جلسه سوم

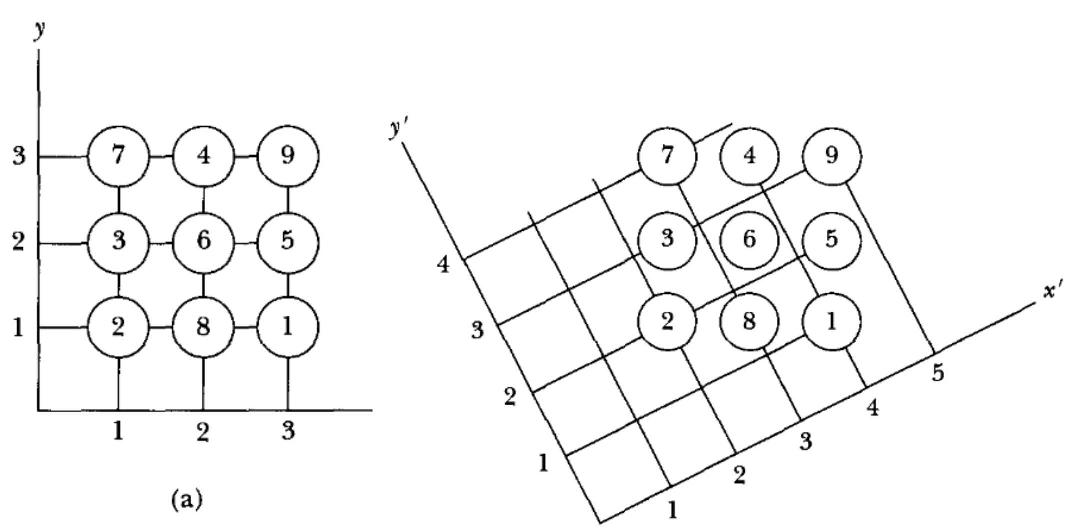
تغییر دستگاه مختصات:

ماتریس تبدیل

کمیت های فیزیکی و ارتباط آن با دستگاه انتخابی

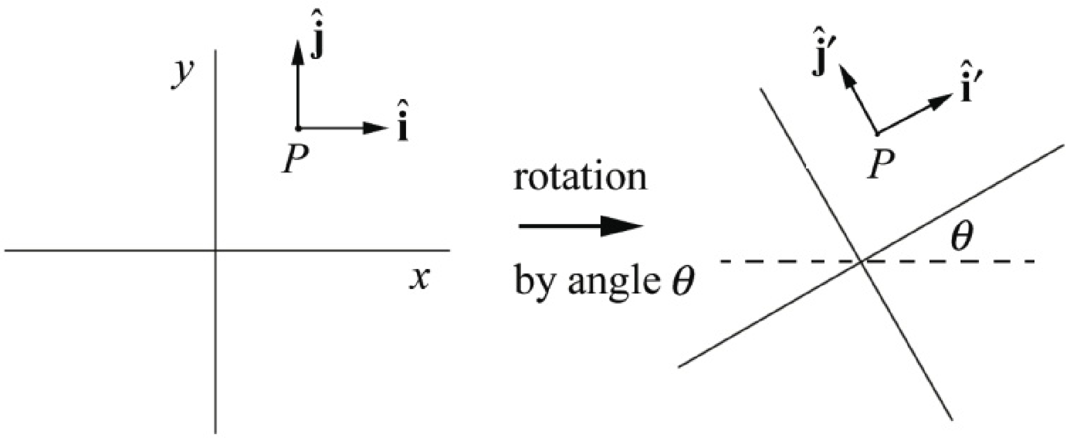
کمیت اسکالر: کمیت ناوردا
با تغییر دستگاه مختصات تغییری نمی کند

کمیت برداری: کمیت وردا
با تغییر دستگاه مختصات تغییری می کند



(a) (b)

مثال) چرخش دستگاه



$$\hat{i}'_x = \left|\hat{\mathbf{i}}'\right|\cos\theta = \cos\theta \text{ and } \hat{i}'_y = \left|\hat{\mathbf{i}}'\right|\sin\theta = \sin\theta .$$

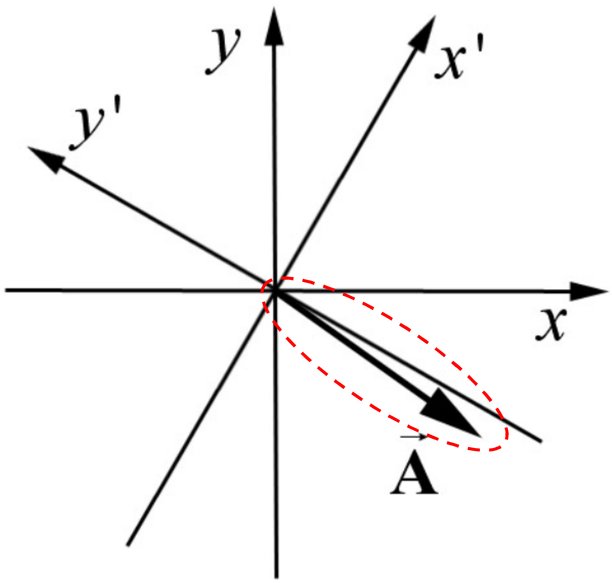
$$\hat{\mathbf{i}}' = \hat{i}'_x\hat{\mathbf{i}} + \hat{i}'_y\hat{\mathbf{j}} = \cos\theta\hat{\mathbf{i}} + \sin\theta\hat{\mathbf{j}} .$$

$$\hat{j}'_x = -\left|\hat{\mathbf{j}}'\right|\sin\theta = -\sin\theta \text{ and } \hat{j}'_y = \left|\hat{\mathbf{j}}'\right|\cos\theta = \cos\theta .$$

$$\hat{\mathbf{j}}' = \hat{j}'_x\hat{\mathbf{i}} + \hat{j}'_y\hat{\mathbf{j}} = -\sin\theta\hat{\mathbf{i}} + \cos\theta\hat{\mathbf{j}} .$$

مثال) نمایش بردار در دستگاه مختصات چرخیده

چرخش دستگاه حول محور z



respect to the *xy* -coordinate system

$$\vec{\mathbf{A}} = A_x \hat{\mathbf{i}} + A_y \hat{\mathbf{j}} .$$

$$\hat{\mathbf{i}}' = \hat{i}'_x \hat{\mathbf{i}} + \hat{i}'_y \hat{\mathbf{j}} = \cos\theta \hat{\mathbf{i}} + \sin\theta \hat{\mathbf{j}} .$$

$$\hat{\mathbf{j}}' = \hat{j}'_x \hat{\mathbf{i}} + \hat{j}'_y \hat{\mathbf{j}} = -\sin\theta \hat{\mathbf{i}} + \cos\theta \hat{\mathbf{j}} .$$

$$\sin\theta \hat{\mathbf{i}}' = \sin\theta \cos\theta \hat{\mathbf{i}} + \sin^2\theta \hat{\mathbf{j}}$$

$$\cos\theta \hat{\mathbf{j}}' = -\sin\theta \cos\theta \hat{\mathbf{i}} + \cos^2\theta \hat{\mathbf{j}} .$$

جمع دو رابطه بالا

$$\hat{\mathbf{j}} = \sin\theta \hat{\mathbf{i}}' + \cos\theta \hat{\mathbf{j}}' .$$

$$\hat{\mathbf{i}}' = \hat{i}'_x\hat{\mathbf{i}} + \hat{i}'_y\hat{\mathbf{j}} = \cos\theta\hat{\mathbf{i}} + \sin\theta\hat{\mathbf{j}}.$$
$$\hat{\mathbf{j}}' = \hat{j}'_x\hat{\mathbf{i}} + \hat{j}'_y\hat{\mathbf{j}} = -\sin\theta\hat{\mathbf{i}} + \cos\theta\hat{\mathbf{j}}.$$

$$\cos\theta\hat{\mathbf{i}}' = \cos^2\theta\hat{\mathbf{i}} + \cos\theta\sin\theta\hat{\mathbf{j}}$$
$$-\sin\theta\hat{\mathbf{j}}' = \sin^2\theta\hat{\mathbf{i}} - \sin\theta\cos\theta\hat{\mathbf{j}}.$$

جمع دو رابطه بالا

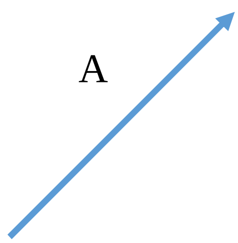
$$\hat{\mathbf{i}} = \cos\theta\hat{\mathbf{i}}' - \sin\theta\hat{\mathbf{j}}'$$

$$\vec{\mathbf{A}} = A_x\hat{\mathbf{i}} + A_y\hat{\mathbf{j}}. \longleftrightarrow \vec{\mathbf{A}} = A_{x'}\hat{\mathbf{i}} + A_{y'}\hat{\mathbf{j}},$$

$$\vec{\mathbf{A}} = A_x\hat{\mathbf{i}} + A_y\hat{\mathbf{j}} = A_x(\cos\theta\hat{\mathbf{i}}' - \sin\theta\hat{\mathbf{j}}') + A_y(\sin\theta\hat{\mathbf{i}}' + \cos\theta\hat{\mathbf{j}}')$$
$$= (A_x\cos\theta + A_y\sin\theta)\hat{\mathbf{i}}' + (-A_x\sin\theta + A_y\cos\theta)\hat{\mathbf{j}}'$$
$$= A_{x'}\hat{\mathbf{i}} + A_{y'}\hat{\mathbf{j}},$$

$$A_{x'} = A_x\cos\theta + A_y\sin\theta$$
$$A_{y'} = -A_x\sin\theta + A_y\cos\theta.$$

نمایش یک بردار در دستگاههای مختصات مختلف نمایش



بردار $\mathbf{A}$ نسبت به مجموعهٔ سه‌تایی $\mathbf{ijk}$

$$\mathbf{A} = \mathbf{i}A_x + \mathbf{j}A_y + \mathbf{k}A_z$$

بردار $\mathbf{A}$ نسبت به مجموعهٔ سه‌تایی جدید $\mathbf{i}'\mathbf{j}'\mathbf{k}'$

$$\mathbf{A} = \mathbf{i}'A_{x'} + \mathbf{j}'A_{y'} + \mathbf{k}'A_{z'}$$

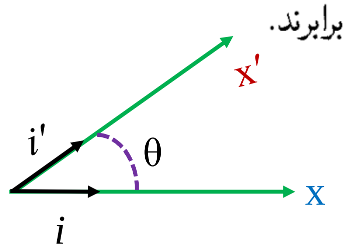
حاصلضرب نقطه‌ای $\mathbf{A}\cdot\mathbf{i}'$ دقیقاً عبارت است از $A_{x'}$، یعنی تصویر $\mathbf{A}$ بر بردار یکهٔ $\mathbf{i}'$

$x'y'z'$ xyz

$$A.i' = A.i'$$
$$A.j' = A.j'$$
$$A.k' = A.k'$$

$$A_{x'} = \mathbf{A}\cdot\mathbf{i}' = (\mathbf{i}\cdot\mathbf{i}')A_x + (\mathbf{j}\cdot\mathbf{i}')A_y + (\mathbf{k}\cdot\mathbf{i}')A_z$$
$$A_{y'} = \mathbf{A}\cdot\mathbf{j}' = (\mathbf{i}\cdot\mathbf{j}')A_x + (\mathbf{j}\cdot\mathbf{j}')A_y + (\mathbf{k}\cdot\mathbf{j}')A_z$$
$$A_{z'} = \mathbf{A}\cdot\mathbf{k}' = (\mathbf{i}\cdot\mathbf{k}')A_x + (\mathbf{j}\cdot\mathbf{k}')A_y + (\mathbf{k}\cdot\mathbf{k}')A_z$$

حاصلضربهای نقطه‌ای $(\mathbf{i}\cdot\mathbf{i}')$، $(\mathbf{i}\cdot\mathbf{j}')$، و غیره، ضرایب تبدیل نامیده می‌شوند. اینها با کسینوسهای هادی محورهای مختصات پریم‌دار نسبت به محورهای مختصات بدون پریم برابرند.



مؤلفه‌های بدون پریم عبارت‌اند از:

xyz	$x'y'z'$

$$A.i = A.i$$
$$A.j = A.j$$
$$A.k = A.k$$

$$A_x = \mathbf{A}\cdot\mathbf{i} = (\mathbf{i}'\cdot\mathbf{i})A_{x'} + (\mathbf{j}'\cdot\mathbf{i})A_{y'} + (\mathbf{k}'\cdot\mathbf{i})A_{z'}$$
$$A_y = \mathbf{A}\cdot\mathbf{j} = (\mathbf{i}'\cdot\mathbf{j})A_{x'} + (\mathbf{j}'\cdot\mathbf{j})A_{y'} + (\mathbf{k}'\cdot\mathbf{j})A_{z'}$$
$$A_z = \mathbf{A}\cdot\mathbf{k} = (\mathbf{i}'\cdot\mathbf{k})A_{x'} + (\mathbf{j}'\cdot\mathbf{k})A_{y'} + (\mathbf{k}'\cdot\mathbf{k})A_{z'}$$

قواعد تبدیل که در این دو مجموعه معادلات

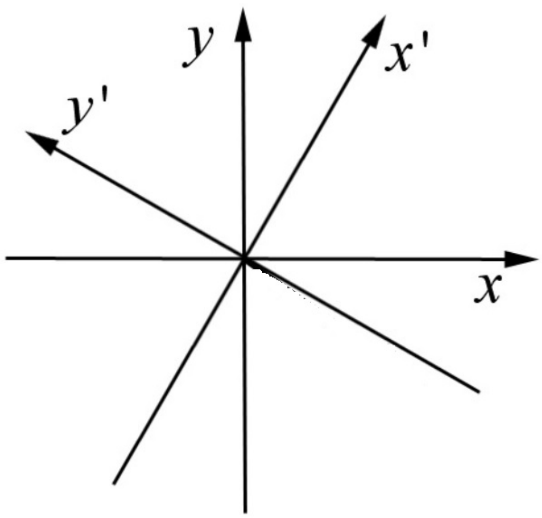
بیان شده‌اند، خاصیت کلی و عمومی بردارها محسوب می‌شوند. در واقع، اینها شیوهٔ دیگر تعریف بردار به‌شمار می‌آیند.[1]

معادلات تبدیل را می‌توان به‌صورت مناسبی به‌شکل ماتریس بیان کرد

$$\begin{pmatrix} A_{x'} \\ A_{y'} \\ A_{z'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{i}\cdot\mathbf{i}' & \mathbf{j}\cdot\mathbf{i}' & \mathbf{k}\cdot\mathbf{i}' \\ \mathbf{i}\cdot\mathbf{j}' & \mathbf{j}\cdot\mathbf{j}' & \mathbf{k}\cdot\mathbf{j}' \\ \mathbf{i}\cdot\mathbf{k}' & \mathbf{j}\cdot\mathbf{k}' & \mathbf{k}\cdot\mathbf{k}' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix}$$

ماتریس سه در سه در معادلهٔ (۵.۸.۱) ماتریس تبدیل نامیده می‌شود. از فواید نماد ماتریسی آن است که ضرب ماتریسی تبدیلات متوالی را به‌سادگی انجام می‌دهند.

مثال) چرخش دستگاه مختصات حول محور z به اندازه θ



$$i\,.\,i' = 1\times 1\times \cos\theta = \cos\theta$$

$$j\,.\,j' = 1\times 1\times \cos\theta = \cos\theta$$

$$i\,.\,j' = 1\times 1\times \cos(\frac{\pi}{2}+\theta) = -\sin\theta$$

$$j\,.\,i' = 1\times 1\times \cos(\frac{\pi}{2}-\theta) = \sin\theta$$

$$k.i = k.j = k.i' = k.\,j' = 0$$

$$k.k' = 1$$

$$M = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

مثال:

بررسی ماتریس چرخش دوتایی شامل ابتدا چرخش دستگاه مختصات xyz حول محور z به اندازه φ و سپس حول محور جدید y′ به اندازه θ

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix}}_{\text{چرخش حول محور } y' \text{ به اندازه } \theta}\underbrace{\begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{چرخش حول محور } z \text{ به اندازه } \phi}=\begin{pmatrix} \cos\theta\cos\phi & \cos\theta\sin\phi & -\sin\theta \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ \sin\theta\sin\phi & \sin\theta\sin\phi & \cos\theta \end{pmatrix}$$

ویژگی های ماتریس چرخش

۱- به‌طورکلی ضرب ماتریس تعویض‌ناپذیر است.

۲- اگر ترتیب چرخشها، و بنابراین ترتیب ضرب ماتریسی، وارونه شود، نتیجهٔ نهایی فرق کند.

۳- چرخشهای محدود از قانون جمع برداری پیروی نمی‌کنند

٤- اگر یک تک‌چرخش دارای راستا (محور) و بزرگی (زاویهٔ چرخش) باشد، سازگار است.

۵- چرخشهای بینهایت کوچک از قانون جمع برداری پیروی می‌کنند

مثال:

بردار $\mathbf{A} = ۳\mathbf{i} + ۲\mathbf{j} + \mathbf{k}$ را برحسب مجموعهٔ سه‌تایی $\mathbf{i}'\mathbf{j}'\mathbf{k}'$ بنویسید، در صورتی که محورهای $x'y'$ به‌اندازهٔ $۴۵°$ حول محور z بچرخند؛ مطابق شکل ۱.۸.۱، محورهای z و z' برهم منطبق‌اند.

با توجه به شکل، برای ضرایب تبدیل داریم: $\mathbf{i}\cdot\mathbf{i}' = \cos ۴۵°$ و الی آخر. بنابراین:

$$\begin{array}{lll} \mathbf{i}\cdot\mathbf{i}' = ۱/\sqrt{۲} & \mathbf{j}\cdot\mathbf{i}' = ۱/\sqrt{۲} & \mathbf{k}\cdot\mathbf{i}' = ۰ \\ \mathbf{i}\cdot\mathbf{j}' = -۱/\sqrt{۲} & \mathbf{j}\cdot\mathbf{j}' = ۱/\sqrt{۲} & \mathbf{k}\cdot\mathbf{j}' = ۰ \\ \mathbf{i}\cdot\mathbf{k}' = ۰ & \mathbf{j}\cdot\mathbf{k}' = ۰ & \mathbf{k}\cdot\mathbf{k}' = ۱ \end{array}$$

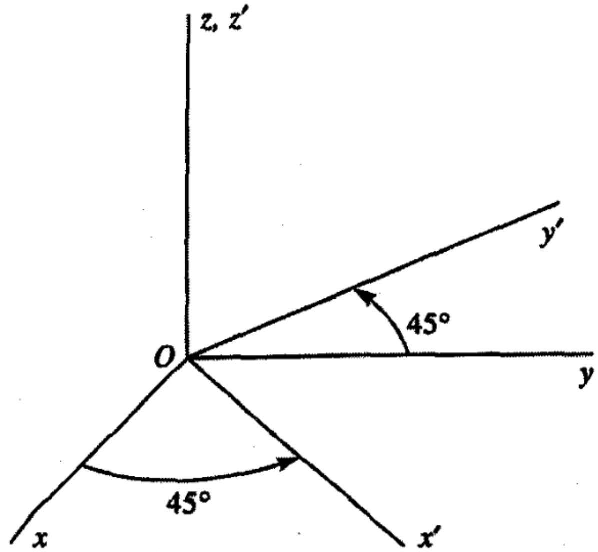
$$A_{x'y'z'} = M\ A_{xyz}$$

از اینجا، می‌رسیم به:

$$A_{x'} = \frac{۳}{\sqrt{۲}} + \frac{۲}{\sqrt{۲}} = \frac{۵}{\sqrt{۲}} \qquad A_{y'} = \frac{-۳}{\sqrt{۲}} + \frac{۲}{\sqrt{۲}} = \frac{-۱}{\sqrt{۲}} \qquad A_{z'} = ۱$$

از این‌رو، در دستگاه مختصات پریم‌دار، بردار $\mathbf{A}$ به‌صورت زیر در می‌آید

$$\mathbf{A} = \frac{۵}{\sqrt{۲}}\mathbf{i}' - \frac{۱}{\sqrt{۲}}\mathbf{j}' + \mathbf{k}'$$



شکل ۱.۸.۱ چرخش حول محور Z

۳.۸.۱ تبدیلات متعامد

چرخش دستگاه مختصات دکارتی مثالی از تبدیل متعامد است. در اینجا، نشان می‌دهیم که وقتی دستگاه مختصات دکارتی، که در آن مؤلفه‌ها بیان می‌شوند، به‌اندازهٔ زاویهٔ θ می‌چرخد و بعد دوباره برمی‌گردد مؤلفه‌های بردار چگونه تبدیل می‌شوند.

بررسی تحت مثال حرکت پرتابی

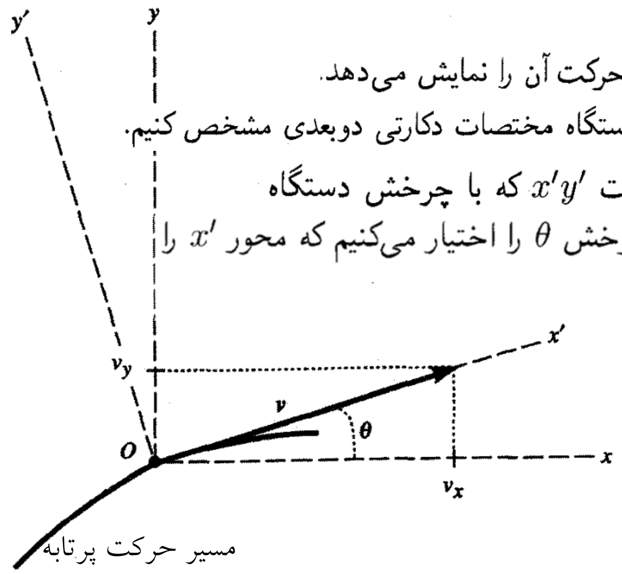
بردار سرعت در یک نقطه در دو دستگاه مختلف بررسی می شوند

فرض کنید سرعت، $\mathbf{v}$، یک پرتابه به جرم m را که در فضا روی مسیری سهمیوار حرکت می‌کند، مثالی از بردار یادشده در نظر بگیریم.[۱] در شکل ۲.۸.۱، مکان و سرعت پرتابه را در لحظهٔ زمانی t نشان می‌دهیم.

جهت $\mathbf{v}$ مماس بر مسیر پرتابه است و جهت لحظه‌ای حرکت آن را نمایش می‌دهد.

سرعت را برحسب مؤلفه‌هایش در امتداد محورهای x و y دستگاه مختصات دکارتی دوبعدی مشخص کنیم.

سرعت پرتابه را برحسب مؤلفهٔ آن در دستگاه مختصات $x'y'$ که با چرخش دستگاه xy به‌اندازهٔ θ به‌دست می‌آید، مشخص کنیم؛ زاویهٔ چرخش θ را اختیار می‌کنیم که محور x' را هم‌راستا با جهت بردار سرعت می‌نماید.

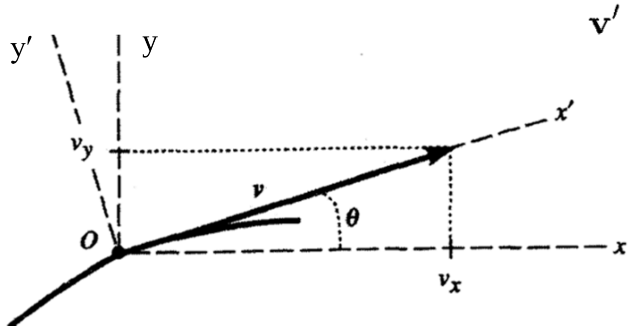


$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v\cos\theta \\ v\sin\theta \end{pmatrix}$$ سرعت در دستگاه xy

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} \mathbf{i}\cdot\mathbf{i}' & \mathbf{j}\cdot\mathbf{i}' \\ \mathbf{i}\cdot\mathbf{j}' & \mathbf{j}\cdot\mathbf{j}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{v}' = \mathbf{R}\mathbf{v}$$

$$\mathbf{v}' = \begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v\cos\theta \\ v\sin\theta \end{pmatrix}$$



$\mathbf{v}$ و $\mathbf{v}'$ هر دو یک بردار را نمایش می‌دهند

مجذور بزرگی بردار $\mathbf{v}$

$$(\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}) = \tilde{\mathbf{v}}\mathbf{v} = (v\cos\theta \; v\sin\theta)\begin{pmatrix} v\cos\theta \\ v\sin\theta \end{pmatrix} = v^{۲}\cos^{۲}\theta + v^{۲}\sin^{۲}\theta = v^{۲}$$

($\tilde{\mathbf{v}}$ ترانهاد بردار ستونی $\mathbf{v}$ است ــترانهاد $\tilde{\mathbf{A}}$ هر ماتریس $\mathbf{A}$ با تعویض ستونهای آن با سطرهایش به‌دست می‌آید.)

$$(\mathbf{v}'\cdot\mathbf{v}') = \tilde{\mathbf{v}}'\mathbf{v}' = (v \; ۰)\begin{pmatrix} v \\ ۰ \end{pmatrix} = v^{۲} + ۰^{۲} = v^{۲}$$

در هر یک از این حالتها، بزرگی بردار عبارت است از کمیت اسکالر v که مقدار آن از دستگاه مختصات اختیارشدهٔ ما مستقل است. همین مطلب دربارهٔ جرم پرتابه نیز صادق است. اگر جرمش در دستگاه مختصات xy یک کیلوگرم باشد، در دستگاه مختصات $x'y'$ هم یک کیلوگرم خواهد بود. کمیتهای اسکالر تحت چرخش دستگاه مختصات ناوردایند.

تبدیل وارونه با چرخش دستگاه $x'y'$ به‌اندازهٔ $-\theta$

$$\mathbf{R}(-\theta) = \begin{pmatrix} \cos(-\theta) & \sin(-\theta) \\ -\sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \equiv \tilde{\mathbf{R}}$$

$$\tilde{\mathbf{R}}\mathbf{v}' = \tilde{\mathbf{R}}\mathbf{R}\mathbf{v} = \mathbf{v}$$،

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v \\ ۰ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v\cos\theta \\ v\sin\theta \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v\cos\theta \\ v\sin\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v\cos\theta \\ v\sin\theta \end{pmatrix}$$

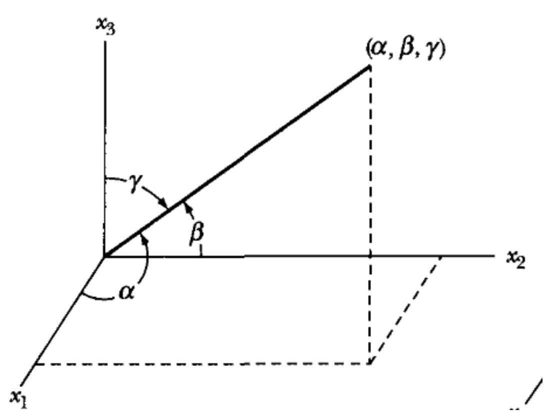
به بیان دیگر، $\tilde{\mathbf{R}}\mathbf{R} = \mathbf{I}$، عملگر واحد یا $\tilde{\mathbf{R}} = \mathbf{R}^{-۱}$ وارون $\mathbf{R}$ است. تبدیلاتی که از این خصوصیات برخوردارند، تبدیلات متعامد نامیده می‌شوند. چرخشهای دستگاههای مختصات مثالهایی از این‌گونه تبدیل به‌شمار می‌آیند.

$$\tilde{\mathbf{R}}\mathbf{R} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

تکلیف ۲-۱:

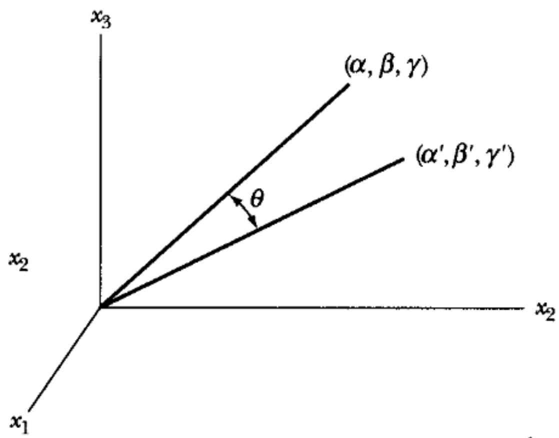
برای کسینوس های هادی رابطه زیر را ثابت کنید

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$



تکلیف ۲-۲:

اگر در فضا دو خط با کسینوس های هادی زیر داشته باشیم ثابت کنید زاویه بین آنها از رابطه زیر بدست می آید



$\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$

$\cos\alpha', \cos\beta', \cos\gamma'$

$$\cos\theta = \cos\alpha\cos\alpha' + \cos\beta\cos\beta' + \cos\gamma\cos\gamma'$$