انتگرالی زیر باشند

$$\begin{cases} \Psi(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(\mathbf{x}, \omega) e^{-i\omega t} d\omega \\ f(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\mathbf{x}, \omega) e^{-i\omega t} d\omega \end{cases} \quad (۳۳-۶)$$

با تبدیل‌های معکوس زیر

$$\begin{cases} \Psi(\mathbf{x}, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(\mathbf{x}, t) e^{i\omega t} dt \\ f(\mathbf{x}, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\mathbf{x}, t) e^{i\omega t} dt \end{cases} \quad (۳۴-۶)$$

وقتی نمایش‌های (۳۳-۶) در (۳۲-۶) قرار گیرند، انتظار می‌رود که تبدیل فوریه $\Psi(\mathbf{x}, \omega)$ ، معادله‌ی موج ناهمگن هلمهولتز زیر را به‌ازای هر مقداری از ω برآورده کند

$$(\nabla^2 + k^2)\Psi(\mathbf{x}, \omega) = -4\pi f(\mathbf{x}, \omega) \quad (۳۵-۶)$$

در اینجا $k = \frac{\omega}{c}$ عدد موج وابسته به فرکانس ω است. در این شکل محدودیت در عدم وجود پاشیدگی ضروری نیست. یک فرض قبلی این است که هر رابطه‌ای بین k و ω مجاز شمرده شود، گرچه علیت بعضی از محدودیت‌ها را نیز تحمیل می‌کند (بخش (۷-۱۰) را ملاحظه کنید).

معادله‌ی (۳۵-۶) یک معادله‌ی دیفرانسیل جزئی بیضوی است، مشابه با معادله‌ی پواسن؛ که با $k = 0$ به این معادله (پواسن) کاهش می‌یابد. تابع گرین $G(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ مناسب برای (۳۵-۶) معادله‌ی ناهمگن زیر را برآورده می‌کند

$$(\nabla^2 + k^2)G_k(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = -4\pi\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \quad (۳۶-۶)$$

اگر سطوح مرزی نداشته باشیم، تابع گرین می‌تواند تنها به $\mathbf{R} = \mathbf{x} - \mathbf{x}'$ وابسته باشد، و درحقیقت باید متقارن کروی باشد، یعنی تنها به $\mathbf{R} = |\mathbf{R}|$ وابسته باشد. با توجه به شکل عملگر لاپلاسیان در مختصات کروی [۱-۳] را ملاحظه کنید] واضح است که $G_k(R)$ معادله‌ی زیر را برآورده می‌کند

$$\frac{1}{R} \frac{d^2}{dR^2} (RG_k) + k^2 G_k = -4\pi\delta(\mathbf{R}) \quad (۳۷-۶)$$

در هر مکانی، به جز $R = 0$ ، معادله‌ی همگن $RG_k(R)$ ،

$$\frac{d^2}{dR^2} (RG_k) + k^2 (RG_k) = 0$$

را با جواب

$$RG_k(R) = Ae^{ikR} + Be^{-ikR}$$

برآورده می‌کند. علاوه بر این، تابع دلتا در (۳۷-۶) دارای تأثیری تنها در $R \rightarrow 0$ است. در این حد ($\mathbf{R} \rightarrow 0$) معادله‌ی فوق به معادله‌ی پواسن کاهش می‌یابد، چرا که $kR \ll 1$ است. بنابراین با توجه به الکترواستاتیک می‌دانیم که بهنجارش صحیح عبارت است از

$$\lim_{kR \rightarrow 0} G_k(R) = \frac{1}{R} \quad (۳۸-۶)$$

بدین ترتیب جواب عمومی تابع گرین عبارت است از

$$G_k(R) = AG_k^{(+)}(R) + BG_k^{(-)}(R) \quad (۳۹-۶)$$

که در آن

$$G^{(\pm)}(R) = \frac{e^{\pm ikR}}{R} \quad (۴۰-۶)$$

با $A + B = 1$.

با توجه به قرارداد (۳۳-۶) برای بستگی زمانی، جمله‌ی اول در (۳۹-۶) مبین یک موج کروی واگرا است از مبدأ منتشر می‌شود، در حالی که جمله‌ی دوم یک موج کروی همگرا را نشان می‌دهد.

انتخاب A و B در (۳۹-۶) بستگی به شرایط مرزی در زمانی دارد که مسئله‌ی فیزیکی را مشخص می‌کند. به‌طور شهودی واضح است که اگر یک چشمه تا زمان $t = 0$ خاموش باشد و سپس شروع به‌کار کند، تابع گرین مناسب همان جمله‌ی اول در (۳۹-۶) خواهد بود، متناظر با امواجی که پس از شروع به‌کار چشمه به طرف خارج تابیده می‌شوند. مطمئناً یک چنین توصیفی صحیح و علاوه‌بر این مناسب است ولی لازم یا منحصر به‌فرد نیست. با تعیین مناسب دامنه‌ی موج در زمان‌های مرزی، امکان به‌کارگیری جمله‌ی

دوم، و نه جمله‌ی اول در (۳۹-۶)، برای توصیف عملکرد چشمه وجود دارد. جهت درک رفتارهای زمانی متفاوت وابسته به $G_k^{(-)}$ و $G_k^{(+)}$ ، احتیاج به ساختن توابع گرین وابسته به زمان متناظری را داریم که معادله‌ی زیر را برآورده کنند

$$\left(\nabla_x^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) G^{(\pm)}(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t') = -4\pi\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')\delta(t - t') \quad (41-6)$$

با استفاده از (۳۴-۶) ملاحظه می‌کنیم که جمله مربوط به چشمه، برای (۳۵-۶) عبارت است از $-4\pi\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')e^{i\omega t'}$

بنابراین جواب‌ها عبارتند از $G_k^{(\pm)}(R)e^{i\omega t'}$. با توجه به (۳۳-۶) توابع گرین وابسته به زمان عبارتند از

$$G^{(\pm)}(R, \tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\pm ikR}}{R} \cdot e^{-i\omega\tau} d\omega \quad (42-6)$$

که در آن $\tau = t - t'$ ، زمان نسبی ظاهر شده در (۴۱-۶) است. بدین ترتیب، تابع گرین فضای نامحدود تابعی از تنها فاصله‌ی نسبی R ، و زمان نسبی τ ، بین چشمه و نقطه مشاهده است. برای یک محیط غیرپاشنده که در آن $k = \frac{\omega}{c}$ است، انتگرال موجود در (۴۲-۶) یک تابع دلتا است. توابع گرین عبارتند از

$$G^{(\pm)}(R, \tau) = \frac{1}{R} \delta\left(\tau \mp \frac{R}{c}\right) \quad (43-6)$$

یا به طور صریح‌تر

$$G^{(\pm)}(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t') = \frac{\delta\left(t' - \left[t \mp \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}{c}\right]\right)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \quad (44-6)$$

تابع $G^{(+)}$ تابع گرین تأخیری نامیده می‌شود، چراکه رفتار علیّی وابسته به یک اغتشاش موجی را به نمایش می‌گذارد. شناسه‌ی تابع دلتا نشان می‌دهد که یک اثر مشاهده شده در نقطه‌ی \mathbf{x} و در زمان t با عمل یک چشمه در فاصله دور R ، در یک زمان قبل‌تر یا تأخیری $t' = \frac{t - R}{c}$ ایجاد شده است.

اختلاف زمانی $\frac{R}{c}$ ، دقیقاً زمان انتشار اغتشاش از یک نقطه به نقطه‌ی دیگر است. به‌طور مشابه $G^{(-)}$ تابع گرین پیشرفته نامیده می‌شود.

انتگرال‌های ویژه‌ی معادله‌ی موج غیرهمگن (۳۲-۶) عبارتند از

$$\Psi^{(\pm)}(\mathbf{x}, t) = \iiint G^{(\pm)}(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t') f(\mathbf{x}', t') d^3x' dt'$$

برای مشخص کردن یک مسئله‌ی فیزیکی معین، جواب‌های معادله‌ی همگن فوق را می‌توان به هر یک از این‌ها اضافه کرد. یک توزیع چشمه $f(\mathbf{x}', t')$ را در نظر می‌گیریم که در زمان و مکان جایگزیده باشد. این

توزیع تنها برای یک فاصله‌ی محدود از زمان حول $t' = 0$ مخالف صفر است. دو حالت حدی مدنظر قرار می‌گیرند. در اولی فرض می‌شود که در حد $t \rightarrow -\infty$ موج $\Psi_{in}(\mathbf{x}, t)$ وجود دارد و معادله‌ی موج همگن را برآورده می‌کند. این موج در زمان و مکان منتشر می‌شود؛ منبع روشن می‌شود و امواج خودش را تولید می‌کند. جواب کامل برای این وضعیت در تمام زمان‌ها به‌وضوح عبارت است از

$$\Psi(\mathbf{x}, t) = \Psi_{in}(\mathbf{x}, t) + \iint G^{(+)}(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t') f(\mathbf{x}', t') d^3x' dt' \quad (۴۵-۶)$$

حضور $G^{(+)}$ تضمین می‌کند که در زمان‌های قبلی دوردست، قبل از اینکه منبع فعال شده باشد، سهمی از انتگرال فوق نداشته باشیم و تنها موج مشخص Ψ_{in} وجود داشته باشد. وضعیت دوم این است که در زمان‌های دوردست بعدی ($t \rightarrow +\infty$) موج به‌صورت $\Psi_{out}(\mathbf{x}, t)$ مشخص می‌شود که جوابی از معادله‌ی موج همگن است. در این صورت جواب کامل برای تمام زمان‌ها عبارت است از

$$\Psi(\mathbf{x}, t) = \Psi_{out}(\mathbf{x}, t) + \iint G^{(-)}(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t') f(\mathbf{x}', t') d^3x' dt' \quad (۴۶-۶)$$

اکنون این تابع گرین پیشرفته اطمینان می‌دهد که به‌وضوح هیچ سیگنالی از چشمه، پس از قطع آن وجود نخواهد داشت (تمام یک چنین سیگنال‌هایی طبق فرض در Ψ_{out} لحاظ شده‌اند).

معمول‌ترین وضعیت فیزیکی در (۴۵-۶) با $\Psi_{in} = 0$ توصیف می‌شود. بعضی اوقات این رابطه با

قرار دادن تابع گرین (۴۴-۶) به‌طور صریح به‌صورت زیر نوشته می‌شود

$$\Psi(\mathbf{x}, t) = \int \frac{[f(\mathbf{x}', t')]_{ret}}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x' \quad (۴۷-۶)$$

کروشه مربعی $[\]_{ret}$ بدین معنی است که باید زمان t' در زمان تأخیری $t' = t - \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}{c}$ تعیین شود.

مسئله‌ی مقدار مرزی اولیه یا نهایی در زمان‌های محدود به‌طور وسیعی در یک، دو و سه بعد مورد مطالعه قرار گرفته است. خواننده می‌تواند به مورس و فشباخ^۱ (صفحات ۸۴۷-۸۴۳) و همچنین بحث ریاضی‌تر هادامارد^۲ مراجعه نماید.

۵-۶ جواب‌های تأخیری برای میدان‌ها: تعمیم‌های جفی منکو^۳ در مورد

قوانین بیو- ساوار^۴؛ روابط هویساید - فاینمن^۵ برای میدان‌های یک

بار نقطه‌ای

استفاده از جواب تأخیری (۴۷-۶) برای معادله‌های موج (۱۵-۶) و (۱۶-۶) نتیجه می‌دهد

$$\Phi(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3x' \frac{1}{R} [\rho(\mathbf{x}', t')]_{ret} \quad (۴۸-۶)$$

1) Morse and Feshbach

2) Hadamard

3) Jefimenko

4) Biot-Savart

5) Heaviside-Feynman

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3x' \frac{1}{R} [\mathbf{J}(\mathbf{x}', t')]_{\text{ret}}$$

که در آن تعریف کرده‌ایم $\mathbf{R} = \mathbf{x} - \mathbf{x}'$ ، با $R = |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$ و $\hat{\mathbf{R}} = \frac{\mathbf{R}}{R}$ (در پایین) در اصل از این دو معادله می‌توان میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی را محاسبه نمود، اما اغلب داشتن جواب‌های انتگرالی تأخیری برای میدان‌های برحسب چشمه‌ها مفید است.

به‌طور مستقیم از معادلات ماکسول و یا با استفاده از معادله‌های موج برای Φ و \mathbf{A} ، یعنی (۶-۱۵) و (۶-۱۶)، و تعاریف میدان‌ها برحسب پتانسیل‌ها، یعنی (۶-۷) و (۶-۹) می‌توانیم وارد معادلات موج برای میدان‌ها، با بار و چگالی‌های جریان مشخص در فضای آزاد شویم

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = -\frac{1}{\epsilon_0} \left(-\nabla \rho - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t} \right) \quad (۶-۴۹)$$

و

$$\nabla^2 \mathbf{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} = -\mu_0 \nabla \times \mathbf{J} \quad (۶-۵۰)$$

معادله‌ی موج برای هر یک از مؤلفه‌های دکارتی میدان به‌صورت (۶-۳۲) است. جواب‌های تأخیری (۶-۴۷) برای میدان‌ها را می‌توان بی‌درنگ به شکل‌های مقدماتی زیر نوشت

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3x' \frac{1}{R} \left[-\nabla' \rho - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t'} \right]_{\text{ret}} \quad (۶-۵۱)$$

و

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3x' \frac{1}{R} [\nabla' \times \mathbf{J}]_{\text{ret}} \quad (۶-۵۲)$$

روابط مقدماتی فوق را می‌توان با استخراج مشتق‌های جزئی فضایی از انتگرالده‌های تأخیری، به‌صورت‌هایی درآورد که صریحاً حدود استاتیکی و تصحیح‌های مربوط به آن‌ها را نشان دهد. نکته ظریفی در اینجا وجود دارد چراکه $[\nabla' f]_{\text{ret}} \neq \nabla' [f]_{\text{ret}}$.

∇' درون کره‌ی تأخیری، یعنی گرادیان فضایی نسبت به x' با t' ثابت؛ و معنی آن در خارج از کره‌ی مربعی، گرادیان فضایی نسبت به x' است با \mathbf{x} و t ثابت.

چون $[f(\mathbf{x}', t')]_{\text{ret}} = f\left(\mathbf{x}', \frac{t-R}{c}\right)$ است ضروری است هنگامی‌که عملگر گرادیان را بیرون می‌بریم تصحیحی برای وابستگی به x' که درون R معرفی شد، انجام دهیم. به‌طور صریح داریم

$$[\nabla' \rho]_{\text{ret}} = \nabla' [\rho]_{\text{ret}} - \left[\frac{\partial \rho}{\partial t'} \right]_{\text{ret}} \nabla' \left(t - \frac{R}{c} \right) = \nabla' [\rho]_{\text{ret}} - \hat{\mathbf{R}} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t'} \right]_{\text{ret}} \quad (۶-۵۳)$$

$$\begin{aligned}
 [\nabla' \times \mathbf{J}]_{\text{ret}} &= \nabla' \times [\mathbf{J}]_{\text{ret}} + \left[\frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t'} \right]_{\text{ret}} \times \nabla' \left(t - \frac{R}{c} \right) \\
 &= \nabla' \times [\mathbf{J}]_{\text{ret}} + \frac{1}{c} \left[\frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t'} \right]_{\text{ret}} \times \hat{\mathbf{R}}
 \end{aligned} \quad (54-6)$$

در صورتی که این روابط در شکل مقدماتی جواب‌ها جایگزین شوند، و یک انتگرال‌گیری به‌طریقه‌ی جزء‌به‌جزء روی جمله اول (گرادیان یا کرل)، در هر حالت، انجام دهیم به روابط زیر خواهیم رسید

$$\begin{aligned}
 \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3x' \left\{ \frac{\hat{\mathbf{R}}}{R^2} [\rho(\mathbf{x}', t')]_{\text{ret}} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\hat{\mathbf{R}}}{cR} \left[\frac{\partial \rho(\mathbf{x}', t')}{\partial t'} \right]_{\text{ret}} - \frac{1}{c^2 R} \left[\frac{\partial \mathbf{J}(\mathbf{x}', t')}{\partial t'} \right]_{\text{ret}} \right\}
 \end{aligned} \quad (55-6)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3x' \left\{ [\mathbf{J}(\mathbf{x}', t')]_{\text{ret}} \times \frac{\hat{\mathbf{R}}}{R^2} + \left[\frac{\partial \mathbf{J}(\mathbf{x}', t')}{\partial t'} \right]_{\text{ret}} \times \frac{\hat{\mathbf{R}}}{cR} \right\} \quad (56-6)$$

در صورتی که بار و چگالی جریان مستقل از زمان باشند، روابط فوق به‌صورت روابط استاتیکی آشنای (۵-۱) و (۱۴-۵) درمی‌آیند. جمله‌های شامل مشتق‌های زمانی و تأخیری، تعمیم‌هایی را برای چشمه‌های وابسته به زمان امکان‌پذیر می‌کنند. دو نتیجه‌ی فوق، به‌عنوان تعمیم‌های جفی منکو از قوانین بیوساوار و کولن شناخته می‌شوند، که البته این اسم در متن این کتاب معرفی شده است (جفی منکو).

در پیشرفت کار، اشاره کردیم که چون انتگرال‌دهنده‌ها بایستی به‌صورت تابعی از \mathbf{x} ، t ، با $\frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}{c}$ فرض شوند، لذا مشتق‌های زمانی در انتگرال‌دهنده‌ها دارای خاصیت زیرند

$$\left[\frac{\partial f(\mathbf{x}', t')}{\partial t'} \right]_{\text{ret}} = \frac{\partial}{\partial t} [f(\mathbf{x}', t')]_{\text{ret}} \quad (57-6)$$

این رابطه نشان دادن ویژگی فرمول‌های جفی منکو را نسبت به روابط هویساید - فاینمن برای میدان‌های ناشی از یک بار نقطه‌ای تسهیل می‌کند.

با $\rho(\mathbf{x}', t') = q\delta[\mathbf{x}' - \mathbf{r}_0(t')]$ و $\mathbf{J}(\mathbf{x}', t') = \rho\mathbf{v}(t')$ روابط (۵۵-۶) و (۵۶-۶) به‌صورت ویژه‌ی زیر درمی‌آیند

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \left[\frac{\hat{\mathbf{R}}}{kR^2} \right]_{\text{ret}} + \frac{\partial}{c\partial t} \left[\frac{\hat{\mathbf{R}}}{kR} \right]_{\text{ret}} - \frac{\partial}{c^2\partial t} \left[\frac{\mathbf{v}}{kR} \right]_{\text{ret}} \right\} \quad (58-6)$$

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 q}{4\pi} \left\{ \left[\frac{\mathbf{v} \times \hat{\mathbf{R}}}{kR^2} \right]_{\text{ret}} + \frac{\partial}{c \partial t} \left[\frac{\mathbf{v} \times \hat{\mathbf{R}}}{kR} \right]_{\text{ret}} \right\} \quad (59-6)$$

که در اینجا R فاصله از محل بار تا نقطه‌ی مشاهده، $\hat{\mathbf{R}}$ برداری واحد از محل بار به طرف نقطه‌ی مشاهده و سرعت بار است؛ $k = 1 - \frac{\mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{R}}}{c}$ یک عامل تأخیری است [مسئله ۶-۲ را ملاحظه کنید]. حال اشاره به این نکته مهم است که، اختلافی بین $\left[\frac{\partial \dots}{\partial t} \right]_{\text{ret}}$ و $\frac{\partial [\dots]_{\text{ret}}}{\partial t}$ وجود دارد، چرا که $r_0(t') \rightarrow x'$ می‌کند، که در آن محل بار موردنظر است. میدان‌ها تابعی از \mathbf{x} و t هستند، با $t' = t - \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{r}_0(t')|}{c}$ رابطه‌ی فاینمن برای میدان الکتریکی عبارت است از

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \left[\frac{\hat{\mathbf{R}}}{R^2} \right]_{\text{ret}} + \frac{[R]_{\text{ret}}}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\hat{\mathbf{R}}}{R^2} \right]_{\text{ret}} + \frac{\partial^2}{c^2 \partial t^2} [R]_{\text{ret}} \hat{\mathbf{R}} \right\} \quad (60-6)$$

درحالی‌که رابطه‌ی هویساید برای میدان مغناطیسی عبارت است از

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 q}{4\pi} \left\{ \left[\frac{\mathbf{v} \times \hat{\mathbf{R}}}{k^2 R^2} \right]_{\text{ret}} + \frac{1}{c[R]_{\text{ret}}} \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\mathbf{v} \times \hat{\mathbf{R}}}{k} \right]_{\text{ret}} \right\} \quad (61-6)$$

هم‌ارزی بین این دو مجموعه از روابط برای میدان‌ها، از یک عملیات جبری دقیق نتیجه‌گیری می‌شود.

۶-۶ استخراج معادلات ماکروسکوپی الکترومغناطیس

بحث الکترومغناطیس در فصول قبل براساس معادلات ماکروسکوپی ماکسول زیر بوده است

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 & \nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{D} &= \rho & \nabla \times \mathbf{H} - \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} &= \mathbf{J} \end{aligned} \quad (62-6)$$

که در آن \mathbf{E} و \mathbf{B} کمیت‌های ماکروسکوپی میدان الکتریکی و مغناطیسی هستند؛ \mathbf{D} و \mathbf{H} میدان‌های استخراج‌شده متناظرند که با \mathbf{E} و \mathbf{B} از طریق قطبش \mathbf{P} و مغناطش \mathbf{M} محیط مادی، با روابط زیر مربوط می‌شوند

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \quad , \quad \mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} - \mathbf{M} \quad (63-6)$$

به‌طور مشابه، ρ و \mathbf{J} به‌ترتیب، چگالی بار (آزاد) ماکروسکوپی، و چگالی جریاند. اگرچه این معادلات آشنا هستند و به‌طور کلی قابل‌پذیرش، ولی هنوز مجبوریم استخراجی مهم از آن‌ها را با شروع از یک نقطه‌ی میکروسکوپی به انجام برسانیم. این کمبود در بخش حاضر جبران می‌شود. استخراج فوق درون یک

چارچوب مرجع کلی باقی خواهد ماند، هرچند که اتم‌ها باید با مقادیر چشمداشتی کواتوم مکانیکی، به جای کمیت‌های کلاسیکی در فرمول‌های ارائه‌شده در زیر توصیف شوند. خواننده می‌تواند مباحث مکانیک آماری را در نوشته‌های ذکرشده در انتهای این فصل بررسی کند.

دنیایی میکروسکوپی که از الکترون‌ها و هسته‌ها ساخته شده است را در نظر می‌گیریم. برای ابعاد بزرگ در مقایسه با 10^{-14} m، هسته‌ها را می‌توان به صورت سیستم‌هایی نقطه‌ای تلقی نمود، همان‌گونه که این کار را می‌توان در مورد الکترون‌ها نیز انجام داد.

فرض می‌کنیم نیز معادله‌های حاکم بر پدیده‌های الکترومغناطیسی برای این بارهای نقطه‌ای، معادله‌های میکروسکوپی ماکسول زیر باشند

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{b} &= 0, & \nabla \times \mathbf{e} + \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} &= 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{e} &= \frac{\eta}{\epsilon_0}, & \nabla \times \mathbf{b} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial t} &= \mu_0 \mathbf{j} \end{aligned} \quad (64-6)$$

که در آن \mathbf{e} و \mathbf{b} میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی، و η و \mathbf{j} چگالی‌های بار و جریان میکروسکوپی هستند. میدان‌های متناظری همچون \mathbf{d} و \mathbf{h} وجود ندارند، چراکه تمام بارها در η و \mathbf{j} لحاظ شده‌اند. یک مقدار ماکروسکوپی از ماده‌ی در حالت سکون، شامل دسته‌ای از $10^{23} \pm 5$ الکترون و هسته است که تماماً به جهت اغتشاش گرمایی، ارتعاش نقطه‌ی صفر، یا حرکت اربیتال، پیوسته در حالت حرکتند. میدان‌های الکترومغناطیسی میکروسکوپی ایجادشده توسط این بارها با سرعتی زیاد در فضا و زمان تغییر می‌کنند. تغییرات فضایی روی فواصلی از مرتبه‌ی 10^{-10} m یا کم‌تر اتفاق می‌افتد و افت‌وخیزهای زمانی با پریودهایی در حدود تغییرات 10^{-13} s برای ارتعاشات هسته‌ای، تا 10^{-17} ثانیه برای حرکت مداری الکترونی انجام می‌شود. به‌طور کلی، میانگین مقادیر به‌دست آمده از وسایل اندازه‌گیری ماکروسکوپی روی بازه‌های فضایی و زمانی، بسیار بیش‌تر از این مقادیر است. بنابراین تمام افت‌وخیزهای میکروسکوپی، میانگین‌گیری شده از کار درمی‌آیند، و کمیت‌های ماکروسکوپی‌ای را ارائه می‌هند که نسبتاً آرام و هموار تغییر می‌کنند، همانند آنچه در معادلات ماکروسکوپی ماکسول ظاهر شد.

این سؤال که چه نوع میانگینی مناسب است باید با قدری توجه مورد بررسی قرار گیرد. در نگاه اول ممکن است تصور کنیم که میانگین‌گیری روی هر دو کمیت فضا و زمان ضروری است، اما این موضوع حقیقت ندارد، چراکه فقط یک میانگین‌گیری فضایی لازم است [اشاره می‌کنیم که، یک میانگین‌گیری زمانی، مطمئناً به تنهایی کافی نیست، همان‌گونه که می‌توان این موضوع را با در نظر گرفتن یک کریستال یونی که یون‌هایش ارتعاش نقطه‌ی صفر کوچکی حول مکان‌های شبکه‌ای خوش‌تعریف و مجزا دارند نیز ملاحظه نمود].

جهت تعیین حدود دامنه‌ای که انتظار داریم در آن توصیفی ماکروسکوپی از پدیده‌های الکترومغناطیسی نتیجه‌بخش باشد، ملاحظه می‌کنیم که انعکاس و شکست نور مرئی به‌گونه‌ای مناسب با یک ثابت

دیالکتریک پیوسته توسط معادلات ماکسول توصیف می‌شود، در عین اینکه پراش پرتوی x نیز طبیعت اتمی‌گرایانه‌ی ماده را هم به‌وضوح در معرض شفافیت قرار می‌دهد. بنابراین موج به‌نظر می‌رسد که طول $L_0 = 10^{-8} \text{m} = 10^2 \text{A}^\circ$ را به‌عنوان حد پایین مطلق برای دامنه‌ی ماکروسکوپی بپذیریم. پرپود نوسان وابسته به نور این طول موج عبارت است از $\frac{L_0}{c} \simeq 3 \times 10^{-17} \text{s}$.

در حجمی به اندازه $L^3 = 10^{-24} \text{m}^3$ ، در یک ماده‌ی معمولی، به‌راحتی 10^6 هسته و الکترون وجود دارد. بدین‌ترتیب در هر ناحیه‌ای از نواحی مورد‌نظر ماکروسکوپی با $L \gg L_0$ ، الکترون‌ها و هسته‌های زیادی وجود دارند، به‌گونه‌ای که افت‌وخیزها به‌طور کامل با یک میانگین‌گیری فضایی از بین می‌رود. از طرف دیگر چون مقیاس زمانی وابسته به L ، به‌طور واقعی در برد حرکت‌های اتمی و مولکولی قرار دارد، وجود یک میانگین‌گیری زمانی مناسب نخواهد بود. با این وجود پس از میانگین‌گیری فضایی هیچ‌گواهی در مورد افت‌وخیزهای زمانی میکروسکوپی محیط وجود ندارد. این به‌خاطر این است که در غیاب وجود آمادگی خاص و تثبیت مرتبه مقدار روی فواصل ماکروسکوپی، تغییرات زمانی میدان‌های میکروسکوپی روی فواصلی از مرتبه‌ی L ناهمبسته‌اند. تمام آنچه بعد از این باقی می‌ماند، مؤلفه‌های فرکانس متناظر با نوسان‌گرهای واداشته، توسط فرکانس‌های اعمال‌شده‌ی خارجی است.

میانگین فضایی یک تابع $F(\mathbf{x}, t)$ نسبت به تابع آزمایشی $f(x)$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$\langle F(\mathbf{x}, t) \rangle = \int d^3x' f(\mathbf{x}') F(\mathbf{x} - \mathbf{x}', t) \quad (6-65)$$

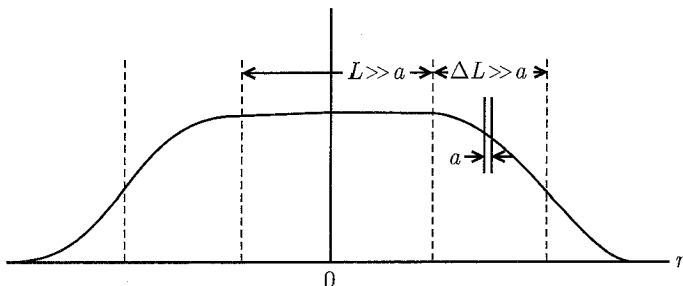
که در آن $f(\mathbf{x})$ حقیقی است و در یک همسایگی از $\mathbf{x} = 0$ ، روی تمام فضا به یک بهنجار شده است. تصور اینکه $f(\mathbf{x})$ نامنفی باشد، ساده‌ترین حالت است، گرچه این نامنفی بودن ضرورتی هم ندارد. برای حفظ بدون تمایل مشخصه‌های جهتی مربوط به خواص فیزیکی میانگین‌گیری‌شده، $f(\mathbf{x})$ را در فضا همسانگرد وضع می‌کنیم. دو مثال در این رابطه عبارتند از

$$f(\mathbf{x}) = \begin{cases} \frac{3}{4\pi R^3}, & r < R \\ 0, & r > R \end{cases} \quad (6-66)$$

$$f(\mathbf{x}) = (\pi R^2)^{-3/2} e^{-r^2/R^2}$$

مثال اول، حجم میانگین‌گیری با شعاع R است که مثالی مرسوم در کتاب‌های مختلف است. این مثال دارای مزیت سادگی در مفهوم است، اما دارای عیب انفصال ناگهانی در $r = R$ است. این موضوع منجر به یک بی‌ثباتی در مقیاس - ریز^۱ [روی کمیت‌های میانگین‌گیری‌شده، همانند یک تک‌مولکول یا گروهی از مولکول‌ها که به‌طرف درون یا بیرون از حجم میانگین حرکت می‌کنند] خواهد شد.

یک تابع آزمایشی هموار^۲، که به‌صورت گوسی نشان داده می‌شود، یک چنین مشکلاتی را برطرف می‌کند، مشروط بر اینکه مقیاس آن در مقایسه با ابعاد اتمی بزرگ باشد. خوشبختانه لزومی ندارد که تابع



شکل ۶-۱: دیاگرام طرح وار تابع آزمایشی $f(x)$ که در روش میانگین‌گیری فضایی استفاده شد. محدوده‌ی L قسمت مسطح منحنی و همچنین محدوده‌ی ΔL مربوط به این ناحیه، که در آن f به مقدار صفرافت می‌کند، هر دو در مقایسه با بعد مولکولی a بزرگ‌اند.

آزمایشی $f(x)$ دقیقاً و با جزئیات مشخص شود؛ تمام آنچه مورد نیاز است عبارتند از، پیوستگی کلی و خواص هموار بودن که بسط سری تیلور تابع $f(x)$ را (که دارای همگرایی سریع روی فواصل ابعاد اتمی است) امکان پذیر کند، چنانکه به طور طرح‌وار در شکل ۶-۱ نشان داده شده است. این موضوع حسن بزرگی است.^۱ چون مشتق‌های فضا و زمان وارد معادلات ماکسول می‌شوند، باید این عملیات را نسبت به میانگین، مطابق با (۶-۶۵) در نظر بگیریم، به وضوح داریم

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \langle F(\mathbf{x}, t) \rangle = \int d^3 x' f(\mathbf{x}') \frac{\partial F}{\partial x_i}(\mathbf{x} - \mathbf{x}', t) = \left\langle \frac{\partial F}{\partial x_i} \right\rangle \quad (۶-۶۷)$$

و

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle F(\mathbf{x}, t) \rangle = \left\langle \frac{\partial F}{\partial t} \right\rangle$$

بدین ترتیب عملیات مشتق‌گیری فضایی و زمانی با عمل میانگین‌گیری فوق جابه‌جا می‌شود.

حال می‌توانیم میانگین‌گیری از معادلات میکروسکوپی (۶-۶۴) ماکسول را بررسی کنیم. کمیت‌های ماکروسکوپی میدان الکتریکی و مغناطیسی \mathbf{E} و \mathbf{B} ، به صورت میانگین میدان‌های میکروسکوپی \mathbf{e} و \mathbf{b} تعریف می‌شوند

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \langle \mathbf{e}(\mathbf{x}, t) \rangle \quad (۶-۶۸)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = \langle \mathbf{b}(\mathbf{x}, t) \rangle$$

بدین ترتیب میانگین‌های مربوط به دو معادله‌ی همگن در (۶-۶۴) به صورت معادلات ماکروسکوپی متناظر

(۱) ما در اینجا پیشرفت

زیر درمی آیند

$$(\nabla \cdot \mathbf{b}) = 0 \rightarrow \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (6-69)$$

$$\left\langle \nabla \times \mathbf{e} + \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} \right\rangle = 0 \rightarrow \nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0$$

معادلات ناهمگن میانگین گیری شده از (6-64)، به صورت زیر درمی آیند

$$\epsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E} = \langle \eta(\mathbf{x}, t) \rangle \quad (6-70)$$

$$\frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{B} - \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \langle \mathbf{j}(\mathbf{x}, t) \rangle$$

مقایسه این معادلات با جفت معادلات ماکروسکوپی ناهمگن موجود در (6-62) حقیقتی که تاکنون شناخته شده است را نشان می دهد، که در آن میدان های اقتباس شده ی \mathbf{D} و \mathbf{H} با استخراج از $\langle \eta \rangle$ و $\langle \mathbf{j} \rangle$ (سهم های مشخصی که با خواص حجمی محیط مورد شناسایی قرار می گیرند) معرفی شده اند. بنابراین بررسی $\langle \eta \rangle$ و $\langle \mathbf{j} \rangle$ کار بعدی ماست.

محیطی متشکل از مولکول هایی را در نظر می گیریم که مرکب از هسته ها و الکترون ها و علاوه بر آن بارهای "آزادی" است که این بارها حول هیچ مولکول خاصی جایگزیده نیستند. چگالی بار میکروسکوپی را می توان به صورت زیر نوشت

$$\eta(\mathbf{x}, t) = \sum_j q_j \delta[\mathbf{x} - \mathbf{x}_j(t)] \quad (6-71)$$

که در آن $\mathbf{x}_j(t)$ مکان بار نقطه ای q_j است. برای تشخیص بارهای مقید از بارهای آزاد، η را به صورت زیر تجزیه می کنیم

$$\eta = \eta_{\text{آزاد}} + \eta_{\text{مقید}} \quad (6-72)$$

و می نویسیم

$$\eta_{\text{آزاد}} = \sum_j q_j \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j)$$

$$\eta_{\text{مقید}} = \sum_{n \text{ (مولکول ها)}} \eta_n(\mathbf{x}, t)$$

که در آن η_n ، چگالی بار مولکول n ام است

$$\eta_n(\mathbf{x}, t) = \sum_{j(n)} q_j \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j) \quad (۷۳-۶)$$

در این معادله و معادلات بعدی از بستگی صریح زمانی پیشگیری می‌کنیم چراکه میانگین‌گیری در یک لحظه از زمان انجام می‌شود. حال به میانگین‌گیری از چگالی بار مولکول n ام و سپس به انجام جمع روی سهم مربوط به تمام مولکول‌ها اقدام می‌کنیم.

بیان مختصات بارها در مولکول n ام نسبت به یک مبدأ ساکن درون مولکول کار مفیدی است. فرض کنید مختصه‌ی آن نقطه‌ی ثابت در مولکول (که معمولاً همان مرکز جرم مولکول انتخاب می‌شود) $\mathbf{x}_n(t)$ و مختصه‌ی بار n ام در مولکول، نسبت به مبدأ $\mathbf{x}_{jn}(t)$ باشد، درست همانند شکل ۶-۲. میانگین چگالی بار مولکول n ام عبارت است از

$$\begin{aligned} \langle \eta_n(\mathbf{x}, t) \rangle &= \int d^3x' f(\mathbf{x}') \eta_n(\mathbf{x} - \mathbf{x}', t) \\ &= \sum_{j(n)} q_j \int d^3x' f(\mathbf{x}') \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}' - \mathbf{x}_{jn} - \mathbf{x}_n) \\ &= \sum_{j(n)} q_j (\mathbf{x} - \mathbf{x}_n - \mathbf{x}_{jn}) \end{aligned} \quad (۷۴-۶)$$

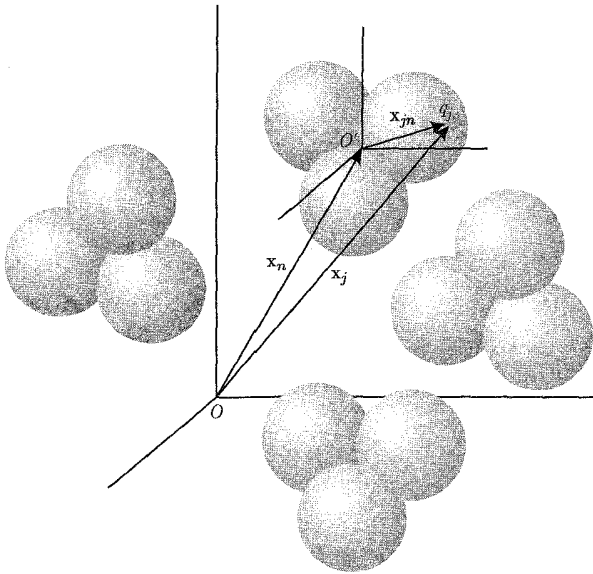
چون \mathbf{x}_{jn} در مقیاسی که $f(\mathbf{x})$ روی آن تغییرات قابل ملاحظه‌ای دارد از مرتبه‌ی ابعاد اتمی است. جملات موجود در این جمع شناسه‌هایی را دارا هستند که تنها تفاوت اندکی با $(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n)$ دارند. بنابراین مناسب است، بسط سری تیلور برای هر جمله حول $(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n)$ انجام شود. این کار به نتیجه‌ی زیر منجر خواهد شد

$$\begin{aligned} \langle \eta_n(\mathbf{x}, t) \rangle &= \sum_{j(n)} q_j \left[f(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n) - \mathbf{x}_{jn} \cdot \nabla f(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \sum_{\alpha\beta} (\mathbf{x}_{jn})_\alpha (\mathbf{x}_{jn})_\beta \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} f(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n) + \dots \right] \end{aligned}$$

جمع‌های مختلف روی بارها در مولکول، عیناً همان گشتاورهای چندقطبی مولکولی هستند

$$q_n = \sum_{j(n)} q_j \quad \text{بار مولکولی} \quad (۷۵-۶)$$

$$\mathbf{p}_n = \sum_{j(n)} q_j \mathbf{x}_{jn} \quad \text{گشتاور دوقطبی مولکولی} \quad (۷۶-۶)$$



شکل ۶-۲: مختصات مولکول m ام. مبدأ O' درون مولکول ثابت است (معمولاً این مبدأ در مرکز جرم انتخاب می‌شود). بار z ام نسبت به O' دارای مختصه x_{jn} است، در حالی که مولکول نسبت به محورهای ثابت (آزمایشگاه) تحت مختصه x_n قرار گرفته است.

$$(Q'_n)_{\alpha\beta} = \sum_{j(n)} q_j (x_{jn})_{\alpha} (x_{jn})_{\beta} \quad \text{گشتاور چهار قطبی مولکولی} \quad (77-6)$$

برحسب گشتاورهای چندقطبی فوق، چگالی بار میانگین مولکول m ام عبارت است از

$$\langle \eta_n(\mathbf{x}, t) \rangle = q_n f(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n) - \mathbf{p}_n \cdot \nabla f(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n) + \frac{1}{6} \sum_{\alpha\beta} (Q'_n)_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 f(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n)}{\partial x_{\alpha} \partial x_{\beta}} + \dots \quad (78-6)$$

اگر بپذیریم که به معادله‌ی فوق به منزله‌ی نتیجه‌ی مستقیمی از تعریف (۶۵-۶)، در مورد میانگین‌گیری فضایی نگاه کنیم، در این صورت ملاحظه خواهیم کرد که می‌توان جمله‌ی اول را به‌عنوان میانگین یک چگالی بار نقطه‌ای در $\mathbf{x} = \mathbf{x}_n$ و جمله‌ی دوم را به‌عنوان دیورژانس میانگین یک چگالی دوقطبی نقطه‌ای در $\mathbf{x} = \mathbf{x}_n$ و غیره، تلقی نمود. به‌وضوح داریم

$$\langle \eta_n(\mathbf{x}, t) \rangle = \langle q_n \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n) \rangle - \nabla \cdot \langle \mathbf{p}_n \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n) \rangle + \frac{1}{6} \sum_{\alpha\beta} \frac{\partial^2}{\partial x_{\alpha} \partial x_{\beta}} \langle (Q'_n)_{\alpha\beta} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n) \rangle + \dots \quad (79-6)$$

بدین ترتیب تا آنجایی که به نتیجه فرایند میانگین‌گیری مربوط است می‌توانیم مولکول را به صورت مجموعه‌ای از چندقطبی‌های نقطه‌ای تصور کنیم که در یک نقطه‌ی ثابت درون مولکول قرار گرفته‌اند. البته وسعت دقیق توزیع بار مولکولی در سطح مولکولی نیز دارای اهمیت است، اما این توزیع بار برحسب تأثیرش در فرایندهای ماکروسکوپی، با تعدادی از چندقطبی‌ها جایگزین می‌شود.

روش دیگری برای میانگین‌گیری فضایی از (۶-۶۵) از طریق تبدیلات فوریه، دیدگاه باارزش متفاوتی را ارائه می‌دهد. با توجه به تبدیلات فوریه‌ی فضایی تعریف شده توسط

$$g(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k \tilde{g}(\mathbf{k}, t) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \quad \text{و} \quad \tilde{g}(\mathbf{k}, t) = \int d^3x g(\mathbf{x}, t) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \quad (۸۰-۶)$$

جایگزینی سرراستی در (۶-۶۵) منجر به رابطه‌ی برای میانگین $\mathbf{F}(\mathbf{x}, t)$ می‌شود

$$\langle F(\mathbf{x}, t) \rangle = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k \tilde{f}(\mathbf{k}, t) \tilde{F}(\mathbf{k}, t) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \quad (۸۱-۶)$$

که مثالی از "قضیه‌ی فالتونگ"^۱ برای تبدیلات فوریه است. همگردش^۲ رابطه‌ی (۶-۶۵) دارای یک تبدیل فوریه است که عبارت است از حاصل ضرب تبدیلات توابع جداگانه در این همگردش. بدین ترتیب

$$\text{FT} \langle F(\mathbf{x}, t) \rangle = \tilde{f}(\mathbf{k}) \tilde{F}(\mathbf{k}, t) \quad (۸۲-۶)$$

نمادگذاری FT به عنوان نماینده‌ی برای حاصل ضرب کرنل^۳ نمای موجود در انتگرال اول در بالا [FT $g(\mathbf{x}, t) \equiv \tilde{g}(\mathbf{k}, t)$] و جهت اجتناب از عدم مهارت و اشتباه در استفاده از این زمینه معرفی شده است.

یک جنبه‌ی بسیار مهم مربوط به $\tilde{f}(\mathbf{k})$ ، $\tilde{f}(\mathbf{0}) = 1$ است، همان‌گونه که این جنبه را می‌توان از تعریف آن و از این حقیقت که $f(\mathbf{x})$ به یک بهنجار شده است نیز ملاحظه نمود. برای تابع آزمایشی گوسی، تبدیل فوریه عبارت است از

$$\text{FT} f(\mathbf{x}) = \tilde{f}(\mathbf{k}) = e^{-\frac{k^2 R^2}{4}} \quad (۸۳-۶)$$

به وضوح تبدیل فوریه‌ی (۸۲-۶) برای کمیت میانگین‌گیری شده، تنها شامل اعداد موجی پایین تا مقدار $k_{\max} = 0$ (یعنی معکوس مقیاس طولی حجم میانگین) و نه عمدتاً فراتر از این مقدار. اما چون برای اعداد موجی کوچک در مقایسه با عدد موجی قطع، $\tilde{f}(\mathbf{k}) \rightarrow 1$ میل می‌کند $\text{FT} \langle F(\mathbf{x}, t) \rangle$ نمایشی واقعی از جنبه‌های مربوط به طول موج بلند $F(\mathbf{x}, t)$ را ارائه می‌دهد. همچنان‌که در مورد عمل میانگین‌گیری فوق انتظار می‌رود، تنها موارد دارای مقیاس کوچک (عدد موجی بزرگ) برطرف می‌شوند.

عمل میانگین‌گیری مربوط به چگالی بار مولکول n ام در شکل ۲-۶ را در نظر بگیرید. تبدیل فوریه برای این کمیت میانگین‌گیری شده عبارت است از

$$\text{FT } \langle \eta_n(\mathbf{x}, t) \rangle = \tilde{f}(\mathbf{k}) \tilde{\eta}_n(\mathbf{k}, t) \quad (۸۴-۶)$$

که در آن

$$\tilde{\eta}_n(\mathbf{k}, t) = \int d^3x' \eta_n(\mathbf{x}', t) e^{-i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x}' - \mathbf{x}_n)}$$

در اینجا تبدیل فوریه فضایی نسبت به \mathbf{x}_n را در نظر گرفته‌ایم. رفتارهای کیفی برای دو عامل موجود در (۸۴-۶) در شکل (۳-۶) ترسیم شده‌اند. از آنجایی که پشتیبانی این حاصل ضرب به اعداد موجی نسبتاً کوچک محدود می‌شود، لذا مناسب است یک بسط سری تیلور برای تبدیل فوریه $\tilde{\eta}_n(\mathbf{k}, t)$ برای مقادیر کوچک $|\mathbf{k}|$ صورت گیرد

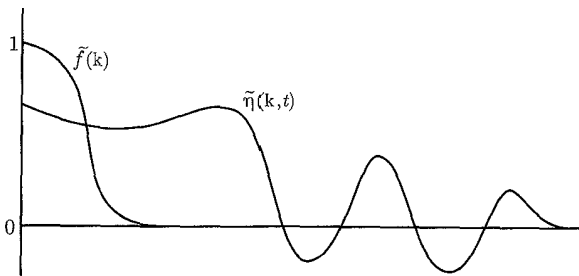
$$\tilde{\eta}_n(\mathbf{k}, t) \approx \tilde{\eta}_n(\mathbf{0}, t) + \mathbf{k} \cdot \nabla_{\mathbf{k}} \tilde{\eta}_n(\mathbf{0}, t) + \dots$$

به‌طور صریح داریم

$$\tilde{\eta}_n(\mathbf{k}, t) = \int d^3x' \eta_n(\mathbf{x}', t) [\mathbf{1} - i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_n) + \dots]$$

یا

$$\tilde{\eta}_n(\mathbf{k}, t) \approx q_n - i\mathbf{k} \cdot \mathbf{p}_n + \text{چهارقطبی و بالاتر} \quad (۸۵-۶)$$



شکل ۳-۶: رفتار کیفی تبدیلات فوریه در رابطه (۸۴-۶) برای تبدیل چگالی بار مولکولی میانگین‌گیری شده $\langle \eta_n(\mathbf{x}, t) \rangle$.

که برحسب گشتاورهای چندقطبی مولکولی است. بنابراین چگالی بار مولکولی میانگین را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\begin{aligned} \langle \eta_n(\mathbf{x}, t) \rangle &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_n)} \tilde{f}(\mathbf{k}) [q_n - i\mathbf{k} \cdot \mathbf{p}_n + \dots] \\ &= q_n f(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n) - \mathbf{p}_n \cdot \nabla f(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n) + \dots \end{aligned} \quad (۸۶-۶)$$

با راهی متفاوت و شاید طولانی‌تر به همان معادله‌ی (۶-۷۸) رسیدیم (اما راهی با مزیت داشتن یک دیدگاه تکمیلی از عمل میانگین‌گیری به‌عنوان یک نقطه‌ی قطع در فضای عدد موجی) و این نقطه‌نظری بود که توسط رابینسون^۱ مورد تأکید قرار گرفت.

چگالی بار میکروسکوپی کل (۶-۷۲) شامل بارهای آزاد و بارهای مقید است. با انجام جمع روی تمام مولکول‌ها (که ممکن است از اجزاء مختلفی تشکیل شده باشند) و ترکیب با بارهای آزاد، چگالی بار میکروسکوپی میانگین‌گیری شده را به‌صورت زیر به‌دست می‌آوریم

$$\langle \eta(\mathbf{x}, t) \rangle = \rho(\mathbf{x}, t) - \nabla \cdot \mathbf{P}(\mathbf{x}, t) + \sum_{\alpha\beta} \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} Q'_{\alpha\beta}(\mathbf{x}, t) + \dots \quad (۶-۸۷)$$

که در آن ρ چگالی بار ماکروسکوپی است

$$\rho(\mathbf{x}, t) = \left\langle \sum_j q_j \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j) + \sum_n q_n \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n) \right\rangle \quad (۶-۸۸)$$

(مولکول‌ها) n (آزاد) j

\mathbf{P} قطبش^۲ ماکروسکوپی است

$$\mathbf{P}(\mathbf{x}, t) = \left\langle \sum_n \mathbf{p}_n \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n) \right\rangle \quad (۶-۸۹)$$

(مولکول‌ها) n

و $Q'_{\alpha\beta}$ چگالی چهارقطبی ماکروسکوپی است

$$Q'_{\alpha\beta}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{\epsilon} \left\langle \sum_n (Q'_n)_{\alpha\beta} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n) \right\rangle \quad (۶-۹۰)$$

(مولکول‌ها) n

وقتی (۶-۸۷) را در اولین معادله‌ی (۶-۷۰) قرار دهیم، نتیجه می‌دهد

$$\sum_\alpha \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left[\epsilon_0 E_\alpha + P_\alpha - \sum_\beta \frac{\partial}{\partial x_\beta} Q'_{\alpha\beta} + \dots \right] = \rho \quad (۶-۹۱)$$

با توجه به (۶-۶۲) این بدان معنی است که بردار جابه‌جایی ماکروسکوپی \mathbf{D} به‌صورتی تعریف می‌شود که دارای مؤلفه‌های زیر باشد

$$D_\alpha = \epsilon_0 E_\alpha + P_\alpha - \sum_\beta \frac{\partial Q'_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} + \dots \quad (۶-۹۲)$$

دو جمله‌ی اول نتیجه‌ی آشنای (۶-۶۳) هستند. جملات سوم و جملات مرتبه‌ی بالاتر در اصل حضور دارند ولی تقریباً همواره قابل اغماضند. جهت تکمیل بحث فوق بایستی (ز) را مورد بررسی قرار دهیم.

به خاطر طبیعت برداری \mathbf{j} و حضور سرعت‌ها، استخراج معادلات به طور قابل ملاحظه‌ای پیچیده‌تر از بحث قبلی مربوط به $\langle \eta \rangle$ است، با وجودی که اصول جدیدی هم وارد نمی‌شود. جزئیات ناخوشایند مسئله را برای آن دسته از خوانندگانی که از یک چنین رقابت‌هایی لذت می‌برند، رها کرده و تنها نتایج را نشان می‌دهیم. با چگالی جریان میکروسکوپی شروع می‌کنیم

$$\mathbf{j}(\mathbf{x}, t) = \sum_j q_j \mathbf{v}_j \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j(t)) \quad (۹۳-۶)$$

که در آن $\mathbf{v}_j = \frac{d\mathbf{x}_j}{dt}$ سرعت بار j ام است.

مجدداً این جمع به جمع روی بارهای آزاد و جمع روی مولکول‌ها تقسیم می‌شود. چگالی جریان مربوط به مولکول n ام را می‌توان عیناً همانند (۶-۷۴) برای به‌دست آوردن رابطه‌ی زیر میانگین‌گیری کرد

$$\langle \mathbf{j}_n(\mathbf{x}, t) \rangle = \sum_{j(n)} q_j (\mathbf{v}_{jn} + \mathbf{v}_n) f(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n - \mathbf{x}_{jn}) \quad (۹۴-۶)$$

در اینجا فرض غیرنسبیتی بودن حرکت را با نوشتن سرعت بار j ام به صورت مجموع یک سرعت نسبی داخلی \mathbf{v}_{jn} و یک سرعت $\mathbf{v}_n = \frac{d\mathbf{x}_n}{dt}$ ، نسبت به مبدأ O' در مولکول انجام داده‌ایم. از این جا به بعد پیشرفت کار مستلزم بسط سری تیلور و انجام عملیات برداری است. بخشی از این جریان شامل، گشتاور مغناطیسی مولکولی زیر است

$$\mathbf{m}_n = \sum_{j(n)} \frac{q_j}{\gamma} (\mathbf{x}_{jn} \times \mathbf{v}_{jn}) \quad (۹۵-۶)$$

نتیجه‌ی نهایی برای یک مؤلفه از چگالی جریان میکروسکوپی میانگین عبارت است از

$$\begin{aligned} \langle j_\alpha(\mathbf{x}, t) \rangle = & J_\alpha(\mathbf{x}, t) + \frac{\partial}{\partial t} [D_\alpha(\mathbf{x}, t) - \epsilon_0 E_\alpha(\mathbf{x}, t)] + \sum_{\beta\gamma} \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \frac{\partial}{\partial x_\beta} M_\gamma(\mathbf{x}, t) \\ & + \sum_{\beta} \frac{\partial}{\partial x_\beta} \left\langle \sum_n \left[(\mathbf{p}_n)_\alpha (\mathbf{v}_n)_\beta - (\mathbf{p}_n)_\beta (\mathbf{v}_n)_\alpha \right] \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n) \right\rangle \quad (۹۶-۶) \\ & - \frac{1}{c} \sum_{\beta\gamma} \frac{\partial^2}{\partial x_\beta \partial x_\gamma} \left\langle \sum_n \left[(Q'_n)_{\alpha\beta} (\mathbf{v}_n)_\gamma \right. \right. \\ & \left. \left. - (Q'_n)_{\gamma\beta} (\mathbf{v}_n)_\alpha \right] \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n) \right\rangle + \dots \end{aligned}$$

کمیت‌های تعریف نشده در این معادله‌ی نسبتاً قوی هیکل، کمیت‌های چگالی جریان ماکروسکوپی هستند

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}, t) = \left\langle \sum_n q_j \mathbf{v}_j \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j) + \sum_n q_n \mathbf{v}_n \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n) \right\rangle \quad (۹۷-۶)$$

(آزاد) (مولکول‌ها)

مغناطش ماکروسکوپی

$$\mathbf{M}(\mathbf{x}, t) = \left\langle \sum_n \mathbf{m}_n \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n) \right\rangle \quad (۹۸-۶)$$

(مولکول‌ها)

اگر "بارهای" آزاد دارای گشتاور مغناطیسی ذاتی نیز باشند، می‌توان این موضوع را به‌گونه‌ای صریح در تعریف \mathbf{M} لحاظ کرد. جمله‌های آخر در (۹۶-۶) شامل گشتاورهای مولکولی الکتریکی و سرعت‌های مولکولی هستند، که به‌جز در حالت‌های خاص نمی‌توان تفسیر ساده‌ای در این مورد ارائه داد (زیرا ملاحظه کنید). وقتی (j) در معادله‌ی دوم (۶-۷۰) قرار گیرد، معادله‌ی ماکروسکوپی ماکسول آمپر (۶-۶۲) نتیجه می‌شود. با کمیت اقتباس‌شده‌ی میدان مغناطیسی \mathbf{H} ، که برحسب \mathbf{B} و خواص محیط به‌صورت زیر مشخص می‌شود

$$\left(\frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} - \mathbf{H} \right)_\alpha = M_\alpha + \left\langle \sum_n (\mathbf{p}_n \times \mathbf{v}_n)_\alpha \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n) \right\rangle - \frac{1}{6} \sum_{\beta\gamma\delta} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \frac{\partial}{\partial x_\delta} \left\langle \sum_n (Q'_n)_{\delta\beta} (\mathbf{v}_n)_\gamma \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n) \right\rangle + \dots \quad (۹۹-۶)$$

(مولکول‌ها)

جمله‌ی اول در طرف سمت راست (۹۹-۶)، نتیجه‌ی آشنای (۶-۶۳) است. عموماً سایر جمله‌ها فوق‌العاده کوچکند؛ اول به این جهت که سرعت‌های مولکولی \mathbf{v}_n کوچک‌اند، نوعاً در حد سرعت‌های گرمایی در یک گاز یا سرعت‌های ارتعاشی شبکه‌ای در یک جامد، و دوم به‌خاطر افت‌وخیز سرعت‌ها و تمایل به میانگین صفر از لحاظ ماکروسکوپی.

یک مورد استثناء وقتی اتفاق می‌افتد که محیط تحت حرکت حجمی قرار گیرد. جهت‌سازگی، فرض کنید محیط به‌صورت یک‌جا با سرعت انتقالی \mathbf{v} را دارا باشد. با صرف نظر از هر حرکت دیگری از مولکول‌ها، به‌ازای تمامی n ‌ها قرار می‌دهیم: $\mathbf{v}_n = \mathbf{v}$. در این صورت (۹۹-۶) پس از مقداری محاسبه، به‌صورت زیر درمی‌آید

$$\frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} - \mathbf{H} = \mathbf{M} + (\mathbf{D} - \varepsilon_0 \mathbf{E}) \times \mathbf{v} \quad (۱۰۰-۶)$$

که در آن \mathbf{D} توسط (۶-۹۲) مشخص می‌شود. این موضوع نشان می‌دهد که برای یک محیط در حال حرکت، قطبش الکتریکی \mathbf{P} (و چگالی چهارقطبی $Q_{\alpha\beta}$) باعث ایجاد یک مغناطش مؤثر^۱ می‌شود. معادله‌ی (۶-۱۰۰) حد غیرنسبیتی یکی از معادلات الکتروپدینامیکی مینکوفسکی در محیط‌های متحرک است (پائولی، صفحه‌ی ۱۰۵ را ملاحظه کنید).

برای بحث در مورد تصحیحات نسبیتی و همچنین برای یک بحث مکانیک آماری در مورد میانگین‌گیری، خواننده می‌تواند به کتاب دگروو^۲ مراجعه کند. از نقطه نظر منطقی و سازگاری هنوز یک نکته مهم باقی مانده است.

در تعریف گشتاور چهارقطبی مولکولی $(Q'_n)_{\alpha\beta}$ توسط (۶-۷۷)، از ابداع مان در فصل ۴، یعنی معادله‌ی (۴-۹) منحرف شدیم، و $(Q_n)_{\alpha\beta}$ را با یک تریس^۱ غیرصفر رها کردیم.

چون نکته‌ای را در فصل ۴ در موضوع ارتباط پنج مؤلفه‌ی مستقل تانسور گشتاور چهارقطبی بدون تریس، به $(1 + 2l)$ هارمونیک کروی، به ازای $l = 2$ مطرح کردیم، بنابراین در اینجا به توضیح اینکه چرا شش مؤلفه در معادلات ماکروسکوپی ماکسول وارد می‌شوند نیاز داریم.

اگر یک گشتاور چهارقطبی مولکولی بدون تریس $(Q_n)_{\alpha\beta}$ را با استفاده از (۴-۹) تعریف کنیم در این صورت خواهیم داشت

$$(Q'_n)_{\alpha\beta} = (Q_n)_{\alpha\beta} + \sum_{j(n)} q_j (\mathbf{x}_{jn})^2 \delta_{\alpha\beta} \quad (10-16)$$

با معرفی یک شعاع بار میانگین مربعی r_n^2 برای توزیع بار مولکولی توسط

$$er_n^2 = \sum_{j(n)} q_j (\mathbf{x}_{jn})^2$$

که در آن e یک واحد مناسب برای بار است، (برای مثال بار یک پروتون) می‌توانیم (۱۰-۱۶) را به صورت زیر بنویسیم

$$(Q'_n)_{\alpha\beta} = (Q_n)_{\alpha\beta} + er_n^2 \delta_{\alpha\beta}$$

بدین ترتیب چگالی چهارقطبی ماکروسکوپی (۶-۹۰) به صورت زیر درمی‌آید

$$Q'_{\alpha\beta} = Q_{\alpha\beta} + \frac{1}{\epsilon} \left\langle \sum_n er_n^2 \delta_{\alpha\beta} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n) \right\rangle$$

(مولکول‌ها)

که در آن $Q_{\alpha\beta}$ دقیقاً همانند (۶-۹۰) برحسب $(Q_n)_{\alpha\beta}$ تعریف می‌شود.

نتیجه‌ی کلی این است که در رابطه‌ی (۶-۸۷)، مربوط به چگالی بار میکروسکوپی میانگین، چگالی چهارقطبی بدون تریس $Q_{\alpha\beta}$ ، جایگزین چگالی $Q'_{\alpha\beta}$ شده و به چگالی بار ρ نیز یک جمله‌ی اضافی افزوده شده است

$$\rho \rightarrow \rho_{\text{آزاد}} + \left\langle \sum_n q_n \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n) \right\rangle + \frac{1}{\epsilon} \nabla^2 \left\langle \sum_n er_n^2 \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n) \right\rangle \quad (10-26)$$

(مولکول‌ها)

تریس تانسور $Q'_{\alpha\beta}$ ، با چگالی بار نمایش داده شده است، چراکه تریس این تانسور، سهم $l = 0$ بسط چندقطبی است. وقتی فراتر از حد استاتیکی قدم برداریم، بار مولکولی و جملات شعاع مربعی میانگین، هر دو در عمل، مبین دو جمله‌ی اول در بسط $l = 0$ چندقطبی مولکولی هستند، و در فضای عدد موجی

تبدیل یافته‌ی فوریه، آن‌ها متناظر با دو جمله‌ی اول برحسب توان‌های k^2 ، در بسط ضریب هندسی^۱ (یا ضریب شکل؛ m) بارند. این موضوع را می‌توان از تعریف ضریب هندسی $F(k^2)$ برای چگالی بار $\rho(\mathbf{x})$ مشاهده نمود

$$\begin{aligned} F(k^2) &= \int d^3x \rho(\mathbf{x}) \langle e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \rangle_{l=0} \text{ بخش} \\ &= \int d^3x \rho(\mathbf{x}) \frac{\sin kr}{kr} \simeq \int \rho d^3x - \frac{1}{6} k^2 \int r^2 \rho d^3x + \dots \end{aligned}$$

بدین ترتیب با تناظر $\mathbf{k} \leftrightarrow -i\nabla$ ، هم‌ارزی کلی بسط ضریب هندسی و (۶-۱۰۲) اثبات شد. در یک تک‌نگاشت^۲ جالب در رابطه با موضوع بالا، رایینسون^۳ بحثی را شبیه به بحث ما، در مورد ارتباط بین معادلات میکروسکوپی و معادلات ماکروسکوپی ارائه داد. هرچند که او بین میانگین‌گیری فضایی (۶-۶۵) با تابع آزمایشی $f(\mathbf{x})$ [که توسط خود وی، ترانکیشن (یا کاهش؛ m) (مربوط به طیف عدد موجی) نامیده شد] و عمل میانگین‌گیری در مکانیک آماری روی اقسام مختلفی از آنسامبل‌ها تمایز قائل شد.

رایینسون اثبات کرد که هر نوع مسئله‌ی ماکروسکوپی‌ای، حد پایینی از طول‌های مناسب مربوط به خود را دارد، و اینکه قبل از انجام هرگونه ملاحظات در مورد عمل میانگین‌گیری آماری، این موضوع اندازه تابع آزمایشی‌ای را که باید مورد استفاده واقع شود، تعیین می‌کند.

۶-۷ قضیه‌ی پوینتینگ و بقای انرژی و اندازه حرکت برای سیستمی از ذرات باردار و میدان‌های الکترومغناطیسی

شکل قوانین بقای انرژی و اندازه حرکت، نتایج مهمی برای اثبات میدان الکترومغناطیسی هستند. کارمان را با بررسی بقای انرژی، که غالباً قضیه‌ی پوینتینگ نامیده می‌شود شروع می‌کنیم (۱۸۸۴). برای یک تک بار q ، آهنگ انجام کار توسط میدان‌های الکترومغناطیسی خارجی \mathbf{E} و \mathbf{B} ، $q\mathbf{v} \cdot \mathbf{E}$ است، که در آن \mathbf{v} سرعت بار است. میدان مغناطیسی در اینجا کاری انجام نمی‌دهد، چراکه نیروی مغناطیسی بر سرعت عمود است. در صورتی‌که یک توزیع متصل از بار و جریان وجود داشته باشد، آهنگ کل انجام کار توسط میدان‌ها در یک حجم محدود V عبارت است از

$$\int_V \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} d^3x \quad (۶-۱۰۳)$$

توان فوق نشان دهنده‌ی تبدیل انرژی الکترومغناطیسی به انرژی مکانیکی یا گرمایی است. این توان باید با آهنگ متناظری از کاهش انرژی در میدان الکترومغناطیسی در درون حجم V تعدیل شود. برای نمایش این قانون بقا به طور صریح، معادلات ماکسول را جهت بیان (۶-۱۰۳) برحسب سایر جملات، مورد استفاده قرار می‌دهیم.

بنابراین قانون آمپر - ماکسول را برای حذف \mathbf{J} استفاده می‌کنیم

$$\int_V \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} d^3x = \int_V \left[\mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) - \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right] d^3x \quad (104-6)$$

حال اگر اتحاد برداری

$$\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = \mathbf{H} \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) - \mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{H})$$

را اعمال کنیم و قانون فارادی را مورد استفاده قرار دهیم، طرف سمت راست (۱۰۴-۶) به صورت زیر درمی‌آید

$$\int_V \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} d^3x = - \int_V \left[\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) + \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right] d^3x \quad (105-6)$$

جهت اقدام بیش‌تر دو فرض را در نظر می‌گیریم:

۱. محیط ماکروسکوپی، با افت‌های قابل اغماض در انرژی و پاشیدگی در خواص الکتریکی و مغناطیسی خود، خطی باشد.
۲. جمع (۴-۸۹) و (۵-۱۴۸) حتی برای میدان‌های متغیر با زمان، چگالی انرژی الکترومغناطیسی کل را نشان دهد.

با توجه به این دو فرض و چگالی انرژی کل که با رابطه‌ی زیر نشان داده می‌شود

$$u = \frac{1}{2} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}) \quad (106-6)$$

(۱۰۵-۶) را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$- \int_V \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} d^3x = \int_V \left[\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \right] d^3x \quad (107-6)$$

چون حجم V اختیاری است، این رابطه را می‌توان به صورت یک معادله‌ی دیفرانسیل پیوستگی یا قانون بقا درآورد

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{S} = -\mathbf{J} \cdot \mathbf{E} \quad (108-6)$$

بردار \mathbf{S} که نشان‌دهنده‌ی روند جریان انرژی است، بردار پوینتینگ نامیده می‌شود. این بردار با رابطه‌ی زیر مشخص می‌شود

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} \quad (109-6)$$

و دارای ابعاد (زمان \times سطح/انرژی) است. چون دیورژانس این بردار تنها در قانون بقا ظاهر می‌شود، بردار پوینتینگ تا این گستره که بتوان کرل هر میدان برداری را بدان اضافه نمود، اختیاری به نظر می‌رسد. هرچند که یک چنین جمله‌ی اضافه‌شده‌ای، نمی‌تواند نتایج فیزیکی‌ای داشته باشد. ملاحظات نسبیتی (بخش ۱۰-۱۲) نشان می‌دهد که (۶-۱۰۹) منحصر به فرد است.

معنی فیزیکی انتگرال، یا شکل دیفرانسیلی (۶-۱۰۷) یا (۶-۱۰۸) این است که آهنگ زمانی تغییر انرژی الکترومغناطیسی درون یک حجم مشخص، به‌علاوه‌ی جریان انرژی به بیرون از سطوح مرزی مربوط به این حجم بر واحد زمان، مساوی با منفی کار انجام‌شده توسط میدان‌ها روی چشمه‌های درون حجم است. این موضوع بیانی از بقای انرژی است.

فرض‌هایی که (۶-۱۰۵) را به‌دنبال دارند، درواقع قابلیت کاربرد شکل ساده‌ی قضیه‌ی پوینتینگ برای میدان‌های ماکروسکوپی و میکروسکوپی در خلاء را محدود می‌کنند. حتی برای محیط‌های خطی همواره پاشیدگی وجود دارد (همراه با افت). بنابراین طرف سمت راست (۶-۱۰۵) فاقد تغییر ساده‌ی نشان داده شده در معادله‌ی (۶-۱۰۷) است. وضعیت واقعی‌تر مربوط به محیط‌های پاشنده در بخش بعدی بحث شده است. تاکنون تأکید بر روی انرژی میدان‌های الکترومغناطیسی بوده است. کار انجام‌شده بر واحد زمان بر واحد حجم توسط میدان‌های $(\mathbf{J} \cdot \mathbf{E})$ ، درواقع تبدیل انرژی الکترومغناطیسی به انرژی مکانیکی یا حرارتی است. چون ماده در نهایت مرکب از ذرات باردار است (الکترون‌ها و هسته‌های اتمی) می‌توانیم آهنگ تبدیل فوق را به صورت آهنگ افزایش انرژی ذرات باردار در واحد حجم تصور کنیم. در این صورت قضیه‌ی پوینتینگ برای میدان‌های میکروسکوپی $(\mathbf{E} \cdot \mathbf{B})$ را می‌توانیم به صورت بیانی از بقای انرژی برای سیستمی مرکب از ذرات و میدان‌ها تعبیر کنیم. در صورتی‌که انرژی کل ذرات درون حجم V را به صورت مکانیکی E تعبیر کنیم و فرض کنیم که هیچ‌کدام از ذرات حرکتی به خارج از حجم نداشته باشد خواهیم داشت

$$\frac{dE_{\text{مکانیکی}}}{dt} = \int_V (\mathbf{J} \cdot \mathbf{E}) d^3x \quad (۶-۱۱۰)$$

در این صورت قضیه‌ی پوینتینگ بقای انرژی برای سیستم ترکیبی فوق را به صورت زیر بیان می‌کند

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt} (E_{\text{مکانیکی}} + E_{\text{میدان}}) = - \oint_S \mathbf{n} \cdot \mathbf{S} da \quad (۶-۱۱۱)$$

که در آن انرژی کل میدان درون حجم V عبارت است از

$$E_{\text{میدان}} = \int_V u d^3x = \frac{\epsilon_0}{2} \int_V (\mathbf{E}^2 + c^2 \mathbf{B}^2) d^3x \quad (۶-۱۱۲)$$

بقای اندازه‌ی حرکت خطی را نیز می‌توان به صورتی مشابه مورد بررسی قرار داد. نیروی الکترومغناطیسی کل روی یک ذره‌ی باردار عبارت است از

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (۶-۱۱۳)$$

اگر جمع تمام اندازه حرکت‌های زاویه‌ای ذرات در حجم V با مکانیکی \mathbf{P} نشان داده شود، از قانون دوم نیوتن می‌توانیم بنویسیم

$$\frac{d\mathbf{P}_{\text{مکانیکی}}}{dt} = \int_V (\rho \mathbf{E} + \mathbf{J} \times \mathbf{B}) d^3x \quad (114-6)$$

که در آن برای راحتی محاسبه، جمع روی تمام ذرات را به یک انتگرال روی چگالی‌های بار و جریان تبدیل نموده‌ایم. با روشی مشابه با قضیه‌ی پوینتینگ، معادلات ماکسول را برای حذف ρ و \mathbf{J} از (۱۱۴-۶) مورد استفاده قرار می‌دهیم

$$\rho = \varepsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E} \quad ; \quad \mathbf{J} = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{B} - \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (115-6)$$

با جایگزینی (۱۱۵-۶) در (۱۱۴-۶) انتگرالدهی فوق به صورت زیر درمی‌آید

$$\rho \mathbf{E} + \mathbf{J} \times \mathbf{B} = \varepsilon_0 \left[\mathbf{E}(\nabla \cdot \mathbf{E}) + \mathbf{B} \times \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - c^2 \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{B}) \right]$$

بدین ترتیب با نوشتن

$$\mathbf{B} \times \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{E} \times \mathbf{B}) + \mathbf{E} \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

و جمع $c^2 \mathbf{B}(\nabla \cdot \mathbf{B}) = 0$ با گروهی مربعی، نتیجه می‌دهد

$$\rho \mathbf{E} + \mathbf{J} \times \mathbf{B} = \varepsilon_0 [\mathbf{E}(\nabla \cdot \mathbf{E}) + c^2 \mathbf{B}(\nabla \cdot \mathbf{B}) - \mathbf{E} \times (\nabla \times \mathbf{E}) - c^2 \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{B})] - \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{E} \times \mathbf{B})$$

حال می‌توان آهنگ تغییر اندازه‌ی حرکت مکانیکی (۱۱۴-۶) را به صورت زیر نوشت

$$\frac{d\mathbf{P}_{\text{مکانیکی}}}{dt} + \frac{d}{dt} \int_V \varepsilon_0 (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) d^3x = \varepsilon_0 \int_V [\mathbf{E}(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \mathbf{E} \times (\nabla \times \mathbf{E}) + c^2 \mathbf{B}(\nabla \cdot \mathbf{B}) - c^2 \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{B})] d^3x \quad (116-6)$$

ممکن است با تردید انتگرال حجمی موجود در سمت چپ را به عنوان اندازه‌ی حرکت الکترومغناطیسی کل میدان \mathbf{P} در درون حجم V بشناسیم

$$\mathbf{P}_{\text{میدان}} = \varepsilon_0 \int_V \mathbf{E} \times \mathbf{B} d^3x = \mu_0 \varepsilon_0 \int_V \mathbf{E} \times \mathbf{H} d^3x \quad (117-6)$$

انتگرالده را می توان به عنوان چگالی اندازه ی حرکت الکترومغناطیسی تعبیر کرد. اشاره می کنیم که چگالی اندازه ی حرکت فوق با ثابت تناسب c^{-2} ، با چگالی شار انرژی S متناسب است.

برای کامل کردن شناسایی، انتگرال حجمی رابطه ی

$$\mathbf{g} = \frac{1}{c^2} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \quad (۱۱۸-۶)$$

را به عنوان اندازه ی حرکت الکترومغناطیسی می شناسیم و برای اثبات (۱۱۶-۶) به عنوان قانون بقای اندازه ی حرکت باید انتگرال حجمی در سمت راست را به یک انتگرال سطحی برای مؤلفه ی عمودی چیزی که می توان آن را به عنوان جریان اندازه حرکت شناخت تبدیل کنیم. فرض کنید مختصات دکارتی با x_a ($a = 1, 2, 3$) مشخص شوند. مؤلفه ی $\alpha = 1$ مربوط به بخش الکتریکی انتگرالده در (۱۱۶-۶)، به طور صریح با رابطه زیر مشخص می شود

$$\begin{aligned} [\mathbf{E}(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \mathbf{E} \times (\nabla \times \mathbf{E})]_1 &= E_1 \left(\frac{\partial E_1}{\partial x_1} + \frac{\partial E_2}{\partial x_2} + \frac{\partial E_3}{\partial x_3} \right) \\ &- E_2 \left(\frac{\partial E_2}{\partial x_1} - \frac{\partial E_1}{\partial x_2} \right) + E_3 \left(\frac{\partial E_1}{\partial x_3} - \frac{\partial E_3}{\partial x_1} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x_1} (E_1^2) + \frac{\partial}{\partial x_2} (E_1 E_2) + \frac{\partial}{\partial x_3} (E_1 E_3) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_1} (E_1^2 + E_2^2 + E_3^2) \end{aligned}$$

این بدان معنی است که می توانیم مؤلفه α ام را به صورت زیر بنویسیم

$$[\mathbf{E}(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \mathbf{E} \times (\nabla \times \mathbf{E})]_\alpha = \sum_\beta \frac{\partial}{\partial x_\beta} \left(E_\alpha E_\beta - \frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} \delta_{\alpha\beta} \right) \quad (۱۱۹-۶)$$

و شکل یک دیورژانس از یک تانسور مرتبه ی دوم در طرف راست را داشته باشیم. با توجه به تعریف تانسور تنش ماکسول $T_{\alpha\beta}$ به صورت

$$T_{\alpha\beta} = \varepsilon_0 \left[E_\alpha E_\beta + c^2 B_\alpha B_\beta - \frac{1}{2} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}) + c^2 (\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}) \delta_{\alpha\beta} \right] \quad (۱۲۰-۶)$$

می توانیم (۱۱۶-۶) را به صورت مؤلفه ای به شکل زیر بنویسیم

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{P}_{\text{مکانیکی}} + \mathbf{P}_{\text{میدان}})_\alpha = \sum_\beta \int_V \frac{\partial}{\partial x_\beta} T_{\alpha\beta} d^3x \quad (۱۲۱-۶)$$

کاربرد قضیه ی دیورژانس برای انتگرال حجمی به نتیجه ی زیر منجر می شود

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{P}_{\text{مکانیکی}} + \mathbf{P}_{\text{میدان}})_\alpha = \oint_S \sum_\beta T_{\alpha\beta} n_\beta da \quad (۱۲۲-۶)$$

که در آن \mathbf{n} عمود یکانی به طرف خارج سطح بسته ی S است.

به‌وضوح اگر (۶-۱۲۲) مبین بیانی از بقای اندازه‌ی حرکت باشد، $\sum_{\beta} T_{\alpha\beta} n_{\beta}$ مؤلفه‌ی α ام جریان بر واحد سطح اندازه‌ی حرکت در عبور از سطح S به‌درون حجم V خواهد بود. به‌عبارت دیگر این کمیت، نیرو بر واحد سطح انتقال‌یافته از سطح S و وارد بر سیستم مرکب از ذرات و میدان‌ها در درون حجم V است. بنابراین معادله‌ی (۶-۱۲۲) را می‌توان برای محاسبه‌ی نیروهای مؤثر بر اشیاء مادی در میدان‌های الکترومغناطیسی و البته با محصور کردن آن‌ها با سطح مرزی S ، و افزودن نیروی الکترومغناطیسی کل، برطبق طرف راست (۶-۱۲۲) مورد استفاده قرار داد. بقای اندازه‌ی حرکت زاویه‌ای سیستم مرکب از ذرات و میدان‌ها را به‌طریقی مشابه با آنچه در مورد انرژی و اندازه‌ی حرکت زاویه‌ای عمل کردیم می‌توان مورد بررسی قرار داد. این موضوع به‌صورت یک مسئله به دانشجویان واگذار شده است (مسئله‌ی ۶-۱۰ را ملاحظه کنید). بحث اندازه‌ی حرکت الکترومغناطیسی و تانسور تنش در مایعات و جامدات مستلزم تجزیه و تحلیل اثرات متقابل خواص مکانیکی، ترمودینامیکی و الکترومغناطیسی است (یعنی $\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial T}$ و $\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \rho}$). خواننده را به لاندائو و لیفشیتز^۱، الکترومغناطیس محیط‌های پیوسته^۲، (بخش‌های ۱۰، ۱۵، ۱۶، ۳۱ و ۳۵)، استراتون^۳ (فصل ۲) و برای یک روش مکانیک آماری به د - گروت^۴ (بخش ۱۳) ارجاع می‌دهیم. تنها اشاره می‌کنیم که، گرچه یک بررسی با استفاده از معادلات ماکروسکوپی ماکسول منجر به یک اندازه‌ی حرکت الکترومغناطیسی واضح $\mathbf{g} = \mathbf{D} \times \mathbf{B}$ می‌شود (مینکوفسکی ۱۹۰۸) با این وجود عموماً رابطه پذیرفته شده برای یک محیط در حال سکون عبارت است از

$$\mathbf{g} = \frac{1}{c^2} \mathbf{E} \times \mathbf{H} = \mu_0 \epsilon_0 \mathbf{E} \times \mathbf{H} = \frac{1}{c^2} \mathbf{S} \quad (۶-۱۲۳)$$

اشاره می‌کنیم که \mathbf{g} اندازه‌ی حرکت الکترومغناطیسی وابسته به میدان‌ها است. به‌جهت اندازه‌ی حرکت مکانیکی الکترون‌ها در دو قطب‌های مولکولی در پاسخ به موج متحرک تابشی، یک اندازه‌ی حرکت هم - راه* در درون محیط به‌وجود می‌آید** . اندازه‌ی حرکت مینکوفسکی یک موج تخت "شبه اندازه‌ی حرکتی" از بردار موجی است (برای یک فوتون $k = \frac{n\omega}{c}$ یا $hk = \frac{n(h\omega)}{c}$).

۶-۸ قضیه‌ی پوینتینگ در محیط‌های خطی پاشنده، همراه با افت

در بخش قبلی، قضیه‌ی پوینتینگ (۶-۱۰۸) با محدودیت محیط‌های خطی بدون پاشندگی یا افت (یعنی $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$ و $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$) با ϵ و μ حقیقی و مستقل از فرکانس، به‌دست آمد. اما مواد واقعی پاشیدگی و

1) Landau and Lifshitz 2) Electrodynamics of Continuous Media 3) Stratton

4) de Groot *) (co-traveling)

** برای بحثی بسیار راحت، از آنچه مسئله‌ی ۶-۲۵ شرح ساده‌شده‌ای از آن است، مرجع

R. E. Peiels, London 347, 475 (1976)

را ببینید.

همچنین ببینید مرجع

افت از خود نشان می‌دهند.

برای بحث در مورد پاشیدگی لازم است یک تجزیه فوریه در زمان، هم برای \mathbf{E} و هم برای \mathbf{D} صورت گیرد (و نیز \mathbf{B} و \mathbf{H}). بدین ترتیب با

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \mathbf{E}(\mathbf{x}, \omega) e^{-i\omega t}$$

$$\mathbf{D}(\mathbf{x}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \mathbf{D}(\mathbf{x}, \omega) e^{-i\omega t}$$

فرض خطی بودن (و برای سهولت، همسانگردی) ایجاب می‌کند که؛ $\mathbf{D}(\mathbf{x}, \omega) = \varepsilon(\omega) \mathbf{E}(\mathbf{x}, \omega)$ ، در آن $\varepsilon(\omega)$ ، پذیرایی ویژه‌ی مختلط و وابسته به فرکانس است.

به‌طور مشابه، $\mathbf{B}(\mathbf{x}, \omega) = \mu(\omega) \mathbf{H}(\mathbf{x}, \omega)$. واقعیت میدان‌ها ایجاب می‌کند که $\mathbf{E}(\mathbf{x}, -\omega) = \mathbf{E}^*(\mathbf{x}, \omega)$ ، $\mathbf{D}(\mathbf{x}, -\omega) = \mathbf{D}^*(\mathbf{x}, \omega)$ و $\varepsilon(-\omega) = \varepsilon^*(\omega)$.

حضور پاشندگی با خود یک ارتباط غیرموضعی زمانی بین $\mathbf{D}(\mathbf{x}, t)$ و $\mathbf{E}(\mathbf{x}, t)$ به‌همراه دارد که به‌دقت در بخش (۷-۱۰) مورد بحث قرار گرفته است. به‌عنوان یک نتیجه، عبارت $\mathbf{E} \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right)$ در (۶-۱۰۵) به‌راحتی مشتق زمانی $(\mathbf{E} \cdot \mathbf{D})/2$ نیست.

$\mathbf{E} \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right)$ را برحسب انتگرال‌های فوریه با بستگی فضایی به‌طور ضمنی، به‌تفضیل برحسب انتگرال‌های فوریه می‌نویسیم

$$\mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \int d\omega \int d\omega' \mathbf{E}^*(\omega') [-i\omega \varepsilon(\omega)] \cdot \mathbf{E}(\omega) e^{-i(\omega - \omega')t}$$

انتگرالده را به دو بخش مساوی تقسیم کنید و در یکی با انجام جایگذاری‌های $\omega \rightarrow -\omega'$ و $\omega' \rightarrow -\omega$ از قیدهای واقعی استفاده کرده تا نتیجه زیر را به‌دست آورید

$$\mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \frac{1}{2} \int d\omega \int d\omega' \mathbf{E}^*(\omega') [-i\omega \varepsilon(\omega) + i\omega' \varepsilon^*(\omega')] \cdot \mathbf{E}(\omega) e^{-i(\omega - \omega')t} \quad (۶-۱۲۴)$$

حال فرض می‌کنیم میدان الکتریکی با مؤلفه‌های فرکانس در ناحیه‌ای نسبتاً باریک (در مقایسه با بازه‌ی فرکانسی مشخصه‌ای که روی آن $\varepsilon(\omega)$ تغییرات قابل ملاحظه‌ای دارد) عمده باشد. در این صورت می‌توانیم عامل $i\omega' \varepsilon^*(\omega')$ در گروه‌های مربعی را حول $\omega' = \omega$ برای به‌دست آوردن رابطه‌ی زیر بسط دهیم

$$[\dots] = 2\omega \text{Im} \varepsilon(\omega) - i(\omega - \omega') \frac{d}{d\omega} (\omega \varepsilon^*(\omega)) + \dots$$

قرار دادن این تقریب در (۶-۱۲۴) به نتیجه زیر منجر می‌شود

$$\mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \int d\omega \int d\omega' \mathbf{E}^*(\omega') \cdot \mathbf{E}(\omega) \omega \text{Im} \varepsilon(\omega) e^{-i(\omega - \omega')t}$$

$$+ \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{2} \int dw \int dw' \mathbf{E}^*(w') \cdot \mathbf{E}(w) \frac{d}{dw} [\omega \varepsilon^*(\omega)] e^{-i(\omega - \omega')t} \quad (۱۲۵-۶)$$

رابطه‌ی متناظری نیز برای $\mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ با تبدیل $\mathbf{E} \rightarrow \mathbf{H}$ و $\mu \rightarrow \varepsilon$ (در طرف سمت راست) وجود دارد. قبل از هر چیز دقت کنید که اگر ε و μ حقیقی و مستقل از فرکانس باشند، می‌توانیم مجدداً رابطه‌ی ساده‌ی بین جملات مشتق زمانی در (۱۰۵-۶) و $\frac{\partial u}{\partial t}$ را با u ، که توسط (۱۰۶-۶) مشخص شده است، به دست آوریم. دوم اینکه، جمله‌ی اول در (۱۲۵-۶) به‌وضوح تبدیل انرژی الکتریکی به حرارتی را نشان می‌دهد (یا عمومی‌تر، به شکل‌های مختلف تابش *)، در حالی‌که عبارت دوم باید یک چگالی انرژی مؤثر باشد.

یک رابطه‌ی بسیار شفاف که با فرضمان در مورد غالب شدن \mathbf{E} و \mathbf{H} با ناحیه تغییرات نسبتاً باریک از فرکانس‌ها سازگار باشد را می‌توان با فرض، $\mathbf{H} = \tilde{\mathbf{H}}(t) \cos(\omega_0 t + \beta)$ و $\mathbf{E} = \tilde{\mathbf{E}}(t) \cos(\omega_0 t + \alpha)$ به دست آورد، که در آن $\tilde{\mathbf{E}}(t)$ و $\tilde{\mathbf{H}}(t)$ ، نسبت به $\frac{1}{\omega_0}$ و همچنین معکوس ناحیه تغییرات فرکانس، که $\varepsilon(\omega)$ روی آن تغییرات قابل ملاحظه‌ای دارد، دارای تغییرات آرامی هستند. اگر برای تبدیلات فوریه $\mathbf{E}(w)$ و $\mathbf{H}(w)$ جایگزینی انجام دهیم و از دو طرف جمع (۱۲۵-۶) و همتهای مغناطیسی‌اش روی یک پی‌رود از فرکانس "حامل" ω_0 میانگین بگیریم، پس از یک محاسبه‌ی ساده درمی‌یابیم که

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \rangle &= 2\omega_0 \text{Im} \varepsilon(\omega_0) \langle \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) \rangle \\ &+ 2\omega_0 \text{Im} \mu(\omega_0) \langle \mathbf{H}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{H}(\mathbf{x}, t) \rangle + \frac{\partial u_{\text{eff}}}{\partial t} \end{aligned} \quad (۱۲۶-۶ \text{ الف})$$

که در آن چگالی الکترومغناطیسی مؤثر عبارت است از

$$\begin{aligned} u_{\text{eff}} &= \text{Re} \left[\frac{d(\omega \varepsilon)}{d\omega}(\omega_0) \right] \langle \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) \rangle \\ &+ \text{Re} \left[\frac{d(\omega \mu)}{d\omega}(\omega_0) \right] \langle \mathbf{H}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{H}(\mathbf{x}, t) \rangle \end{aligned} \quad (۱۲۶-۶ \text{ ب})$$

حضور عوامل $\frac{d(\omega \varepsilon)}{d\omega}$ و $\frac{d(\omega \mu)}{d\omega}$ ، ابتدا توسط "بریلوتین" معرفی شد (Brillouin. pp. 88-93) ملاحظه کنید). بررسی مان در اینجا شبیه به لاندائو و لیفشیتز، "الکترودینامیک محیط‌های پیوسته^{۱)}" (بخش ۸۰) است. قضیه‌ی پوینتینگ در این موقعیت‌ها به صورت زیر جلوه می‌کند

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_{\text{eff}}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{S} &= -\mathbf{J} \cdot \mathbf{E} - 2\omega_0 \text{Im} \varepsilon(\omega_0) \langle \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) \rangle \\ &- 2\omega_0 \text{Im} \mu(\omega_0) \langle \mathbf{H}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{H}(\mathbf{x}, t) \rangle \end{aligned} \quad (۱۲۷-۶)$$

(* برای مثال اگر فرکانس‌های غالب، نزدیک یک رزونانس اتمی در محیطی باشند که در آن جذب اهمیت دارد ($\text{Im} \varepsilon \neq 0$) گسیلش مجدد تابش جذب‌شده در ω ممکن است در ω' اتفاق بیافتد، که در آن $\omega' \leq \omega$.

جمله‌ی اول در سمت راست، در صورت وجود افت‌های اهمی را توصیف می‌کند، در حالی که جملات بعدی بدون احتساب افت رسانشی، اتلاف جذبی^۱ موجود در محیط را نمایش می‌دهند. در صورتی که سهم جریان رسانشی به صورت بخشی از پاسخ دی‌الکتریک در نظر گرفته شود (بخش ۵-۷ را ملاحظه کنید) جمله‌ی $\mathbf{J} \cdot \mathbf{E}$ - حضور نخواهد داشت. معادله‌ی (۶-۱۲۷) بقای موضعی انرژی الکترومغناطیسی را در وضعیت‌های واقع‌بینانه، [همچنین جاری شدن انرژی به بیرون از این موضع را ($\nabla \cdot \mathbf{S} \neq 0$) که در آن ممکن است افت‌هایی ناشی از گرمایش محیط ($\text{Im}\mu \neq 0$, $\text{Im}\epsilon \neq 0$) وجود داشته باشد] به نمایش می‌گذارد، که منجر به یک کاهش آرام (فرضی) در انرژی میدان‌ها می‌شود.

۶-۹ قضیه‌ی پوینتینگ برای میدان‌های هماهنگ؛ تعاریف میدانی

امیدانس و ادمیتانس*

مفاهیم مدار فشرده همچون مقاومت و رثاکتانس یک شبکه‌ی خطی دارای دو خروجی، در بسیاری از کاربردها مطرح می‌شود، حتی در وضعیت‌هایی که در آن اندازه‌ی سیستم، با طول موج فضای آزاد قابل مقایسه است (به‌عنوان مثال، برای یک آنتن تشدیدی). بنابراین داشتن یک تعریف کلی براساس مفاهیم میدانی، مفید خواهد بود. این تعریف کلی از بررسی قضیه‌ی پوینتینگ برای تغییرات زمانی هماهنگ میدان‌ها ناشی می‌شود. فرض می‌کنیم که تمام میدان‌ها و چشمه‌ها دارای بستگی زمانی‌ای به شکل $e^{-i\omega t}$ باشند، طوری که داشته باشیم

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \text{Re}[\mathbf{E}(\mathbf{x})e^{-i\omega t}] \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}[\mathbf{E}(\mathbf{x})e^{-i\omega t} + \mathbf{E}^*(\mathbf{x})e^{i\omega t}] \quad (۶-۱۲۸)$$

میدان $\mathbf{E}(\mathbf{x})$ در حالت کلی مختلط است، با دامنه و فازی که با مکان تغییر می‌کند. برای شکل‌های حاصل ضربی، همانند $\mathbf{J}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{x}, t)$ داریم

$$\begin{aligned} \mathbf{J}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) &= \frac{1}{\sqrt{2}}[\mathbf{J}(\mathbf{x})e^{i\omega t} + \mathbf{J}^*(\mathbf{x})e^{-i\omega t}] \cdot [\mathbf{E}(\mathbf{x})e^{-i\omega t} + \mathbf{E}^*(\mathbf{x})e^{i\omega t}] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\text{Re}[\mathbf{J}^*(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{x}) + \mathbf{J}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{x})e^{-2i\omega t}] \end{aligned} \quad (۶-۱۲۹)$$

بنابراین برای میانگین‌گیری‌های زمانی حاصل ضرب‌ها، قرارداد، گرفتن نیمی از بخش حقیقی حاصل ضرب یک کمیت مختلط، با مزدوج مختلط نیم دیگر است.

1) Absorptive dissipation

* بحث این بخش، به موازات بحث کتاب Fano (فانو)، Chu (چو) و Adler (آدلر) است (بخش‌های ۸-۲ و ۸-۳). خواننده می‌تواند در این کتاب به‌گونه‌ی قابل‌ملاحظه‌ای، بحث پیش‌تری در مورد ارتباط بین مدار فشرده و مفاهیم میدانی و مثال‌های پراکنده‌ای از کاپاسیتانس در القاگرها و غیره پیدا کند.

برای میدان‌های هماهنگ معادلات ماکسول به صورت زیر درمی‌آیند

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0, & \nabla \times \mathbf{E} - i\omega \mathbf{B} &= 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{D} &= \rho, & \nabla \times \mathbf{H} + i\omega \mathbf{D} &= \mathbf{J} \end{aligned} \quad (۱۳۰-۶)$$

که در آن تمام کمیت‌ها مطابق با سمت راست (۱۲۸-۶) توابعی مختلط از x هستند. به جای (۱۰۳-۶) انتگرال حجمی زیر را در نظر می‌گیریم

$$\frac{1}{V} \int_V \mathbf{J}^* \cdot \mathbf{E} d^3x$$

که قسمت حقیقی آن، میانگین زمانی آهنگ کار انجام شده توسط میدان‌ها در داخل حجم V را ارائه می‌دهد. در ادامه‌ی کار، که به‌طور اکید به موازات گام‌هایی است که از (۱۰۳-۶) تا (۱۰۷-۶) صورت گرفته است، داریم

$$\begin{aligned} \frac{1}{V} \int_V \mathbf{J}^* \cdot \mathbf{E} d^3x &= \frac{1}{V} \int_V \mathbf{E} \cdot [\nabla \times \mathbf{H}^* - i\omega \mathbf{D}^*] d^3x \\ &= \frac{1}{V} \int_V [-\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*) - i\omega (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}^* - \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}^*)] d^3x \end{aligned} \quad (۱۳۱-۶)$$

حال بردار پوینتینگ مختلط را تعریف می‌کنیم

$$\mathbf{S} = \frac{1}{V} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*) \quad (۱۳۲-۶)$$

و همچنین چگالی‌های انرژی میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی هارمونیک

$$w_e = \frac{1}{V} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}^*) \quad , \quad w_m = \frac{1}{V} (\mathbf{B} \cdot \mathbf{H}^*) \quad (۱۳۳-۶)$$

در این صورت (۱۳۱-۶) را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\frac{1}{V} \int_V \mathbf{J}^* \cdot \mathbf{E} d^3x + 2i\omega \int_V (w_e - w_m) d^3x + \oint_S \mathbf{S} \cdot \mathbf{n} da = 0 \quad (۱۳۴-۶)$$

این رابطه مشابه رابطه (۱۰۷-۶) برای میدان‌های هماهنگ است. رابطه‌ی فوق یک معادله‌ی مختلط است که قسمت حقیقی آن بقای انرژی را برای کمیت‌های میانگین‌گیری شده‌ی زمانی ارائه می‌دهد و قسمت موهومی آن به انرژی انباشته یا انرژی واکنش‌پذیر و جریان متناوب آن انرژی مربوط می‌شود. اگر چگالی‌های انرژی w_m و w_e ، دارای انتگرال‌های حجمی حقیقی باشند، چنانکه برای سیستم‌های با دی‌الکتریک‌هایی بدون اتلاف و در رساناهای کامل اتفاق می‌افتد قسمت حقیقی (۱۳۴-۶) عبارت است از

$$\int_V \frac{1}{V} \text{Re}(\mathbf{J}^* \cdot \mathbf{E}) d^3x + \oint_S \text{Re}(\mathbf{S} \cdot \mathbf{n}) da = 0$$

نشان دهنده‌ی این است که آهنگ حالت پایدار میانگین‌گیری شده‌ی زمانی کار انجام شده روی چشمه‌های موجود در حجم V توسط میدان‌ها، مساوی جریان میانگین توان به درون حجم V (از طریق سطح مرزی S) است، همان‌گونه که این موضوع از مؤلفه‌ی عمودی ReS نیز محاسبه شد. این دقیقاً آن چیزی است که می‌توانستیم از شکل قبلی قضیه‌ی پوینتینگ (۶-۱۰۷) نیز محاسبه کنیم، در صورتی که فرض می‌کردیم چگالی انرژی u دارای یک بخش مانا و یک بخش افت‌وخیزکننده‌ی هماهنگ است. با توجه به افت‌های موجود در مؤلفه‌های این سیستم، جمله دوم در (۶-۱۳۴) دارای یک قسمت حقیقی است که علتی برای احتساب این اتلاف است.

قضیه‌ی پوینتینگ مختلط (۶-۱۳۴) را می‌توان برای تعریف امپدانس ورودی یک سیستم الکترومغناطیسی کلی غیرفعال خطی، دارای دو خروجی^۱ مورد استفاده قرار داد. سیستم فوق را درون حجم V که توسط سطح مرزی S احاطه شده است تصور می‌کنیم و همان‌گونه که در شکل ۶-۴ نشان داده شده است تنها ترمینال‌های ورودی آن، از سطح بیرون آمده‌اند. اگر جریان و ولتاژ ورودی هارمونیک مختلط، I_i و V_i باشند، توان مختلط ورودی $\frac{1}{4} I_i^* V_i$ خواهد بود. این موضوع را می‌توان برحسب بردار پوینتینگ، با استفاده از (۶-۱۳۴) که روی تمام فضای خارج از سطح S اعمال شده باشد، به صورت زیر نوشت

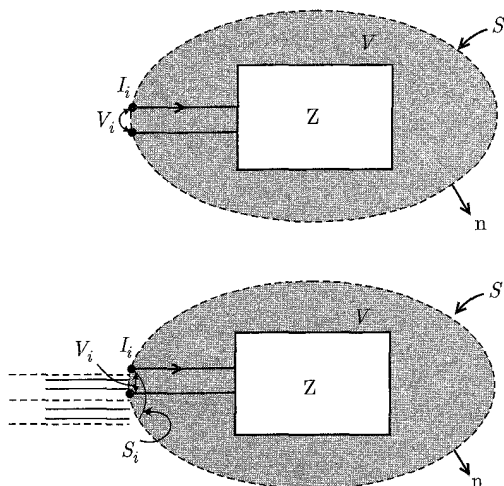
$$\frac{1}{4} I_i^* V_i = - \oint_{S_i} \mathbf{S} \cdot \mathbf{n} da \quad (۶-۱۳۵)$$

که در آن عمود یکانی \mathbf{n} ، در شکل ۶-۴ به طرف خارج جهت گرفته است و ما چنین فرض کرده‌ایم که جریان توان ورودی به سطح S_i (سطح مقطع خط هم‌محور، در نمودار پایین شکل ۶-۴) محدود است. حال با در نظر گرفتن (۶-۱۳۴) برای حجم V که با سطح بسته‌ی S احاطه شده است، سمت راست رابطه‌ی (۶-۱۳۵) را می‌توان برحسب انتگرال روی میدان‌های درون حجم V به صورت زیر نوشت

$$\frac{1}{4} I_i^* V_i = \frac{1}{4} \int_V \mathbf{J}^* \cdot \mathbf{E} d^3x + \frac{1}{2} i \omega \int_V (w_e - w_m) d^3x + \oint_{S-S_i} \mathbf{S} \cdot \mathbf{n} da \quad (۶-۱۳۶)$$

انتگرال سطحی در اینجا به جز برای توان ورودی به سطح S_i ، نشان‌دهنده‌ی جریان توان به بیرون از حجم V از طریق سطح S نیز هست. در صورتی که سطح $(S - S_i)$ به بینهایت برده شود، انتگرال فوق حقیقی بوده و مبین فرار تابش خواهد بود (فصل ۹ را ملاحظه کنید). در فرکانس‌های پایین عموماً این تابش قابل اغماض است. در این صورت نیازی نیست که تمایزی بین S_i و S صورت گیرد؛ در این حالت نمودار بالا (در شکل ۶-۴) به کار می‌رود.

امپدانس ورودی $Z = R - iX$ (مهندسی برق لطفاً به صورت $Z = R + jX$ بخوانند) با توجه



شکل ۶-۴: نمودارهای طرح‌وار سیستم‌های الکترومغناطیسی اختیاری غیرفعال خطی دارای دو خروجی. سطح S به‌طور کامل سیستم را احاطه کرده است؛ فقط ترمینال‌های ورودی از سطح بیرون زده‌اند. در این ترمینال‌ها، جریان و ولتاژ هماهنگ ورودی I_i و V_i هستند، با امپدانس ورودی Z که توسط $V_i = ZI_i$ تعریف شده است. دیاگرام بالا در فرکانس‌های پایین که در آن افت‌های تابشی قابل صرف‌نظر کردن است، به‌کار می‌رود. در حالی‌که نمودار پایین، با خط هم‌محور ورودی‌اش بحث مقاومت تابشی را امکان‌پذیر می‌کند.

به تعریفش، $V_i = ZI_i$ از (۶-۱۳۶) نتیجه می‌شود. قسمت‌های حقیقی و موهومی آن عبارتند از

$$R = \frac{1}{|I_i|^2} \left\{ \operatorname{Re} \int_V \mathbf{J}^* \cdot \mathbf{E} d^3x + 2 \oint_{S-S_i} \mathbf{S} \cdot \mathbf{n} da + 4\omega \operatorname{Im} \int_V (w_m - w_e) d^3x \right\} \quad (۶-۱۳۷)$$

$$X = \frac{1}{|I_i|^2} \left\{ 4\omega \operatorname{Re} \int_V (w_m - w_e) d^3x - \operatorname{Im} \int_V \mathbf{J}^* \cdot \mathbf{E} d^3x \right\} \quad (۶-۱۳۸)$$

در هنگام نوشتن (۶-۱۳۷) و (۶-۱۳۸) فرض کرده‌ایم که جریان توان به خارج از سطح S حقیقی است. بنابراین جمله‌ی دوم در (۶-۱۳۷) "مقاومت تابشی" خواهد بود که در فرکانس‌های بالا دارای اهمیت است. در فرکانس‌های پایین و در سیستم‌هایی که در آن افت‌های اهمی تنها منبع قابل ملاحظه در اتلاف انرژی هستند، روابط فوق به‌صورت زیر ساده می‌شوند

$$R \simeq \frac{1}{|I_i|^2} \int_V \sigma |\mathbf{E}|^2 d^3x \quad (۶-۱۳۹)$$

$$X = \frac{4\omega}{|I_i|^2} \int_V (w_m - w_e) d^3x \quad (۶-۱۴۰)$$

در اینجا σ رسانایی حقیقی است و چگالی‌های انرژی w_e و w_m در (۶-۱۳۳) نیز اساساً روی کل حجم حقیقی هستند. مقاومت، به‌وضوح آن مقداری است که از بررسی افت حرارتی اهمی در مدار انتظار می‌رود. به‌طور مشابه، رثاکتانس نیز دارای صورت معقولی است: در صورتی که انرژی انباشته‌ی مغناطیسی غالب شود، چنانکه برای یک اندوکتانس فشرده این چنین است، رثاکتانس مثبت خواهد بود و در غیر این صورت نه. بستگی فرکانسی متفاوت رثاکتانس فرکانس پایین برای اندوکتانس‌ها ($X = \omega L$) و کاپاسیتانس‌ها ($X = -\frac{1}{\omega C}$) را می‌توان در تعریف L برحسب جریان و ولتاژ ($V = L \frac{dI}{dt}$) از یک طرف، و از تعریف C برحسب بار و ولتاژ ($V = \frac{Q}{C}$) از طرف دیگر، پیگیری کرد. بحث روی تعدادی از مثال‌های ساده، همین‌طور استخراج نتایج معادل با (۶-۱۳۹) و (۶-۱۴۰) برای کاندوکتانس و ساسکپتانس مربوط به ادمیتانس مختلط Y ، به مسائل انتهای فصل واگذار شده است.

۶-۱۰ خواص تبدیلی میدان‌های الکترومغناطیسی و چشمه‌های تحت دوران، انعکاس‌های فضایی و وارونگی زمان

این واقعیت که کمیت‌های فیزیکی وابسته دارای خواص تبدیلی سازگاری تحت انواع مشخصی از تبدیل مختصه هستند، طوری بدیهی فرض می‌شود که اهمیت یک چنین لازمه‌ها و محدودیت‌هایی که از این طریق روی شکل روابط اعمال می‌شود گاهی مورد غفلت قرار می‌گیرد.

بنابراین مفید است که به‌طور صریح، بحث روی خواص نسبتاً واضح کمیت‌های الکترومغناطیسی تحت دوران‌های وارونگی فضایی، و وارونگی زمانی صورت گیرد. این ایده‌ها کاربرد مستقیمی در محدود کردن "روابط ساختاری نمودشناختی" دارند و در بخش بعدی که در آن سؤال تک‌قطبی‌های مغناطیسی مورد بحث قرار خواهد گرفت، به‌کار گرفته می‌شوند.

چنین فرض شده است که ایده‌ی تبدیلات مختصه‌ی فضا و زمان و رابطه‌ی آن‌ها با قوانین بقای عمومی برای خواننده از مکانیک کلاسیک آشنا است (برای مثال گلدشتین را ملاحظه کنید). تنها خلاصه‌ای از نتایج اصلی در اینجا مشخص شده‌اند.

الف) دوران‌ها

یک دوران در سه بعد، یک تبدیل خطی از مختصات یک نقطه است، طوری که مجموع مربع‌های مختصات ناوردا باقی بمانند. یک چنین تبدیلی، تبدیل متعامد نامیده می‌شود. مختصات تبدیل‌یافته‌ی x'_α ، برحسب مختصات اصلی x_β ، با رابطه‌ی زیر مشخص می‌شوند

$$x'_\alpha = \sum_{\beta} a_{\alpha\beta} x_\beta \quad (۶-۱۴۱)$$

لازمه‌ی داشتن $(x')^2 = (x)^2$ ، ضرایب تبدیل حقیقی $a_{\alpha\beta}$ را به متعامد بودن مقید می‌کند

$$\sum_{\alpha} a_{\alpha\beta} a_{\alpha\gamma} = \delta_{\beta\gamma} \quad (۱۴۲-۶)$$

تبدیل معکوس دارای $(a^{-1})_{\alpha\beta} = a_{\beta\alpha}$ است، و مربع دترمینان ماتریس (a) مساوی واحد است. مقدار $\det(a) = +1$ متناظر است با دورانی مناسب که از وضعیت اصلی، با انجام یک سری از مراحل بینهایت کوچک قابل حصول باشد. در حالی که $\det(a) = -1$ نشان‌دهنده‌ی یک دوران نامناسب است یعنی مجموع یک انعکاس و یک دوران.

کمیت‌های فیزیکی، بسته به اینکه چگونه تحت دوران تبدیل یابند، به صورت تانسورهای دورانی با مرتبه‌های مختلف طبقه‌بندی می‌شوند. مختصات x_i ، سرعت‌های v_i و اندازه‌ی حرکت‌های p_i دارای مؤلفه‌هایی هستند که طبق قانون اساسی تبدیل (۱۴۱-۶) تبدیل می‌یابند و تانسورهایی با مرتبه‌ی یک (یا بردارها) هستند. حاصل ضرب‌های اسکالری بردارها، همچون $x_1 \cdot x_2$ یا $v_1 \cdot p_2$ تحت دوران‌ها ناوردایند، و بنابراین تانسورهایی از مرتبه صفر یا اسکالر هستند. گروه‌هایی از کمیت‌ها که طبق

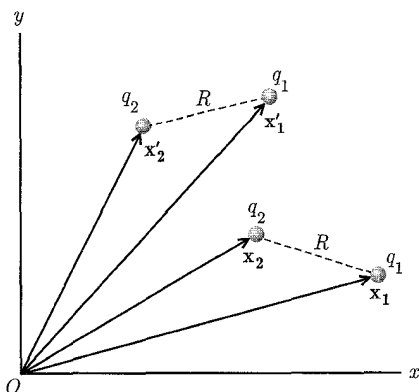
$$B'_{\alpha\beta} = \sum_{\gamma,\delta} a_{\alpha\gamma} a_{\beta\delta} B_{\gamma\delta} \quad (۱۴۳-۶)$$

تبدیل می‌یابند، تانسورهایی با مرتبه دوم یا به‌طور معمول، تانسور نامیده می‌شوند. تانسور تنش ماکسول یکی از چنین گروه کمیت‌هایی است. تبدیلات تانسوری مرتبه‌ی بالاتر نیز به‌وضوح نتیجه‌گیری می‌شوند.

در بررسی میدان‌های الکترومغناطیسی و سایر کمیات فیزیکی، با یک یا چند تابع از مختصات و احتمالاً سایر متغیرهای سینماتیکی سروکار داریم. بدین ترتیب در اینجا، انتخاب یک دیدگاه "فعال" یا یک دیدگاه "غیرفعال" در مورد دوران مطرح می‌شود. ما در اینجا دیدگاه "فعال" را می‌پذیریم که در آن محورهای مختصات ثابت در نظر گرفته می‌شوند و چنین تصور می‌کنیم که سیستم فیزیکی تحت دوران قرار گرفته است. بدین ترتیب برای مثال دو ذره‌ی باردار با مختصات اولیه‌ی x_1 و x_2 ، سیستمی را تشکیل می‌دهند که تحت یک دوران به‌گونه‌ای تبدیل می‌یابد که مختصات جدید ذرات x'_1 و x'_2 می‌شوند، همانند شکل ۵-۶. مؤلفه‌های هر بردار مختصه، طبق (۱۴۱-۶) تبدیل می‌یابد، اما پتانسیل الکترواستاتیک تغییری پیدا نمی‌کند، چراکه این پتانسیل فقط تابعی از فاصله‌ی بین دو نقطه، یعنی $R = |x_1 - x_2|$ است و R^2 نیز مجموعی از حاصل ضرب‌های اسکالری بردارها است و بنابراین تحت دوران ناوردا خواهد بود. پتانسیل الکترواستاتیک مثالی از یک اسکالر تحت دوران است. در کل اگر کمیت فیزیکی ϕ ، که تابعی از مختصات مختلف است که به‌طور جمعی با x_i نشان داده می‌شوند (احتمالاً شامل مختصاتی همچون سرعت و اندازه‌ی حرکت) به‌گونه‌ای باشد که وقتی سیستم تحت دوران $x'_i \rightarrow x_i$ قرار می‌گیرد این کمیت بدون تغییر بماند، یعنی

$$\phi'(x'_i) = \phi(x_i) \quad (۱۴۴-۶)$$

در این صورت ϕ تحت دوران یک تابع اسکالر است.



شکل ۵-۶: دوران فعال یک سیستم متشکل از دو بار.

به طور مشابه، اگر مجموعه‌ای از سه کمیت فیزیکی $V_\alpha(\mathbf{x}_i)$ ، $(\alpha = 1, 2, 3)$ ، تحت دوران این سیستم طبق رابطه زیر تبدیل یابند

$$V'_\alpha(\mathbf{x}'_i) = \sum_{\beta} a_{\alpha\beta} V_\beta(\mathbf{x}_i) \quad (۱۴۵-۶)$$

در این صورت V_α مؤلفه‌های یک بردار را تشکیل می‌دهد و برای تانسورهای با مرتبه‌ی بالا نیز همین‌گونه خواهد بود.

عملیات مشتق‌گیری برداری دارای خواص تبدیلی محدودی تحت دوران هستند. برای مثال گرادیان یک اسکالر یعنی $\nabla\phi$ ، به صورت یک بردار تبدیل می‌یابد، دیورژانس یک بردار یعنی $\nabla \cdot \mathbf{V}$ ، یک اسکالر است و عملگر لاپلاسین ∇^2 یک عملگر اسکالری است، طوری که کاربردش روی یک تابع یا مجموعه‌ای از توابع، خواص تبدیلی دورانی آن‌ها را تغییر نخواهد داد. توجه خاصی نیز باید روی حاصل ضرب خارجی دو بردار صورت گیرد

$$\mathbf{A} = \mathbf{B} \times \mathbf{C} \quad (۱۴۶-۶)$$

به صورت مؤلفه‌ای، این بردار به طور مختصر به شکل زیر نشان داده می‌شود

$$A_\alpha = \sum_{\beta\gamma} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} B_\beta C_\gamma$$

که در آن برای $\alpha = 1, \beta = 2, \gamma = 3$ و برای جایگشت‌های سیکلیک، $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} = +1$ و برای سایر جایگشت‌ها $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} = -1$ است، و برای دو یا چند اندیس مساوی نیز صفر می‌شود.

به جهت حضور دو بردار در طرف سمت راست، حاصل ضرب برداری فوق نشانه‌هایی از یک تانسور مرتبه دوی غیرمتقارن بدون تریس دارد. چون یک چنین تانسوری فقط دارای سه مؤلفه‌ی مستقل است لذا آن را به‌عنوان یک بردار تلقی می‌کنیم. البته این کار تنها تا آنجایی که تحت دوران، طبق (۶-۱۴۱) تبدیل یابد، موجه است. در حقیقت واقع، قانون تبدیل برای حاصل ضرب برداری (۶-۱۴۶) عبارت است از

$$A'_\alpha = \det(a) \sum_{\beta} a_{\alpha\beta} A_\beta \quad (6-147)$$

برای دوران‌های مناسب^۱ تنها نوعی که تاکنون در نظر گرفته‌ایم، $\det(a) = +1$ بوده است. بدین ترتیب (۶-۱۴۷) با تبدیل اساسی مختصه‌ی (۶-۱۴۱) هماهنگ است. تحت دوران‌های مناسب، حاصل ضرب برداری به‌صورت یک بردار تبدیل می‌یابد.

ب) انعکاس فضایی یا وارونگی

انعکاس فضایی نسبت به یک صفحه، متناظر است با تغییر علائم مؤلفه‌های عمودی بردارهای مختصه‌ی متعلق به تمامی نقاط، و بدون تغییر گذاشتن مؤلفه‌های موازی با صفحه. بدین ترتیب برای انعکاس در صفحه‌ی $x - y$ داریم

$$\mathbf{x}_i = (x_i, y_i, z_i) \rightarrow \mathbf{x}'_i = (x_i, y_i, -z_i)$$

وارونگی فضایی متناظر است با، انعکاس تمام سه مؤلفه‌ی مربوط به هر بردار مختصه نسبت به مبدأ $\mathbf{x}_i \rightarrow \mathbf{x}'_i = -\mathbf{x}_i$.

وارونگی فضایی با انعکاس، یک تبدیل انفضالی است، که برای بیش‌تر از دو مختصه در حالت کلی نمی‌تواند با دوران‌های مناسبی همراه باشد. وارونگی فضایی متناظر است با $\det(a) = -1$ ، و برای عمل وارونگی [(۶-۱۴۱)] با $a_{\alpha\beta} = -\delta_{\alpha\beta}$ مشخص می‌شود. این موضوع می‌رساند که بردارها تحت وارونگی فضایی تغییر علامت می‌دهند، اما حاصل ضرب‌های برداری، که رفتارشان طبق (۶-۱۴۷) است، این کار را نمی‌کنند. بدین ترتیب مجبوریم دو نوع بردار را از یکدیگر تمایز دهیم (تحت دوران‌های کلی).

بردارهای قطبی (یا دقیقاً بردارها) که طبق (۶-۱۴۵) تبدیل می‌یابند و برای $\mathbf{x}_i \rightarrow \mathbf{x}'_i = -\mathbf{x}_i$ به‌صورت زیر رفتار می‌کنند

$$\mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}' = -\mathbf{V}$$

شبه بردارها یا بردارهای محوری، که طبق (۶-۱۴۷) تبدیل می‌یابند و برای $\mathbf{x}_i \rightarrow \mathbf{x}'_i = -\mathbf{x}_i$ به‌صورت

$$\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}' = \mathbf{A}$$

رفتار می‌کنند. تمایز مشابهی نیز باید برای اسکالرهای تحت دوران صورت گیرد.

در اینجا از اسکالرها یا شبه بردارها صحبت می‌کنیم، بسته به اینکه آیا این کمیت‌ها تحت وارونگی فضایی تغییر علامت می‌دهند یا خیر. حاصل ضرب اسکالری سه‌گانه‌ی $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ مثالی از یک کمیت شبه برداری است، مشروط بر اینکه \mathbf{a} ، \mathbf{b} و \mathbf{c} همگی بردارهایی قطبی باشند (در اینجا به‌طور گذرا جنبه‌ی خطرناکی از نمادگذاری معمولان را ملاحظه می‌کنیم. نوشتن یک بردار به صورت \mathbf{a} به ما نمی‌گوید که آیا این بردار یک بردار قطبی است یا یک بردار محوری).

خواص تبدیلی تانسورهای با مرتبه‌ی بالاتر تحت وارونگی فضایی را می‌توان مستقیماً استنتاج نمود (در صورتی‌که با انجام حاصل ضرب مؤلفه‌هایی از بردارهای قطبی یا محوری ساخته شده باشند). اگر یک تانسور از مرتبه N ، تحت وارونگی فضایی با عامل $(-1)^N$ تبدیل یابد، آن را یک تانسور واقعی یا دقیقاً یک تانسور می‌نامیم، در حالی‌که اگر عامل $(-1)^{N+1}$ باشد آن را یک شبه‌تانسور از مرتبه‌ی N می‌نامیم.

ج) وارونی زمانی

قوانین اساسی فیزیک از لحاظ جهت زمان ناوردا هستند (حداقل در سطح کلاسیک). این بدان معنی نیست که معادلات برحسب t زوج باشند، بلکه تحت تبدیل وارونی زمانی $t \rightarrow t' = -t$ کمیت‌های فیزیکی وابسته با یک روش سازگار، به‌گونه‌ای تبدیل می‌یابند که شکل معادله مشابه قبل باشد. بدین ترتیب برای ذره‌ای با اندازه‌ی حرکت \mathbf{p} و مکان \mathbf{x} که در حال حرکت در یک پتانسیل خارجی $U(\mathbf{x})$ است معادله‌ی حرکت نیوتن

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = -\nabla U(\mathbf{x})$$

تحت وارونی زمانی ناوردا خواهد بود، مشروط بر اینکه $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}' = \mathbf{x}$ و $\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p}' = -\mathbf{p}$ تبدیل یافته باشد. البته تغییر علامت اندازه‌ی حرکت، به‌طور شهودی با توجه به رابطه‌اش با سرعت $\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{x}}{dt}$ واضح است. نتیجه‌ی ناوردایی قوانین نیوتن تحت وارونی زمانی این است که اگر یک آرایش اولیه‌ی مشخص سیستمی از ذرات، تحت تأثیر نیروهای مختلف به یک آرایش نهایی برسد، یک حالت ممکنه از حرکت این سیستم این است که آرایش نهایی وارون‌شده‌ی زمانی (تمام مکان‌ها مشابه ولی همه‌ی سرعت‌ها معکوس) روی مسیر وارون‌شده نسبت به آرایش اولیه (وارون‌شده‌ی زمانی) پیش برود. خواص تبدیلی کمیت‌های مکانیکی مختلف تحت دوران، وارونگی فضایی و وارونی زمانی در بخش اول جدول ۱-۶ خلاصه شده‌اند.

د) کمیت‌های الکترومغناطیسی

دقیقاً همانند قوانین مکانیک، این موضوع که صورت معادلات حاکم بر پدیده‌های الکترومغناطیسی تحت دوران‌ها، وارونگی فضایی و وارونی زمانی ناوردایند، واقعیت دارد (یعنی سازگار با تمام واقعیات تجربی

شناخته شده). این موضوع ایجاب می‌کند که، کمیت‌های الکترومغناطیسی مختلف دارای خواص تبدیلی خوش رفتاری تحت این عملیات باشند. این یک واقعیت تجربی است که بار الکتریکی تحت تبدیلات گالیله‌ای و لورنتز ناوردا و تحت دوران‌ها یک اسکالر باشد. فرض اینکه بار نیز تحت وارونگی فضایی و حتی تحت وارونی زمانی یک اسکالر باشد فرضی طبیعی، مناسب و مجاز است. نکته در اینجا این است که، کمیت‌های قابل اندازه‌گیری فیزیکی همانند نیرو، شامل حاصل ضربی از بار و میدان هستند. بدین ترتیب، خواص تبدیلی منتسب به میدان‌هایی چون \mathbf{E} و \mathbf{B} ، بستگی به قرارداد انتخاب شده برای بار خواهد داشت. با توجه به بار به‌عنوان یک اسکالر واقعی (تحت تمام سه نوع تبدیل) چگالی بار ρ نیز یک اسکالر واقعی است. با توجه به این حقیقت که میدان الکتریکی، نیرو بر واحد بار است، ملاحظه می‌کنیم که \mathbf{E} یک بردار قطبی است حتی تحت وارونی زمان. این موضوع از معادله‌ی ماکسول، $\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ نیز نتیجه می‌شود، چراکه دو طرف این معادله تحت این تبدیلات باید با روش مشابهی تبدیل یابند. جمله‌ی اول در معادله‌ی ماکسول که نشان‌دهنده‌ی قانون فارادی

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0$$

است، تحت دوران و وارونگی فضایی به صورت یک شبه‌بردار تبدیل می‌یابد و تحت وارونی زمانی زوج است. بنابراین برای حفظ ناوردایی صورت معادله، لازم است القای مغناطیسی \mathbf{B} یک شبه‌بردار و تحت وارونی زمانی فرد باشد. می‌توان مشاهده کرد که طرف سمت راست معادله‌ی آمپر ماکسول

$$\frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{B} - \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mathbf{J}$$

به صورت یک بردار قطبی تبدیل می‌یابد و تحت وارونی زمان فرد است. این موضوع ایجاب می‌کند که چگالی جریان \mathbf{J} یک بردار قطبی باشد و تحت وارونی زمان فرد، چنان‌که از تعریفش برحسب حاصل ضرب بار در سرعت نیز انتظار می‌رود.

کم‌وبیش ملاحظه کرده‌ایم که میدان‌های میکروسکوپی و چشمه‌ها، دارای خواص تبدیلی خوش‌تعریفی تحت دوران‌ها، وارونگی فضایی و وارونی زمانی هستند. با توجه به استخراج معادلات ماکروسکوپی ماکسول در بخش ۶-۶، و تعاریف \mathbf{P} و \mathbf{M} و غیره، می‌توان ملاحظه نمود که \mathbf{E} ، \mathbf{P} و \mathbf{D} ، تماماً به‌طریقی مشابه، همچون \mathbf{B} ، \mathbf{M} و \mathbf{H} تبدیل می‌یابند. خواص تبدیلی مختلف، برای کمیت‌های الکترومغناطیسی در قسمت دوم جدول ۶-۱ خلاصه شده‌اند.

برای بررسی مفید بودن شناسه‌ها در خواص تقارنی اشاره شده در جدول ۶-۱، ساختار نمودشناختی^۱ یک رابطه‌ی ساختاری موضعی فضایی، که مشخص‌کننده‌ی قطبش \mathbf{P} برای یک محیط همسانگرد خطی، و بی‌اتلاف در یک القای مغناطیسی خارجی ثابت و یکنواخت \mathbf{B}_0 است را مورد بررسی قرار می‌دهیم. طبق

جدول ۶-۱: خواص تبدیلی کمیت‌های فیزیکی مختلف تحت دوران، وارونگی فضایی و وارونی زمانی *

کمیت فیزیکی	دوران (مرتبه تانسور)	تبدیل فضایی (نام)	وارونی زمانی
I. مکانیکی			
مختصه	\mathbf{x}	فرد (بردار)	زوج
سرعت	\mathbf{v}	فرد (بردار)	فرد
اندازه حرکت	\mathbf{p}	فرد (بردار)	فرد
اندازه حرکت زاویه‌ای	$\mathbf{L} = \mathbf{x} \times \mathbf{p}$	زوج (شبه بردار)	فرد
نیرو	\mathbf{F}	فرد (بردار)	زوج
گشتاور	$\mathbf{N} = \mathbf{x} \times \mathbf{F}$	زوج (شبه بردار)	زوج
انرژی جنبشی	$\frac{p^2}{2m}$	زوج (اسکالر)	زوج
انرژی پتانسیل	$U(x)$	زوج (اسکالر)	زوج
II. الکترومغناطیسی			
چگالی بار	ρ	زوج (اسکالر)	زوج
چگالی جریان	\mathbf{J}	فرد (بردار)	فرد
میدان الکتریکی	$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{E} \\ \mathbf{P} \\ \mathbf{D} \end{array} \right.$	فرد (بردار)	زوج
قطبش			
جابه‌جایی			
القای مغناطیسی	$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{B} \\ \mathbf{M} \\ \mathbf{H} \end{array} \right.$	زوج (شبه بردار)	فرد
مغناطش			
میدان مغناطیسی			
بردار پوینتینگ	$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$	فرد (بردار)	فرد
تانسور تنش ماکسول	$T_{\alpha\beta}$	زوج (تانسور)	زوج

* برای کمیت‌هایی که تابعی از x و t هستند، لازم است منظور از زوجیت یا فردیت، تحت وارونی زمان یا وارونگی فضایی بسیار واضح باشد. برای مثال القای مغناطیسی طوری است که تحت وارونگی فضایی، $\mathbf{B}(\mathbf{x}, t) \rightarrow \mathbf{B}_i(\mathbf{x}, t) = +\mathbf{B}(-\mathbf{x}, t)$ ، در حالی که تحت وارونی زمانی، $\mathbf{B}(\mathbf{x}, t) \rightarrow \mathbf{B}_T(\mathbf{x}, t) = -\mathbf{B}(\mathbf{x}, -t)$

فرض این رابطه برحسب میدان الکتریکی از مرتبه اول است، اما در اینجا به یک بسط برحسب توان‌های B_0 تا مرتبه دوم نیاز داریم. چون P یک بردار قطبی بوده و تحت وارونی زمانی زوج است، لذا جملات مختلفی که با ضرایب اسکالر ضرب می‌شوند، باید به طریقی مشابه تبدیل یابند. تا مرتبه صفر برحسب B_0 ، تنها E قابل دسترس است. تا مرتبه‌ی یک برحسب B_0 ، جملات ممکن شامل E ، به‌طور خطی عبارتند از

$$E \times B_0, \quad \frac{\partial E}{\partial t} \times B_0, \quad \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} \times B_0, \dots$$

تمامی این جملات، در زمینه‌های دورانی و وارونگی فضایی مجاز شمرده می‌شوند. اما تنها آنهایی که شامل مشتق‌های زمانی فرد هستند، به‌طور مناسب تحت وارونی زمانی تبدیل می‌یابند. برای جملات مرتبه‌ی دوم برحسب B_0 امکانات مختلف عبارتند از

$$(B_0 \cdot B_0)E, \quad (E \cdot B_0)B_0, \quad (B_0 \cdot B_0) \frac{\partial E}{\partial t}, \dots$$

در اینجا تنها جمله‌هایی با مشتق‌های زمانی زوج یا صفر از E ، تمامی شروط را برآورده می‌کنند. بدین ترتیب، عمومی‌ترین رابطه‌ی موضعی فضایی برای قطبش، تا تصحیح مرتبه‌ی دوم برحسب میدان مغناطیسی ثابت B_0 عبارت است از

$$\frac{1}{\epsilon_0} P = \chi_0 E + \chi_1 \frac{\partial E}{\partial t} \times B_0 + \chi_2 (B_0 \cdot B_0)E + \chi_3 (E \cdot B_0)B_0 + \dots \quad (148-6)$$

که در آن χ_i ضرایب اسکالری حقیقی‌اند و مشتق‌های زمانی بالاتر از E نیز می‌توانند مطرح شوند؛ فرد برای جمله‌های خطی برحسب B_0 و زوج برای توان‌های صفرم و دوم برحسب B_0 .

پاسخ تمام سیستم‌های مادی، در فرکانس‌های پائین، اساساً از طریق نیروهای الکتریکی است. این بدان معنی است که در فرکانس صفر، نباید وابستگی P و B_0 وجود داشته باشد، و یک شکل بسیار واقع‌بینانه عبارت است از

$$\frac{1}{\epsilon_0} P = \chi_0 E + \chi_1 \frac{\partial E}{\partial t} \times B_0 + \chi'_2 (B_0 \cdot B_0) \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} + \chi'_3 \left(\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} \cdot B_0 \right) B_0 \quad (149-6)$$

که در آن تنها پایین‌ترین مرتبه‌ی مشتق‌های زمانی را برای هر کدام از توان‌های B_0 نشان داده‌ایم. در فرکانس‌های نوری این معادله درک رفتار ژیروتروپیک امواج در یک محیط همسانگرد در یک میدان مغناطیسی ثابت را امکان‌پذیر می‌کند*. مثال دیگر، یعنی اثر هال، به مسائل واگذار شده است. این اثر به‌علاوه اثرهای ترموگالوانومتریک و وجود ساختار مغناطیسی در جامدات در لاندائو و لیفشیتز (op. cit) مورد بررسی قرار گرفته‌اند.

(* لاندائو و لیفشیتز، الکتروپنایمیک محیط‌های پیوسته را ملاحظه کنید صفحه ۳۳۴، مسئله‌ی ۳، صفحه‌ی ۳۳۷)

در وضعیت‌های مشخص، قیدهای مربوط به تقارن‌های فضا زمان باید در روابط ساختاری رها شوند. برای مثال توان چرخشی نوری مولکول‌های کایرال* از لحاظ نمودشناختی (فنومنولوژیک) توسط روابط ساختاری $\mathbf{P} = \epsilon_0 \chi_0 \mathbf{E} + \xi \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ و $\mu_0 \mathbf{M} = \chi'_0 \mathbf{B} + \xi' \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$ توصیف می‌شوند. جملات افزوده شده، شامل کمیت‌های شبه‌اسکالری ξ و ξ' اند که فقدان اساسی تقارن پاریته را برای مواد کایرال منعکس می‌کنند (از لحاظ مکانیک کوانتومی، غیرصفر بودن ξ یا ξ' ، لازم می‌دارد که هر دو عملگر دوقطبی الکتریکی و مغناطیسی، عناصر ماتریسی غیرصفری بین جفت مشابهی از حالت‌ها داشته باشند، موردی که نمی‌تواند برای حالت‌های دارای پاریته معین اتفاق بیافتد).

۱۱-۶ در خصوص تک‌قطبی‌های مغناطیسی

در حال حاضر (۱۹۹۸) هیچ گواهی تجربی دال بر وجود بارهای مغناطیسی یا تک‌قطبی‌ها وجود ندارد. اما به‌ویژه اخیراً به‌جهت بحث نظری برجسته‌ی دیراک†، وقتی کلاً حوزه‌ی جدیدی از انرژی، در فیزیک انرژی بالا گشوده می‌شود، یا یک منبع جدید از ماده، (همانند صخره‌هایی از ماه) دسترس‌پذیر می‌شود مجدداً تحقیق بر روی تک‌قطبی‌ها احیاء می‌شود.

بحث دیراک، که در ذیل بدان اشاره شده است این است که صرف وجود یک تک‌قطبی مغناطیسی در عالم می‌توانست توضیحی برای طبیعت انحصالی بار الکتریکی به‌دست دهد. چون کوانتش بار الکتریکی یکی از ژرف‌ترین رازهای جهان فیزیک است، لذا ایده‌ی دیراک دارای جاذبه‌ی زیادی است. تاریخچه‌ی ایده‌های نظری و تحقیقات آزمایشگاهی تا ۱۹۹۰ در سند منبع مربوط به گلدهابر و تراور‡، شرح داده شده است. چند مرجع دیگر نیز در انتهای این فصل یافت می‌شوند.

قبل از بررسی بحث دیراک، چند اقدام مقدماتی ضروری به‌نظر می‌رسد. سؤالی که مطرح می‌شود این است که آیا امکان گفتن اینکه ذرات همانند بار الکتریکی، دارای بار مغناطیسی نیز هستند، وجود دارد؟ یا خیر. بیا فرض کنیم علاوه بر چگالی‌های بار و جریان الکتریکی ρ_e و \mathbf{J}_e ، چگالی‌های بار و جریان مغناطیسی ρ_m و \mathbf{J}_m نیز وجود داشته باشند. در این صورت معادلات ماکسول به‌صورت زیر خواهند بود

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{D} &= \rho_e, & \nabla \times \mathbf{H} &= \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{J}_e \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= \rho_m, & -\nabla \times \mathbf{E} &= \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \mathbf{J}_m \end{aligned} \quad (150-6)$$

فرض شده است که چگالی‌های بار مغناطیسی همانند چگالی‌های بار الکتریکی شکل مشابهی از معادله‌ی پیوستگی را برآورده می‌کنند. از معادلات فوق چنین به‌نظر می‌رسد که وجود بار و جریان مغناطیسی می‌توانست

* خاصیتی از عدم تقارن در مولکول‌ها که می‌توان آن را به "مولکول‌های تک‌دست" نیز ترجمه کرد؛ مترجم

† P. A. M. Dirac, *Proc. R. Soc. London A* **133**, 60 (1931); *Phys. Rev.* **74**, 817 (1948).

‡ A. S. Goldhaber and Trower, Resource Letter MM-1: Magnetic Monopoles, *Am. J. Phys.* **58**, 429-439 (1990).

نتایج الکترومغناطیسی قابل مشاهده‌ای داشته باشد. با این وجود* تبدیل دوگان زیر را در نظر بگیرید

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}' \cos \xi + Z_0 \mathbf{H}' \sin \xi \quad , \quad Z_0 \mathbf{D} = Z_0 \mathbf{D}' \cos \xi + \mathbf{B}' \sin \xi \quad (۱۵۱-۶)$$

$$Z_0 \mathbf{H} = -\mathbf{E}' \sin \xi + Z_0 \mathbf{H}' \cos \xi \quad , \quad \mathbf{B} = -Z_0 \mathbf{D}' \sin \xi + \mathbf{B}' \cos \xi$$

برای یک زاویه‌ی حقیقی ξ (شبه‌اسکالر) یک چنین تبدیلی شکل‌های درجه‌ی دومی همچون $\mathbf{E} \times \mathbf{H}$ و $(\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{H})$ و نیز مؤلفه‌های تانسور تنش ماکسول $T_{\alpha\beta}$ را ناوردا باقی می‌گذارد. در صورتی‌که منابع نیز به‌طریقی مشابه تبدیل یابند

$$Z_0 \rho_e = Z_0 \rho'_e \cos \xi + \rho'_m \sin \xi \quad , \quad Z_0 \mathbf{J}_e = Z_0 \mathbf{J}'_e \cos \xi + \mathbf{J}'_m \sin \xi \quad (۱۵۲-۶)$$

$$\rho_m = -Z_0 \rho'_e \sin \xi + \rho'_m \cos \xi \quad , \quad \mathbf{J}_m = -Z_0 \mathbf{J}'_e \sin \xi + \mathbf{J}'_m \cos \xi$$

در آن صورت برای نشان دادن اینکه معادلات ماکسول تعمیم‌یافته‌ی (۶-۱۵) ناوردا هستند انجام عملیات جبری کار ساده‌ای است. یعنی معادلات برای میدان‌های پریم‌دار $(\mathbf{E}', \mathbf{D}', \mathbf{B}', \mathbf{H}')$ مشابه معادلات (۶-۱۵) با حضور چشمه‌های پریم‌دار هستند.

ناوردایی معادلات الکترودینامیک تحت تبدیلات دوگان نشان می‌دهد که بحث از یک ذره‌ی دارای یک بار الکتریکی، امری عادی است در حالی‌که در مورد بار مغناطیسی این‌گونه نیست. تنها سؤال معنی‌دار این است که، آیا تمام ذرات، دارای نسبت بار مغناطیسی به الکتریکی مشابهی هستند؟ اگر این‌گونه باشد، می‌توانیم با انتخاب زاویه‌ی ξ ، طوری‌که $\rho_m = 0$ و $\mathbf{J}_m = 0$ ، یک تبدیل دوگان انجام دهیم. بنابراین معادلات ماکسول را به همان‌گونه که معمولاً شناخته شده‌اند، خواهیم داشت.

اگر طبق قرارداد، بارهای الکتریکی و مغناطیسی یک الکترون را به‌صورت $q_e = -e$ و $q_m = 0$ انتخاب کنیم، مشخص می‌شود که برای یک پروتون $q_e = +e$ است (با حضور حدودی از خطا به اندازه‌ی $10^{-20} \sim e / (q_e + (\text{الکترون}) q_e) \approx 10^{-20} Z_0 e$ و $|q_m| < 2 \times 10^{-24}$ (نوکلئون) $|q_m|$).

حد بسیار کوچک فوق روی بار مغناطیسی یک پروتون یا نوترون مستقیماً از شناخت این که میدان مغناطیسی میانگین در سطح زمین از $T \sim 10^{-4}$ بیش‌تر نیست به‌دست می‌آید.

تا درجه‌ی بالایی از دقت نتیجه این است که ذرات مواد معمولی تنها دارای بار الکتریکی، یا به‌طور معادل، این مواد تماماً دارای نسبت مشابهی از بار مغناطیسی به بار الکتریکی هستند. برای سایر ذرات ناپایدار بحث مربوط به سؤال بار مغناطیسی بیش‌تر گشوده است، اما هنوز گواه مثبتی در این زمینه وجود ندارد. خواص تبدیلی ρ_m و \mathbf{J}_m تحت دوران‌ها، وارونگی فضایی و وارونی زمانی مهم هستند. با توجه به رفتار شناخته‌شده‌ی \mathbf{E} و \mathbf{B} در فرمول‌بندی معمول، از خط دوم در (۶-۱۵) نتیجه می‌گیریم که

(* حضور "امپدانس فضای آزاد" $Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}$ در تبدیل فوق، نتیجه‌ای از حضور پارامترهای دارای بعد ϵ_0 و μ_0 در سیستم SI است. چگالی بار مغناطیسی از لحاظ ابعادی با چگالی بار الکتریکی در سیستم واحدهای SI تفاوت دارد. برای استفاده‌کنندگان از واحدهای گوسی؛ $Z_0 \rightarrow 1$ را قرار دهید.

ρ_m یک چگالی شبه‌اسکالاری است و تحت وارونی زمانی فرد،
و \mathbf{J}_m یک چگالی شبه‌بردار است و تحت وارونی زمانی زوج..

چون تقارن‌های مربوط به ρ_m ، هم تحت وارونگی فضایی و هم وارونی زمانی، مخالف با تقارن‌های مربوط به ρ_e هستند، مسئله با هر دو بار الکتریکی و مغناطیسی این است که وارونگی فضایی و وارونی زمانی، دیگر هیچ‌یک تقارن‌های معتبری از قوانین فیزیک نخواهند بود. البته این یک واقعیت است که اصول تقارنی فوق به‌طور دقیق در حوزه‌ی فیزیک ذرات بنیادی معتبر نیستند، اما گواه حاضر این است که نقض آن‌ها بسیار کم است و به‌طریقی به برهم‌کنش‌های ضعیف مربوط می‌شود. پیشرفت‌های آینده‌ی مرتبط‌کننده‌ی برهم‌کنش‌های الکترومغناطیس، ضعیف و شاید قوی ممکن است ذرات حامل بار مغناطیسی را به‌عنوان وسیله‌ای برای نقض تقارن‌های، وارونگی فضایی و وارونی زمانی مورد استفاده قرار دهد. با توجه به عدم وجود گواهی برای وجود تک‌قطبی‌ها، این موضوع به‌صورت یک حدس باقی خواهد ماند. علی‌رغم گواهی منفی در وجود تک‌قطبی‌های مغناطیسی، بگذارید تا به پیشنهاد هوشمندانه‌ی دیراک برگردیم. او با بررسی کوانتوم مکانیکی یک الکترون در حضور یک تک‌قطبی مغناطیسی، سازگاری لازم یعنی شرط کوانتس زبر را نشان داد

$$\frac{eg}{4\pi\hbar} = \frac{\alpha g}{Z_0 e} = \frac{n}{2} \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (153-6)$$

که در آن e بار الکترونیکی، $\alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar c}$ ، ثابت ساختار ریز $\left(\alpha \approx \frac{1}{137}\right)$ و g بار مغناطیسی تک‌قطبی است.

بدین ترتیب طبیعت انفصالی بار الکتریکی، از وجود یک تک‌قطبی نتیجه می‌شود و اندازه‌ی e به‌جز برحسب بار مغناطیسی g تعیین نخواهد شد. بحث فوق را می‌توان برعکس نیز انجام داد. با توجه به مقدار مشخص ثابت ساختار ریز، به‌وجود تک‌قطبی‌هایی مغناطیسی با بارهای g اشاره می‌کنیم که ثابت "ساختار ریز" مغناطیسی آن‌ها عبارت است از

$$\frac{g^2}{4\pi\mu_0 \hbar c} = \frac{n^2}{4} \left(\frac{4\pi\epsilon_0 \hbar c}{c^2} \right) \simeq \frac{137}{4} n^2$$

یک چنین تک‌قطبی‌هایی "تک‌قطبی‌های دیراک" نامیده می‌شوند. قدرت جفت‌شدگی آن‌ها بسیار زیاد است. استخراج آن‌ها از ماده با میدان‌های مغناطیسی dc صورت می‌گیرد و آشکارسازی بعدی آن‌ها نیز در اصل بسیار ساده است. برای مثال، افت انرژی در ماده توسط یک تک‌قطبی نسبتی دیراک تقریباً مشابه با افت انرژی یک هسته‌ی نسبتی سنگین با $Z = \frac{137n}{2}$ است. اگر یک چنین هسته‌ای به حالت سکون برسد به جرات می‌توان آن را تشخیص داد، چراکه این هسته افزایشی را در یونیزاسیون انتهای مسیرش نشان خواهد داد.

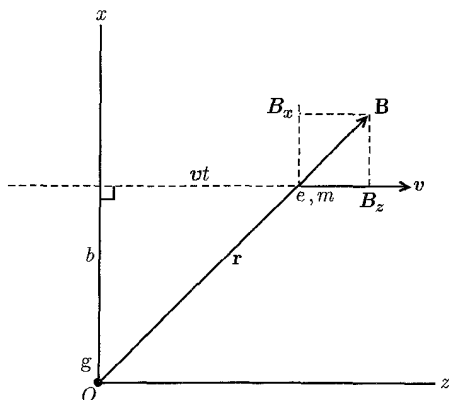
۱۲-۶ بحث مربوط به شرط کوانتس دیراک

بررسی‌های نیمه‌کلاسیکی می‌تواند شرط کوانتس دیراک (۶-۱۵۳) را روشن کند. ابتدا انحراف در پارامترهای برخورد بزرگ^۱ یک ذره با بار e و جرم m را توسط میدان یک تک‌قطبی مغناطیسی مانا با بار مغناطیسی g بررسی می‌کنیم. در پارامتر برخورد به قدر کافی بزرگ، تغییر در حالت حرکت ذره ی باردار را می‌توان با فرض اینکه ذره منحرف نمی‌شود با محاسبه‌ی ضربه‌ی نیرو تعیین کرد. این هندسه در شکل ۶-۶ نشان داده شده است. ذره در این شکل به موازات محور z ، با پارامتر برخورد b و سرعت v تابیده می‌شود و توسط میدان مغناطیسی تک‌قطبی یعنی $\mathbf{B} = \frac{g\mathbf{r}}{4\pi r^3}$ ، که جهت آن شعاعی است، طبق نیروی لورنتز (۶-۱۱۳) تحت تأثیر قرار می‌گیرد. در تقریبی که در آن ذره منحرف نمی‌شود، نیروی مؤثر در سرتاسر برخورد نیرویی با یک مؤلفه‌ی y خواهد بود

$$F_y = evB_x = \frac{eg}{4\pi} \frac{vb}{(b^2 + v^2t^2)^{3/2}} \quad (6-154)$$

ضربه‌ی انتقال‌یافته توسط این نیرو عبارت است از

$$\Delta p_y = \frac{egvb}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dy}{(b^2 + v^2t^2)^{3/2}} = \frac{eg}{2\pi b} \quad (6-155)$$



شکل ۶-۶: ذره ی باردار گذرنده از یک تک‌قطبی مغناطیسی در پارامتر برخورد بزرگ.

چون این ضربه در جهت y است، لذا به طرف خارج از صفحه‌ی شکل ۶-۶، یعنی در جهت سمتی^۲، منحرف می‌شود. به‌وضوح اندازه‌ی حرکت زاویه‌ای ذره با این برخورد تغییر خواهد کرد، نتیجه‌ای که به‌لحاظ طبیعت غیرمرکزی بودن نیرو تعجب‌آور نیست. هرچند که مقدار تغییر در اندازه‌ی حرکت زاویه‌ای، تا اندازه‌ای

1) Large impact parameters 2) Azimuthal

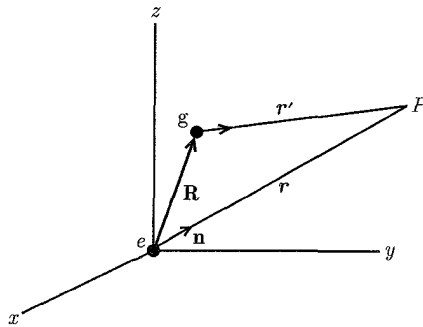
تعجب آور است. در ابتدا مؤلفه‌ی z برای \mathbf{L} وجود ندارد، اما در بینهایت این مؤلفه وجود خواهد داشت و تغییر در L_z عبارت است از

$$\Delta L_z = b \Delta p_y = \frac{eg}{2\pi} \quad (۱۵۶-۶)$$

تغییر در مؤلفه‌ی z اندازه‌ی حرکت زاویه‌ای ذره، مستقل از پارامتر برخورد b و سرعت v برای ذره‌ی باردار است. این تغییر تنها به حاصل ضرب eg و سرعت نور بستگی داشته و برای یک ذره‌ی باردار در حال عبور از یک تک قطبی ساکن، یک مقدار جهانی است و اینکه تا چه اندازه از تک قطبی دور باشد نیز مسئله‌ای نخواهد بود. اگر فرض کنیم که هر تغییری در اندازه‌ی حرکت زاویه‌ای باید به صورت مضرب صحیحی از \hbar اتفاق بیافتد، بی‌درنگ به شرط کوانتس دیراک* (۶-۱۵۳) هدایت خواهیم شد. ویژگی جهانی خاص تغییر در اندازه‌ی حرکت زاویه‌ای (۶-۱۵۶) برای یک ذره‌ی باردار در حال عبور از یک تک قطبی مغناطیسی را می‌توان با بررسی اندازه‌ی حرکت زاویه‌ای لحاظ شده در میدان‌های یک بار الکتریکی نقطه‌ای در حضور یک تک قطبی مغناطیسی نقطه‌ای استنباط نمود.

اگر همان‌گونه که در شکل ۶-۷ نشان داده شده است، تک قطبی g در \mathbf{R} و بار e در $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ باشد، میدان‌های مغناطیسی و الکتریکی در تمام فضا عبارت خواهند بود از

$$\mathbf{H} = \frac{g}{4\pi\mu_0} \nabla \left(\frac{1}{r'} \right) = \frac{g}{4\pi\mu_0} \frac{\mathbf{n}'}{r'^2}, \quad \mathbf{E} = -\frac{e}{4\pi\epsilon_0} \nabla \left(\frac{1}{r} \right) = \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{n}}{r^2} \quad (۱۵۷-۶)$$



شکل ۶-۷:

که در آن $r = |\mathbf{x}|$ ، $r' = |\mathbf{x} - \mathbf{R}|$ ، به ترتیب بردارهای یکانی در جهت‌های \mathbf{x} و $\mathbf{x} - \mathbf{R}$ هستند. اندازه‌ی حرکت زاویه‌ای \mathbf{L}_{em} با انتگرال حجمی $\mathbf{x} \times \mathbf{g}$ مشخص می‌شود، که در آن

$$\mathbf{g} = \frac{(\mathbf{E} \times \mathbf{H})}{c^2}$$

(* این بحث اساساً منسوب است به

چگالی اندازه‌ی حرکت الکترومغناطیسی است. اندازه‌ی حرکت کل \mathbf{P}_{em} مربوط به میدان‌های فوق (انتگرال حجمی) صفر می‌شود. این موضوع از این حقیقت ناشی می‌شود که \mathbf{P}_{em} یک بردار است و تنها بردار قابل دسترس نیز \mathbf{R} است.

بدین ترتیب، $\mathbf{P}_{em} = \left(\frac{\mathbf{R}}{R}\right) P$ که در آن P انتگرال حجمی $\mathbf{g} \cdot \left(\frac{\mathbf{R}}{R}\right)$ است. اما $\mathbf{g} \cdot \mathbf{R} \propto \mathbf{R} \cdot (\mathbf{n} \times \mathbf{n})$. چون \mathbf{R} در صفحه‌ی تعریف شده توسط \mathbf{n} و \mathbf{n}' قرار دارد، لذا حاصل ضرب اسکالر سه‌گانه و همچنین \mathbf{P}_{em} صفر می‌شود. این صفرشدگی در اندازه‌ی حرکت کل بدان معنی است که اندازه‌ی حرکت زاویه‌ای

$$\mathbf{L}_{em} = \frac{1}{c^2} \int \mathbf{x} \times (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) d^3x \quad (158-6)$$

مستقل از انتخاب مبدأ است. برای محاسبه‌ی مقدار \mathbf{L}_{em} می‌توانیم ابتدا برای میدان الکتریکی از (۶-۱۵۷) جایگزینی انجام دهیم

$$\frac{4\pi}{\mu_0} \mathbf{L}_{em} = e \int \frac{1}{r} \mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{H}) d^3x = -e \int \frac{1}{r} [\mathbf{H} - \mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{H})] d^3x$$

با استفاده از یک اتحاد برداری [از انتهای کتاب] این رابطه را می‌توان به صورت زیر بیان کرد

$$4\pi \mathbf{L}_{em} = -e \int (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{n} d^3x$$

که در آن $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$ است. انتگرال‌گیری به طریقه‌ی جزء به جزء نتیجه می‌دهد

$$4\pi \mathbf{L}_{em} = e \int \mathbf{n} (\nabla \cdot \mathbf{B}) d^3x - e \int_S \mathbf{n} (\mathbf{B} \cdot \mathbf{n}_s) da$$

که در آن انتگرال دوم روی سطح S در بینهایت است و \mathbf{n}_s بردار یکانی عمود به طرف خارج از آن سطح است. با توجه به \mathbf{B} از (۶-۱۵۷) این انتگرال سطحی، به رابطه‌ی $\int \mathbf{n} d\Omega = 0$ منجر می‌شود، چراکه \mathbf{n} شعاعی بوده و میانگین زاویه‌ای آن صفر است.

چون \mathbf{B} توسط یک تک قطبی نقطه‌ای در $\mathbf{x} = \mathbf{R}$ ایجاد شده است، دیورژانس آن عبارت است از: $\nabla \cdot \mathbf{B} = g\delta(\mathbf{x} - \mathbf{R})$. بنابراین اندازه‌ی حرکت زاویه‌ای میدان عبارت است از*

$$\mathbf{L}_{em} = \frac{eg}{4\pi} \frac{\mathbf{R}}{R} \quad (159-6)$$

(* این نتیجه ابتدا توسط جی. جی. تامسون در مرجع زیر بیان شد

J. J. Thomson, *Elements of the Mathematical Theory of Electricity and Magnetism*, Cambridge University Press. Section 284 of the third (1904) and subsequent editions.

شناسه مورد استفاده در بخش 284 از این کتاب دقیقاً عکس مال ماست. از بقای اندازه‌ی حرکت زاویه‌ای، تامسون بخش مغناطیسی $e(\mathbf{v} \times \mathbf{B})$ از نیروی لورنتز را نتیجه‌گیری کرد.

این کمیت در امتداد خطی است که از بار الکتریکی به بار مغناطیسی جهت یافته است و دارای مقداری مساوی با حاصل ضرب بارها (در سیستم SI) تقسیم بر 4π است.

حال اگر روی فرآیند برخورد در شکل ۶-۶، و اندازه‌ی حرکت زاویه‌ای کل سیستم، یعنی مجموع اندازه حرکت‌های زاویه‌ای ذره و میدان الکترومغناطیسی فکر کنیم، ملاحظه خواهیم کرد که اندازه‌ی حرکت زاویه‌ای کل ابقایی است. تغییر (۶-۱۵۶) در اندازه‌ی حرکت زاویه‌ای ذره، دقیقاً با تغییر در اندازه‌ی حرکت زاویه‌ای الکترومغناطیسی (۶-۱۵۹) که توسط وارونگی جهت \mathbf{R} ایجاد شده است، تعدیل می‌شود. بخش اصولی از مسئله‌ی پراکندگی کلاسیکی و کوانتوم مکانیکی، شامل اندازه‌ی حرکت زاویه‌ای الکترومغناطیسی، توسط گلدها برارائه شده است (loc. cit). نتیجه‌ی کار تامسون یعنی (۶-۱۵۹)، توسط ساها* [و به‌طور مستقل توسط ویلسون†] برای به‌دست آوردن شرط دیراک (۶-۱۵۳) با روش‌های نیمه‌کلاسیک مورد استفاده قرار گرفت. برای به‌دست آوردن $\frac{n}{p}$ به جای n ، وقتی فقط اندازه‌ی حرکت زاویه‌ای میدانی مدنظر است، ضروری است کوانتس نیمه‌صحیحی از L_{em} مسلم فرض شود، فرضیه‌ای که برای میدان الکترومغناطیسی تا حدی نامطلوب است.

در پایان بحث ساده‌ای از دلیل اصلی دیراک (۱۹۳۱) را که منجر به رابطه‌ی (۶-۱۵۳) می‌شود ارائه می‌دهیم. در بحث کوانتوم مکانیکی یک الکترون در حضور یک تک‌قطبی مغناطیسی، مطلوب است که تا سرحد امکان فرمالیسم برهم‌کنش‌های الکترومغناطیسی هر چه کم‌تر تغییر کند و برای مثال هامیلتونین برهم‌کنشی به‌صورت استاندارد خود حفظ شود

$$H_{int} = e\Phi - \frac{e}{m} \mathbf{p} \cdot \mathbf{A} + \frac{e^2}{2m} \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}$$

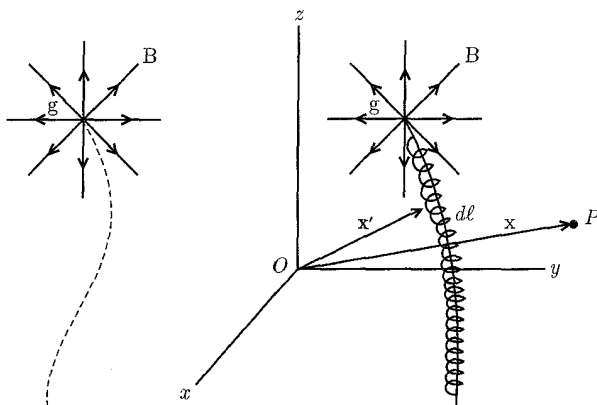
که در آن Φ و \mathbf{A} پتانسیل‌های اسکالر و برداری چشمه‌های خارجی هستند.

برای انجام این کار با یک بار مغناطیسی لازم است تجربه‌ای را به‌کار ببریم. همان‌گونه که در شکل ۶-۸ نشان داده شده است چنین تصور می‌شود که بار مغناطیسی g در انتهای یک خط از مجموعه‌ای از دو قطبی‌ها یا سلونوئیدی قرار گرفته است که به‌صورتی باز پیچیده شده و تا بینهایت نیز گسترش یافته است. تک‌قطبی و ریسمان متصل به آن، که به‌صورت ردیفی از دو قطبی‌ها (یا سلونوئید) تعریف شد را می‌توان از این پس کم‌وبیش به‌طور معمول در چارچوبی از برهم‌کنش‌های مرسوم که در آن $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ و غیره است، توصیف نمود. از رابطه‌ی (۵-۵۵) ملاحظه می‌کنیم که پتانسیل برداری المانی $d\mathbf{A}$ برای یک المان دوقطبی مغناطیسی $d\mathbf{m}$ در \mathbf{x}' عبارت است از

$$d\mathbf{A}(\mathbf{x}) = -\frac{\mu_0}{4\pi} d\mathbf{m} \times \nabla \left(\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right) \quad (۶-۱۶۰)$$

*) M. N. Saha, *Indian J. Phys.* **10**, 141 (1936); *Phys. rev.* **75**, 1968 (1949).

†) H. A. Wilson, *Phys. Rev.* **75**, 309 (1949).



شکل ۶-۸: دو نمایش از یک تک قطبی مغناطیسی g ؛ یکی به صورت خاتمه‌ی ردیفی از دو قطبی‌ها، و دیگری که در انتهای یک سلونوئید کشیده قرار دارد، و هر دو "ریسمان" تا بینهایت گسترش یافته‌اند.

بدین ترتیب برای ریسمانی از دو قطبی‌ها، یا سلونوئیدی که مکانش با ریسمان L مشخص می‌شود، پتانسیل برداری عبارت است از

$$\mathbf{A}_L(\mathbf{x}) = -\frac{g}{\Psi\pi} \int_L d\mathbf{l} \times \nabla \left(\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right) \quad (۶-۱۶۱)$$

برای تمام نقاط به جز روی ریسمان، پتانسیل برداری فوق دارای کرلی است که به صورت شعاعی به طرف خارج از انتهای ریسمان جهت یافته است و به‌طور معکوس با مربع فاصله تغییر می‌کند (یا با شار کل به طرف خارج g) همان‌گونه که از میدان \mathbf{B} تک قطبی g انتظار می‌رود.

روی خود ریسمان پتانسیل برداری تکین است. رفتار تکینی فوق هم‌ارز است با یک میدان چگال^۱ \mathbf{B}' در درون سلونوئید و یک سهم بازگشتی برای شار (به اندازه‌ی $-g$) در امتداد ریسمان جهت حذف شار برنوسوی قطب. تا اینجا یک سلونوئید نازک بلند را به شکل دقیقی توصیف کردیم. برای نشان دادن میدان یک تک قطبی به‌تنهایی، می‌نویسیم

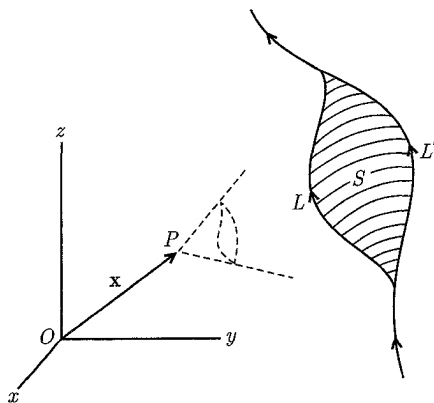
$$\mathbf{B}_{\text{monopole}} = \nabla \times \mathbf{A} - \mathbf{B}'$$

که در آن \mathbf{B}' فقط روی ریسمان وجود دارد (درون سلونوئید).

اخیراً دیراک اثبات کرد که توصیف برهم‌کنش الکترون با یک تک قطبی مغناطیسی، به‌جای برهم‌کنش با یک سلونوئید باریک بلند، متضمن این است که الکترون هرگز میدان تکین \mathbf{B}' را نبیند. بدین ترتیب وی تابع موج الکترون را به صفر شدن در امتداد ریسمان مشروط کرد. این اصل موضوع اختیاری، مورد انتقاد قرار

1) Intense

گرفت، اما بحث در مورد یک چنین جنبه‌هایی، ما را به سمت دوری سوق می‌دهد و برای قصد محدودمان در حال حاضر اساسی نیست.



شکل ۶-۹: دو ریسمان متفاوت L و L' ، پتانسیل‌های برداری یک تک‌قطبی را ارائه می‌دهند که با یک پتانسیل پیمانه‌ای، که شامل گرادیان زاویه‌ی فضایی $\Omega_c(\mathbf{x})$ است با هم تفاوت دارند. زاویه‌ی فضایی Ω_c زاویه‌ای است که در نقطه‌ی مشاهده‌ی P توسط سطح S ، که پوشش‌دهنده‌ی منحنی $C = L' - L$ است دربرگرفته شده است.

کار بعدی دیراک (۱۹۴۸) مسئله‌ی غیرقابل مشاهده بودن ریسمان‌ها را با جزئیات مورد بحث قرار داد. اگر $(۱۶۱-۶)$ برای $\mathbf{A}_L(\mathbf{x})$ ، به‌عنوان پتانسیل برداری مناسبی برای تک‌قطبی و ریسمان L آن پذیرفته شود، تنها مسئله‌ی اختیاری بودن مکان ریسمان باقی می‌ماند. به‌وضوح، مشاهده‌پذیرهای فیزیکی نباید به جایی که ریسمان در آنجا قرار دارد بستگی داشته باشند. حال نشان می‌دهیم که انتخاب مکان‌های مختلف برای ریسمان، با انتخاب‌های مختلفی از پیمانه برای پتانسیل برداری معادل است. درحقیقت لازمه‌های ناوردایی پیمانه‌ای، به معادله‌ی شرودینگر، و تک‌مقدار بودن تابع موج به‌شرط کوانتش دیراک (۱۵۳-۶) منجر می‌شود. دو ریسمان مختلف L و L' را همان‌طوری‌که در شکل ۶-۹ نشان داده شده است در نظر بگیرید. اختلاف این دو پتانسیل برداری توسط $(۱۶۱-۶)$ مشخص می‌شود، با انتگرالی که در امتداد مسیر بسته، $C = L' - L$ حول سطح S انجام گرفته است. با توجه به مسئله‌ی ۵-۱، این موضوع را می‌توان به‌صورت زیر نوشت

$$\mathbf{A}_{L'}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}_L(\mathbf{x}) + \frac{g}{4\pi} \nabla \Omega_c(\mathbf{x}) \quad (۱۶۲-۶)$$

که در آن Ω_c زاویه‌ی فضایی دربرگرفته شده توسط مسیر C در نقطه‌ی مشاهده‌ی \mathbf{x} است. مقایسه با معادلات تبدیل پیمانه‌ای $\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla \chi$ ، و $\Phi \rightarrow \Phi' = \Phi - \left(\frac{1}{c}\right) \left(\frac{\partial \chi}{\partial t}\right)$ ، نشان می‌دهد که تغییر در ریسمان از L تا L' معادل با یک تبدیل پیمانه‌ای، $\chi = \frac{g\Omega_c}{4\pi}$ است. در مکانیک

کوانتومی* به خوبی مشخص شده است که یک تغییر در پیمانه‌ی پتانسیل‌های الکترومغناطیسی شکل معادله‌ی شرودینگر را ناوردا باقی می‌گذارد، مشروط بر اینکه تابع موج طبق رابطه زیر تبدیل یابد

$$\psi \rightarrow \psi' = \psi e^{\frac{ie\chi}{\hbar}}$$

که در آن e بار ذره و χ تابع پیمانه است. بنابراین یک تغییر در مکان ریسمان از L تا L' بایستی با یک اصلاح در فاز تابع موج الکترون همراه باشد

$$\psi \rightarrow \psi' = \psi e^{\frac{ieg\Omega_c}{4\pi\hbar}} \quad (۱۶۳-۶)$$

چون وقتی الکترون از سطح S عبور می‌کند Ω_c به‌طور ناگهانی به اندازه‌ی 4π تغییر خواهد کرد، لذا تابع موج چندمقداری خواهد بود، مگر اینکه لازم بداریم

$$\frac{eg}{\hbar} = 2\pi n \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

این رابطه شرط کوانتس دیراک (۱۵۳-۶) است. این رابطه مستقل از مکان ریسمان تک‌قطبی، از شروط کلی ناوردایی پیمانه‌ای و تک‌مقدار بودن تابع موج نتیجه می‌شود. بحث قبلی در مورد تک‌قطبی‌های مغناطیسی فقط اساسی‌ترین مفاهیم را نشان می‌دهد. نوشته‌های گسترده‌ای در مورد اصلاحات مربوط به شرط کوانتس وجود دارد که در یک بحث کوانتوم الکترودینامیکی به تک‌قطبی‌های مغناطیسی و بارهای الکتریکی و سایر جنبه‌ها می‌پردازند. خواننده‌ی علاقه‌مند می‌تواند این موضوع را از مقاله‌ی گلدهابر و تراورا (op. cit) و مراجع موجود در انتهای این فصل پیگیری نماید.

۱۳-۶ پتانسیل قطبشی (بردارهای هرتز)

گاهی مفید است پتانسیل‌هایی غیر از پتانسیل‌های برداری و اسکالر استاندارد را به‌عنوان میدان‌های کمکی برای تعیین میدان‌های اصلی الکترومغناطیسی مورد استفاده قرار دهیم. مهم‌ترین این پتانسیل‌ها پتانسیل‌های قطبشی یا بردارهای هرتز هستند، که توسط هرتز (۱۸۸۹) و ریچی^۲ (۱۹۰۱) معرفی شدند. همان‌گونه که این نام نیز اشاره دارد پتانسیل‌های فوق، چگالی‌های قطبشی الکتریکی و مغناطیسی را به‌صورت نیرو مطرح می‌کنند. ما در اینجا محیط‌هایی خطی، همسانگرد و با چشمه‌هایی با چگالی‌های قطبشی خارجی \mathbf{P}_{ext} و \mathbf{M}_{ext} را مورد بررسی قرار می‌دهیم، بدون حضور بار یا جریان ماکروسکوپی جداگانه‌ای. محیط‌ها با

(* اثبات بسیار راحت است. برای مثال مراجع زیر را ملاحظه کنید

H. A. Kramers, *Quantum Mechanics*, North-Holland. Amsterdam, (1957); Dover reprint (1964), Section 62.

گذردهی‌های الکتریکی و مغناطیسی ϵ و μ توصیف می‌شوند [در عمل می‌توان کمیت‌های وابسته به فرکانس را با انتخاب یک بستگی زمانی سینوسی استفاده از برهم‌نهی فوریه مجزا کرد].
میدان‌های ماکروسکوپی به صورت زیر نوشته می‌شوند

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} + \mathbf{P}_{\text{ext}} \quad ; \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H} + \mu_0 \mathbf{M}_{\text{ext}} \quad (۱۶۴-۶)$$

در این صورت با توجه به تعاریف استاندارد (۶-۷) و (۶-۹) برای میدان‌ها برحسب پتانسیل‌های اسکالر و برداری، معادلات ماکروسکوپی ماکسول معادلات موج زیر را نتیجه می‌دهند

$$\mu \epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \nabla^2 \mathbf{A} = \mu \frac{\partial \mathbf{P}_{\text{ext}}}{\partial t} + \mu_0 \nabla \times \mathbf{M}_{\text{ext}} \quad (\text{الف } ۱۶۵-۶)$$

$$\mu \epsilon \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} - \nabla^2 \Phi = -\frac{1}{\epsilon} \nabla \cdot \mathbf{P}_{\text{ext}} \quad (\text{ب } ۱۶۵-۶)$$

با رابطه‌ی زیر به عنوان شرط لورنتز

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \mu \epsilon \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0$$

دو بردار پتانسیل قطبشی $\mathbf{\Pi}_e$ و $\mathbf{\Pi}_m$ با نوشتن \mathbf{A} و Φ به صورتی موازی با ساختارهای طرف‌های سمت راست معادلات موج (۶-۱۶۵)، یعنی

$$\mathbf{A} = \mu \frac{\partial \mathbf{\Pi}_e}{\partial t} + \mu_0 \nabla \times \mathbf{H}_m \quad ; \quad \Phi = \frac{1}{\epsilon} \nabla \cdot \mathbf{H}_e \quad (۱۶۶-۶)$$

معرفی می‌شوند.

وقتی این تعاریف را در (۶-۱۶۵) جایگزین کنیم، درمی‌یابیم که شرط لورنتز به طور اتوماتیک وار برآورده می‌شود. معادلات موج به صورت معادلات ذیل برای $\mathbf{\Pi}_m$ و $\mathbf{\Pi}_e$ درمی‌آیند

$$\nabla \cdot \left[\nabla^2 \mathbf{\Pi}_e - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{\Pi}_e}{\partial t^2} + \mathbf{P}_{\text{ext}} \right] = 0 \quad (\text{الف } ۱۶۷-۶)$$

$$\mu \frac{\partial}{\partial t} \left[\nabla^2 \mathbf{\Pi}_e - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{\Pi}_e}{\partial t^2} + \mathbf{P}_{\text{ext}} \right] + \mu_0 \nabla \times \left[\nabla^2 \mathbf{\Pi}_m - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{\Pi}_m}{\partial t^2} + \mathbf{M}_{\text{ext}} \right] = 0 \quad (\text{ب } ۱۶۷-۶)$$

از (۶-۱۶۷ الف) درمی‌یابیم که کمیت داخل کروشه مربعی، می‌تواند حداقل مساوی با کرل یک تابع برداری باشد که آن را $\mathbf{V} \left(\frac{\mu_0}{\mu} \right)$ بنامیم. وقتی این تابع در (۶-۱۶۷ ب) قرار گیرد، یک کرل صفرشونده از یک کمیت برداری داریم که بایستی بنابر این قضیه مساوی با، حداقل گرادیان یک میدان اسکالری باشد

که آن را $\frac{\partial \xi}{\partial t}$ می‌نامیم. نتیجه این است که بردارهای هرتز معادلات موج زیر را برآورده می‌کنند

$$\mu \varepsilon \frac{\partial^2 \Pi_e}{\partial t^2} - \nabla^2 \Pi_e = \mathbf{P}_{\text{ext}} - \frac{\mu_0}{\mu} \nabla \times \mathbf{V} \quad (۱۶۸-۶ \text{ الف})$$

$$\mu \varepsilon \frac{\partial^2 \Pi_m}{\partial t^2} - \nabla^2 \Pi_m = \mathbf{M}_{\text{ext}} + \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} \nabla \frac{\partial \xi}{\partial t} \quad (۱۶۸-۶ \text{ ب})$$

نشان دادن اینکه توابع اختیاری \mathbf{V} و ξ را می‌توان با یک تبدیل پیمانه‌ای به پتانسیل‌های قطبشی جدا کرد، به مسائل واگذار شده است (مسئله ۶-۲۳). بدین ترتیب می‌توانیم \mathbf{V} و ξ را بدون از دست دادن عمومیت، مساوی صفر قرار دهیم. میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی برحسب بردارهای هرتز توسط روابط زیر مشخص می‌شوند

$$\mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon} \nabla (\nabla \cdot \Pi_e) - \mu \frac{\partial^2 \Pi_e}{\partial t^2} - \mu_0 \nabla \times \frac{\partial \Pi_m}{\partial t} \quad (۱۶۹-۶ \text{ الف})$$

$$\mathbf{B} = \mu \nabla \times \frac{\partial \Pi_e}{\partial t} + \mu_0 \nabla \times \nabla \times \Pi_m \quad (۱۶۹-۶ \text{ ب})$$

خارج از چشمه‌ی \mathbf{P}_{ext} ، معادله‌ی موج (۱۶۸-۶ الف) را می‌توان با نقش‌های تبدیل‌یافته‌ی بردارهای الکتریکی و مغناطیسی هرتز، برای بیان \mathbf{E} به‌صورتی مشابه با (۱۶۹-۶ ب) برای \mathbf{B} مورد استفاده قرار داد. اگر چگالی‌های قطبشی خارجی خالص باشند، معادلات موج برای Π_m و Π_e دارای جواب‌هایی هستند که نوعاً ساده‌اند. برای مثال، یک دوقطبی مغناطیسی وابسته به زمان در نقطه‌ی \mathbf{x}_0 دارای چگالی مغناطیسی به‌صورت زیر است

$$\mathbf{M}_{\text{ext}} = \mathbf{m}(t) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$$

با توجه به شکل معادله‌ی موج (۴۱-۶) و جوابش یعنی (۴۷-۶) نتیجه می‌گیریم که بردار مغناطیسی هرتز عبارت است از

$$\Pi_m(\mathbf{x}, t) = \frac{\mathbf{m}(t - \sqrt{\mu \varepsilon} R)}{4\pi R}$$

که در آن $R = |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|$

مثال‌هایی در ارتباط با استفاده از پتانسیل‌های قطبشی را می‌توان در بورن و ولف، در استراتون و در پانوفسکی و فیلیپس پیدا نمود که موضوع مقدماتی تابش چندقطبی را برحسب بردار هرتز مورد بررسی قرار داده‌اند. درنهایت درمی‌یابیم که کار کردن با پتانسیل‌های معمول \mathbf{A} و Φ یا میدان‌ها به‌تنهایی کافی است.

مراجع و خواندنی‌های پیشنهادی

قوانین بقای انرژی و اندازه‌ی حرکت میدان‌های الکترومغناطیسی تقریباً در تمام کتاب‌های درسی مورد بحث قرار گرفته‌اند. برای مثال در

Panofsky and Phillips, Chapter 1

Stratton, Chapter 11

لاندائو و لیفشیتز^۱ در "الکترودینامیک محیط‌های پیوسته" (بخش‌های ۱۵، ۱۶، ۳۴) تانسور تنش ماکسول را در بررسی نیروها در مایعات و جامدات با جزئیات مورد بحث قرار داده‌اند.

همان‌طور که تاکنون نیز ذکر شد ارتباط مفاهیم مدار فشرده با استفاده از میدان‌ها تا حد یک توصیف، توسط

Adler, Chu, and Fano

Fano, Chu and Adler

مشخص شده است.

شرحی از حفره‌های تشدید به‌عنوان المان‌های مداری، در یک مقاله‌ی کلاسیکی توسط

W. W. Hansen. *J. Appl. Phys.* **9**. 654 (1938).

مورد بحث قرار گرفته است.

یک بحث خلاق در مورد استخراج معادلات ماکروسکوپی الکترومغناطیسی و همچنین ترمودینامیک سیستم‌های الکتریکی و مغناطیسی توسط رابینسون ارائه شده است.

استخراج معادلات ماکروسکوپی ماکسول از نقطه‌نظر مکانیک آماری، موضوع تحقیقاتی درازمدت برای مدرسه‌ای از فیزیکدانان هلندی بوده است. نتایج کار آن‌ها در دو کتاب جامع زیر آمده است

de Groot

de Groot and Suttrop

بحثی در مورد انرژی، اندازه‌ی حرکت و تانسور تنش ماکسول در میدان‌های الکترومغناطیسی، اما تا اندازه‌ای متفاوت با مؤلفان فوق توسط

Penfield and Haus,

Haus and Melcher

ارائه شده است.

برای خواننده‌ای که می‌خواهد بحث کوانتوم مکانیکی دقیقی از ثابت‌های دی‌الکتریک و معادلات ماکروسکوپی میدان در ماده را پیگیری نماید، مراجع ذیل پیشنهاد می‌شوند

S. L. Adler, *Phys. Rev.* **126**, 413 (1962)

B. D. Josephson, *Phys. Rev.* **152**, 21 (1966)

1) Landau and Lifshitz

G. D. Mahan, *Phys. Rev.* **153**, 983 (1967)

خواص تقارنی میدان‌های الکترومغناطیسی تحت انعکاس و دوران توسط

Argence and Kahan

مورد بحث قرار گرفته است.

موضوع تک قطبی‌های مغناطیسی دارای نوشته‌های گسترده‌ای است. ما تاکنون به مقاله‌ی گلدهابر^۱ و مقاله‌ی مرووری‌اش با "تراور"^۲ و علاوه بر آن به مقالات اصولی دیراک اشاره کرده‌ایم. ارتباط تک قطبی‌ها با فیزیک ذرات توسط

J. Schwinger, *Science* **165**, 757 (1969)

بحث شده است.

علاقه به تحقیقات و وضعیت تک قطبی‌های مغناطیسی تا ۱۹۸۰ را می‌توان در

R. A. Carrigan and W. P. Trower, *Magnetic Monopoles*, NATO Adv. Sci. Inst. Series B, Physics, Vol. 102, Plenum Press, New York (1983).

پیدا نمود.

مباحث ریاضی در این فصل دوروبر معادله‌ی موج تمرکز یافته است. مسئله‌ی مقدار اولیه در یک، دو، سه و چند بعد در

Morse and Feshbach (pp. 843-847)

و با جزئیات ریاضی بیش‌تر توسط

Hadamard

بحث شده است.

مسائل

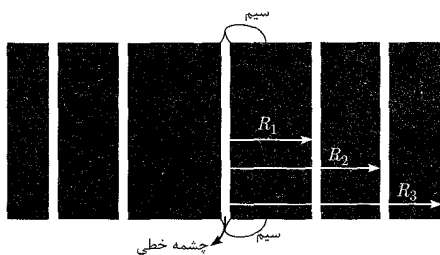
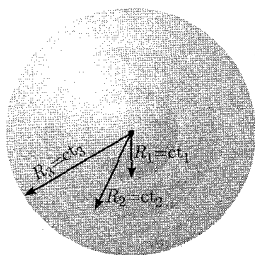
۱-۶ جواب معادله‌ی موج (۳۲-۶) در سه بعد برای یک چشمه‌ی نقطه‌ای در فضا و زمان (یک فلش نوری در $t' = 0$ و $x = 0$) یک اغتشاش پوسته‌ای کروی با شعاع $R = ct$ است، یعنی تابع گرین $G^{(+)}$ در (۴۴-۶).

ممکن است در ابتدا تعجب‌آور به نظر برسد که در یک یا دو بعد این اغتشاش دارای یک "اثر" باشد، چراکه چشمه در فضا و زمان یک "نقطه" است. جهت حذف وابستگی به چنین متغیری (یا متغیرهایی) جواب برای ابعاد کم‌تر از سه را می‌توان با برهم‌نهمش در ابعاد زیادتر پیدا نمود. برای مثال یک چشمه‌ی درخش‌زن خطی با دامنه‌ی یکنواخت، معادل یک چشمه‌ی نقطه‌ای در دو بعد است.

الف) با شروع از جواب تأخیری معادله‌ی موج سه‌بعدی (۶-۴۷) نشان دهید که چشمه‌ی $f'(x', t) = \delta(x')\delta(y')\delta(t')$ معادل است با یک چشمه‌ی نقطه‌ای در $t = 0$ در مبدأ و در ابعاد فضایی دوبعد که یک موج دوبعدی به صورت زیر ایجاد می‌کند

$$\Psi(x, y, t) = \frac{2c\Theta(ct - \rho)}{\sqrt{c^2t^2 - \rho^2}}$$

که در آن $\rho^2 = x^2 + y^2$ و $\Theta(\xi) = 0$ اگر $\xi < 0$ باشد.



ب) نشان دهید که یک چشمه‌ی پوسته‌ای با یک چشمه‌ی پالسی نقطه‌ای در مبدأ و در فضای یک‌بعدی معادل است، و باعث ایجاد یک موج تک‌بعدی متناظر با

$$\Psi(x, t) = 2\pi c\Theta(ct - |x|)$$

می‌شود.

۶-۲ چگالی‌های بار و جریان برای یک تک‌بار نقطه‌ای q را می‌توان به‌طور رسمی به صورت زیر نوشت

$$\rho(\mathbf{x}', t') = q\delta[\mathbf{x} - \mathbf{r}(t')]; \quad \mathbf{J}(\mathbf{x}', t') = q\mathbf{v}(t')\delta[\mathbf{x}' - \mathbf{r}(t')]$$

که در آن مکان بار در زمان t' و $\mathbf{v}(t')$ سرعت آن است. برای محاسبه‌ی روابطی که شامل روابط تأخیری هستند، باید $t' = t_{\text{ret}} = \frac{t - R(t')}{c}$ را که در آن $\mathbf{R} = \mathbf{x} - \mathbf{r}(t')$ است قرار دهیم.

الف) به‌عنوان یک اقدام مقدماتی برای استخراج روابط فاینمن - هویساید در مورد میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی یک بار نقطه‌ای، نشان دهید که

$$\int d^3x' \delta[\mathbf{x}' - \mathbf{r}(t_{\text{ret}})] = \frac{1}{\kappa}$$

که در آن، $\kappa = \frac{1 - \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{R}}}{c}$. دقت کنید که κ در زمان تأخیری محاسبه می‌شود.

ب) با شروع از تعمیم‌های جفی مینکو در مورد قوانین کولن و بیو- ساوار، روابط مربوط به چگالی‌های جریان و بار برای یک بار نقطه‌ای، و نتیجه‌ی قسمت (الف) را برای به‌دست آوردن روابط هویساید - فاینمن مربوط به میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی یک بار نقطه‌ای مورد استفاده قرار دهید

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \left[\frac{\hat{\mathbf{R}}}{\kappa R^2} \right]_{\text{ret}} + \frac{\partial}{c\partial t} \left[\frac{\hat{\mathbf{R}}}{\kappa R} \right]_{\text{ret}} - \frac{\partial}{c^2\partial t^2} \left[\frac{\mathbf{v}}{\kappa R} \right]_{\text{ret}} \right\}$$

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 q}{4\pi} \left\{ \left[\frac{\mathbf{v} \times \hat{\mathbf{R}}}{\kappa R^2} \right]_{\text{ret}} + \frac{\partial}{c\partial t} \left[\frac{\mathbf{v} \times \hat{\mathbf{R}}}{\kappa R} \right]_{\text{ret}} \right\}$$

ج) در نمادگذاری ما رابطه‌ی فاینمن برای میدان الکتریکی عبارت است از

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \left[\frac{\hat{\mathbf{R}}}{R^2} \right]_{\text{ret}} + \frac{[R]_{\text{ret}}}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\hat{\mathbf{R}}}{R^2} \right]_{\text{ret}} + \frac{\partial^2}{c^2\partial t^2} [\hat{\mathbf{R}}]_{\text{ret}} \right\}$$

در حالی‌که رابطه‌ی هویساید برای میدان مغناطیسی عبارت است از

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 q}{4\pi} \left\{ \left[\frac{\mathbf{v} \times \hat{\mathbf{R}}}{\kappa^2 R^2} \right]_{\text{ret}} + \frac{1}{c[R]_{\text{ret}}} \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\mathbf{v} \times \hat{\mathbf{R}}}{\kappa} \right]_{\text{ret}} \right\}$$

معادل بودن این دو مجموعه از روابط برای میدان‌ها را نشان دهید.

مراجع:

O. Heaviside, *Electromagnetic Theory*, Vol. 3 (1912), p. 464, Eq. (214).

R. P. Feynman, *The Feynman Lectures in Physics*, Vol. 1 (1963), Chapter 28, Eq (28.3).

۳-۶ معادله‌ی انتشار^۱ همگن (۵-۱۶۰)، برای پتانسیل برداری میدان‌های نیمه‌ساکن^۲ در محیط‌های رسانای نامحدود^۳، جوابی برای مسئله‌ی مقدار اولیه به‌صورت زیر دارد

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \int d^3x' G(\mathbf{x} - \mathbf{x}', t) \mathbf{A}(\mathbf{x}', 0)$$

که در آن $\mathbf{A}(\mathbf{x}', 0)$ ، آرایش میدان اولیه را توصیف می‌کند و G یک کرنل مناسب است.

الف) مسئله‌ی مقدار اولیه‌ی فوق را با استفاده از یک تبدیل فوریه‌ی سه‌بعدی در فضای $\mathbf{A}(\mathbf{x}, t)$ حل کنید. با توجه به فرض‌های معمول روی تبدیل مرتبه‌های انتگرال‌گیری، نشان دهید که تابع‌گرین دارای

نمایش فوریه‌ی زیر است

$$G(\mathbf{x} - \mathbf{x}', t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k e^{-\frac{k^2 t}{\mu\sigma}} e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')}$$

که در آن $t > 0$ فرض شده است.

ب) با معرفی یک تجزیه‌ی فوریه^۱ بر حسب دو کمیت فضا و زمان، و انجام انتگرال فرکانس در صفحه‌ی مختلط ω برای پیدا کردن مجدد نتیجه‌ی قسمت (الف)، نشان دهید که $G(\mathbf{x} - \mathbf{x}', t)$ تابع گرین انتشار است که معادله‌ی ناهمگن

$$\frac{\partial G}{\partial t} - \frac{1}{\mu\sigma} \nabla^2 G = \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \delta(t)$$

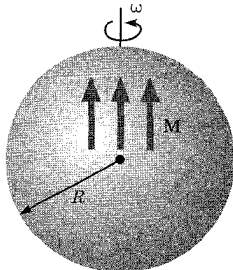
را برآورده می‌کند و به‌ازای $t < 0$ صفر می‌شود. [دقت کنید که در اینجا μ باید در فضا ثابت باشد در حالی‌که برای σ اینگونه نیست.]

ج) نشان دهید که اگر σ در سرتاسر تمام فضا یکنواخت باشد، تابع گرین عبارت است از

$$G(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', 0) = \Theta(t) \left(\frac{\mu\sigma}{4\pi t} \right)^{\frac{3}{2}} \exp\left(\frac{-\mu\sigma |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^2}{4t} \right)$$

د) فرض کنید که در زمان $t' = 0$ ، پتانسیل برداری اولیه‌ی $\mathbf{A}(\mathbf{x}', 0)$ تنها در یک ناحیه جایگزیده از گسترش خطی d حول مبدأ غیرصفر است. بستگی زمانی میدان‌ها در نقطه P دور از مبدأ، یعنی $|\mathbf{x}| = r \gg d$ ، مورد مشاهده قرار گرفته است. فرض کنید سه نوع زمان وجود دارد، $0 \leq t \leq T_1$ ، $T_1 \leq t \leq T_2$ و $t \gg T_2$. تعاریف موجهی از T_1 و T_2 ارائه دهید و به‌طور کیفی بستگی زمانی در P را توصیف کنید. نشان دهید که در بازه‌ی زمانی آخری، پتانسیل برداری با انتگرال حجمی $\mathbf{A}(\mathbf{x}', 0)$ ضربدر $t^{-3/2}$ متناسب است. با فرض اینکه انتگرال وجود داشته باشد، بحث‌تان را به مباحث بخش ۱۵-۵ (ب) و مسائله ۳۵-۵ و ۳۶-۵ ارتباط دهید.

۴-۶ یک کره‌ی مغناطیده‌ی یکنواخت و رسانا با شعاع R و گشتاور مغناطیسی کل $\mathbf{m} = \frac{4\pi MR^3}{3}$ را در نظر بگیرید که حول محور مغناطش خود با سرعت زاویه‌ای ω (در حالت پایداری که هیچ جریانی در رسانا جاری نباشد) می‌چرخد. حرکت غیرنسبیتی است و بار اضافی نیز روی کره وجود ندارد.



الف) با در نظر گرفتن قانون اهم در یک رسانای متحرک، نشان دهید که حرکت فوق باعث القای یک میدان الکتریکی و یک چگالی بار حجمی یکنواخت به اندازه‌ی $\rho = -\frac{m\omega}{\pi c^2 R^3}$ در رسانا می‌شود.

ب) چون کره به لحاظ الکتریکی خنثی است، میدان الکتریکی تک قطبی در بیرون وجود ندارد. مباحث مربوط به تقارن را برای نشان دادن اینکه پایین‌ترین چندقطبی الکتریکی ممکن چهارقطبی است مورد استفاده قرار دهید. نشان دهید که تنها یک میدان چهارقطبی در بیرون وجود دارد و اینکه تانسور گشتاور چهارقطبی دارای مؤلفه‌های غیرصفر؛ $Q_{11} = Q_{22} = -\frac{Q_{33}}{2}$ و $Q_{33} = -\frac{4m\omega R^2}{3c^2}$ است.

ج) با بررسی میدان‌های الکتریکی شعاعی در درون و بیرون از کره، نشان دهید که چگالی بار سطحی لازم $\sigma(\theta)$ عبارت است از

$$\sigma(\theta) = \frac{1}{4\pi R^2} \frac{4m\omega}{3c^2} \cdot \left[1 - \frac{5}{2} P_2(\cos \theta) \right]$$

د) اگر یک مدار ساکن با یک حلقه‌ی لغزان به قطب کره وصل شده باشد و یک تماس لغزان نیز با استوای کره داشته باشد، کره دوار فوق همانند یک وسیله‌ی القایی تک قطبی عمل می‌کند. نشان دهید که انتگرال خطی میدان الکتریکی از اتصال استوای کره به اتصال قطب عبارت است از: (در هر مسیری) $\mathcal{E} = \frac{\mu_0 m\omega}{4\pi R}$. برای بحث دیگری از نیروی الکتروموتیو، لاندائو و لیفشیتزرا ملاحظه کنید *Electrodynamics of Continuous Media*, p. 2221

۵-۶ یک توزیع بار الکتریکی جایگزیده باعث ایجاد میدان الکترواستاتیک $\mathbf{E} = -\nabla\Phi$ می‌شود. درون این میدان یک چگالی جریان مستقل از زمان جایگزیده‌ی کوچک $\mathbf{J}(\mathbf{x})$ قرار گرفته است که میدان مغناطیسی \mathbf{H} را به وجود می‌آورد.

الف) نشان دهید که اندازه‌ی حرکت مربوط به میدان‌های الکترومغناطیسی یعنی (۶-۱۱۷) را می‌توان به صورت

$$\mathbf{P}_{\text{میدان}} = \frac{1}{c^4} \int \Phi \mathbf{J} d^3x$$

تبدیل نمود، مشروط بر اینکه در فواصل دور حاصل ضرب $\Phi\mathbf{H}$ به قدر کافی سریع افت کند. "به قدر کافی سریع" چگونه سرعتی است؟

ب) با فرض اینکه توزیع جریان در مقایسه با مقیاس تغییرات میدان الکتریکی، در ناحیه‌ای کوچک جایگزیده شده باشد، پتانسیل الکترواستاتیک را به صورت یک سری تیلور بسط داده و نشان دهید که

$$\mathbf{P}_{\text{میدان}} = \frac{1}{c^4} \mathbf{E}(\circ) \times \mathbf{m}$$

که در آن $\mathbf{E}(\circ)$ میدان الکتریکی در محل توزیع جریان است و \mathbf{m} گشتاور مغناطیسی (۵-۵۴) که توسط جریان به وجود آمده است.

ج) فرض کنید توزیع جریان در عوض در یک میدان الکتریکی یکنواخت \mathbf{E}_0 قرار گیرد (که تمام فضا را اشغال کرده است). نشان دهید که، چگونگی پیچیدگی چگالی جریان \mathbf{J} مسئله‌ای را به وجود نمی‌آورد و نتیجه‌ی موجود در قسمت (الف)، با یک سهم انتگرال سطحی از بینهایت بهبود می‌یابد که مساوی منفی یک سوم نتیجه‌ی قسمت (ب) است، با نتیجه‌ی

$$\mathbf{P}_{\text{میدان}} = \frac{2}{3c^2} \mathbf{E}_0 \times \mathbf{m}$$

این نتیجه را با نتیجه‌ای که از کار مستقیم با (۶-۱۱۷) و ملاحظات انتهای بخش ۵-۶ به دست آمد مقایسه کنید.

۶-۶ (الف) یک پیچک چنبره‌ای^۱ دایروی، با شعاع میانگین a و N دور سیم با سطح مقطع یکنواخت و مساحت A را در نظر بگیرید (هم ارتفاع و هم پهنا در مقایسه با a کوچکنند). پیچک چنبره‌ای جریان I را حمل می‌کند که در آن جاری است، و یک بار نقطه Q نیز وجود دارد که در مرکز آن قرار گرفته است. تمامی مؤلفه‌های مربوط به اندازه‌ی حرکت میدان این سیستم را محاسبه کنید. نشان دهید که مؤلفه‌ی در امتداد چنبره عبارت است از

$$(\mathbf{P}_{\text{میدان}})_a \approx \pm \frac{\mu_0 Q I N A}{4\pi a^2}$$

که در آن علامت بستگی به جهت گردش جریان در این چنبره دارد. فرض کنید میدان الکتریکی مربوط به این بار بدون ممانعت به درون ناحیه‌ی میدان مغناطیسی غیرصفر نفوذ کند، همان‌گونه که این عمل می‌تواند برای چنبره‌ای مهیا شود که عملاً دارای مجموعه‌ای از N تیوب نارسانای کوچک است که درون آن‌ها گاز یونیزه برای به گردش درآوردن جریان حرکت می‌کند. بررسی کنید که این جواب با تقریب مسئله‌ی ۵-۶ تطبیق می‌کند.

(ب) اگر $Q = 10^{-6}$ ، $I = 10 \text{ A}$ ، $N = 2000$ ، $A = 10^{-4} \text{ m}^2$ و $a = 0.1 \text{ m}$ باشند، میدان الکتریکی در پیچک را برحسب ولت بر متر، القای مغناطیسی را برحسب تسلا، و اندازه‌ی حرکت الکترومغناطیسی را برحسب نیوتن - ثانیه بیابید. اندازه‌ی حرکت فوق را با اندازه‌ی حرکت یک حشره‌ی به جرم $10 \mu\text{g}$ که در حال پرواز با سرعت 0.1 m/s است مقایسه کنید. [دقت کنید که سیستم بار و پیچک در حالت سکونند. لذا اندازه‌ی حرکت کل آن باید صفر شود. بنابراین باید در اینجا یک اندازه‌ی حرکت مکانیکی "پنهان"^۲ حذف‌کننده‌ی وجود داشته باشد - مسئله‌ی ۸-۱۲ را ملاحظه کنید.]

۷-۶ جریان میکروسکوپی $\mathbf{j}(\mathbf{x}, t)$ را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\mathbf{j}(\mathbf{x}, t) = \sum_j q_j \mathbf{v}_j \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j(t))$$

که در آن بار نقطه‌ای q_j در نقطه‌ی $\mathbf{x}_j(t)$ قرار گرفته و دارای سرعت $\mathbf{v}_j = \frac{d\mathbf{x}_j(t)}{dt}$ است. دقیقاً همانند چگالی بار، جریان فوق را نیز می‌توان به یک توزیع الکترون "آزاد" (رسانشی) و یک توزیع جریان مقید (مولکولی) تجزیه کرد. با پیروی از روش‌های میانگین‌گیری بخش ۶-۶ و فرض غیرنسبیتی بودن جمع سرعت‌ها میانگین جریان را به صورت $\langle \mathbf{j}(\mathbf{x}, t) \rangle$ در نظر بگیرید.

الف) نشان دهید که میانگین جریان را می‌توان با توجه به تعاریف (۶-۹۲)، (۶-۹۷) و (۶-۹۸) به صورت (۶-۹۶) نوشت.

ب) نشان دهید برای یک محیط که سرعت‌های مولکولی داخلی آن را می‌توان صرف‌نظر کرد اما در حال حرکت حجمی است (یعنی برای تمام‌ها $\mathbf{v}_n = \mathbf{v}$) داریم

$$\frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} - \mathbf{H} = \mathbf{M} + (\mathbf{D} - \epsilon_0 \mathbf{E}) \times \mathbf{v}$$

این موضوع نشان می‌دهد که یک قطبش متحرک (\mathbf{P}) باعث ایجاد یک چگالی مغناطش مؤثر می‌شود.

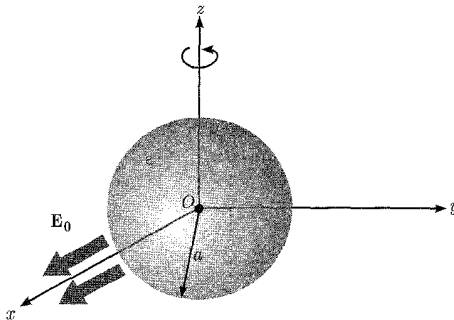
اشاراتی برای قسمت الف): کمیت‌های شبیه $\left(\frac{d\mathbf{P}_n}{dt} \right)$ ، $\left(\frac{dQ_{\alpha\beta}^{(n)}}{dt} \right)$ را در نظر بگیرید و بررسی کنید که این کمیت‌ها شبیه چه چیزی هستند. همچنین دقت کنید که

$$\frac{df}{dt}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n(t)) = -\mathbf{v}_n \cdot \nabla f(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n(t))$$

۸-۶ یک کره‌ی دی‌الکتریک با ثابت دی‌الکتریک ϵ و شعاع a در مبدأ قرار گرفته است. یک میدان الکتریکی یکنواخت E_0 نیز وجود دارد که در جهت x اعمال شده است. کره‌ی فوق با سرعت زاویه‌ای ω حول محور z دوران می‌کند. نشان دهید که یک میدان مغناطیسی $\mathbf{H} = -\nabla \Phi_M$ وجود دارد که در آن

$$\Phi_M = \frac{3}{5} \left(\frac{\epsilon - \epsilon_0}{\epsilon + 2\epsilon_0} \right) \epsilon_0 E_0 \omega \left(\frac{a}{r} \right)^5 \cdot xz$$

که در آن $r >$ مقدار بزرگ‌تر r است و a است و حرکت نیز غیرنسبیتی است. می‌توانید نتایج بخش ۴-۴ را برای کره‌ی دی‌الکتریک در یک میدان خارجی مورد استفاده قرار دهید.



۹-۶ بقای انرژی و اندازه‌ی حرکت خطی را برای یک سیستم ماکروسکوپی از چشمه‌ها و میدان‌های الکترومغناطیسی در یک محیط یکنواخت و همسانگرد که با گذردهی ویژه‌ی ϵ و تراوایی مغناطیسی μ توصیف می‌شود مورد بحث قرار دهید. نشان دهید که با یک محاسبه سرراست، چگالی انرژی، بردار پوینتینگ، چگالی اندازه حرکت میدان و تانسور تنش ماکسول با روابط مینکوفسکی زیر ارائه می‌شوند

$$\begin{cases} u = \frac{1}{4}(\epsilon E^2 + \mu H^2) \\ \mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} \\ \mathbf{g} = \mu\epsilon\mathbf{E} \times \mathbf{H} \\ T_{ij} = \left[\epsilon E_i E_j + \mu H_i H_j - \frac{1}{4}\delta_{ij}(\epsilon E^2 + \mu H^2) \right] \end{cases}$$

در صورتی‌که ϵ و μ توابعی از مکان باشند چه اصلاحاتی مطرح می‌شود؟

۱۰-۶ با فرض‌هایی مشابه با مسئله ۹-۶، بقای اندازه‌ی حرکت را مورد بحث قرار دهید. نشان دهید که شکل‌های دیفرانسیلی و انتگرالی قانون بقای فوق عبارتند از

$$\frac{\partial}{\partial t}(\mathcal{L}_{\text{مکانیکی}} + \mathcal{L}_{\text{میدانی}}) + \nabla \cdot \dot{\mathbf{M}} = 0$$

و

$$\frac{d}{dt} \int_V (\mathcal{L}_{\text{مکانیکی}} + \mathcal{L}_{\text{میدانی}}) d^3x + \int_S \mathbf{n} \cdot \dot{\mathbf{M}} da = 0$$

که در آن چگالی اندازه‌ی حرکت زاویه، عبارت است از

$$\mathcal{L}_{\text{میدانی}} = \mathbf{x} \times \mathbf{g} = \mu\epsilon \mathbf{x} \times (\mathbf{E} \times \mathbf{H})$$

و اینکه شار مربوط به اندازه‌ی حرکت نیز توسط تانسور زیر توصیف می‌شود

$$\dot{\mathbf{M}} = \dot{\mathbf{T}} \times \mathbf{x}$$

توجه: در اینجا علامت‌گذاری دودویی^۱ را برای $\dot{\mathbf{M}}_{ij}$ و T_{ij} مورد استفاده قرار داده‌ایم. یک پیکان دوطرفه، معنی نسبتاً واضحی را انتقال می‌دهد. برای مثال، برداری $\mathbf{n} \cdot \dot{\mathbf{M}}$ است که مؤلفه‌ی j ام آن $\sum_i n_i \dot{M}_{ij}$ است. تانسور مرتبه‌ی دوم $\dot{\mathbf{M}}$ را می‌توان به صورت تانسور مرتبه‌ی سوم، $\dot{M}_{ijk} = T_{ij}x_k - T_{ik}x_j$ نوشت. اما این تانسور برحسب اندیس‌های j و k نامتقارن است، و بنابراین تنها دارای سه عنصر مستقل است. بدین ترتیب با انضمام اندیس i ، \dot{M}_{ijk} دارای نه مؤلفه است و می‌تواند به صورت یک شبه بردار با مرتبه دوم، همانند بالا نوشته شود.

۱۱-۶ یک موج تخت عرضی، به‌طور عمودی در خلأ روی یک پرده‌ی مسطح کاملاً جاذب می‌تابد.

1) dyadic 2) Second-rank

الف) با توجه به قانون بقای اندازه‌ی حرکت خطی نشان دهید که فشار اعمال شده (که فشار تابشی نامیده می‌شود) روی پرده، با انرژی میدان بر واحد حجم در موج مساوی است.

ب) در همسایگی زمین شار انرژی الکترومغناطیسی از خورشید به طور تقریبی 10^4 kW/m^2 است. اگر یک گلايدر سبک بین سیاره‌ای، دارای بادبانی به اندازه‌ی جرمی 1 g/m^2 (از مساحت) بوده، و سایر وزن‌های آن قابل اغماض باشند، حداکثر شتاب آن برحسب متر بر مجذور ثانیه، ناشی از فشار تابش خورشیدی چه خواهد بود؟ چگونه این موضوع با شتاب ناشی از "باد" خورشیدی مقایسه می‌شود (تابش ذره‌ای)؟

۱۲-۶ با استفاده از قضیه‌ی پوینتینگ مختلط^۱ بخش ۹-۶، تعریف ادمیتانس $B = G - iY$ مربوط به یک شبکه‌ی غیرفعال^۲ دارای دو خروجی^۳ خطی را (برحسب کمیت‌های میدانی) در نظر بگیرید.

الف) با در نظر گرفتن مزدوج مختلط (۶-۱۳۴)، روابط کلی را برای کاندوکتانس G و ساسکپتانس B برای حالت کلی شامل افت تابش به دست آورید.

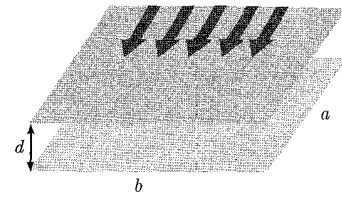
ب) نشان دهید که در فرکانس‌های پایین، روابط معادل با (۶-۱۳۹) و (۶-۱۴۰)، عبارتند از

$$G \simeq \frac{1}{|V_i|^2} \int_V \sigma |\mathbf{E}|^2 d^3x$$

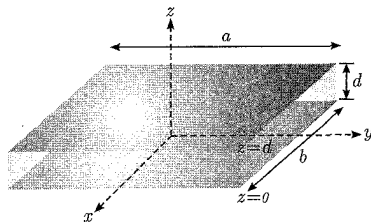
$$B \simeq -\frac{\omega}{|V_i|^2} \int_V (w_m - w_e) d^3x$$

۱۳-۶ یک خازن با صفحات موازی، متشکل از دو ورقه‌ی رسانای کاملاً مستطیلی تخت با ابعاد a و b داریم که با فاصله‌ی d ، که در مقایسه با a و b کوچک است از یکدیگر جدا شده‌اند. جریان به طور یکنواخت در طول لبه‌های مجاور با طول b خورانده شده و سپس بیرون می‌آید. با توجه به جریان ورودی و ولتاژ تعریف شده در این انتهای خازن، امپدانس ورودی یا ادمیتانس را با استفاده از مفاهیم میدانی بخش ۹-۶ محاسبه کنید.

الف) میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی در خازن را تا تصحیح مرتبه‌ی دوم در توان‌های فرکانس محاسبه کنید (ولی با صرف نظر از فرانت‌های میدان‌ها).



ب) نشان دهید که بسط رثاکتانس (۶-۱۴) برحسب توان‌های فرکانس تا مرتبه‌ی مناسبی از بسط با آنچه برای یک میدان فشرده‌ی شامل یک خازن $C = \frac{\epsilon_0 ab}{d}$ به دست آمد (که به صورت سری با یک اندوکتانس $l = \frac{\mu_0 ad}{3b}$ قرار داشت) مشابه است.



۶-۱۴ یک خازن دایروی ایده‌آل با صفحات موازی با شعاع a و جدایی بین صفحه‌ای $d \ll a$ همان‌گونه که در طرح نیز نشان داده شده است، توسط سیم‌های محوری^۱ به یک چشمه‌ی جریان متصل شده است. جریان در سیم عبارت است از: $I(t) = I_0 \cos \omega t$

الف) با صرف نظر از اثرات میدانی فرائزها، میدان‌های مغناطیسی و الکتریکی بین صفحات را تا مرتبه‌ی دوم برحسب فرکانس (یا عدد موج) محاسبه کنید.

ب) انتگرال‌های حجمی W_m و W_e را که در تعریف رثاکتانس X (۶-۱۴) وارد می‌شوند، تا مرتبه‌ی دوم برحسب ω محاسبه کنید. نشان دهید که برحسب ورودی جریان I_i که با $I_i = -i\omega Q$ می‌شود که در آن Q بار کل روی یک صفحه است، انرژی‌های فوق عبارتند از

$$\int w_e d^3x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|I_i|^2 d}{\omega^2 a^2}, \quad \int w_m d^3x = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{|I_i|^2 d}{\lambda} \left(1 + \frac{\omega^2 a^2}{12c^2}\right)$$

ج) نشان دهید که مدار سری معادل، دارای $C \simeq \frac{\pi\epsilon_0 a^2}{d}$ و $L \simeq \frac{\mu_0 d}{\lambda\pi}$ است، و اینکه یک تخمین برای فرکانس تشدید این سیستم عبارت است از: $\omega_{res} \simeq \frac{\sqrt{2}c}{a}$. نتیجه را با ریشه‌ی اول $J_0(x)$ مقایسه کنید.

۶-۱۵ در صورتی که یک رسانا یا یک نیمه‌هادی به خاطر وجود میدان الکتریکی اعمال شده، گردش جریانی را در خود داشته باشد، و یک میدان مغناطیسی نیز اعمال شود، مؤلفه‌ای از میدان الکتریکی در جهت عمود بر هر دو میدان اعمال شده‌ی الکتریکی (در جهت جریان جاری) و مغناطیسی ظاهر خواهد شد، که منجر به پیدایش یک اختلاف ولتاژ بین کناره‌های^۲ رسانا می‌شود. این پدیده اثر هال نامیده می‌شود.

الف) خواص شناخته شده‌ی میدان‌های الکترومغناطیسی تحت دوران‌ها و انعکاس‌های فضایی، و فرض مربوط به بسط‌های سری تیلور حول قدرت میدان مغناطیسی صفر را مورد استفاده قرار داده

1) Axial leads 2) sides

تا نشان دهید که برای یک محیط همسانگرد، تعمیم قانون اهم با تصحیح تا مرتبه‌ی دوم برحسب میدان مغناطیسی، باید شکل زیر را دارا باشد

$$\mathbf{E} = \rho_e \mathbf{J} + R(\mathbf{H} \times \mathbf{J}) + \beta_1 H^2 \mathbf{J} + \beta_2 (\mathbf{H} \cdot \mathbf{J}) \mathbf{H}$$

که در آن ρ_e مقاومت محیط در غیاب میدان مغناطیسی است و R نیز ضریب "هال" نامیده می‌شود.

(ب) در مورد لازمه‌های مربوط به ناوردایی وارونی زمان^۱، این موضوع چگونه است؟

۱۶-۶ (الف) نیروی وارد بر یک تک‌قطبی دیراک با حداقل بار مغناطیسی، در فاصله‌ی 0.5 \AA از یک دوقطبی مغناطیسی با گشتاور دوقطبی یک مگنتون هسته‌ای $\left(\frac{e\hbar}{2m_p}\right)$ ، [که در صفحه منصف آن قرار گرفته است] را برحسب نیوتن محاسبه کنید.

(ب) نیروی موجود در قسمت a را با نیروهای اتمی، همانند نیروی الکترواستاتیکی مستقیم بین بارها (با فاصله جدایی مشابه) مقایسه کنید. در مورد سؤال مربوط به پیوند تک‌قطبی‌های مغناطیسی به هسته‌هایی با گشتاورهای مغناطیسی نیز نظر دهید. فرض کنید جرم تک‌قطبی حداقل به اندازه جرم یک پروتون است.

D. Sivers, *Phys. Rev. D* 2, 2048 (1970)

مرجع:

۱۷-۶ برای ذره‌ای که دارای هر دو بار الکتریکی و مغناطیسی است، نشان دهید که تعمیم نیروی لورنتز عبارت است از

$$\mathbf{F} = q_e \mathbf{E} + q_m \mathbf{H} + q_e \mathbf{v} \times \mathbf{B} - q_m \mathbf{v} \times \mathbf{D}$$

(الف) نشان دهید که رابطه فوق برای نیرو، تحت تبدیل دوگانه (۱۵۱-۶) و (۱۵۲-۶)، هم برای میدان‌ها و هم برای بارها ناورداست.

(ب) نشان دهید که شرط کوانتس دیراک (۱۵۳-۶) برای ذره‌ای که به ترتیب دارای بارهای الکتریکی

و مغناطیسی e_1, g_1 و e_2, g_2 هستند، به صورت زیر تعمیم می‌یابد

$$\frac{e_1 g_2 - e_2 g_1}{\hbar} = 2\pi n$$

و اینکه این رابطه تحت یک تبدیل دوگانه از بارهای ناورداست.

۱۸-۶ رابطه دیراک

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{g}{4\pi} \int_L \frac{d\mathbf{l}' \times (\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3}$$

را برای پتانسیل برداری یک تک‌قطبی مغناطیسی و ریسمان وابسته‌ی L مربوط به آن در نظر بگیرید. جهت معین بودن، فرض کنید تک‌قطبی در مبدأ، و ریسمان در امتداد منفی محور z قرار گرفته است.

الف) \mathbf{A} را به طور صریح محاسبه کرده و نشان دهید که در مختصات کروی دارای مؤلفه‌های زیر است

$$A_r = 0 \quad A_\theta = 0 \quad A_\phi = \frac{g(1 - \cos \theta)}{4\pi r \sin \theta} = \left(\frac{g}{4\pi r}\right) \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

ب) اثبات کنید که $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ ، میدان کولن گونه‌ی یک بار نقطه‌ای است، به جز احتمالاً در $\theta = \pi$.

ج) با توجه به میدان \mathbf{B} ، که در قسمت (ب) تعیین شد، شار مغناطیسی کلی را که از حلقه دایروی نشان داده شده در شکل به شعاع $R \sin \theta$ عبور می‌کند تعیین کنید. $\theta < \frac{\pi}{4}$ و $\theta > \frac{\pi}{4}$ را به طور مجزا در نظر بگیرید، اما همواره شار به طرف بالا را محاسبه کنید.

د) با توجه به $\oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}$ حول حلقه، شار مغناطیسی کل گذرنده از حلقه را تعیین کنید. نتیجه را با آنچه در قسمت (ج)، به دست آمد مقایسه کنید. نشان دهید که این دو به‌ازای $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$ با هم برابرند، ولی به‌ازای $\frac{\pi}{4} < \theta < \pi$ دارای اختلاف ثابتی هستند. این اختلاف را تفسیر کنید.

۱۹-۶ الف) وارونگی فضایی^۱ را به پتانسیل برداری تک قطبی مسئله‌ی ۱۸-۶ اعمال کرده و نشان دهید که پتانسیل برداری به صورت زیر درمی‌آید

$$A'_\phi = -g \frac{(1 + \cos \theta)}{4\pi r \sin \theta} = -\frac{g}{4\pi r} \cot\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

و البته همراه با سایر مؤلفه‌ها که صفر می‌شوند.

به طور صریح نشان دهید که کرل این پتانسیل برداری، میدان مغناطیسی یک تک قطبی مغناطیسی را ارائه می‌دهد، به جز احتمالاً در $\theta = 0$. [خواص وارونگی فضایی مربوط به این بار مغناطیسی را به یاد بیاورید!]

ب) با اشاره به این نکته که پتانسیل‌های برداری اصلی و وارونه‌شده‌ی فضایی، با یک تبدیل پیمانه‌ای با هم تفاوت دارند، نشان دهید که اختلاف، $\delta \mathbf{A} = \mathbf{A}' - \mathbf{A}$ را می‌توان به صورت گرادیان یک تابع اسکالر بیان نمود.

ج) تابع پیمانه‌ای را برحسب شکل ۹-۶ تفسیر کنید. [توجه: مسیر C را طوری انتخاب کنید که با سه ضلع خود در بینهایت، در صفحه شامل محور z یک مستطیل باشد.]

۲۰-۶ مثالی از حفظ علیت و سرعت محدود انتشار (علیرغم استفاده از پیمانه‌ی کولمب) با یک چشمه‌ی دوقطبی که در $t = 0$ خاموش و روشن می‌شود فراهم شده است. چگالی‌های بار و جریان مؤثر عبارتند از

$$\rho(\mathbf{x}, t) = \delta(x)\delta(y)\delta'(z)\delta(t)$$

$$J_z(\mathbf{x}, t) = -\delta(x)\delta(y)\delta(z)\delta'(t)$$

که در آن پریم به معنی مشتق‌گیری نسبت به شناسه است. قدرت دوقطبی فوق واحد بوده و در جهت منفی z است.

الف) نشان دهید که پتانسیل کولن لحظه‌ای (۲۳-۶) عبارت است از

$$\Phi(\mathbf{x}, t) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \delta(t) \frac{z}{r^3}$$

ب) نشان دهید که جریان عرضی \mathbf{J}^1 عبارت است از

$$\mathbf{J}_t(\mathbf{x}, t) = -\delta'(t) \left[\frac{2}{3} \epsilon_2 \delta(\mathbf{x}) - \frac{\epsilon_2}{4\pi r^3} + \frac{3}{4\pi r^3} \mathbf{n}(\epsilon_2 \cdot \mathbf{n}) \right]$$

ج) نشان دهید که میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی علی هستند و مؤلفه‌های میدان الکتریکی عبارتند از

$$E_x(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{c}{r} \left[-\delta''(r-ct) + \frac{3}{r} \delta'(r-ct) - \frac{3}{r^2} \delta(r-ct) \right] \sin\theta \cos\theta \cos\phi$$

E_y مشابه E_x است، با $\cos\phi$ که با $\sin\phi$ جایگزین شده باشد و

$$E_z(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{c}{r} \left[\sin^2\theta \delta''(r-ct) + (3\cos^2\theta - 1) \cdot \left(\frac{\delta'(r-ct)}{r} - \frac{\delta(r-ct)}{r^2} \right) \right]$$

توجه: با اینکه جواب قسمت (ب)، جریان عرضی را به صراحت نشان می‌دهد، شکل با صراحت کمتر

$$\mathbf{J}_t(\mathbf{x}, t) = -\delta'(t) \left[\epsilon_2 \delta(\mathbf{x}) + \frac{1}{4\pi} \nabla \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r} \right) \right]$$

را می‌توان همراه با (۴۷-۶) برای محاسبه پتانسیل و میدان‌های برداری قسمت (ج) مورد استفاده قرار داد. یک روش دیگر استفاده از تبدیلات فوریه‌ی \mathbf{J} و \mathbf{A} برحسب زمان، تابع گرین (۶-۴) و بسط موج کروی آن از فصل ۹ است.

۶-۲۱ یک دوقطبی الکتریکی با گشتاور دوقطبی \mathbf{P} ، که در یک جهت ثابت نگه‌داشته شده است، در مکان $\Gamma_0(t)$ نسبت به مبدأ قرار دارد. سرعت $\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}_0}{dt}$ برای این دوقطبی غیرنسبیتی است.

الف) نشان دهید که بار دوقطبی و چگالی‌های جریان را می‌توان به شکل رسمی به صورت زیر بیان نمود

$$\rho(\mathbf{x}, t) = -(\mathbf{P} \cdot \nabla) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{r}_0(t))$$

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}, t) = -\mathbf{v}(\mathbf{P} \cdot \nabla) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{r}_0(t))$$

ب) نشان دهید دور از مرکز، دوقطبی متحرک علاوه بر یک میدان دوقطبی الکتریکی باعث ایجاد یک میدان دوقطبی مغناطیسی و یک میدان چهارقطبی الکتریکی با گشتاورهای زیر می‌شود

$$\mathbf{m} = \frac{1}{c} \mathbf{P} \times \mathbf{v}$$

$$Q_{ij} = \nabla(x_{0i} P_j + x_{0j} P_i) - \dot{\mathbf{r}}_0 \cdot \mathbf{P} \delta_{ij}$$

[البته هنوز گشتاورهای بالاتری هم وجود دارند.*]

ج) نشان دهید که میدان چهارقطبی الکتریکی نیمه‌ساکن عبارت است از

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^4} [\nabla \mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}_0) (\mathbf{n} \cdot \mathbf{p}) - \dot{\mathbf{r}}_0 \cdot (\mathbf{n} \cdot \mathbf{p}) - \dot{\mathbf{p}}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}_0) - \dot{\mathbf{r}}_0(\mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{p})]$$

که در آن \mathbf{n} یک برداری یکانی در جهت شعاعی است.

۲۲-۶ الف) برای دور از مرکز، با حرکت آرام دوقطبی الکتریکی در مسئله ۶-۲۱، نشان دهید که پتانسیل برداری نیمه‌ساکن که با گردش جریان وابسته به حرکت دوقطبی ایجاد می‌شود عبارت است از

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \frac{\mu_0 \mathbf{v}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{p})}{4\pi r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\frac{1}{2} \frac{(\mathbf{p} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{x}}{r^3} + \frac{1}{2} \frac{[\mathbf{p}(\mathbf{x} \cdot \mathbf{v}) + \mathbf{v}(\mathbf{x} \cdot \mathbf{p})]}{r^3} \right]$$

که در آن جمله‌ی اول از شکل دوم (ضدمتقارن برحسب \mathbf{v} و \mathbf{p})، پتانسیل برداری ناشی از دوقطبی مغناطیسی است که گشتاور آن در مسئله‌ی ۶-۲۱ مشخص شده است. جمله‌ی اضافه شده برحسب \mathbf{v} و \mathbf{p} متقارن است.

ب) نشان دهید که میدان مغناطیسی مربوط به جمله‌ی متقارن عبارت است از

$$\mathbf{B}_{\text{sym}} = -\frac{3\mu_0}{4\pi r^3} \mathbf{n} \times [\mathbf{p}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) + \mathbf{v}(\mathbf{p} \cdot \mathbf{n})]$$

* به پیوست فصل ۴ از همین کتاب مراجعه کنید. این پیوست بسیار باارزش است.

(ج) با محاسبه‌ی کرل آن نشان دهید \mathbf{B}_{sym} با بودن میدان مغناطیسی نیمه‌ساکن وابسته به میدان چهارقطبی الکتریکی مسئله ۶-۲۱ (ج) سازگار است.

(د) نشان دهید که میدان مغناطیسی کل (که از شکل اول پتانسیل برداری، یعنی مجموع \mathbf{B}_{sym} و میدان دوقطبی مغناطیسی محاسبه می‌شود) عبارت است از

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \mathbf{v} \times \frac{[\nabla \mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{p}) - \mathbf{p}]}{r^3}$$

موضوع را تفسیر کنید.

۶-۲۳ معادلات موج (۶-۱۶۸) برای بردارهای هرتز، محتوی جملات چشمه‌ای اختیاری، شامل توابع \mathbf{V} و ξ هستند. تبدیلات پیمانه‌ای زیر را در نظر بگیرید

$$\Pi'_e = \Pi_e + \mu_0 \nabla \times \mathbf{G} - \nabla g \quad ; \quad \Pi'_m = \Pi_m - \mu \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial t}$$

که در آن \mathbf{G} و g ، توابع خوش رفتاری از فضا و زمانند.

الف) نشان دهید اگر \mathbf{G} و g معادلات موج زیر را برآورده کند

$$\left(\mu \epsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \right) \begin{Bmatrix} \mathbf{G} \\ g \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{\mu} (\mathbf{V} + \nabla \xi) \\ 0 \end{Bmatrix}$$

در این صورت پتانسیل‌های قطبشی جدید Π'_e و Π'_m رابطه‌ی (۶-۱۶۸) را (با \mathbf{V} و ξ که صفر می‌شوند) را برآورده خواهند کرد.

ب) نشان دهید که تبدیل پیمانه‌ای روی بردارهای هرتز معادل با یک تبدیل پیمانه‌ای روی \mathbf{A} و Φ است. تابع پیمانه‌ای Λ از (۶-۱۹) برحسب \mathbf{G} و g چیست؟

۶-۲۴ یک توزیع جریان $\mathbf{J}(\mathbf{x}, t)$ که نزدیک مبدأ جایگزیده است به آرامی برحسب زمان تغییر می‌کند.

الف) روابط جفی مینکوی (۶-۵۵) و (۶-۵۶) را برای میدان‌های تأخیری، جهت تعیین میدان‌های نیمه‌ساکن ناشی از توزیع جریان فوق مورد استفاده قرار دهید. با فرض اینکه گشتاورهای چندقطبی الکتریکی وجود نداشته باشند، و تنها سهم مربوط به دوقطبی‌ها مغناطیسی باقی بماند، نشان دهید که میدان‌های مغناطیسی و الکتریکی در نقطه‌ی $(\mathbf{x} = r\hat{r}, t)$ تا مرتبه‌ی اول در بسط برحسب مشتقات زمانی متوالی عبارتند از

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} \left(1 + \frac{r}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right) \left[\nabla \left(\mathbf{m} \left(t - \frac{r}{c} \right) \cdot \hat{r} \right) \hat{r} - \mathbf{m} \left(t - \frac{r}{c} \right) \right]$$

$$\mathbf{E} = \frac{\mu_0}{4\pi r^2} \mathbf{r} \times \frac{\partial \mathbf{m} \left(t - \frac{r}{c} \right)}{\partial t}$$

(ب) ساختار و راه‌اندازی یک سلونوئید دایروی راست مستطیمی با شعاع a ، و با N دور بر واحد طول، طوری است که جریانش یعنی $I(t)$ در هر جا در امتداد طولش یکسان بوده و بسیار آرام بر حسب زمان تغییر می‌کند. نشان دهید که میدان‌های دور از سلونوئید به‌طور تقریب عبارتند از

$$\mathbf{B} \approx \frac{\mu_0 N a^2}{\lambda c} \frac{\partial I \left(t - \frac{\rho}{c} \right)}{\partial t} \hat{\mathbf{z}} \quad \& \quad \mathbf{E} \approx -\frac{\mu_0 N a^2}{2} \frac{\partial I \left(t - \frac{\rho}{c} \right)}{\partial t} \hat{\boldsymbol{\phi}}$$

که در آن ρ فاصله‌ی عمودی از محور است، مشروط بر اینکه، $\max(|dI/dt|/I) \ll \frac{c}{\rho}$ باشد. یک سلونوئید بلند با یک جریان متغیر با زمان برخلاف وضعیت استاتیکی دارای یک میدان الکتریکی و مغناطیسی در بیرون خود است. اثبات کنید که قانون فارادی برآورده می‌شود.

آیا القاء مغناطیسی متغیر با زمان در "بیرون" سهمی در قانون فارادی تا این مرتبه دارد؟

۶-۲۵ (الف) با شروع از رابطه‌ی نیروی لورنتز (۶-۱۱۴) نشان دهید که در تقریب دوقطبی، نیروی مؤثر بر یک اتم خنثای در حال سکون را می‌توان به‌صورت زیر بیان کرد

$$\frac{d\mathbf{P}_{\text{atom}}}{dt} = (\mathbf{d} \cdot \nabla) \mathbf{E} + \mathbf{d} \cdot \mathbf{B}$$

که در آن \mathbf{d} گشتاور دوقطبی اتمی است و \mathbf{E} و \mathbf{B} میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی در محل اتم هستند.

(ب) برای یک موج تخت یکنواخت با فرکانس ω در یک محیط دی‌الکتریک غیرمغناطیسی نازک با ضریب شکست $n(\omega)$ نشان دهید که آهنگ زمانی تغییر اندازه‌ی حرکت مکانیکی بر واحد حجم \mathbf{g}_{mech} ، همراه اندازه‌ی حرکت الکترومغناطیسی \mathbf{g}_{em} (۶-۱۱۸) برای این موج عبارت است از

$$\frac{d\mathbf{g}_{\text{mech}}}{dt} = \frac{1}{2} (n^2 - 1) \frac{d\mathbf{g}_{\text{em}}}{dt}$$

[برای تصحیح‌های مربوط به محیط‌های چگال و امواج غیریکنواخت مرجع: Peierls (log.cit) را ملاحظه کنید.]

ضمیمه‌ی پیوست‌های فصول ۲ و ۳

به نظر می‌رسد چند رابطه در فصل ۲ وجود دارد که احتیاج به توضیح و اثبات بیشتری دارند که بدین وسیله به اثبات آن‌ها می‌پردازیم.

اثبات رابطه‌ی ۲-۵ صفحه ۴ فصل دوم:

$$\text{طبق رابطه ۲-۲: } \Phi(x) = \frac{q/\sqrt[4]{\pi\varepsilon}}{|x\mathbf{n} - y\mathbf{n}'|} + \frac{q'/\sqrt[4]{\pi\varepsilon}}{|x\mathbf{n} - y'\mathbf{n}'|}$$

و از آنجایی که $\Phi(x=a) = 0$ است، طبق رابطه ۲-۴ داریم: $y' = \frac{a^2}{y}$ و $q' = -\frac{a}{y}q$

$$\Phi(x) = \frac{\frac{q}{\sqrt[4]{\pi\varepsilon}}}{(x^2 + y^2 - 2xy \cos \gamma)^{1/2}} + \frac{-\frac{a}{y} \frac{q}{\sqrt[4]{\pi\varepsilon}}}{(x^2 + y'^2 - 2xy' \cos \gamma)^{1/2}}$$

$$\Phi(x) = \frac{q}{\sqrt[4]{\pi\varepsilon}} \left[\frac{1}{(x^2 + y^2 - 2xy \cos \gamma)^{1/2}} - \frac{a/y}{\left(x^2 + \frac{a^2}{y^2} - 2x \frac{a^2}{y} \cos \gamma\right)^{1/2}} \right]$$

$$\frac{\partial \Phi(x)}{\partial x} = \frac{q}{\sqrt[4]{\pi\varepsilon}} \left[\frac{-x + y \cos \gamma}{(x^2 + y^2 - 2xy \cos \gamma)^{3/2}} - \frac{\frac{a}{y} \left(-x + \frac{a^2}{y} \cos \gamma\right)}{\left(x^2 + \frac{a^2}{y^2} - 2x \frac{a^2}{y} \cos \gamma\right)^{3/2}} \right]$$

$$-\frac{\partial \Phi(x)}{\partial x} = \frac{q}{\sqrt[4]{\pi\varepsilon}} \left[\frac{x - y \cos \gamma}{(x^2 + y^2 - 2xy \cos \gamma)^{3/2}} - \frac{\frac{a}{y} \left(x - \frac{a^2}{y} \cos \gamma\right)}{\left(x^2 + \frac{a^2}{y^2} - 2x \frac{a^2}{y} \cos \gamma\right)^{3/2}} \right]$$

$$\left. \frac{\partial \Phi(x)}{\partial x} \right|_{x=a} = \frac{q}{\sqrt[4]{\pi\varepsilon}} \left[\frac{a - y \cos \gamma}{(a^2 + y^2 - 2ay \cos \gamma)^{3/2}} - \frac{\frac{a}{y} \left(a - \frac{a^2}{y} \cos \gamma\right)}{\left(a^2 + \frac{a^2}{y^2} - 2 \frac{a^2}{y} \cos \gamma\right)^{3/2}} \right]$$

$$\left. -\frac{\partial \Phi(x)}{\partial x} \right|_{x=a} = \frac{q}{\sqrt[4]{\pi\varepsilon}} \left[\frac{a - y \cos \gamma}{y^2 \left(1 + \frac{a^2}{y^2} - \frac{2a}{y} \cos \gamma\right)^{3/2}} - \frac{\frac{a}{y} \left(a - \frac{a^2}{y} \cos \gamma\right)}{a^2 \left(1 - \frac{a^2}{y^2} - \frac{2a}{y} \cos \gamma\right)^{3/2}} \right]$$

$$\left. -\frac{\partial \Phi(x)}{\partial x} \right|_{x=a} = \frac{q}{\sqrt[4]{\pi\varepsilon}} \left[\frac{\frac{a}{y^2} - \frac{\cos \gamma}{y^2} - \frac{1}{ay} + \frac{\cos \gamma}{y^2}}{\left(1 + \frac{a^2}{y^2} - \frac{2a}{y} \cos \gamma\right)^{3/2}} \right]$$

$$= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\frac{a}{y^r} - \frac{1}{ay}}{\left(1 + \frac{a^r}{y^r} - \frac{2a}{y} \cos \gamma\right)^{r/2}} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\frac{1}{ay} \left(\frac{a^r}{y^r} - 1\right)}{\left(1 + \frac{a^r}{y^r} - \frac{2a}{y} \cos \gamma\right)^{r/2}}$$

$$\left. \frac{\partial \Phi(x)}{\partial x} \right|_{x=a} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{a}{a^r y} \frac{1 - \frac{a^r}{y^r}}{\left(1 + \frac{a^r}{y^r} - \frac{2a}{y} \cos \gamma\right)^{r/2}}$$

و می‌دانیم: $\sigma = -\epsilon_0 \left. \frac{\partial \Phi(x)}{\partial x} \right|_{x=a}$ و بنابراین چگالی بار القائی، روی سطح کره برابر است با:

$$\sigma = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 a^r} \left(\frac{a}{y}\right) \frac{1 - \frac{a^r}{y^r}}{\left(1 + \frac{a^r}{y^r} - \frac{2a}{y} \cos \gamma\right)^{r/2}} \quad (\text{رابطه ۵-۲})$$

و اما اثبات رابطه‌ی ۹-۲ ص ۷:

در این حالت، نیروی وارد بر q ، برآیند نیروی وارد بر آن از طرف بار q' واقع در y' و بار $Q - q'$ واقع در مبدأ است، لذا:

$$\mathbf{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{q(Q - q')}{y^r} \left(\frac{\mathbf{y}}{|\mathbf{y}|}\right) + \frac{q'q}{|y - y'|^r} \left(\frac{\mathbf{y}}{|\mathbf{y}|}\right) \right\}$$

$$\mathbf{F} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{Q + \frac{a}{y}q}{y^r} + \frac{-\frac{a}{y}q}{\left|y - \frac{a^r}{y}\right|^r} \right\} \left(\frac{\mathbf{y}}{|\mathbf{y}|}\right)$$

$$\mathbf{F} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{y^r} \left[\left(Q + \frac{a}{y}q\right) - \frac{\frac{a}{y}q \cdot y^r}{(y^r - a^r)^r} \right] \frac{\mathbf{y}}{|\mathbf{y}|}$$

$$\mathbf{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{y^r} \left[Q + \frac{a}{y}q - \frac{a y^r q}{(y^r - a^r)^r} \right] \frac{\mathbf{y}}{|\mathbf{y}|}$$

$$\mathbf{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{y^r} \left[Q + \frac{a q (y^r - a^r)^r - a y^r q}{y (y^r - a^r)^r} \right] \frac{\mathbf{y}}{|\mathbf{y}|}$$

$$\mathbf{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{y^r} \left[Q + \frac{a q y^r + a^{\Delta} q - 2 a^r q y^r - a y^r q}{y (y^r - a^r)^r} \right] \frac{\mathbf{y}}{y}$$

$$\mathbf{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{y^r} \left[Q + \frac{a^r q (a^r - 2 y^r)}{y (y^r - a^r)^r} \right] \frac{\mathbf{y}}{y}$$

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{y^2} \left[Q - \frac{qa^3(2y^2 - a^2)}{y(y^2 - a^2)^2} \right] \quad (\text{رابطه ۹-۲})$$

در حد $y \gg a$ ؛ این نیرو به قانون معمول کولمب برای نیروی بین دو جسم باردار کوچک تنزل می‌یابد.

و اما اثبات رابطه ۲-۲۴ ص ۱۴:

$$\begin{aligned} & [(1 - 2\alpha \cos \gamma)^{-3/2}] - [(1 + 2\alpha \cos \gamma)^{-3/2}] \\ &= \left[1 + (-2\alpha \cos \gamma) \left(-\frac{3}{2}\right) + \frac{1}{2!} \left(-\frac{3}{2}\right) \left(-\frac{5}{2}\right) (-2\alpha \cos \gamma)^2 \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{3!} \left(-\frac{3}{2}\right) \left(-\frac{5}{2}\right) \left(-\frac{7}{2}\right) (-2\alpha \cos \gamma)^3 + \dots \right] \\ & - \left[1 + (2\alpha \cos \gamma) \left(-\frac{3}{2}\right) + \frac{1}{2!} \left(-\frac{3}{2}\right) \left(-\frac{5}{2}\right) (2\alpha \cos \gamma)^2 \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{3!} \left(-\frac{3}{2}\right) \left(-\frac{5}{2}\right) \left(-\frac{7}{2}\right) (2\alpha \cos \gamma)^3 + \dots \right] \\ &= 1 + 3\alpha \cos \gamma + \frac{15}{4}\alpha^2 \cos^2 \gamma + \frac{35}{4}\alpha^3 \cos^3 \gamma \\ & - 1 + 3\alpha \cos \gamma - \frac{15}{4}\alpha^2 \cos^2 \gamma + \frac{35}{4}\alpha^3 \cos^3 \gamma + \dots \\ &= 6\alpha \cos \gamma + 35\alpha^3 \cos^3 \gamma + \dots \quad (\text{رابطه ۲-۲۴}) \end{aligned}$$

اثبات رابطه ۲-۲۷ ص ۱۱: رابطه‌ی ۲-۲۶ عبارت است از

$$\Phi(x, \theta, \phi) = \frac{3Va^2}{2x^2} \left(\frac{x^2(x^2 - a^2)}{(x^2 + a^2)^{5/2}} \right) \cos \theta \left[1 + \frac{35}{24} \frac{a^2 x^2}{(a^2 + x^2)^2} (3 - \cos^2 \theta) + \dots \right]$$

به‌ازای مقادیر بزرگ x ، (یعنی $x \gg a$) نتیجه می‌گیریم که توان‌های بالاتر از ۲ را می‌توان صفر قرار داد:

$$\begin{aligned} \Phi &= \frac{3Va^2}{2x^2} \left[\frac{x^5 \left(1 - \frac{a^2}{x^2}\right)}{x^5 \left(1 + \frac{a^2}{x^2}\right)^{5/2}} \right] \cos \theta \left[1 + \frac{35}{24} \frac{a^2 x^2}{x^2 \left(1 + \frac{a^2}{x^2}\right)^2} (3 - \cos^2 \theta) + \dots \right] \\ &= \frac{3Va^2}{2x^2} \left[\left(1 - \frac{a^2}{x^2}\right) \left(1 - \frac{5}{2} \frac{a^2}{x^2} + \dots\right) \right] \cos \theta \\ & \left[1 + \frac{35}{24} \frac{a^2}{x^2} \left(1 - \frac{2a^2}{x^2} + \dots\right) (3 - \cos^2 \theta) + \dots \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{3Va^2}{2x^2} \left[1 - \frac{5a^2}{2x^2} - \frac{a^2}{x^2} + \frac{5q^2}{2x^2} + \dots \right] \cos \theta \\
&\left[1 + \left(\frac{35a^2}{24x^2} - \frac{35q^2}{12x^2} + \dots \right) (3 - \cos^2 \theta) + \dots \right] \\
&= \frac{3Va^2}{2x^2} \left[1 - \frac{7a^2}{2x^2} + \dots \right] \cos \theta \left[1 + \frac{35a^2}{24x^2} (3 - \cos^2 \theta) + \dots \right] \\
&= \frac{3Va^2}{2x^2} \left(1 - \frac{7a^2}{2x^2} \right) \left(\cos \theta + \frac{35a^2}{8x^2} \cos \theta - \frac{35a^2}{24x^2} \cos^3 \theta + \dots \right) \\
&= \frac{3Va^2}{2x^2} \left[\cos \theta + \frac{35a^2}{8x^2} \cos \theta - \frac{35a^2}{24x^2} \cos^3 \theta - \frac{7a^2}{2x^2} \cos \theta + \dots \right] \\
&= \frac{3Va^2}{2x^2} \left[\cos \theta + \frac{7a^2}{8x^2} \cos \theta - \frac{35a^2}{24x^2} \cos^3 \theta + \dots \right] \\
\Rightarrow \phi(x, \theta, \varphi) &= \frac{3Va^2}{2x^2} \left[\cos \theta - \frac{7a^2}{12x^2} \left(\frac{5}{2} \cos^3 \theta - \frac{3}{2} \cos \theta \right) + \dots \right] \quad \text{رابطه ۲۷-۲}
\end{aligned}$$

ضمیمه‌ی پیوست فصل ۳

در این جا نیز تعدادی از روابط احتیاج به توضیح و اثبات بیشتر می‌دارند که در ذیل این توضیحات و اثبات‌ها را آورده‌ایم.

اثبات رابطه ۳-۱۰۵ ب صفحه‌ی ۳۲ فصل سوم:
با استفاده از رابطه ۳-۱۰۵، الف، داریم:

$$\Phi(\rho, \varphi, z) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} J_m(k_{mn}\rho) \sinh(k_{mn}z) (A_{mn} \sin m\varphi + B_{mn} \cos m\varphi)$$

در نقطه $z = L$ ، پتانسیل به صورت $V(\rho, \varphi)$ تعریف شده است. بنابراین داریم:

$$V(\rho, \varphi) = \sum_{m,n} \sinh(k_{mn}L) J_m(k_{mn}\rho) (A_{mn} \sin m\varphi + B_{mn} \cos m\varphi) \quad (۱)$$

برای یافتن A_{mn} ، طرفین رابطه (۱) را در $\rho J_m(k_{mn}) \sin m\varphi$ ضرب و برحسب $d\rho$ و $d\varphi$ انتگرال‌گیری می‌کنیم:

$$\begin{aligned}
&\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a V(\rho, \varphi) \rho J_m(k_{mn}\rho) \sin m\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a A_{mn} \sinh(k_{mn}L) \\
&\times J_m(k_{mn}\rho) \sin m\varphi \times \rho J_m(k_{mn}'\rho) \sin m'\varphi \quad (۲)
\end{aligned}$$

حال، دو رابطه زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\left\{ \int_0^{2\pi} \sin m\varphi \sin m'\varphi d\varphi = \pi \delta_{mm'} \right. \quad (۳)$$

$$\left\{ \int_0^a \rho J_m(k_{mn}\rho) J_m(k_{mn'}\rho) d\rho = \frac{a^2}{2} J_{m+1}(k_{mn}a) \delta_{nn'} \right. \quad (۴)$$

بنابراین، با استفاده از دو رابطه فوق رابطه (۲) را می‌توانیم تغییر دهیم. بدین صورت که اگر رابطه (۲) را در یک طرف، مساوی مثلاً λ در نظر بگیریم:

$$\begin{aligned} \lambda &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a V(\rho, \varphi) \rho J_m(k_{mn}\rho) \sin m\varphi d\rho \\ \Rightarrow \lambda &= \int_0^{2\pi} d\varphi A_{mn} \sinh(k_{mn}L) \sin m\varphi \sin m'\varphi \left[\int_0^a \rho J_m(k_{mn}\rho) J_m(k_{mn}\rho) d\rho \right] \\ &= A_{mn} \sinh(k_{mn}L) \int_0^{2\pi} \sin m\varphi \sin m'\varphi d\varphi \left[\frac{a^2}{2} J_{m+1}^2(k_{mn}a) \right] \\ &= \frac{a^2 A_{mn}}{2} \frac{1}{\cos \operatorname{ech}(k_{mn}L)} [\pi] J_{m+1}^2(k_{mn}a) \\ \Rightarrow A_{mn} &= \frac{2 \cos \operatorname{ech}(k_{mn}L)}{\pi a^2 J_{m+1}^2(k_{mn}a)} \lambda \end{aligned}$$

بنابراین اگر λ را جایگذاری کنیم خواهیم داشت:

$$A_{mn} = \frac{2 \cos \operatorname{ech}(k_{mn}L)}{\pi a^2 J_{m+1}^2(k_{mn}a)} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a V(\rho, \varphi) \rho J_m(k_{mn}\rho) \sin m\varphi d\rho$$

حال، برای یافتن B_{mn} نیز طرفین رابطه (۱) را در $\rho J_m(k_{mn}\rho) \cos m\varphi$ ضرب و برحسب $d\rho$ و $d\varphi$ انتگرال‌گیری می‌کنیم، بنابراین:

$$\begin{aligned} &\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a V(\rho, \varphi) \rho J_m(k_{mn}\rho) \cos m\varphi d\rho \\ &= B_{mn} \sinh(k_{mn}L) \int_0^{2\pi} d\varphi \left[\int_0^a d\rho \rho J_m(k_{mn}\rho) J_m(k_{mn'}\rho) \right] \cos m\varphi \cos m'\varphi \end{aligned}$$

حال اگر رابطه (۴) و رابطه انتگرالی زیر را در نظر بگیریم:

$$\int_0^{2\pi} \cos m\varphi \cos m'\varphi d\varphi = \pi \delta_{mm'} \quad m \neq 0$$

و رابطه فوق را که شامل B_{mn} است، اگر مساوی با ω قرار دهیم، خواهیم داشت

$$\omega = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a V(\rho, \varphi) \rho J_m(k_{mn}\rho) \cos m\varphi d\rho$$

$$\begin{aligned} \text{لذا: } \omega &= B_{mn} \sinh(k_{mn}L) \int_0^{2\pi} d\varphi \left[\frac{a^{\nu}}{\nu} J_{m+\nu}^{\nu}(k_{mn}a) \right] \cos m'\varphi \cos m\varphi \\ &= B_{mn} \sinh(k_{mn}L) \cdot \frac{a^{\nu}}{\nu} J_{m+\nu}^{\nu}(k_{mn}a) \int_0^{2\pi} d\varphi \cos m'\varphi \cos m\varphi \end{aligned}$$

$$\text{بنابراین: } \omega = \frac{a^{\nu} B_{mn}}{\nu} \cdot \frac{J_{m+\nu}^{\nu}(k_{mn}a)}{\cos \operatorname{ech}(k_{mn}a)} \pi$$

حال، ω را از رابطه بالا، جاگذاری می‌کنیم، آنگاه خواهیم داشت:

$$B_{mn} = \frac{\nu \cos \operatorname{ech}(k_{mn}L)}{\pi a^{\nu} J_{m+\nu}^{\nu}(k_{mn}a)} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a d\rho \rho V(\rho, \varphi) J_m(k_{mn}\rho) \cos m\varphi$$

اثبات رابطه‌ی ۳-۱۲۴ ص ۲۸ فصل سوم:

با استفاده از رابطه ۳-۱۲۲، می‌توانیم ادامه دهیم:

$$g_l(r, r') = C \left(r_{<}^l - \frac{a^{2l+1}}{r_{<}^{l+1}} \right) \left(\frac{1}{r_{>}^{l+1}} - \frac{r_{>}^l}{b^{2l+1}} \right)$$

حال، $g_l(r, r')$ را در حالت‌های $r' < r$ و $r' > r$ جداسازی می‌کنیم. بدین صورت که:

$$g_l(r, r') = \begin{cases} C \left(r'^l - \frac{a^{2l+1}}{r'^{l+1}} \right) \left(\frac{1}{r^{l+1}} - \frac{r^l}{b^{2l+1}} \right) & r' < r \\ \left(r^l - \frac{a^{2l+1}}{r^{l+1}} \right) \left(\frac{1}{r'^{l+1}} - \frac{r'^l}{b^{2l+1}} \right) & r < r' \end{cases}$$

$$r g_l(r, r') = \begin{cases} C \left(r'^l - \frac{a^{2l+1}}{r'^{l+1}} \right) \left(\frac{1}{r^l} - \frac{r^{l+1}}{b^{2l+1}} \right) & r' < r \\ C \left(r^{l+1} - \frac{a^{2l+1}}{r^l} \right) \left(\frac{1}{r'^{l+1}} - \frac{r'^l}{b^{2l+1}} \right) & r < r' \end{cases}$$

$$\frac{d[r g_l(r, r')]}{dr} = \begin{cases} C \left(r'^l - \frac{a^{2l+1}}{r'^{l+1}} \right) \left(\frac{-l}{r^{l+1}} - \frac{(l+1)r^l}{b^{2l+1}} \right) & r' < r \quad (1) \\ C \left((l+1)r^l - \frac{-la^{2l+1}}{r^{l+1}} \right) \left(\frac{1}{r'^{l+1}} - \frac{r'^l}{b^{2l+1}} \right) & r < r' \quad (2) \end{cases}$$

ابتدا رابطه (۱) را در نظر می‌گیریم:

$$\left. \frac{d[r g_l(r, r')]}{dr} \right|_{r=r'} = C \left(r'^l - \frac{a^{2l+1}}{r'^{l+1}} \right) \left(-\frac{l}{r'^{l+1}} + \frac{(l+1)r'^l}{b^{2l+1}} \right)$$

$$\begin{aligned}
 &= C \left(-\frac{l}{r'} - \frac{(l+1)r'^{2l}}{b^{2l+1}} + \frac{la^{2l+1}}{r'^{2l+1}} + \frac{(l+1)a^{2l+1}}{r'b^{2l+1}} \right) \\
 &= -\frac{C}{r'} \left(l + \frac{(l+1)r'^{2l+1}}{b^{2l+1}} - \frac{la^{2l+1}}{r'^{2l+1}} - \frac{(l+1)a^{2l+1}}{b^{2l+1}} \right) \\
 &= -\frac{C}{r'} \left[l + (l+1) \left(\frac{r'}{b} \right)^{2l+1} \left[1 - \frac{a^{2l+1}}{r'^{2l+1}} \right] - l \left(\frac{a}{r'} \right)^{2l+1} \right] \\
 &= -\frac{C}{r'} \left[(l+1) \left(\frac{r'}{b} \right)^{2l+1} \left(1 - \left(\frac{a}{r'} \right)^{2l+1} \right) + l \left(1 - \left(\frac{a}{r'} \right)^{2l+1} \right) \right]
 \end{aligned}$$

با ساده‌تر کردن این رابطه داریم:

$$\frac{d[r g_l(r, r')]}{dr} \Big|_{r=r'} = -\frac{C}{r} \left[1 - \left(\frac{a}{r'} \right)^{2l+1} \right] \left[l + (l+1) \left(\frac{r'}{b} \right)^{2l+1} \right] \quad r' < r \quad (I)$$

حال رابطه (۲) را در نظر می‌گیریم:

$$\begin{aligned}
 \frac{d[r g_l(r, r')]}{dr} \Big|_{r=r'} &= C \left((l+1)r^l + \frac{la^{2l+1}}{r^{l+1}} \right) \left(\frac{1}{r'^{l+1}} - \frac{r'^l}{b^{2l+1}} \right) \Big|_{r=r'} \\
 &= C \left((l+1)r'^l + \frac{la^{2l+1}}{r'^{l+1}} \right) \left(\frac{1}{r'^{l+1}} - \frac{r'^l}{b^{2l+1}} \right) \\
 &= C \left(\frac{l+1}{r'} - \frac{(l+1)r'^{2l}}{b^{2l+1}} + \frac{la^{2l+1}}{r'^{2l+2}} - \frac{la^{2l+1}}{r'b^{2l+1}} \right) \\
 &= \frac{C}{r'} \left[(l+1) \left[1 - \frac{r'^{2l+1}}{b^{2l+1}} \right] + \frac{la^{2l+1}}{r'^{2l+1}} \left(1 - \frac{r'^{2l+1}}{b^{2l+1}} \right) \right]
 \end{aligned}$$

با ساده‌تر کردن این رابطه، خواهیم داشت:

$$\frac{d[r g_l(r, r')]}{dr} \Big|_{r=r'} = \frac{C}{r'} \left\{ 1 - \left(\frac{r'}{b} \right)^{2l+1} \right\} \left[(l+1) + l \left(\frac{a}{r'} \right)^{2l+1} \right] \quad r < r' \quad (II)$$

از رابطه ۳-۱۲۳، استفاده می‌کنیم، بدین صورت که:

$$\left\{ \frac{d}{dr} [r g_l(r, r')] \right\}_{r'+\varepsilon} - \left\{ \frac{d}{dr} [r g_l(r, r')] \right\}_{r'-\varepsilon} = -\frac{4\pi}{r'}$$

در این رابطه، در جمله اول $r > r'$ و در جمله دوم $r < r'$ است، بنابراین در این رابطه، به‌جای جمله اول، رابطه (I) و به‌جای جمله دوم، رابطه (II) را قرار می‌دهیم، آنگاه خواهیم داشت:

$$-\frac{C}{r'} \left[1 - \left(\frac{a}{r'} \right)^{2l+1} \right] \left[l + (l+1) \left(\frac{r'}{b} \right)^{2l+1} \right]$$

$$\begin{aligned}
 & -\frac{C}{r^l} \left[1 - \left(\frac{r'}{b} \right)^{2l+1} \right] \left[l+1 + l \left(\frac{a}{r'} \right)^{2l+1} \right] = -\frac{4\pi}{r^l} \\
 & -\frac{C}{r^l} \left[l + (l+1) \left(\frac{r'}{b} \right)^{2l+1} - l \left(\frac{a}{r'} \right)^{2l+1} - (l+1) \left(\frac{a}{b} \right)^{2l+1} \right] \\
 & -\frac{C}{r^l} \left[l+1 + l \left(\frac{a}{r'} \right)^{2l+1} - (l+1) \left(\frac{r'}{b} \right)^{2l+1} - l \left(\frac{a}{b} \right)^{2l+1} \right] = -\frac{4\pi}{r^l} \\
 & C \left[(2l+1) - (2l+1) \left(\frac{a}{b} \right)^{2l+1} \right] = 4\pi \\
 & C \left[(2l+1) \left[1 - \left(\frac{a}{b} \right)^{2l+1} \right] \right] = 4\pi \\
 \Rightarrow C &= \frac{4\pi}{(2l+1) \left[1 - \left(\frac{a}{b} \right)^{2l+1} \right]} \quad (\text{رابطه ۳-۱۲۴})
 \end{aligned}$$

اثبات رابطه‌های ۳-۱۲۹ و ۳-۱۳۰ فصل سوم ص ۴۰:

$$Q = \int \rho(x') d^3x' \quad , \quad d^3x' = r'^2 dr' d(\cos \theta') d\varphi$$

حال، اگر تابع چگالی بار را به صورت ذیل تعریف کنیم:

$$\rho(x') = C \delta(r' - a) \delta \left(\cos \theta' - \cos \frac{\pi}{4} \right)$$

بنابراین، خواهیم داشت

$$Q = \int C \delta(r' - a) \delta \left(\cos \theta' - \cos \frac{\pi}{4} \right) d^3x'$$

$$Q = C \int d\varphi' \int r'^2 \delta(r' - a) dr' \int \delta(\cos \theta) d(\cos \theta) = C, 2\pi a^2$$

$$Q = 2\pi a^2 C \Rightarrow C = \frac{Q}{2\pi a^2}$$

بنابراین تابع چگالی، به صورت زیر درمی‌آید:

$$\rho(x') = \frac{Q}{2\pi a^2} \delta(r' - a) \delta(\cos \theta) \quad (\text{رابطه ۳-۱۲۹})$$

برای ادامه کار، ابتدا رابطه ۳-۱۲۵ را در نظر می‌گیریم. به ازای $a = 0$ خواهیم داشت:

$$G(x, x') = 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{Y_{lm}^*(\theta', \varphi') Y_{lm}(\theta, \varphi)}{2l+1} r_{<}^l \left(\frac{1}{r_{>}^{l+1}} - \frac{r_{>}^l}{b^{2l+1}} \right) \quad (1)$$

حال، با استفاده از رابطه ۱-۴۴، داریم:

$$\Phi(x') = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \rho(x') G(x, x') d^3x' - \frac{1}{4\pi} \oint \Phi(x') \frac{\partial G}{\partial n'} da'$$

و چون کره موردنظر زمین است یعنی پتانسیل $\Phi(x') = 0$ می‌باشد و جمله دوم حذف خواهد شد:

$$\Phi(x) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \rho(x') G(x, x') d^3x' \tag{۲}$$

حال، رابطه (۲) را در رابطه (۱) جاگذاری می‌کنیم، با این کار، خواهیم داشت:

$$\Phi(x) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3x' \frac{Q}{4\pi a^2} \delta(r' - a) \delta(\cos \theta') 4\pi \sum_{m=-l}^l \sum_{l=0}^{\infty} \frac{Y_{lm}^*(\theta', \varphi') Y_{lm}(\theta, \varphi)}{2l+1} r_{<}^l \left(\frac{1}{r_{>}^{l+1}} - \frac{r_{>}^l}{b^{2l+1}} \right)$$

به دلیل تقارن سمتی در مسئله، در این جا $m = 0$ خواهد بود. بنابراین

$$\Phi(x) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{Q}{4\pi a^2} \delta(r' - a) \delta(\cos \theta') 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \frac{Y_{l0}^*(\theta', \varphi') Y_{l0}(\theta, \varphi)}{2l+1} r_{<}^l \left(\frac{1}{r_{>}^{l+1}} - \frac{r_{>}^l}{b^{2l+1}} \right) d^3x'$$

حال، به جای $Y_{l0}^*(\theta', \varphi')$ و $Y_{l0}(\theta, \varphi)$ ، معادل آن‌ها را که به صورت ذیل می‌باشد، قرار می‌دهیم:

$$\begin{aligned} Y_{l0}^*(\theta', \varphi') &= \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} P_l(\cos \theta') \quad , \quad Y_{l0}(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} P_l(\cos \theta) \\ \Rightarrow \Phi(x) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{Q}{4\pi a^2} \delta(r' - a) \sum_{l=0}^{\infty} \frac{4\pi}{2l+1} \int \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} P_l(\cos \theta') \\ &\sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} P_l(\cos \theta) \delta(\cos \theta') \times r_{<}^l \left(\frac{1}{r_{>}^{l+1}} - \frac{r_{>}^l}{b^{2l+1}} \right) r'^2 dr' d(\cos \theta') \int_0^{2\pi} d\varphi' \\ \Phi(x) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} d\varphi \int \frac{Q}{4\pi a^2} \delta(r' - a) r'^2 \\ &\times \left[\int \delta(\cos \theta') \sum_{l=0}^{\infty} \rho_l(\cos \theta') d(\cos \theta') \right] \rho_l(\cos \theta) \times r_{<}^l \left(\frac{1}{r_{>}^{l+1}} - \frac{r_{>}^l}{b^{2l+1}} \right) \end{aligned}$$

جمله داخل کروشه، انتگرال از جمله‌ای شامل دلتای دیراک می‌باشد، بنابراین جمله داخل کروشه، برابر با $P_l(\circ)$ خواهد بود، بنابراین:

$$\Phi(x) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot 2\pi \cdot \frac{Q}{4\pi a^2} \cdot a^2 \left[\sum_{l=0}^{\infty} P_l(\circ) \right] r_{<}^l \left(\frac{1}{r_{>}^{l+1}} - \frac{r_{>}^l}{b^{2l+1}} \right) P_l(\cos\theta)$$

$$\Phi(x) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \sum_{l=0}^{\infty} P_l(\circ) r_{<}^l \left(\frac{1}{r_{>}^{l+1}} - \frac{r_{>}^l}{b^{2l+1}} \right) P_l(\cos\theta) \quad (\text{رابطه ۳-۱۳۰})$$

روابط ۳-۱۳۲، ۳-۱۳۳، ۳-۱۳۴ و ۳-۱۳۵ ص ۴۱ فصل سوم:

در این مسئله، ابتدا باید تابع چگالی بار - حجمی را پیدا کنیم. برای این کار، ابتدا به دنبال تابع دلتای دیراک می‌رویم. اگر کمی دقت کنیم، درمی‌یابیم که در زاویه‌های $\theta' = \pi$ و $\theta' = 0$ ، چگالی خطی بار وجود داشته و این چگالی بار، از $r = 0$ تا $r = b$ ادامه دارد. بنابراین در بخش تابع دلتای دیراک، قسمت زاویه‌ای، دو بخش دارد و بنابراین:

$$\rho(x') = \frac{A}{r'^2} [\delta(\cos\theta' - \cos 0) + \delta(\cos\theta' - \cos\pi)]$$

$$\Rightarrow Q = \int \rho(x') d^3x' = \int \frac{A}{r'^2} [\delta(\cos\theta' - 1) + \delta(\cos\theta' + 1)] r'^2 dr' d(\cos\theta') d\varphi'$$

$$Q = A \int_{-b}^b dr' \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_0^\pi [\delta(\cos\theta' - 1) + \delta(\cos\theta' + 1)] d(\cos\theta')$$

$$Q = A \left[\int_0^b dr' + \int_{-b}^0 dr' \right] 2\pi \int_0^\pi [\delta(\cos\theta' - 1) + \delta(\cos\theta' + 1)] d(\cos\theta')$$

$$Q = A(b+b)2\pi(1) \Rightarrow A = \frac{Q}{2b} \cdot \frac{1}{2\pi}$$

$$\Rightarrow \rho(x') = \frac{Q}{2b} \frac{1}{2\pi r'^2} [\delta(\cos\theta' - 1) + \delta(\cos\theta' + 1)] \quad (\text{رابطه ۳-۱۳۲})$$

برای ادامه کار، ابتدا رابطه ۱-۴۴ را در نظر می‌گیریم:

$$\Phi(x) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \rho(x') G(x, x') d^3x' - \frac{1}{4\pi} \oint \Phi(x') \frac{\partial G}{\partial n'} da'$$

و چون کره، زمین شده می‌باشد، جمله دوم صفر می‌شود، بنابراین:

$$\Phi(x) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \rho(x') G(x, x') d^3x'$$

با جاگذاری تابع $\rho(x')$ در رابطه‌ی اخیر، خواهیم داشت:

$$\Phi(x) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{Q}{2b} \frac{1}{2\pi r'^2} [\delta(\cos\theta' - 1) + \delta(\cos\theta' + 1)] G(x, x') d^3x' \quad (I)$$

در این جا نیز با قرار دادن $a \rightarrow 0$ و نیز، به دلیل تقارن سمتی با قرار دادن $m = 0$ خواهیم داشت:

$$G(x, x') = 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \frac{Y_{l0}^*(\theta', \varphi') Y_{l0}(\theta, \varphi)}{2l+1} r_{<}^l \left(\frac{1}{r_{>}^{l+1}} - \frac{r_{>}^l}{b^{2l+1}} \right)$$

و همچنین دو رابطه زیر را قرار می‌دهیم که:

$$Y_{l0}^*(\theta', \varphi') = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} P_l(\cos \theta') \quad \& \quad Y_{l0}(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} P_l(\cos \theta)$$

بنابراین

$$G(x, x') = 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} P_l(\cos \theta) \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} P_l(\cos \theta')}{2l+1} r_{<}^l \left(\frac{1}{r_{>}^{l+1}} - \frac{r_{>}^l}{b^{2l+1}} \right)$$

$$G(x, x') = \sum_{l=0}^{\infty} P_l(\cos \theta') P_l(\cos \theta) r_{<}^l \left(\frac{1}{r_{>}^{l+1}} - \frac{r_{>}^l}{b^{2l+1}} \right) \quad (II)$$

حال، رابطه (II) را در رابطه (I) جاگذاری می‌کنیم. بنابراین خواهیم داشت:

$$\Phi(x) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi [\delta(\cos \theta' - 1) + \delta(\cos \theta' + 1)] \sum_{l=0}^{\infty} P_l(\cos \theta') d(\cos \theta')$$

$$\times \int_0^b \frac{Q}{2b} \frac{1}{2\pi r'^2} P_l(\cos \theta) r_{<}^l \left(\frac{1}{r_{>}^{l+1}} - \frac{r_{>}^l}{b^{2l+1}} \right) r'^2 dr'$$

$$\Phi(x) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{2b} \cdot (2\pi) \sum_{l=0}^{\infty} \left[\int \delta(\cos \theta' - 1) P_l(\cos \theta') d(\cos \theta') \right.$$

$$\left. + \int \delta(\cos \theta' + 1) P_l(\cos \theta') d(\cos \theta') \right]$$

$$\times \int_0^b \frac{1}{2\pi r'^2} r'^2 dr' P_l(\cos \theta) r_{<}^l \left(\frac{1}{r_{>}^{l+1}} - \frac{r_{>}^l}{b^{2l+1}} \right)$$

دو جمله داخل آکولاد، به ترتیب $\rho_l(+1)$ و $\rho_l(-1)$ می‌باشند، بنابراین:

$$\Rightarrow \Phi(x) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 b} \sum_{l=0}^{\infty} [P_l(1) + P_l(-1)] \int_0^b r_{<}^l \left(\frac{1}{r_{>}^{l+1}} - \frac{r_{>}^l}{b^{2l+1}} \right) dr'$$

(رابطه‌ی ۳-۱۳۳)

برای حل انتگرال، جمله داخل انتگرال را در نظر می‌گیریم:

$$\lambda = \int_0^b r_{<}^l \left(\frac{1}{r_{>}^{l+1}} - \frac{r_{>}^l}{b^{2l+1}} \right) dr' = \int_0^r + \int_r^b$$

در این انتگرال، در فواصل $0 < r' < r$ و $r < r' < b$ داریم:

$$\begin{cases} 0 < r' < r \rightarrow r_{<} = r', & r_{>} = r \\ r < r' < b \rightarrow r_{<} = r, & r_{>} = r' \end{cases}$$

$$\lambda = \int_0^r r'^l \left(\frac{1}{r'^{l+1}} - \frac{r^l}{b^{2l+1}} \right) dr' + \int_r^b r^l \left(\frac{1}{r'^{l+1}} - \frac{r'^l}{b^{2l+1}} \right) dr'$$

$$\lambda = \left[\frac{r'^{l+1}}{l+1} \right]_0^r \left(\frac{1}{r'^{l+1}} - \frac{r^l}{b^{2l+1}} \right) + r^l \left[\left(\frac{-1}{lr'^l} - \frac{r'^{l+1}}{(l+1)b^{2l+1}} \right) \right]_r^b$$

$$\lambda = \frac{r^{l+1}}{l+1} \left(\frac{1}{r^{l+1}} - \frac{r^l}{b^{2l+1}} \right) - r^l \left[\frac{1}{lb^l} + \frac{b^{l+1}}{(l+1)b^{2l+1}} - \frac{1}{lr^l} - \frac{r^{l+1}}{(l+1)b^{2l+1}} \right]$$

$$\lambda = \frac{1}{l+1} - \frac{r^{l+1}r^l}{(l+1)b^{2l+1}} - \frac{r^l}{lb^l} - \frac{r^l}{(l+1)b^l} + \frac{1}{l} + \frac{r^l r^{l+1}}{(l+1)b^{2l+1}}$$

$$\lambda = \left(\frac{1}{l+1} + \frac{1}{l} \right) - \frac{1}{l} \left(\frac{r}{b} \right)^l - \frac{1}{l+1} \left(\frac{r}{b} \right)^l$$

$$\lambda = \frac{2l+1}{l(l+1)} - \left(\frac{r}{b} \right)^l \left[\frac{1}{l} + \frac{1}{l+1} \right] = \frac{2l+1}{l(l+1)} - \left(\frac{r}{b} \right)^l \left(\frac{2l+1}{l(l+1)} \right)$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{2l+1}{l(l+1)} \left[1 - \left(\frac{r}{b} \right)^l \right]$$

به‌ازای $l = 0$ ، نتیجه فوق نامعین است، زیرا تابع پتانسیل دارای تکینگی است. برای رفع ابهام، به رابطه اصلی λ برمی‌گردیم:

$$\lambda = \int_0^b r'^l \left(\frac{1}{r'_{>}^{l+1}} - \frac{r^l}{b^{2l+1}} \right) dr'$$

$$\lambda = \int_0^r r'^l \left(\frac{1}{r'^{l+1}} - \frac{r^l}{b^{2l+1}} \right) dr' + \int_r^b r^l \left(\frac{1}{r'^{l+1}} - \frac{r'^l}{b^{2l+1}} \right) dr'$$

حال در رابطه‌ی اخیر، $l = 0$ را قرار می‌دهیم:

$$\lambda = \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{b} \right) \int_0^r dr' + \int_r^b \left(\frac{1}{r'} - \frac{1}{b} \right) dr'$$

$$\lambda = \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{b} \right) r + \left[\ln r' - \frac{r'}{b} \right]_r^b$$

$$= \left[\frac{r}{r} - \frac{r}{b} \right] + [\ln b - \ln r] - \left[\frac{b}{b} - \frac{r}{b} \right] = \ln \frac{b}{r}$$

$$\therefore \Rightarrow \lambda = \ln \frac{b}{r}$$

$(x, x_r, x_r = x, y, z)$

$$\nabla\psi = e_x \frac{\partial\psi}{\partial x} + e_r \frac{\partial\psi}{\partial x_r} + e_r \frac{\partial\psi}{\partial x_r}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_r}{\partial x_r} + \frac{\partial A_r}{\partial x_r}$$

$$\nabla \times \mathbf{A} = e_x \left(\frac{\partial A_r}{\partial x_r} - \frac{\partial A_r}{\partial x_r} \right) + e_r \left(\frac{\partial A_x}{\partial x_r} - \frac{\partial A_r}{\partial x} \right) + e_r \left(\frac{\partial A_r}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial x_r} \right)$$

$$\nabla^r \psi = \frac{\partial^r \psi}{\partial x_r^r} + \frac{\partial^r \psi}{\partial x_r^r} + \frac{\partial^r \psi}{\partial x_r^r}$$

(ρ, ϕ, z)

$$\nabla\psi = e_x \frac{\partial\psi}{\partial\rho} + e_r \frac{1}{\rho} \frac{\partial\psi}{\partial\phi} + e_r \frac{\partial\psi}{\partial z}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial\rho} (\rho A_x) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_r}{\partial\phi} + \frac{\partial A_r}{\partial z}$$

$$\nabla \times \mathbf{A} = e_x \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial A_r}{\partial\phi} - \frac{\partial A_r}{\partial z} \right) + e_r \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_r}{\partial\rho} \right) + e_r \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial}{\partial\rho} (\rho A_r) - \frac{\partial A_x}{\partial\phi} \right)$$

$$\nabla^r \psi = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial\rho} \left(\rho \frac{\partial\psi}{\partial\rho} \right) + \frac{1}{\rho^r} \frac{\partial^r \psi}{\partial\phi^r} + \frac{\partial^r \psi}{\partial z^r}$$

(r, θ, ϕ)

$$\nabla\psi = e_x \frac{\partial\psi}{\partial r} + e_r \frac{1}{r} \frac{\partial\psi}{\partial\theta} + e_r \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial\psi}{\partial\phi}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{r^r} \frac{\partial}{\partial r} (r^r A_x) + \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} (\sin\theta A_r) + \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial A_r}{\partial\phi}$$

$$\nabla \times \mathbf{A} = e_x \frac{1}{r \sin\theta} \left[\frac{\partial}{\partial\theta} (\sin\theta A_r) - \frac{\partial A_r}{\partial\phi} \right]$$

$$+ e_r \left[\frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial A_x}{\partial\phi} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_r) \right] + e_r \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r A_r) - \frac{\partial A_x}{\partial\theta} \right]$$

$$\nabla^r \psi = \frac{1}{r^r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^r \frac{\partial\psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^r \sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \left(\sin\theta \frac{\partial\psi}{\partial\theta} \right) + \frac{1}{r^r \sin^r \theta} \frac{\partial^r \psi}{\partial\phi^r}$$

$$\left[\text{Note that } \frac{1}{r^r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^r \frac{\partial\psi}{\partial r} \right) \equiv \frac{1}{r} \frac{\partial^r}{\partial r^r} (r\psi). \right]$$

در حال انتشار

- ۱- الکترو دینامیک کلاسیک جان دیوید جکسون (پکتوریال با ویراستاری جدید) منتشر شد
- ۲- حل الکترو دینامیک کلاسیک جان دیوید جکسون (کتاب حاضر)
- ۳- حل مبانی نظریه الکترومغناطیس میلفورد ویرایش جدید (منتشر شد)
- ۴- ترجمه مبانی نظریه الکترومغناطیس ریتمس و میلفورد (رنگی و پکتوریال) در حال انتشار
- ۵- ترجمه جلد سوم مبانی فیزیک ۲۰۰۸ (الکتروسیته) رنگی منتشر شد
- ۶- حل جلد سوم مبانی فیزیک ۲۰۰۸ (الکتروسیته) رنگی منتشر شد
- ۷- ترجمه مبانی فیزیک جلد اول (رنگی) منتشر شد
- ۸- حل مبانی فیزیک جلد اول (رنگی) منتشر شد
- ۹- نمایش هیجان انگیز فیزیک (وابسته به مبانی ۲۰۰۸ و کتاب مورد امتحان در مسابقه بزرگ سراسری مفاهیم بنیادی فیزیک) منتشر شد

الکترو دینامیک کلاسیک

جان. دیوید. جکسون
دانشگاه برکلی، کالیفرنیا
ویرایش سوم (۱۹۹۸)

جلد دوم

مترجمان و مؤلفان:

ق.ع. مقدم

ش. اکانی

ویراستار: هایک فولتوفچیان