

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

فصل اول - بخش دوم

آنالیز بردار

Vector Analysis

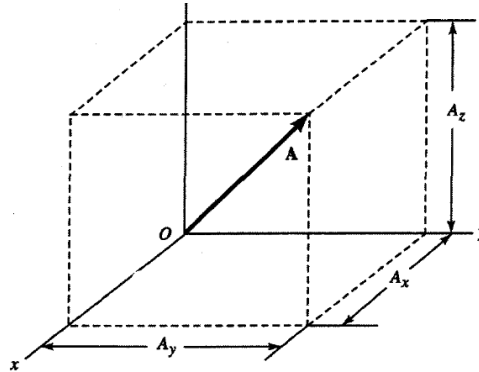
### ۳.۱ بردارها

حرکت سیستمهای دینامیکی نوعاً برحسب دو نوع کمیت اساسی، کمیت‌های عددی یا اسکالر و کمیت‌های برداری یا بردارها، توصیف می‌شود. کمیت عددی یا اسکالر عبارت است از کمیتی فیزیکی که فقط بزرگی دارد، مانند جرم هر جسم که به‌طور کامل با یک تک‌عدد برحسب یکاهای مناسب بیان می‌شود. مقدار این کمیت از هر دستگاه مختصات انتخابی برای توصیف حرکت سیستم، مستقل است. نمونه‌های کمیت‌های عددی که با آنها آشنایییم، عبارت‌اند از: چگالی، حجم، دما، و انرژی. از لحاظ ریاضی، کمیت‌های عددی را اعداد حقیقی تلقی می‌کنند. تمام قواعد معمولی جبر، یعنی جمع، تفریق، ضرب، و تقسیم و مانند آنها بر این کمیتها حاکم‌اند.

بردار هم بزرگی و هم جهت دارد، مانند تغییر مکان از یک نقطه فضا به نقطه دیگر. بردار، برخلاف کمیت عددی یا اسکالر، مستلزم مجموعه‌ای از اعداد است تا به‌طور کامل مشخص شود. مقادیر آن اعداد، عموماً، به دستگاه مختصات بستگی دارند. علاوه بر تغییر مکان در فضا، مثالهای دیگر بردارها عبارت‌اند از سرعت، شتاب، و نیرو. از لحاظ ریاضی، بردارها بنا بر قاعده جمع متوازی‌الاضلاع، که به‌زودی درباره آن بحث خواهیم کرد، با یکدیگر ترکیب می‌شوند.<sup>۱</sup> مفهوم هر بردار مفروض  $A$  با بزرگی و راستایش نسبت به دستگاه مرجع انتخابی مشخص می‌شود.

بردار را می‌توان با مجموعه مؤلفه‌هایش، یا تصاویرش بر محورهای مختصات، نیز مشخص کرد.

$$\mathbf{A} = (A_x, A_y, A_z)$$



اگر بردار  $\mathbf{A}$  نمایانگر تغییر مکان از

نقطه  $P_1(x_1, y_1, z_1)$  به نقطه  $P_2(x_2, y_2, z_2)$  باشد، در این صورت، سه مؤلفه آن عبارت‌اند از

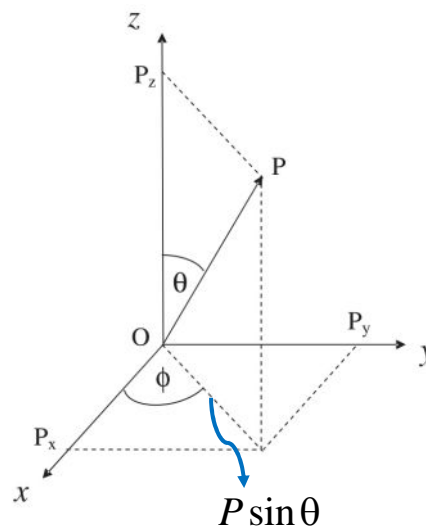
$$A_x = x_2 - x_1, A_y = y_2 - y_1, A_z = z_2 - z_1$$

Projecting the components:

$$\underline{\mathbf{p}} = (p_x, p_y, p_z)$$

- ▶ x-component  
 $p_x = |\underline{\mathbf{p}}| \sin(\theta) \cos(\phi)$
- ▶ y-component  
 $p_y = |\underline{\mathbf{p}}| \sin(\theta) \sin(\phi)$
- ▶ z-component  
 $p_z = |\underline{\mathbf{p}}| \cos(\theta)$
- ▶ Magnitude  $|\underline{\mathbf{p}}| = \sqrt{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}$
- ▶ Direction  $\tan(\phi) = (p_y/p_x)$   
 $\cos(\theta) = (p_z/|\underline{\mathbf{p}}|)$

نمایش بردار در دستگاه مختصات کروی

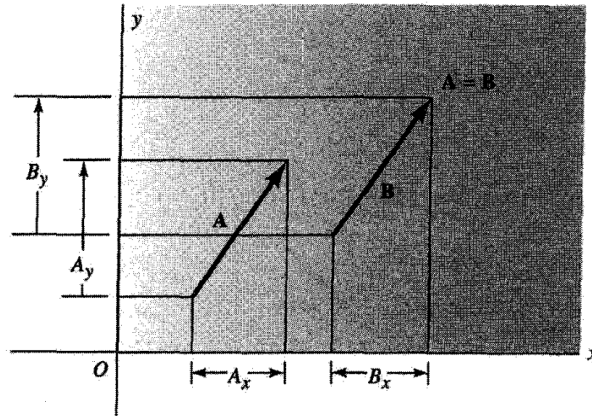


## I. تساوی بردارها

$$\mathbf{A} = \mathbf{B}$$

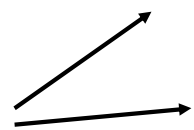
$$(A_x, A_y, A_z) = (B_x, B_y, B_z)$$

$$A_x = B_x \quad A_y = B_y \quad A_z = B_z$$

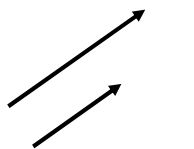


یعنی، دو بردار مساوی‌اند، اگر و فقط اگر، مؤلفه‌های آنها به‌ترتیب با هم مساوی باشند. به تعبیر هندسی، بردارهای مساوی با هم موازی‌اند و طولهای یکسانی دارند، ولی ضرورتاً مکان آنها یکی نیست. در شکل ۲.۳.۱، بردارهای مساوی را مشاهده می‌کنید که گرچه مساوی‌اند، از لحاظ

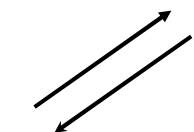
دو بردار یکسان هستند هر گاه هر سه ویژگی آنها یکسان باشد:



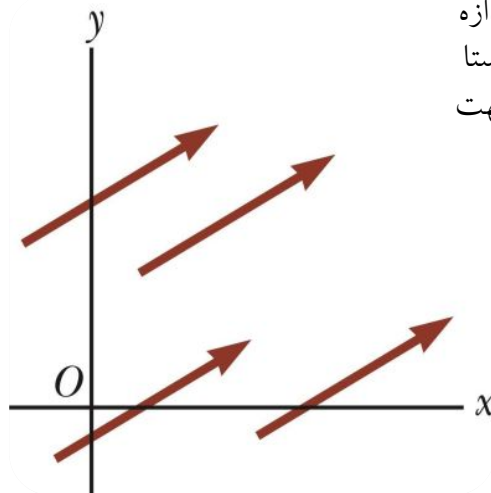
$$\vec{a} \neq \vec{b}$$



$$\vec{a} \neq \vec{b}$$



$$\vec{a} \neq \vec{b}$$



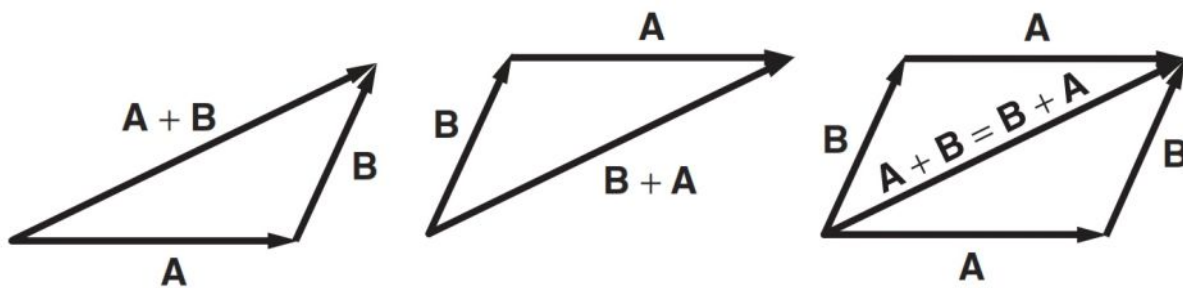
- هم اندازه
- هم راستا
- هم جهت

## II. جمع برداری

جمع دو بردار به کمک معادله زیر تعریف می شود:

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = (A_x, A_y, A_z) + (B_x, B_y, B_z) = (A_x + B_x, A_y + B_y, A_z + B_z) \quad (3.3.1)$$

مجموع دو بردار عبارت است از برداری که مؤلفه هایش مجموع مؤلفه های آن بردارها باشد. نمایش هندسی جمع برداری دو بردار ناموازی ضلع سوم یک مثلث را تشکیل می دهد که دو ضلع دیگرش بردارهای یادشده باشند. جمع برداری را در شکل ۳.۳.۱ مشاهده می کنید. این مجموع نیز مطابق



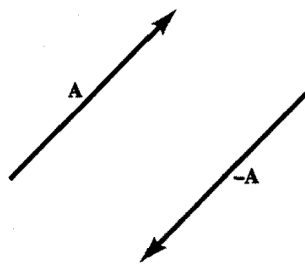
شکل به کمک قاعده متوازی الاضلاع به دست می آید. به هر حال، جمع برداری طبق معادله بالا تعریف می شود، حتی اگر بردارها نقطه مشترکی نداشته باشند.

**III. ضرب بردار در اسکالر**

اگر  $c$  کمیتی اسکالر و  $\mathbf{A}$  بردار باشد، آنگاه

$$c\mathbf{A} = c(A_x, A_y, A_z) = (cA_x, cA_y, cA_z) = \mathbf{A}c \quad (4.3.1)$$

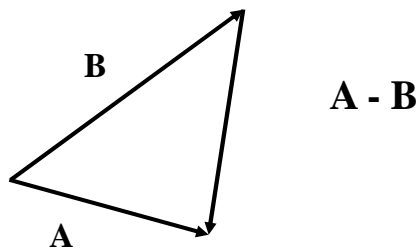
حاصلضرب  $c\mathbf{A}$  برداری است با مؤلفه‌های  $c$  برابر مؤلفه‌های بردار  $\mathbf{A}$ . به تعبیر هندسی، بردار  $c\mathbf{A}$  با  $\mathbf{A}$  موازی و طولش  $c$  برابر طول  $\mathbf{A}$  است. وقتی  $c = -1$ ، بردار  $-\mathbf{A}$ ، مطابق شکل ۴.۳.۱، برداری خواهد بود که جهتش عکس جهت  $\mathbf{A}$  است.

**IV. تفریق برداری**

بنابر تعریف، تفریق عبارت است از

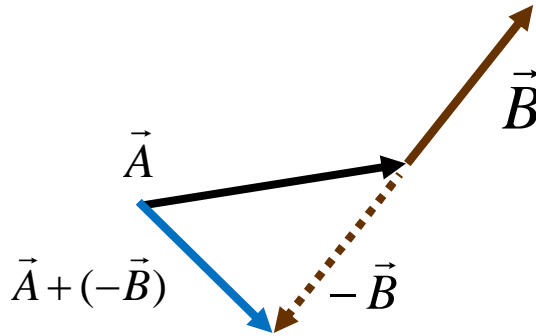
$$\mathbf{A} - \mathbf{B} = \mathbf{A} + (-1)\mathbf{B} = (A_x - B_x, A_y - B_y, A_z - B_z) \quad (5.3.1)$$

یعنی، تفریق بردار مفروض  $\mathbf{B}$  از بردار  $\mathbf{A}$ ، با جمع کردن  $-\mathbf{B}$  و  $\mathbf{A}$  هم‌ارز است.



### تفریق بردارها (در نمایش هندسی)

الف) دو بردار پشت سرهم باشند

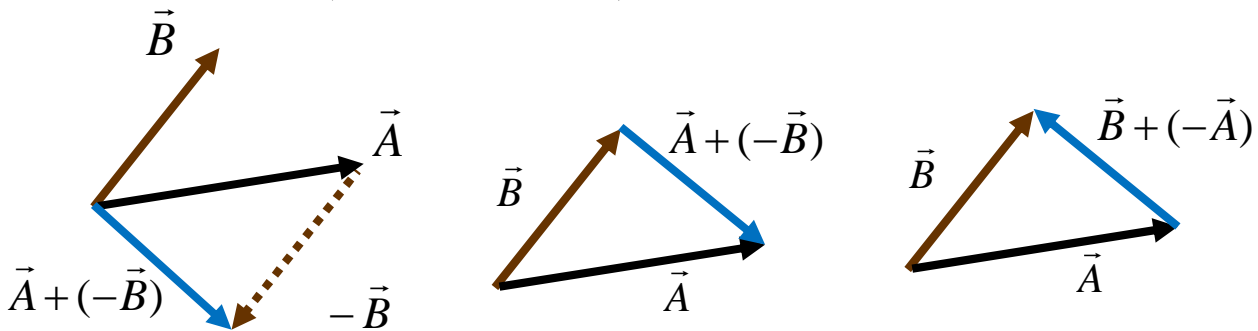


$$\vec{A} - \vec{B} = \vec{A} + (-\vec{B})$$

منفی بردار B

ب) دو بردار از یک نقطه شروع شده باشند

برداری حاصل تفریق برداری است که از انتهای بردار دوم به انتهای بردار اول رسم می شود



$$\vec{B} - \vec{A} = -(\vec{A} - \vec{B})$$

V. بردار صفر

بردار  $\mathbf{O} = [0, 0, 0]$  را بردار صفر می‌نامند. جهت بردار صفر تعریف نشده (نامشخص) است.

بنابراین  $\mathbf{A} - \mathbf{A} = \mathbf{O}$ ، چون بردار صفر با یک صفر نشان داده می‌شود، برای اینکه اشتباهی صورت نگیرد، از این پس نمادگذاری  $\mathbf{O} = 0$  را به کار خواهیم برد.

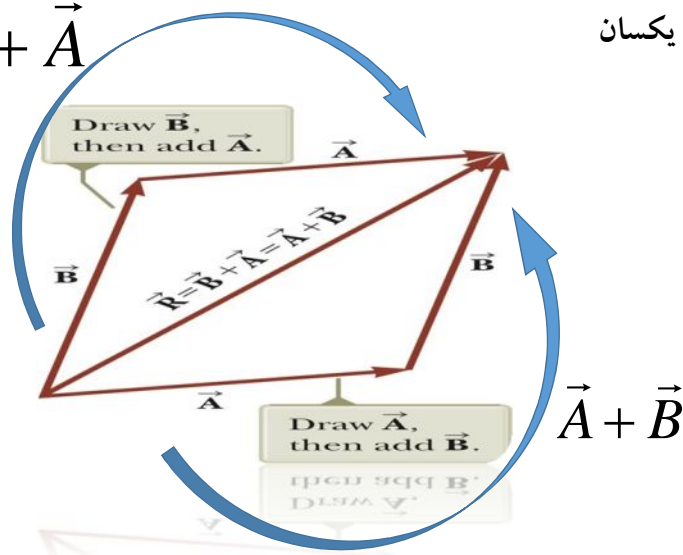
### خاصیت جابجایی *Commutativity*

این قانون در مورد بردارها صادق است، یعنی

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A} \quad (6.3.1)$$

زیرا  $A_x + B_x = B_x + A_x$ ، و این رابطه به همین ترتیب برای مؤلفه‌های  $y$  و  $z$  برقرار است.

$$\vec{B} + \vec{A}$$



ج) جمع دو بردار با نقطه ابتدایی یکسان  
(روش متوازی الاضلاع)

$$\vec{A} + \vec{B}$$

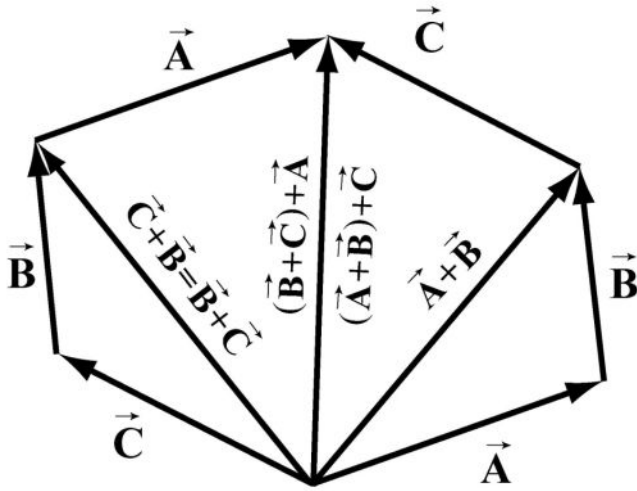
خاصیت جابجایی  $\vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A}$

د) خاصیت شرکت پذیری *Associativity*

قانون شرکت پذیری نیز درباره بردارها صادق است، زیرا

$$\begin{aligned} \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) &= (A_x + (B_x + C_x), A_y + (B_y + C_y), A_z + (B_z + C_z)) \\ &= ((A_x + B_x) + C_x, (A_y + B_y) + C_y, (A_z + B_z) + C_z) \quad (7.3.1) \\ &= (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} \end{aligned}$$

هنگام اضافه کردن سه بردار یا بیشتر، جمع آنها مستقل از شیوه ای است که بردارها گروه بندی می شوند.



$$\vec{A} + (\vec{B} + \vec{C}) = (\vec{A} + \vec{B}) + \vec{C}$$

### VIII. قانون توزیع پذیری

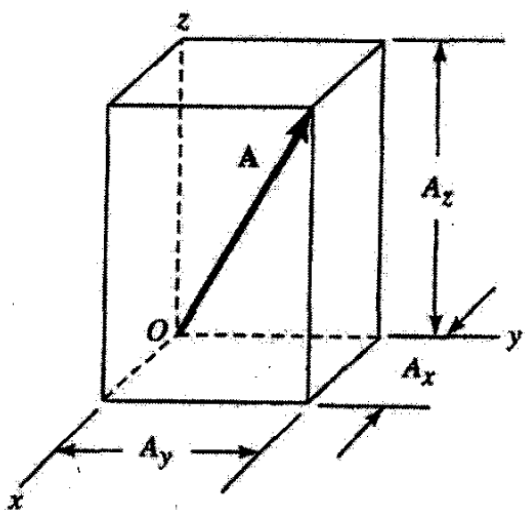
قانون توزیع پذیری در مورد ضرب بردار در اسکالر، صدق می کند. زیرا با استفاده از بندهای (II) و (III)،

$$\begin{aligned} c(\mathbf{A} + \mathbf{B}) &= c(A_x + B_x, A_y + B_y, A_z + B_z) \\ &= (c(A_x + B_x), c(A_y + B_y), c(A_z + B_z)) \\ &= (cA_x + cB_x, cA_y + cB_y, cA_z + cB_z) \\ &= c\mathbf{A} + c\mathbf{B} \end{aligned} \tag{۸.۳.۱}$$

## IX بزرگی بردار

بزرگی بردار  $\mathbf{A}$ ، که با نماد  $|\mathbf{A}|$  یا با  $A$  نمایش داده می‌شود، بنابر تعریف، عبارت است از ریشه دوم مجموع مربعات مؤلفه‌های آن، یعنی

$$A = |\mathbf{A}| = (A_x^2 + A_y^2 + A_z^2)^{\frac{1}{2}} \quad (9.3.1)$$



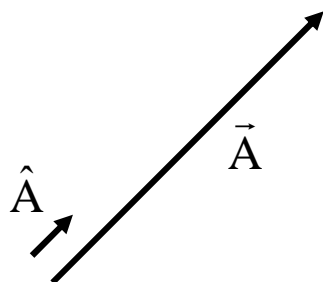
## X بردارهای مختصات یکه

برداری یکه برداری است به بزرگی واحد. بردارهای یکه را غالباً با نماد  $\mathbf{e}$ ، سرواژه آلمانی *Einheit*

دارای طول واحد

هم راستا با بردار اصلی

از کنار هم چیدن بردارهای یکه بردار اصلی ساخته می‌شود



$$\vec{\mathbf{A}} = |\mathbf{A}| \hat{\mathbf{A}}$$

(به معنی مقیاس) نشان می‌دهند. سه بردار یکهٔ مشروح زیر،

$$\mathbf{e}_x = (1, 0, 0) \quad \mathbf{e}_y = (0, 1, 0) \quad \mathbf{e}_z = (0, 0, 1) \quad (10.3.1)$$

را بردارهای مختصات یکه یا بردارهای پایه می‌نامند. هر بردار را می‌توان برحسب بردارهای پایه، به صورت جمع برداری مؤلفه‌ها، به قرار زیر بیان کرد:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= (A_x, A_y, A_z) = (A_x, 0, 0) + (0, A_y, 0) + (0, 0, A_z) \\ &= A_x(1, 0, 0) + A_y(0, 1, 0) + A_z(0, 0, 1) \\ &= \mathbf{e}_x A_x + \mathbf{e}_y A_y + \mathbf{e}_z A_z \end{aligned} \quad (11.3.1)$$

نمادگذاری بردارهای یکهٔ دکارتی که با حروف  $i, j, k$  و  $k$  نموده می‌شوند، کاربرد گسترده‌ای یافته‌اند:

$$\mathbf{i} = \mathbf{e}_x \quad \mathbf{j} = \mathbf{e}_y \quad \mathbf{k} = \mathbf{e}_z \quad (12.3.1)$$

از این پس معمولاً این نمادگذاری را به کار خواهیم برد.

جهت بردارهای مختصات یکهٔ دکارتی، مطابق شکل ۶.۳.۱، به کمک محورهای مختصات تعریف می‌شوند. این بردارها بسته به نوع دستگاه مختصاتی که به کار می‌رود، مجموعهٔ سه‌تایی راستگرد یا چپگردی را تشکیل می‌دهند؛ معمولاً دستگاههای مختصات راستگرد به کار می‌روند.

### مثال ۳.۳.۱

هلیکوپتری  $1000\text{ m}$  به طور قائم به بالا، بعد  $500\text{ m}$  به طور افقی به شرق، سپس  $1000\text{ m}$  به طور افقی به شمال پرواز می‌کند. این هلیکوپتر از هلیکوپتر دومی که از همان نقطه حرکت خود را شروع کرده  $200\text{ m}$  به بالا،  $100\text{ m}$  به غرب، و  $500\text{ m}$  به شمال می‌رود، چقدر فاصله دارد؟

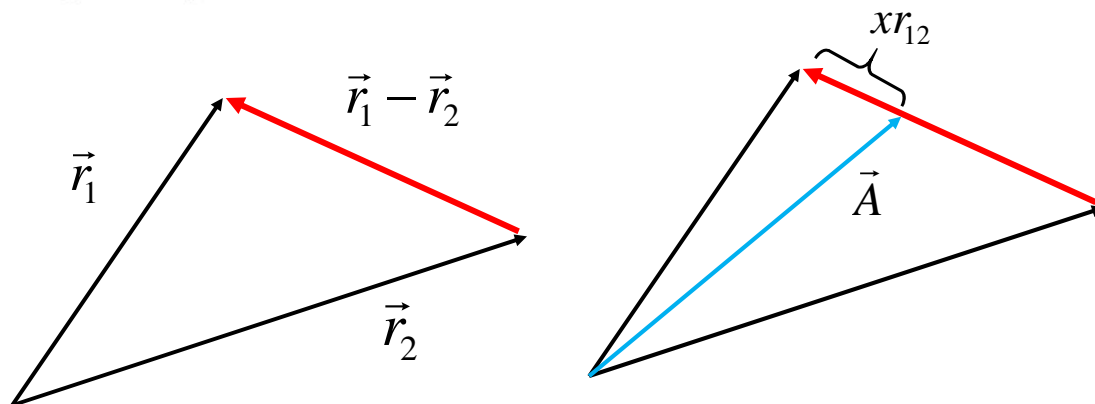
حل:

با انتخاب جهت‌های «بالا»، «شرق»، و «شمال» به عنوان جهت‌های اصلی موضع نهایی هلیکوپتر اول از لحاظ برداری به صورت  $\mathbf{A} = (1000, 500, 1000)$  و دومی به صورت  $\mathbf{B} = (200, -100, 500)$  برحسب متر، بیان می‌شود. از این رو، فاصله بین مواضع نهایی از عبارت زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} |\mathbf{A} - \mathbf{B}| &= |((1000 - 200), (500 + 100), (1000 - 500))| \text{m} \\ &= (1000^2 + 600^2 + 500^2)^{\frac{1}{2}} \text{m} = 787,4 \text{m} \end{aligned}$$

تکلیف ۱:

Consider two points located at  $\vec{r}_1$  and  $\vec{r}_2$ , separated by distance  $r_{12} = |\vec{r}_1 - \vec{r}_2|$ . Find a vector  $\vec{A}$  from the origin to the point on the line between  $\vec{r}_1$  and  $\vec{r}_2$  at a distance  $xr_{12}$  from the point at  $\vec{r}_1$ , where  $x$  is some number.



## ۴.۱ ضرب داخلی (اسکالر)

در مورد دو بردار مفروض  $\mathbf{A}$  و  $\mathbf{B}$  حاصلضرب «داخلی» یا ضرب «نقطه‌ای»،  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$  عبارت از کمیتی اسکالر خواهد بود که، بنابر تعریف، از این قرار است:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z \quad (۱.۴.۱)$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$$

تعویض پذیر

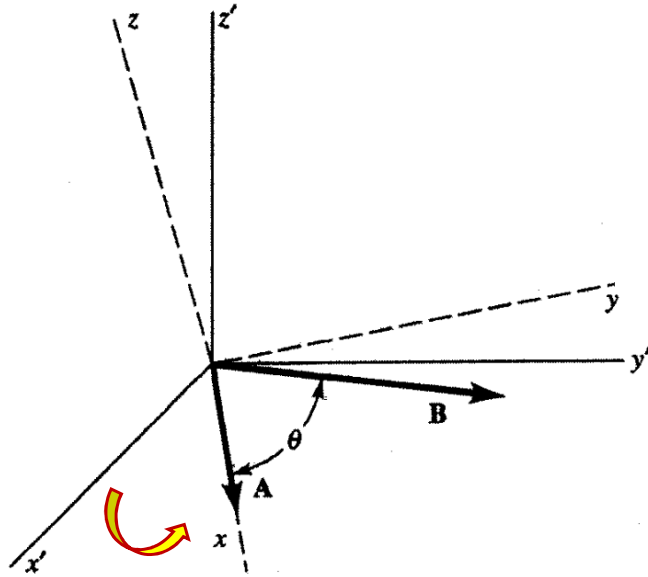
$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{C}$$

توزیع پذیری

### $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ ، تعبیر هندسی

دو بردار سود جست. مثلاً بنا بر شکل ۱.۴.۱، دو بردار  $\mathbf{A}$  و  $\mathbf{B}$  را زاویه  $\theta$  از هم جدا کرده، همراه با دستگاه مختصات  $x', y', z'$  که به طور دلخواه مبنای آن بردارها انتخاب شده است. ولی چون کمیت  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$  اسکالر است، مقدار آن مستقل از انتخاب مختصات است. می‌توانیم، بدون از دست دادن عمومیت، دستگاه  $x', y', z'$  را با چرخش به دستگاه مختصات  $x, y, z$  تبدیل کنیم، به طوری که محور  $x$  در امتداد بردار  $\mathbf{A}$  قرار گرفته و محور  $z$  بر صفحهٔ مشخص شده به وسیلهٔ دو بردار عمود باشد. این دستگاه مختصات نیز در شکل ۱.۴.۱ نمایش داده شده است. مؤلفه‌های بردارها و حاصلضرب نقطه‌ای آنها خیلی ساده‌تر از آن هستند که در این دستگاه محاسبه شوند. بردار  $\mathbf{A}$  به صورت  $(A, 0, 0)$  و بردار  $\mathbf{B}$  به صورت  $(B \cos \theta, B \sin \theta, 0)$  یا  $(B \cos \theta, B \sin \theta, 0)$  بیان می‌شود. بنابراین،

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_x B_x = A(B \cos \theta) = |\mathbf{A}||\mathbf{B}| \cos \theta \quad (۵.۴.۱)$$



شکل ۱.۴.۱ محاسبه ضرب نقطه‌ای اسکالر بین دو بردار.

$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A$  times the projection of  $\mathbf{B}$  on  $\mathbf{A}$   
 $= B$  times the projection of  $\mathbf{A}$  on  $\mathbf{B}$

$$\cos \theta = \frac{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}}{|\mathbf{A}||\mathbf{B}|} = \frac{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}}{AB} \quad (۶.۴.۱)$$

(توجه: اگر  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$  صفر باشد و  $\mathbf{A}$  و  $\mathbf{B}$  هیچ‌کدام صفر نباشند، در این صورت  $\cos \theta$  صفر است و  $\mathbf{A}$  بر  $\mathbf{B}$  عمود است.)

$$\vec{A} \begin{vmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{vmatrix}, \vec{B} \begin{vmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \end{vmatrix} \rightarrow \cos \theta = \frac{-12}{\sqrt{14} \times \sqrt{13}}$$

مجذور بزرگی بردار  $\mathbf{A}$  با ضرب نقطه‌ای بردار  $\mathbf{A}$  در خودش به دست می‌آید

$$A^2 = |\mathbf{A}|^2 = \mathbf{A} \cdot \mathbf{A} \quad (7.4.1)$$

می‌توان نشان داد که:

$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = 1$$

$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{i} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = 0$$

بیان هر بردار به صورت حاصلضرب بزرگی آن در بردار یکه: تصویر

$$\mathbf{A} = \mathbf{i}A_x + \mathbf{j}A_y + \mathbf{k}A_z \quad (9.4.1)$$

$$\mathbf{A} = A \left( \mathbf{i} \frac{A_x}{A} + \mathbf{j} \frac{A_y}{A} + \mathbf{k} \frac{A_z}{A} \right) \quad (10.4.1)$$

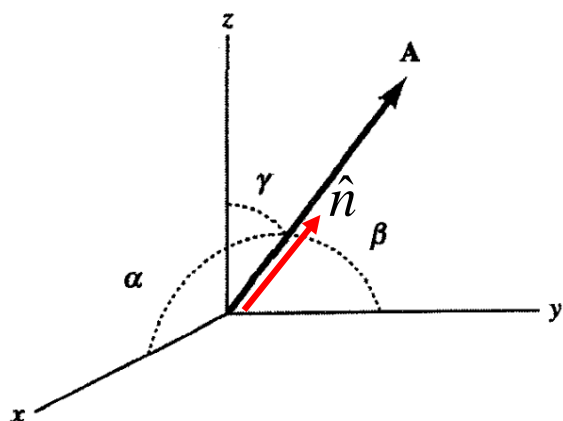
حال  $A_x/A = \cos \alpha$ ،  $A_y/A = \cos \beta$  و  $A_z/A = \cos \gamma$  کسینوسهای هادی بردار  $\mathbf{A}$ ، و  $\alpha$ ،  $\beta$  و  $\gamma$  زاویه‌های هادی‌اند. بنابراین، می‌توانیم بنویسیم:

$$\mathbf{A} = A(\mathbf{i} \cos \alpha + \mathbf{j} \cos \beta + \mathbf{k} \cos \gamma) = A(\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma) \quad (الف 11.4.1)$$

$$\mathbf{A} = A(\mathbf{i} \cos \alpha + \mathbf{j} \cos \beta + \mathbf{k} \cos \gamma) = A(\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$$

$$\mathbf{A} = An$$

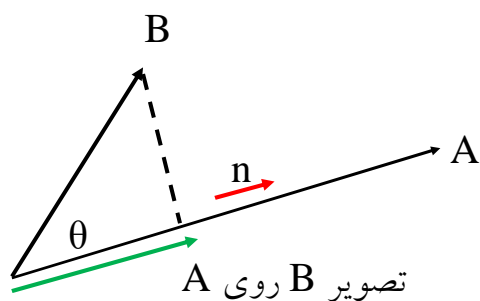
که  $\mathbf{n}$  یک بردار یکه با مؤلفه‌های  $\cos \alpha$ ،  $\cos \beta$  و  $\cos \gamma$  است



$\mathbf{B}$ ، را در نظر بگیرید. واضح است که، تصویر  $\mathbf{B}$  روی  $\mathbf{A}$  عبارت است از

$$B \cos \theta = \frac{\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}}{A} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} \quad (۱۲.۴.۱)$$

که  $\theta$  زاویه بین  $\mathbf{A}$  و  $\mathbf{B}$  است.

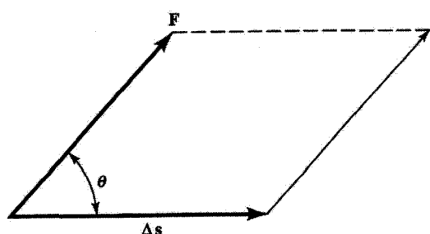


### مثال ۱.۴.۱ مؤلفه بردار: کار

به عنوان مثالی از ضرب نقطه‌ای، فرض می‌شود که، مطابق شکل ۳.۴.۱، تغییر مکان خطی جسمی تحت تأثیر نیروی ثابت  $\Delta s$  باشد. بنابر تعریف، کاری که این نیرو انجام می‌دهد،  $\Delta W$ ، عبارت است از حاصلضرب مؤلفه نیروی  $F$  در جهت  $\Delta s$ ، در بزرگی تغییر مکان  $\Delta s$ ، یعنی

$$\Delta W = (F \cos \theta) \Delta s$$

$\theta$  زاویه بین  $F$  و  $\Delta s$  است. اما عبارت سمت راست همان ضرب نقطه‌ای  $F$  و  $\Delta s$  به شمار می‌آید، یعنی:



$$\Delta W = \mathbf{F} \cdot \Delta \mathbf{s}$$

### مثال ۲.۴.۱ قانون کسینوسها

مطابق شکل ۴.۴.۱، مثلی با اضلاع  $A$ ،  $B$ ، و  $C$  را در نظر بگیرید. در این صورت  $C = A + B$ . ضرب نقطه‌ای بردار  $C$  در خودش را به دست آورید:

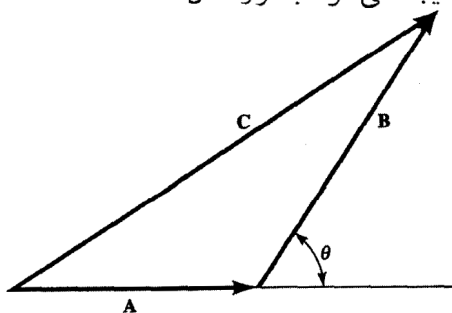
$$\begin{aligned} C \cdot C &= (A + B) \cdot (A + B) \\ &= A \cdot A + 2A \cdot B + B \cdot B \end{aligned}$$

مرحله دوم از کاربرد قواعد پیش‌گفته در معادلات (۲.۴.۱) و (۳.۴.۱) نتیجه می‌شود. با قرار دادن

$AB \cos \theta$  به جای  $A \cdot B$  می‌رسیم به

$$C^2 = A^2 + 2AB \cos \theta + B^2$$

که همان قانون آشنای کسینوسهاست.

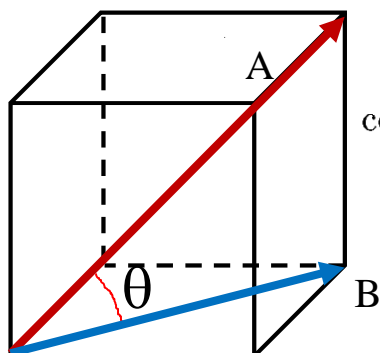


## مثال ۳.۴.۱

کسینوس زاویه بین قطر مکعب و قطر یکی از وجوه مجاور آن را پیدا کنید.

حل:

می‌توانیم دو قطر یادشده را با بردارهای  $\mathbf{A} = (1, 1, 1)$  و  $\mathbf{B} = (1, 1, 0)$  نمایش دهیم. بنابراین، از معادلات ۱.۴.۱ و ۶.۴.۱ خواهیم داشت:



$$\cos \theta = \frac{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}}{AB} = \frac{1+1+0}{\sqrt{3}\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{2}{3}} = 0.8165$$

## ۵.۱ ضرب برداری

حاصلضرب برداری یا حاصلضرب خارجی دو بردار مفروض  $\mathbf{A}$  و  $\mathbf{B}$ ،  $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ ، بنا بر تعریف، عبارت است از برداری که مؤلفه‌هایش از رابطه زیر به دست می‌آیند:

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = (A_y B_z - A_z B_y, A_z B_x - A_x B_z, A_x B_y - A_y B_x) \quad (1.5.1)$$

می‌توان نشان داد که قواعد زیر در ضرب برداری برقرارند:

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = -\mathbf{B} \times \mathbf{A} \quad (2.5.1)$$

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \times \mathbf{B} + \mathbf{A} \times \mathbf{C} \quad (3.5.1)$$

$$n(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = (n\mathbf{A}) \times \mathbf{B} = \mathbf{A} \times (n\mathbf{B}) \quad (4.5.1)$$

بنابر تعریف بردارهای مختصات یکه (بخش ۳.۱)، نتیجه می‌گیریم:

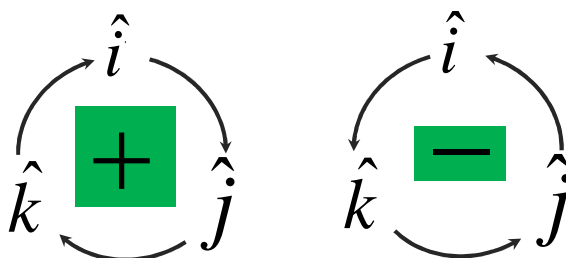
$$\hat{i} \times \hat{i} = \hat{j} \times \hat{j} = \hat{k} \times \hat{k} = \mathbf{0}$$

$$\hat{j} \times \hat{k} = \hat{i} = -\hat{k} \times \hat{j}$$

$$\hat{i} \times \hat{j} = \hat{k} = -\hat{j} \times \hat{i}$$

$$\hat{k} \times \hat{i} = \hat{j} = -\hat{i} \times \hat{k}$$

(۵.۵.۱)



$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \hat{i}(A_y B_z - A_z B_y) + \hat{j}(A_z B_x - A_x B_z) + \hat{k}(A_x B_y - A_y B_x)$$

ضرب برداری کمک مناسبی به ما می‌کند. از خواص دترمینانها فوراً می‌توان پی برد که اگر  $\mathbf{A}$  موازی  $\mathbf{B}$  باشد، یعنی  $\mathbf{A} = c\mathbf{B}$ ، آنگاه دو سطر پایین دترمینان با هم متناسب‌اند و از این رو دترمینان صفر است. بنابراین، ضرب برداری دو بردار موازی صفر است.

$$|\mathbf{A} \times \mathbf{B}| = AB(\sqrt{1 - \cos^2 \theta})^{\frac{1}{2}} = AB \sin \theta$$

$$|\mathbf{A} \times \mathbf{B}|^2 = A^2 B^2 - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^2 \quad \star$$

$$|\mathbf{A} \times \mathbf{B}|^2 = (A_y B_z - A_z B_y)^2 + (A_z B_x - A_x B_z)^2 + (A_x B_y - A_y B_x)^2 \quad (10.5.1)$$

می‌توان این عبارت را تبدیل کرد به

$$|\mathbf{A} \times \mathbf{B}|^2 = (A_x^2 + A_y^2 + A_z^2)(B_x^2 + B_y^2 + B_z^2) - (A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z)^2 \quad (11.5.1)$$

### تعبیر هندسی ضرب برداری

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B}$$

برای ارائهٔ تعبیر هندسی ضرب برداری، مشاهده می‌کنیم که بردار  $\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B}$  بر  $\mathbf{A}$  و  $\mathbf{B}$  عمود است، زیرا:

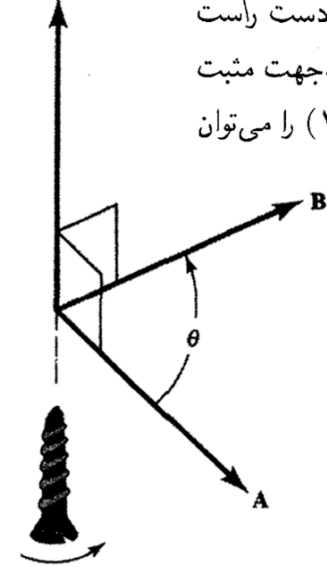
$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{C} = A_x C_x + A_y C_y + A_z C_z \quad (14.5.1)$$

$$= A_x(A_y B_z - A_z B_y) + A_y(A_z B_x - A_x B_z) + A_z(A_x B_y - A_y B_x) = 0$$

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{C} = 0$$

بردار  $\mathbf{C}$  بر صفحه گذرنده از دو بردار  $\mathbf{A}$  و  $\mathbf{B}$  عمود است

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = (AB \sin \theta)\mathbf{n}$$

 $\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B}$ 


که  $\mathbf{n}$  برداری یکه عمود بر صفحه دو بردار  $\mathbf{A}$  و  $\mathbf{B}$  است. راستای  $\mathbf{n}$  را از قاعده دست راست تعیین می‌کنیم. یعنی، جهت پیشروی یک پیچ راستگرد است که از جهت مثبت  $\mathbf{A}$  به جهت مثبت  $\mathbf{B}$  با طی کوچکترین زاویه بین آنها می‌چرخد، مطابق شکل ۱.۵.۱، معادله (۱۵.۵.۱) را می‌توان تعریف دیگر ضرب برداری در دستگاه مختصات راستگرد دانست.

### مثال ۲.۵.۱

بردار یکه عمود بر صفحه شامل دو بردار  $\mathbf{A}$  و  $\mathbf{B}$  یادشده در بالا را بیابید.

حل:

$$\begin{aligned} \mathbf{n} &= \frac{\mathbf{A} \times \mathbf{B}}{|\mathbf{A} \times \mathbf{B}|} = \frac{\mathbf{i} - 5\mathbf{j} - 3\mathbf{k}}{[1^2 + 5^2 + 3^2]^{\frac{1}{2}}} \\ &= \frac{\mathbf{i}}{\sqrt{35}} - \frac{5\mathbf{j}}{\sqrt{35}} - \frac{3\mathbf{k}}{\sqrt{35}} \end{aligned}$$

**مثال**

با محاسبه مستقیم نشان دهید که  $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$  عبارت است از برداری که راستای آن بر  $\mathbf{A}$  و  $\mathbf{B}$  عمود و بزرگیش  $AB \sin \theta$  باشد.

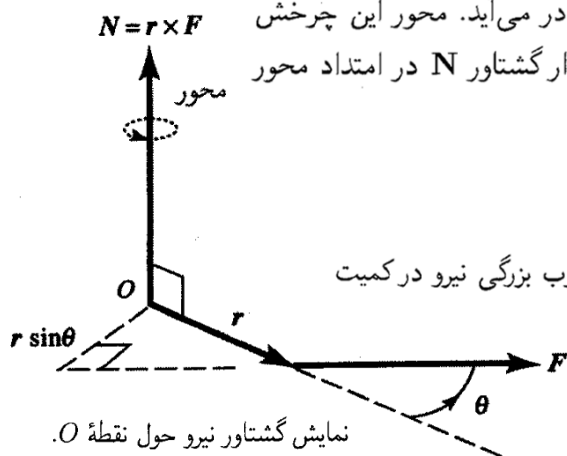
با بهره‌گیری از چارچوب مرجع مورد بحث برای شکل (۱.۴.۱) که در آن بردارهای  $\mathbf{A}$  و  $\mathbf{B}$  در صفحه  $x, y$  تعریف می‌شوند،  $\mathbf{A}$  به صورت  $(A, 0, 0)$  و  $\mathbf{B}$  به صورت  $(B \cos \theta, B \sin \theta, 0)$  بیان می‌شود. در این صورت

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ A & 0 & 0 \\ B \cos \theta & B \sin \theta & 0 \end{vmatrix} = kAB \sin \theta$$

**مثالی از ضرب برداری: گشتاور نیرو**

$$\mathbf{N} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$$

به این ترتیب، گشتاور هر نیرو حول یک نقطه عبارت است از کمیتی برداری با بزرگی و جهت. اگر یک تک‌نیرو بر نقطه  $P$  واقع بر جسمی وارد آید، و آن جسم ابتدا در حال سکون باشد و بتواند حول نقطه ثابت  $O$  مثل لولا بگردد، در این صورت جسم به چرخش در می‌آید. محور این چرخش بر نیروی  $\mathbf{F}$  و نیز بر خط  $OP$  عمود است. از این رو راستای بردار گشتاور  $\mathbf{N}$  در امتداد محور چرخش واقع است.



$$|\mathbf{N}| = |\mathbf{r} \times \mathbf{F}| = rF \sin \theta$$

که در آن  $\theta$  زاویه بین  $\mathbf{r}$  و  $\mathbf{F}$  است. بنابراین،  $|\mathbf{N}|$  را می‌توان حاصلضرب بزرگی نیرو در کمیت  $r \sin \theta$ ، یعنی فاصله عمودی خط عمل نیرو تا نقطه  $O$ ، دانست.

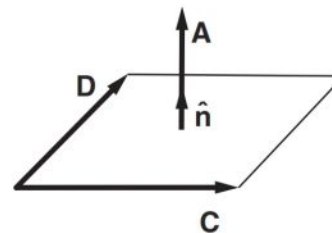
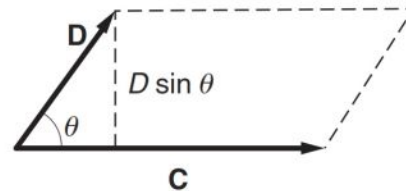
وقتی چند نیرو بر نقاط مختلف یک جسم وارد آیند، گشتاورها با هم جمع برداری می شوند.  
قانون توزیع پذیری ضرب برداری است.

شرط تعادل چرخشی آن است که جمع برداری تمام گشتاورها صفر باشد

$$\sum_i (r_i \times \mathbf{F}_i) = \sum_i \mathbf{N}_i = \mathbf{0}$$

### Area as a Vector

We can use the cross product to describe an area. Usually one thinks of area in terms of magnitude only. However, many applications in physics require that we also specify the orientation of the area. For example, if we wish to calculate the rate at which water in a stream flows through a wire loop of given area, it obviously makes a difference whether the plane of the loop is perpendicular or parallel to the flow. (If parallel, the flow through the loop is zero.) Here is how the vector product accomplishes this:



$$\begin{aligned} A &= \text{base} \times \text{height} \\ &= CD \sin \theta \\ &= |\mathbf{C} \times \mathbf{D}|. \end{aligned}$$

## ۷.۱ ضربهای سه‌گانه

ضربهای سه‌گانه بردارها به خصوص در مطالعه دستگاههای مختصات چرخان و چرخشهای نام صلب که در فصلهای بعد به آنها خواهیم پرداخت، مفیدند. یکی از کاربردهای هندسی آن

الف) حاصل این ضرب کمیتی اسکالر (یا عددی)  $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C}$$

الف) ضرب برداری سه تایی

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$$

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})$$

قاعده "bac منهای cab" به خاطر سپرد.

**مثال** نشان دهید که ضرب برداری سه‌گانه شرکت‌پذیر نیست.

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = -\mathbf{c} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = -\mathbf{a}(\mathbf{c} \cdot \mathbf{b}) + \mathbf{b}(\mathbf{c} \cdot \mathbf{a})$$

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) - (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \mathbf{a}(\mathbf{c} \cdot \mathbf{b}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$$

## ۹.۱ مشتق بردار

بردار  $\mathbf{A}$  را در نظر بگیرید که مؤلفه‌های آن تابعی از یک تک متغیر  $u$  هستند  
مشتق هر بردار عبارت است از برداری که مؤلفه‌های دکارتی آن مشتق‌های معمولی

$$\mathbf{A}(u) = \mathbf{i}A_x(u) + \mathbf{j}A_y(u) + \mathbf{k}A_z(u)$$

$$\frac{d\mathbf{A}}{du} = \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{A}}{\Delta u} = \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \left( \mathbf{i} \frac{\Delta A_x}{\Delta u} + \mathbf{j} \frac{\Delta A_y}{\Delta u} + \mathbf{k} \frac{\Delta A_z}{\Delta u} \right)$$

$$\Delta A_x = A_x(u + \Delta u) - A_x(u)$$

$$\frac{d\mathbf{A}}{du} = \mathbf{i} \frac{dA_x}{du} + \mathbf{j} \frac{dA_y}{du} + \mathbf{k} \frac{dA_z}{du}$$

$$\frac{d}{du}(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \frac{d\mathbf{A}}{du} + \frac{d\mathbf{B}}{du}$$

$$\frac{d(n\mathbf{A})}{du} = \frac{dn}{du} \mathbf{A} + n \frac{d\mathbf{A}}{du}$$

$$\frac{d(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})}{du} = \frac{d\mathbf{A}}{du} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \frac{d\mathbf{B}}{du}$$

$$\frac{d(\mathbf{A} \times \mathbf{B})}{du} = \frac{d\mathbf{A}}{du} \times \mathbf{B} + \mathbf{A} \times \frac{d\mathbf{B}}{du}$$

باید ترتیب جملات در مشتق حاصلضرب برداری رعایت شود