فصل اول – بخش ۴

پارامترهای سینماتیکی حرکت

پارامترهای سینماتیکی حرکت

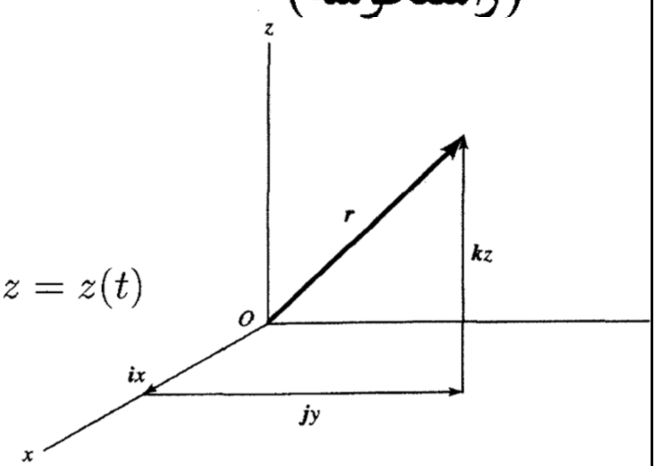
مکان

جابه جایی

سرعت

شتاب

۱۰.۱ بردار مکان ذره: سرعت و شتاب در مختصات دکارتی (راستگوشه)



بردار مکان ذره $\mathbf{r} = \mathbf{i}x + \mathbf{j}y + \mathbf{k}z$

$$x = x(t) \qquad y = y(t) \qquad z = z(t)$$

بردار سرعت $\mathbf{v} = \dfrac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{i}\dot{x} + \mathbf{j}\dot{y} + \mathbf{k}\dot{z}$

نقطه‌های واقع در سه حروف مشتق را نسبت به زمان t نمایش می‌دهند

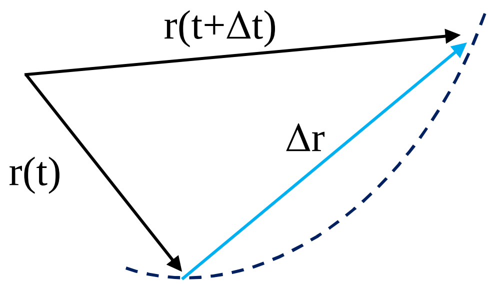
مفهوم هندسی بردار سرعت

ذره‌ای را در مکان معین و در زمان t فرض کنید. پس از سپری شدن مدت زمان Δt، ذره از مکان $\mathbf{r}(t)$ به مکان $\mathbf{r}(t+\Delta t)$ جابه‌جا خواهد شد. بردار تغییر مکان در بازهٔ زمانی Δt عبارت است از:

$$\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}(t+\Delta t) - \mathbf{r}(t)$$

$$v(\vec{r}) = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t}$$

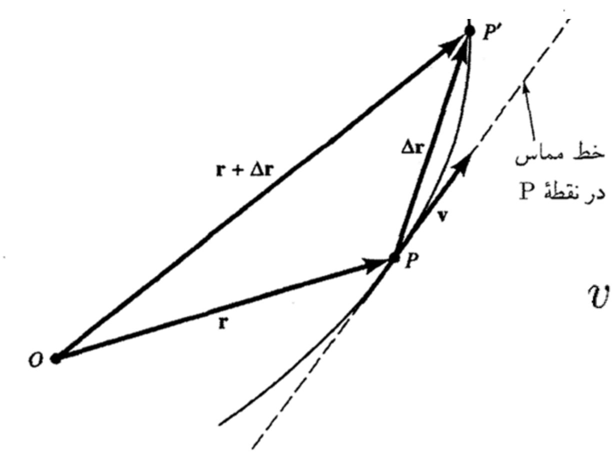
سرعت متوسط



$\Delta\mathbf{r}/\Delta t$ بردار موازی تغییر مکان

سرعت لحظه ای

در بازهٔ زمانی Δt، ذره مسیری از P تا P' را می‌پیماید. وقتی Δt به صفر نزدیک شود، نقطهٔ P' به P و جهت بردار $\Delta\mathbf{r}/\Delta t$ به جهت مماس بر مسیر در نقطهٔ P نزدیک می‌شود. از این‌رو، بردار سرعت همیشه بر مسیر حرکت مماس است.



$$v = |\mathbf{v}| = (\dot{x}^{۲} + \dot{y}^{۲} + \dot{z}^{۲})^{\frac{۱}{۲}}$$

مشتق زمانی سرعت را، شتاب می‌گویند.

$$\mathbf{a}=\frac{d\mathbf{v}}{dt}=\frac{d^{۲}\mathbf{r}}{dt^{۲}}$$

$$\mathbf{a}=\mathbf{i}\ddot{x}+\mathbf{j}\ddot{y}+\mathbf{k}\ddot{z}$$

مرور کلی

اگر تابع بردار مکان بر حسب زمان مشخص باشد آنگاه می توان با مشتق گیری از آن سرعت و شتاب را بدست آورد

$$\vec{r}(t)\left|\begin{array}{l}x(t)\\ y(t)\\ z(t)\end{array}\right. \xrightarrow{\text{مشتق}} \vec{V}(t)\left|\begin{array}{l}V_x(t)=\dfrac{dx}{dt}\\ V_y(t)=\dfrac{dy}{dt}\\ V_z(t)=\dfrac{dz}{dt}\end{array}\right. \xrightarrow{\text{مشتق}} \vec{a}(t)\left|\begin{array}{l}a_x(t)=\dfrac{dV_x}{dt}=\dfrac{d^2x}{dt^2}\\ a_y(t)=\dfrac{dV_y}{dt}=\dfrac{d^2y}{dt^2}\\ a_z(t)=\dfrac{dV_z}{dt}=\dfrac{d^2z}{dt^2}\end{array}\right.$$

مثال ۱.۱۰.۱ حرکت پرتابی

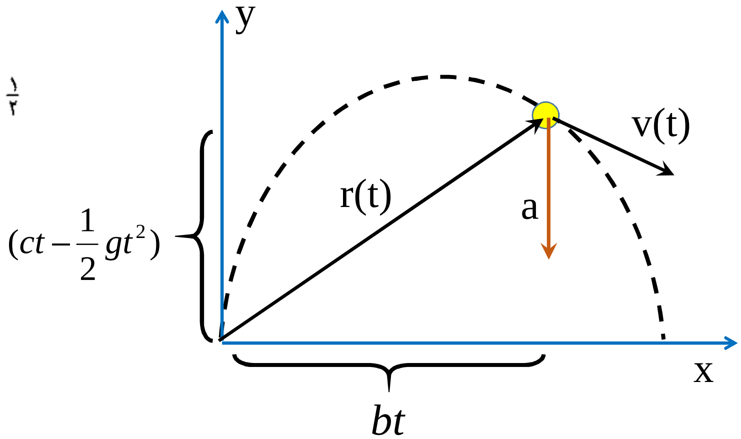
معادله حرکت در صفحهٔ xy

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{i}bt + \mathbf{j}\left(ct - \frac{gt^{۲}}{۲}\right) + \mathbf{k}۰$$

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{i}b + \mathbf{j}(c - gt)$$

$$v = [b^{۲} + (c - gt)^{۲}]^{\frac{۱}{۲}}$$

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\mathbf{j}g$$



مثال ۲.۱۰.۱ حرکت دایره‌ای

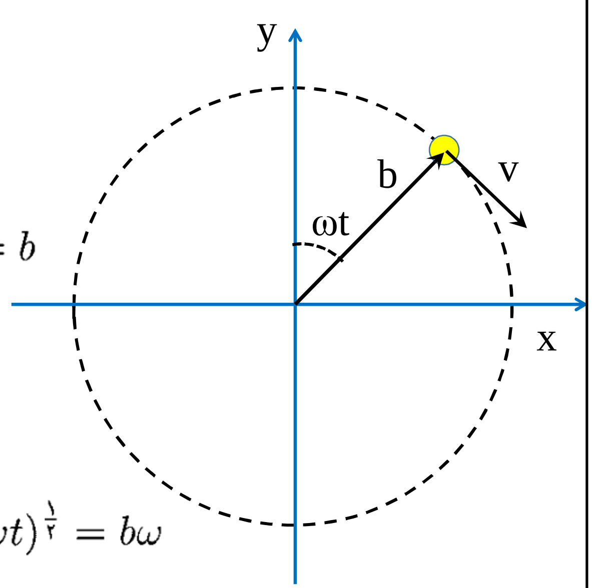
$$\mathbf{r} = \mathbf{i}b\sin\omega t + \mathbf{j}b\cos\omega t$$

$$|\mathbf{r}| = r = (b^{۲}\sin^{۲}\omega t + b^{۲}\cos^{۲}\omega t)^{\frac{۱}{۲}} = b$$

فاصلهٔ ذره تا مبدأ مختصات ثابت

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{i}b\omega\cos\omega t - \mathbf{j}b\omega\sin\omega t$$

$$v = |\mathbf{v}| = (b^{۲}\omega^{۲}\cos^{۲}\omega t + b^{۲}\omega^{۲}\sin^{۲}\omega t)^{\frac{۱}{۲}} = b\omega$$



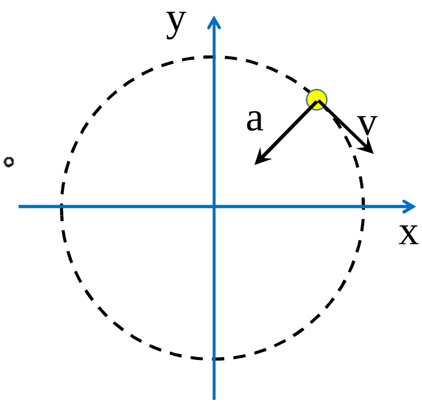
$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{i}b\omega\cos\omega t - \mathbf{j}b\omega\sin\omega t$$

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\mathbf{i}b\omega^2\sin\omega t - \mathbf{j}b\omega^2\cos\omega t$$

$$\mathbf{a} = -\omega^2\mathbf{r}$$

$$\mathbf{v}\cdot\mathbf{a} = (b\omega\cos\omega t)(-b\omega^2\sin\omega t) + (-b\omega\sin\omega t)(-b\omega^2\cos\omega t) = 0$$

شتاب بر سرعت عمود

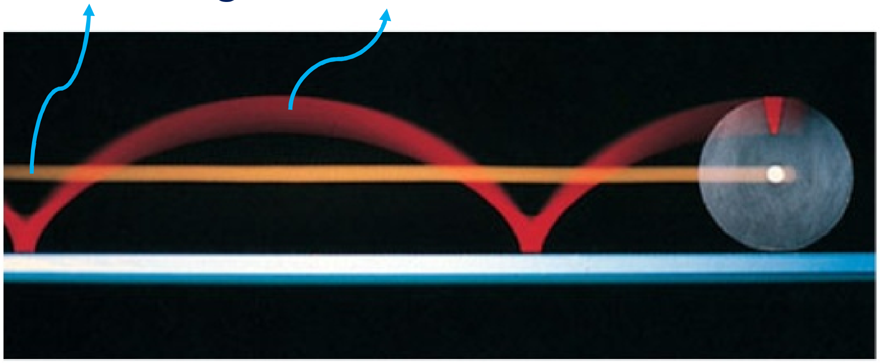


مثال ۳.۱۰.۱ چرخ غلتان

بررسی حرکت یک نقطه روی محیط چرخ

حرکت مرکز جرم چرخ + حرکت نقطه روی محیط حول مرکز جرم

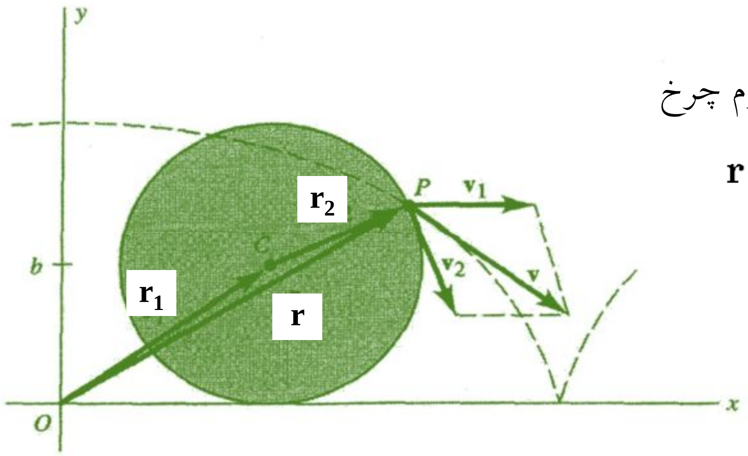
مسیر حرکت نقطه مرکز جرم　　مسیر حرکت نقطه روی محیط چرخ



بردار مکان ذرهٔ P $\quad \mathbf{r} = \mathbf{r}_۱ + \mathbf{r}_۲$

۱- بردار مکان مرکز جرم که بر خطی مستقیم با سرعت ثابت bω حرکت می کند

$$\mathbf{r}_۱ = \mathbf{i}b\omega t + \mathbf{j}b$$



۲- بردار مکان نقطه P حول مرکز جرم چرخ

$$\mathbf{r}_۲ = \mathbf{i}b\sin\omega t + \mathbf{j}b\cos\omega t$$

کردیم. از این‌رو، مجموع برداری $\mathbf{r}_۱ + \mathbf{r}_۲$ نقطه‌ای را نشان می‌دهد که دایره‌ای به شعاع b حول یک مرکز متحرک ترسیم می‌کند. این دقیقاً همان اتفاقی است که در مورد یک ذره بر لبهٔ چرخ غلتان رخ می‌دهد؛ $\mathbf{r}_۱$ بردار مکان مرکز چرخ و $\mathbf{r}_۲$ بردار مکان ذرهٔ P نسبت به مرکز متحرک است. مسیر واقعی حرکت چرخزاد است (شکل ۵.۱۰.۱). سرعت P عبارت است از

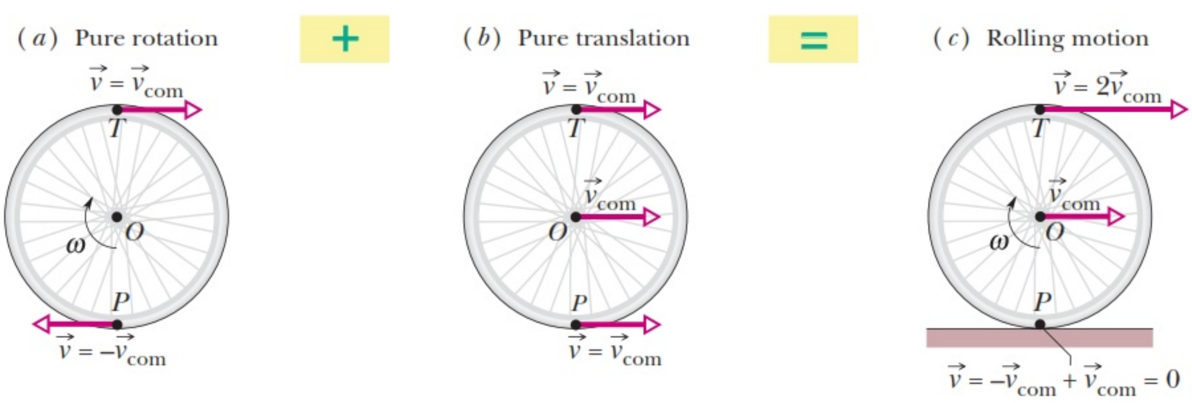
$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_۱ + \mathbf{v}_۲$$

$$\mathbf{v}_۱ = \frac{d\mathbf{r}_۱}{dt} = \mathbf{i}b\omega$$

$$\mathbf{v}_۲ = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{i}b\omega\cos\omega t - \mathbf{j}b\omega\sin\omega t$$

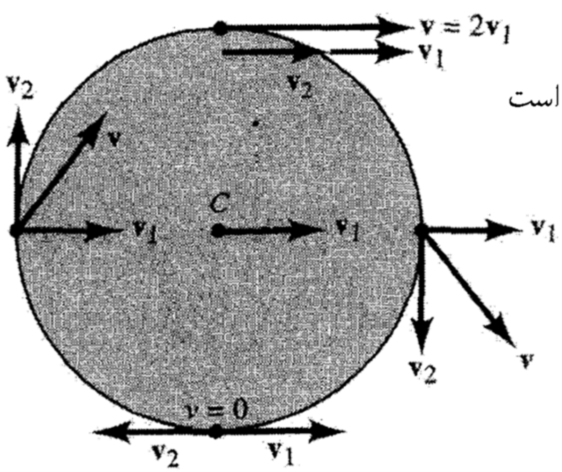
$$\mathbf{v} = \mathbf{i}(b\omega + b\omega\cos\omega t) - \mathbf{j}b\omega\sin\omega t$$

بررسی سرعت در نقاط مختلف



بررسی سرعت در نقاط مختلف

$$\mathbf{v} = \mathbf{i}(b\omega + b\omega\cos\omega t) - \mathbf{j}b\omega\sin\omega t$$



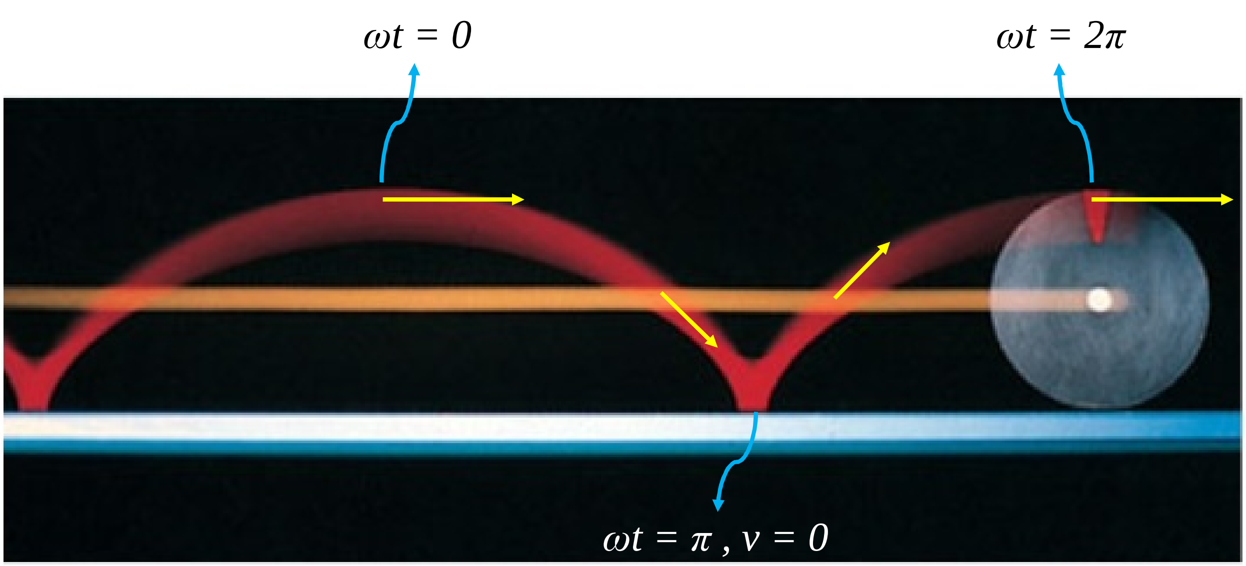
به‌ازای $\omega t = 0, 2\pi, 4\pi, \cdots$، داریم $\mathbf{v} = \mathbf{i}2b\omega$

دو برابر سرعت مرکز C

در این نقاط، ذره در بالاترین قسمت مسیرش واقع است

به‌ازای $\omega t = \pi, 3\pi, 5\pi, \cdots$، داریم، $\mathbf{v} = 0$

در این نقاط، ذره در پایین‌ترین نقطهٔ خود واقع و به‌طور لحظه‌ای با زمین در تماس است



حرکت ذره ای با شتاب معلوم

($V \neq 0$ و $a \neq 0$)

با فرض:

اگر شتاب در فضای سه بعدی معلوم و ثابت باشد

مکان اولیه جسم مشخص باشد

سرعت اولیه مشخص باشد

می توان مکان و سرعت جسم را در هر لحظه دیگر پیش بینی کرد

$$\frac{d\mathbf{v}(t)}{dt} = \mathbf{a}(t) \longleftrightarrow \frac{dv_x}{dt}\hat{\mathbf{i}} + \frac{dv_y}{dt}\hat{\mathbf{j}} + \frac{dv_z}{dt}\hat{\mathbf{k}} = a_x\hat{\mathbf{i}} + a_y\hat{\mathbf{j}} + a_z\hat{\mathbf{k}}.$$

معادلات سینماتیک

$$\vec{a}\begin{vmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{vmatrix} = a_x\hat{i} + a_y\hat{j} + a_z\hat{k} \quad , \quad \vec{r}_0\begin{vmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{vmatrix} = x_0\hat{i} + y_0\hat{j} + z_0\hat{k} \quad , \quad \vec{V}_0\begin{vmatrix} V_{0x} \\ V_{0y} \\ V_{0z} \end{vmatrix} = V_{0x}\hat{i} + V_{0y}\hat{j} + V_{0z}\hat{k}$$

$$\frac{dv_x}{dt} = a_x.$$

$$\Rightarrow \int_{v_0}^{v_1} dv_x = \int_{t_0}^{t_1} a_x dt,$$

$$\Rightarrow v_x(t_1) - v_x(t_0) = \int_{t_0}^{t_1} a_x(t)dt$$

$$\Rightarrow v_x(t_1) = v_x(t_0) + \int_{t_0}^{t_1} a_x(t)dt$$

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}_0 + \int_{t_0}^{t} \mathbf{a}(t')dt'$$

$$\frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} = \mathbf{v}(t)$$

$$\Rightarrow \mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + \int_0^t \mathbf{v}(t')dt'$$

$$\Rightarrow \vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \int_0^t dt' \int_0^{t'} a(t'')dt''$$

حرکت با شتاب ثابت

$\mathbf{a}$ = constant and $t_0 = 0$

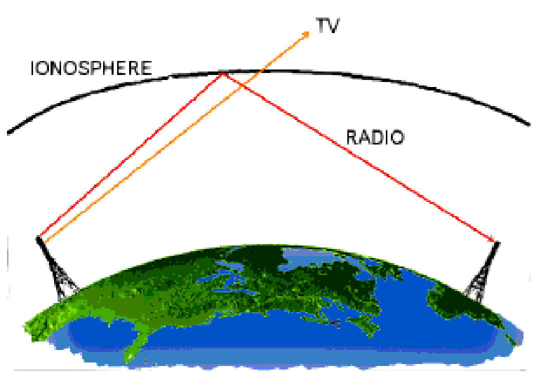
$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}_0 + \mathbf{a}t$$

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + \int_0^t (\mathbf{v}_0 + \mathbf{a}t')dt'$$

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0 t + \frac{1}{2}\mathbf{a}\, t^2$$

The Effect of a Radio Wave on an Ionospheric Electron

The ionosphere is a region of electrically neutral gas, composed of positively charged ions and negatively charged electrons, that surrounds the Earth at a height of approximately 200 km (120 mi). If a radio wave passes through the ionosphere, its electric field accelerates the charged particles. Because the electric field oscillates in time, the charged particles tend to jiggle back and forth. The problem is to find the motion of an electron of charge -e and mass m which is initially at rest, and which is suddenly subjected to an electric field E = E sin ωt (ω is the frequency of oscillation in radians/second).



$$\mathbf{F} = -e\mathbf{E} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{a} = \mathbf{F}/m = \frac{-e\mathbf{E}}{m} = \frac{-e\mathbf{E}_0}{m}\sin\omega t.$$

$$a(t) = \frac{-eE_0}{m}\sin\omega t = a_0 \sin\omega t \qquad a_0 = \frac{-eE_0}{m}$$

$$v(t) = v_0 + \int_0^t a(t')dt' = v_0 + \int_0^t a_0 \sin\omega t'\, dt'$$

$$= v_0 - \frac{a_0}{\omega}\cos\omega t'\Big|_0^t = v_0 - \frac{a_0}{\omega}(\cos\omega t - 1)$$

$$x(t) = x_0 + \int_0^t v(t')dt' \qquad v(t) = v_0 - \frac{a_0}{\omega}(\cos\omega t - 1)$$

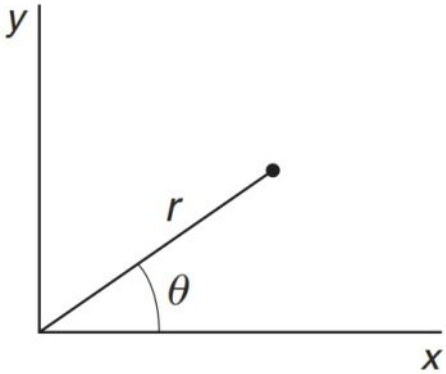
$$= x_0 + \int_0^t \left[v_0 - \frac{a_0}{\omega}(\cos\omega t' - 1)\right] dt'$$

$$= x_0 + \left(v_0 + \frac{a_0}{\omega}\right)t - \frac{a_0}{\omega^2}\sin\omega t$$

$$x_0 = v_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad x(t) = \frac{a_0}{\omega}t - \frac{a_0}{\omega^2}\sin\omega t$$

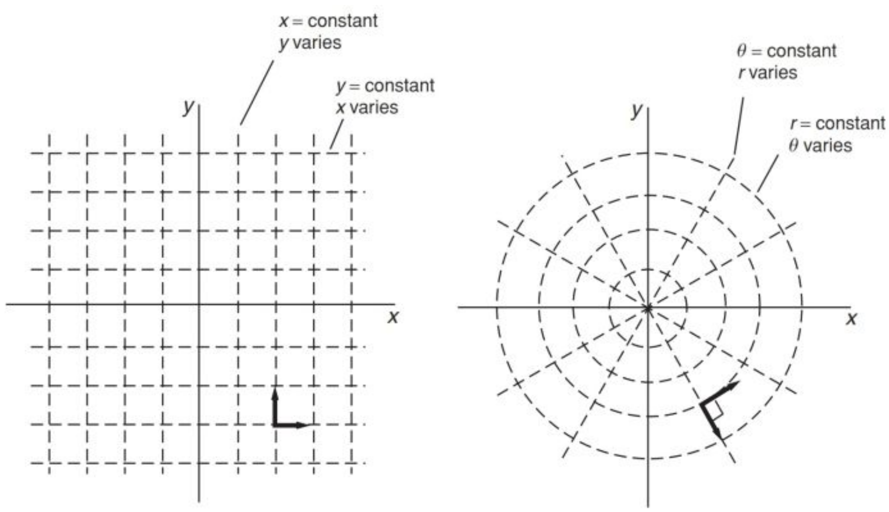
۱۱.۱ سرعت و شتاب در مختصات قطبی مسطح

مختصات قطبی r و θ



$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

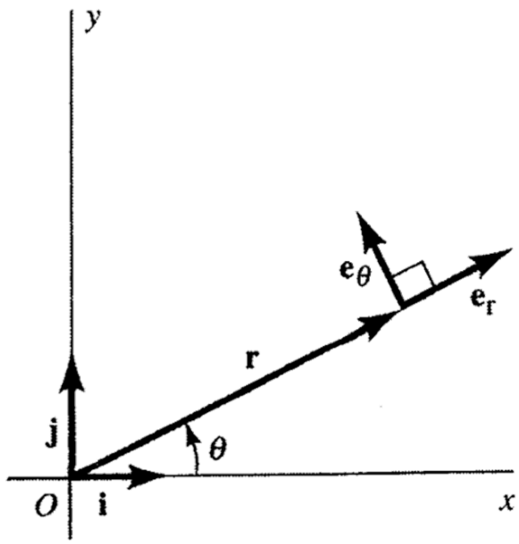
$$\theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$



Cartesian

Plane polar

مکان این ذره را می‌توان با حاصلضرب فاصلهٔ شعاعی، r، در بردار شعاع یکه، $\mathbf{e}_r$، نشان داد:



$$\mathbf{r} = r\mathbf{e}_r$$

مکان در دستگاه مختصات قطبی

با حرکت ذره، هم r و هم $\mathbf{e}_r$ تغییر می‌کنند؛
به این ترتیب، هر دو کمیت تابعی از زمان‌اند

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \dot{r}\mathbf{e}_r + r\frac{d\mathbf{e}_r}{dt} \; ?$$

سرعت در دستگاه مختصات قطبی

روش اول محاسبهٔ مشتق، $d\mathbf{e}_r/dt$

وقتی جهت $\mathbf{r}$ به‌اندازهٔ $\Delta\theta$ تغییر می‌کند، تغییر بردار شعاعی یکهٔ متناظر با آن، $\Delta\mathbf{e}_r$

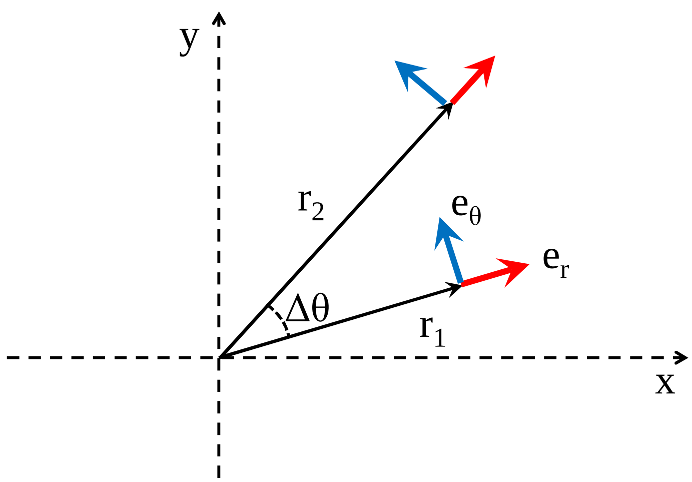
بزرگی $|\Delta\mathbf{e}_r|$ تقریباً مساوی $\Delta\theta$ و جهت $\Delta\mathbf{e}_r$ خیلی به خط عمود بر $\mathbf{e}_r$ نزدیک است

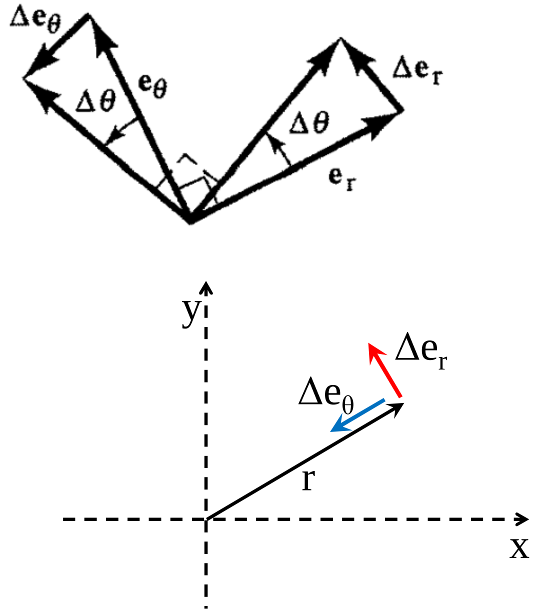
$$\Delta\mathbf{e}_r \simeq \mathbf{e}_\theta \Delta\theta \quad \Rightarrow \quad \frac{d\mathbf{e}_r}{dt} = \mathbf{e}_\theta \frac{d\theta}{dt}$$

$\mathbf{e}_\theta$ جهتش بر $\mathbf{e}_r$ عمود باشد

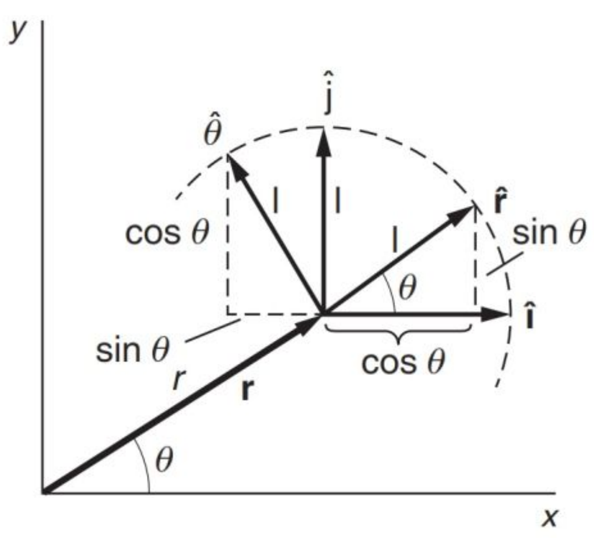
معادلهٔ سرعت $\quad \mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \dot{r}\mathbf{e}_r + r\frac{d\mathbf{e}_r}{dt}$

$$\mathbf{v} = \dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta$$





روش دوم: استفاده از روابط تحلیلی بردارهای یکه $\mathbf{r}$ و $\boldsymbol{\theta}$



$$\hat{\mathbf{r}}(\theta) = \cos\theta\,\hat{\mathbf{i}} + \sin\theta\,\hat{\mathbf{j}}$$
$$\hat{\boldsymbol{\theta}}(\theta) = -\sin\theta\,\hat{\mathbf{i}} + \cos\theta\,\hat{\mathbf{j}}.$$

$$\hat{\mathbf{r}} = \cos\theta\,\hat{\mathbf{i}} + \sin\theta\,\hat{\mathbf{j}}$$

$$\frac{d\hat{\mathbf{r}}}{dt} = \frac{d}{dt}(\cos\theta)\,\hat{\mathbf{i}} + \frac{d}{dt}(\sin\theta)\,\hat{\mathbf{j}}$$
$$= -\sin\theta\,\dot{\theta}\,\hat{\mathbf{i}} + \cos\theta\,\dot{\theta}\,\hat{\mathbf{j}}$$
$$= \underbrace{(-\sin\theta\,\hat{\mathbf{i}} + \cos\theta\,\hat{\mathbf{j}})}_{\hat{\boldsymbol{\theta}}}\,\dot{\theta}.$$

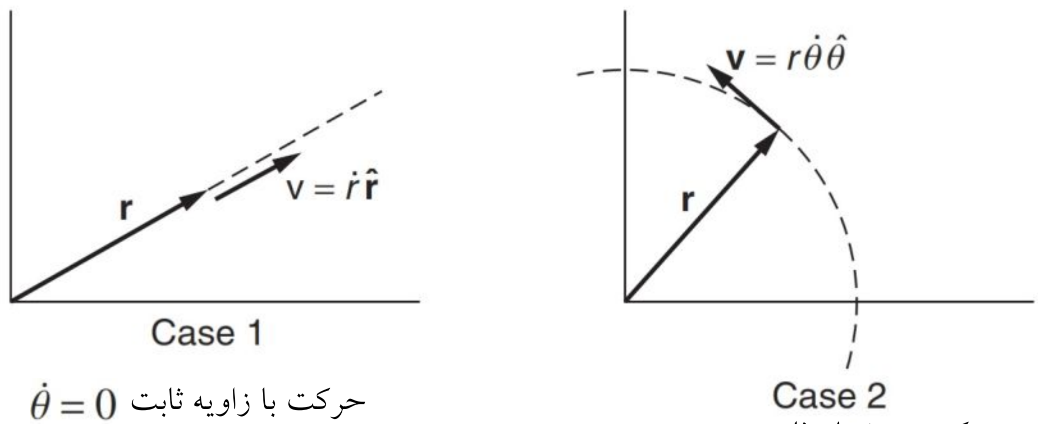
$$\frac{d\hat{\mathbf{r}}}{dt} = \dot{\theta}\,\hat{\boldsymbol{\theta}}$$

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = -\sin\theta\,\hat{\mathbf{i}} + \cos\theta\,\hat{\mathbf{j}} \Rightarrow \frac{d\hat{\boldsymbol{\theta}}}{dt} = \underbrace{(-\cos\theta\,\hat{\mathbf{i}} - \sin\theta\,\hat{\mathbf{j}})}_{\hat{\mathbf{r}}}\,\dot{\theta}$$

$$\frac{d\hat{\boldsymbol{\theta}}}{dt} = -\dot{\theta}\,\hat{\mathbf{r}}.$$

دو نوع حرکت خاص

$$\mathbf{v} = \dot{r}\,\hat{\mathbf{r}} + r\dot{\theta}\,\hat{\boldsymbol{\theta}}.$$



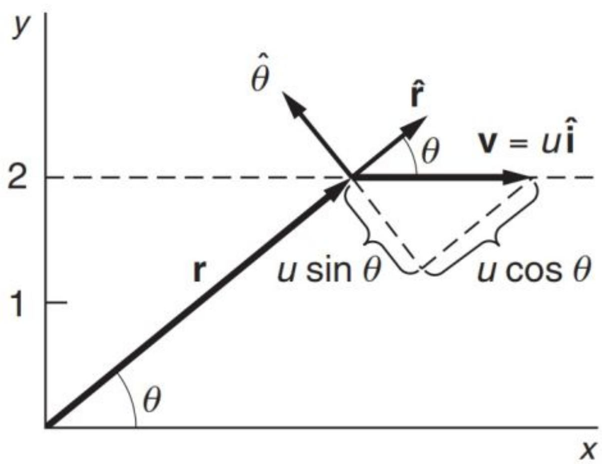
$\dot{\theta} = 0$ حرکت با زاویه ثابت

(حرکت یک بعدی)

حرکت در شعاع ثابت

(حرکت دو بعدی دایره ای)

Example 1.15 Straight Line Motion in Polar Coordinates
Consider a particle moving with constant velocity $\mathbf{v} = u\hat{\mathbf{i}}$ along the line y = 2. Describe v in polar coordinates:



$$\mathbf{v} = v_r\hat{\mathbf{r}} + v_\theta\hat{\boldsymbol{\theta}}.$$

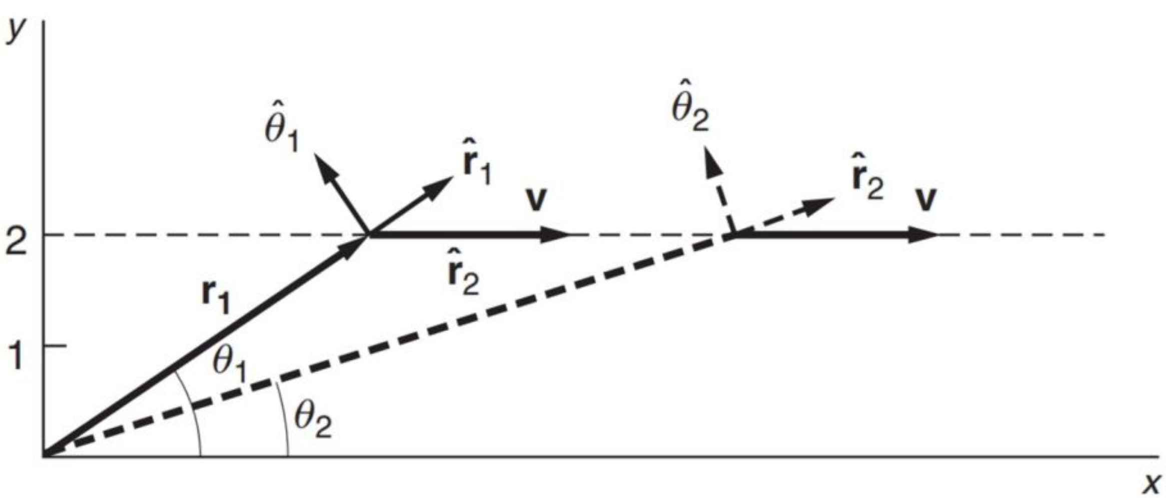
$$v_r = u\cos\theta$$

$$v_\theta = -u\sin\theta$$

$$\mathbf{v} = u\cos\theta\,\hat{\mathbf{r}} - u\sin\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}}.$$

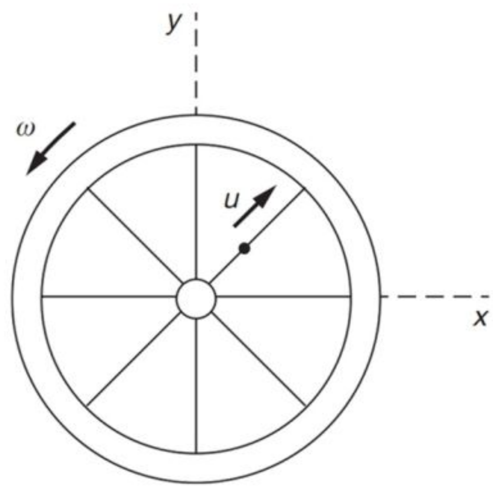
تغییر سرعت با زمان

تغییر مکان با زمان



Example 1.16 Velocity of a Bead on a Spoke

A bead moves along the spoke of a wheel at constant speed u meters per second. The wheel rotates with uniform angular velocity $\dot{\theta} = \omega$ radians per second about an axis fixed in space. At t = 0 the spoke is along the x axis, and the bead is at the origin. Find the bead's velocity at time t (a) in polar coordinates; (b) in Cartesian coordinates.



(a) $r = ut,\ \dot{r} = u,\ \dot{\theta} = \omega.$

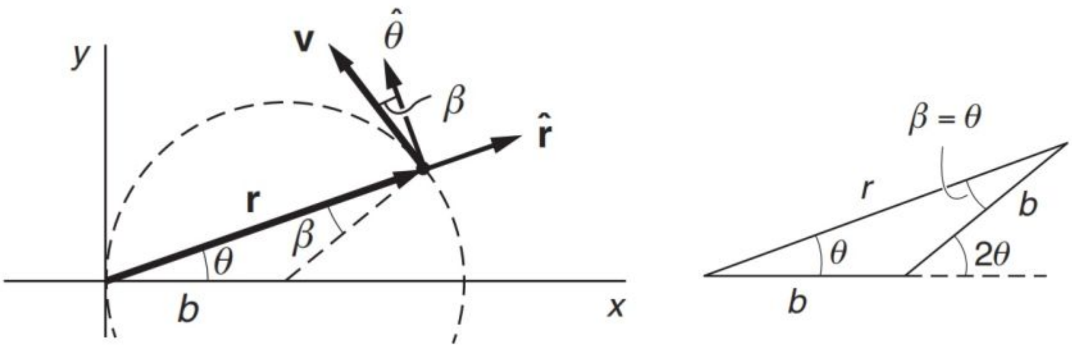
$$\mathbf{v} = \dot{r}\,\hat{\mathbf{r}} + r\dot{\theta}\,\hat{\boldsymbol{\theta}} = u\,\hat{\mathbf{r}} + u\omega t\,\hat{\boldsymbol{\theta}}.$$

(b)
$$v_x = v_r \cos\theta - v_\theta \sin\theta$$
$$v_y = v_r \sin\theta + v_\theta \cos\theta.$$

$$v_r = u,\ v_\theta = r\omega = u\omega t,\ \theta = \omega t,$$

$$\mathbf{v} = (u\cos\omega t - u\omega t\sin\omega t)\,\hat{\mathbf{i}} + (u\sin\omega t + u\omega t\cos\omega t)\,\hat{\mathbf{j}}.$$

Example 1.17 Motion on an Off-center Circle
A particle moves with constant speed v around a circle of radius b, with the circle offset from the origin of coordinates by distance b so that it is tangential to the y axis. Find the particle's velocity vector in polar coordinates.



$$\mathbf{v} = -v\sin\beta\,\hat{\mathbf{r}} + v\cos\beta\,\hat{\boldsymbol{\theta}}$$
$$= -v\sin\theta\,\hat{\mathbf{r}} + v\cos\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}}.$$

$2\theta = \omega t$ or $\theta = \omega t/2$, where $\omega = v/b$.

$$\mathbf{v} = -v\ \sin(vt/2b)\hat{\mathbf{r}} + v\ \cos(vt/2b)\hat{\boldsymbol{\theta}}.$$

بردار شتاب

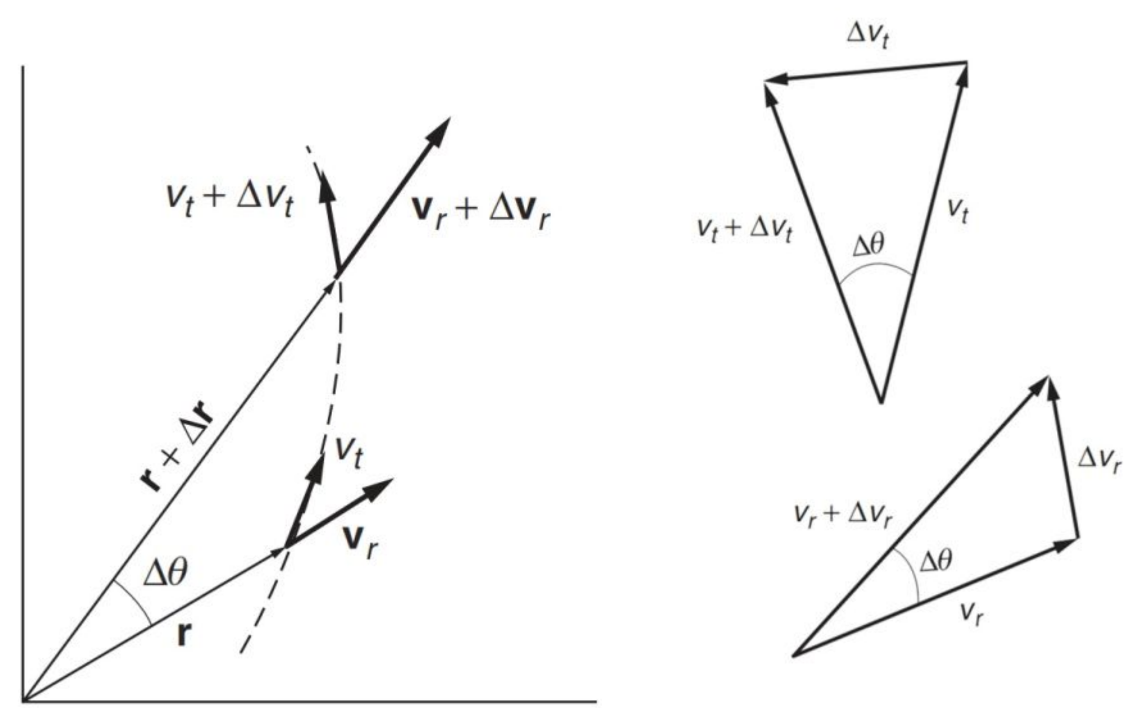
$$\mathbf{v} = \dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta$$

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \ddot{r}\mathbf{e}_r + \dot{r}\frac{d\mathbf{e}_r}{dt} + (\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\mathbf{e}_\theta + r\dot{\theta}\underline{\frac{d\mathbf{e}_\theta}{dt}}$$

می‌توانیم استدلال کنیم که تغییر بردار یکهٔ $\mathbf{e}_\theta$ از رابطهٔ تقریبی زیر به‌دست می‌آید:

$$\Delta\mathbf{e}_\theta \simeq -\mathbf{e}_r\Delta\theta \quad \Rightarrow \quad \frac{d\mathbf{e}_\theta}{dt} = -\mathbf{e}_r\frac{d\theta}{dt}$$

جهت تغییر $\Delta\mathbf{e}_\theta$ خلاف جهت تغییر $\mathbf{e}_r$



$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \ddot{r}\mathbf{e}_r + \dot{r}\frac{d\mathbf{e}_r}{dt} + (\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\mathbf{e}_\theta + r\dot{\theta}\frac{d\mathbf{e}_\theta}{dt}$$

$$\boxed{\mathbf{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\mathbf{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\mathbf{e}_\theta}$$

مؤلفهٔ شعاعی بردار شتاب $\quad a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2$

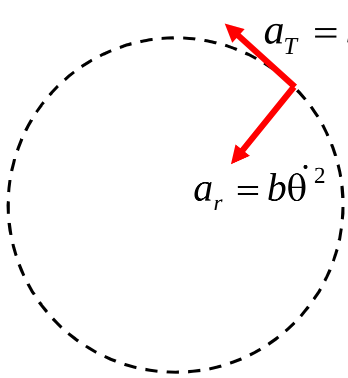
مؤلفهٔ عرضی $\quad a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = \frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta})$

حالات مختلف شتاب:

$$\mathbf{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\mathbf{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\mathbf{e}_\theta$$

اگر ذره‌ای روی دایره‌ای به شعاع ثابت b حرکت کند، آنگاه

$$\dot{r} = 0 \quad , \quad \ddot{r} = 0 \quad \Rightarrow \quad a_r = -b\dot{\theta}^2 \quad a_\theta = b\ddot{\theta}$$

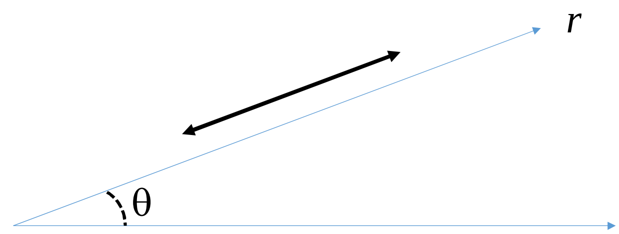


حالات مختلف شتاب:

$$\mathbf{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^{2})\mathbf{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\mathbf{e}_\theta$$

اگر ذره در امتداد یک خط ثابت شعاعی حرکت کند، یعنی اگر θ ثابت باشد،

$$\dot{\theta} = 0 \quad , \quad \ddot{\theta} = 0 \quad \Rightarrow \quad a_r = \ddot{r} \qquad a_\theta = 0$$

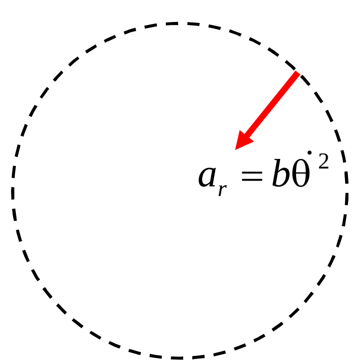


حالات مختلف شتاب:

$$\mathbf{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^{2})\mathbf{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\mathbf{e}_\theta$$

در حرکت دایره ای یکنواخت: هم شعاع ثابت و هم اندازه سرعت ثابت

$$\dot{r} = 0 \quad \Rightarrow \quad a_T = -r\dot{\theta}^2 \qquad a_\theta = 0$$



مثال)

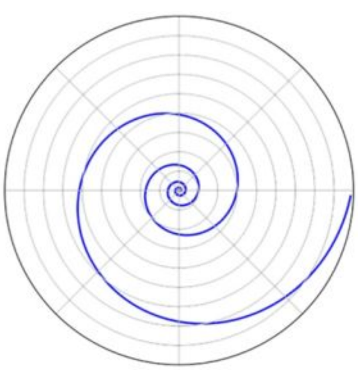
یک زنبور عسل در مسیر مارپیچ چنان به کندوی خود مراجعت می‌کند که فاصلهٔ شعاعی با آهنگ ثابت $r = b - ct$ کاهش یابد. در حالی که سرعت زاویه‌ای زنبور با آهنگ ثابت $\dot{\theta} = kt$ فزونی می‌گیرد، بزرگی سرعت را به‌صورت تابعی از زمان به‌دست آورید:

$$\mathbf{v} = \dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta$$

$\dot{r} = c$ و $\ddot{r} = ۰$.

$$\mathbf{v} = -c\mathbf{e}_r + (b - ct)kt\mathbf{e}_\theta$$

$$v = [c^۲ + (b - ct)^۲k^۲t^۲]^{\frac{۱}{۲}}$$



به‌ازای $t = ۰$ و $r = b$ (نقطه شروع)

به‌ازای $t = b/c$ و $r = ۰$، داریم $v = c$ (در محل کندو)

مثال ۲.۱۱.۱

روی میز گردان افقی که بزرگی سرعت زاویه‌ای چرخیدنش ثابت است، حشره‌ای روی یک خط شعاعی به‌سوی خارج می‌خزد، به‌طوری که فاصلهٔ آن از مرکز به‌صورت توان دوم زمان افزایش می‌یابد: $r = bt^{۲}$ و $\theta = \omega t$، که b و ω ثابت‌اند. شتاب این حشره را به‌دست آورید.

$\dot{r} = ۲bt$ و $\ddot{r} = ۲b$

$\dot{\theta} = \omega$ و $\ddot{\theta} = ۰$

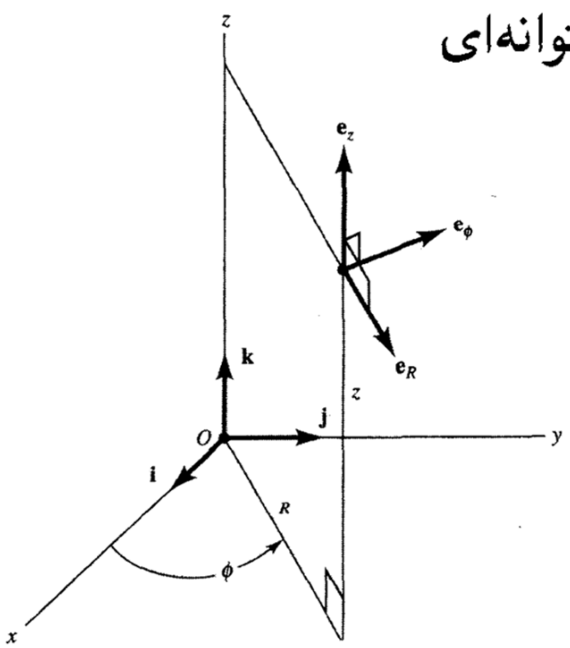
$$\mathbf{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^{۲})\mathbf{e}_r + (r\ddot{\theta} + ۲\dot{r}\dot{\theta})\mathbf{e}_\theta$$

$$\mathbf{a} = \mathbf{e}_r(۲b - bt^{۲}\omega^{۲}) + \mathbf{e}_\theta[۰ + ۲(۲bt)\omega]$$

$$= b(۲ - t^{۲}\omega^{۲})\mathbf{e}_r + ۴b\omega t\mathbf{e}_\theta$$

به این نکته توجه کنید که مؤلفهٔ شعاعی شتاب به‌ازای مقادیر بزرگ t در این مثال، منفی می‌شود.
هر چند که شعاع همیشه به‌طور یکنواخت با زمان افزایش می‌یابد.

سرعت و شتاب در مختصات استوانه‌ای



سه بردار $\mathbf{e}_R\mathbf{e}_\phi\mathbf{e}_z$ یک مجموعهٔ سه‌تایی راستگرد

$\mathbf{e}_R$ بردار یکهٔ شعاعی در صفحهٔ xy

$\mathbf{e}_\phi$ بردار یکه عمود بر e_R در صفحه **xy**

$\mathbf{e}_z$ بردار یکه در جهت z $\mathbf{k} = \mathbf{e}_z$

$$d\mathbf{e}_R/dt = \mathbf{e}_\phi\dot{\phi}$$

$$d\mathbf{e}_\phi/dt = -\mathbf{e}_R\dot{\phi}.$$

$$de_z / dt = dk / dt = 0$$

می‌توان نشان داد

؟

روش دیگر برای دستیابی به مشتق بردارهای یکه

رابطه‌هایی بین بردارهای یکهٔ مجموعهٔ سه‌گانهٔ $\mathbf{ijk}$ و مجموعهٔ سه‌گانهٔ چرخیده

$$\mathbf{e}_R = \mathbf{i}\cos\phi + \mathbf{j}\sin\phi$$

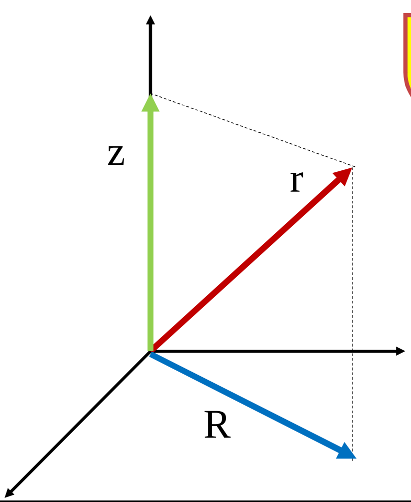
$$\mathbf{e}_\phi = -\mathbf{i}\sin\phi + \mathbf{j}\cos\phi$$

$$\mathbf{e}_z = \mathbf{k}$$

$$\frac{de_R}{dt} = i(-\dot\phi\sin\phi) + j(\dot\phi\cos\phi) = \dot\phi e_\phi$$

مکان ذره را در مختصات استوانه‌ای R، ϕ، z

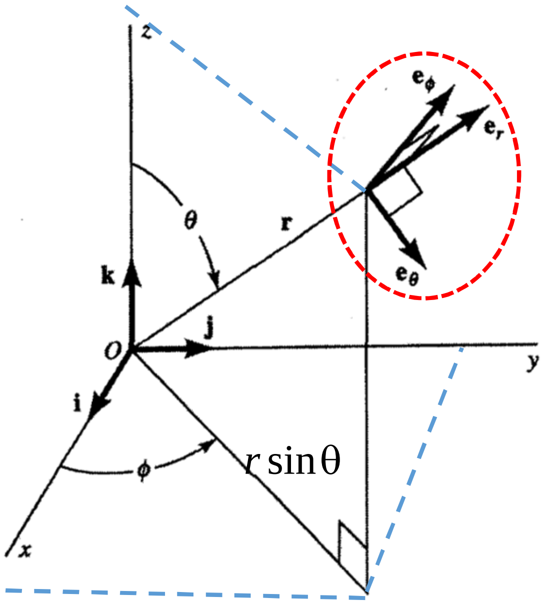
$$\mathbf{r} = R\mathbf{e}_R + z\mathbf{e}_z$$



$$\mathbf{v} = \dot R\mathbf{e}_R + R\dot\phi\mathbf{e}_\phi + \dot z\mathbf{e}_z$$

$$\mathbf{a} = (\ddot R - R\dot\phi^{۲})\mathbf{e}_R + (۲\dot R\dot\phi + R\ddot\phi)\mathbf{e}_\phi + \ddot z\mathbf{e}_z$$

سرعت و شتاب در مختصات کروی



مختصات کروی r، θ، ϕ

$$x = r\sin\theta\,\cos\phi$$
$$y = r\sin\theta\,\sin\phi$$
$$z = r\cos\theta$$

بردار مکان به‌صورت حاصلضرب فاصلهٔ شعاعی، r، و بردار یکهٔ شعاعی، $\mathbf{e}_r$

$$\mathbf{r} = r\mathbf{e}_r$$

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \dot{r}\mathbf{e}_r + r\frac{d\mathbf{e}_r}{dt}$$

رابطه بین دو مجموعهٔ سه‌گانهٔ $\mathbf{ijk}$ و $\mathbf{e}_r\mathbf{e}_\theta\mathbf{e}_\phi$

$$\mathbf{e}_r = \mathbf{i}\underbrace{(\mathbf{e}_r\cdot\mathbf{i})}_{\text{مولفه بردار } \mathrm{e_r} \text{ در امتداد بردار یکه } \mathrm{i}} + \mathbf{j}\underbrace{(\mathbf{e}_r\cdot\mathbf{j})}_{\text{مولفه بردار } \mathrm{e_r} \text{ در امتداد بردار یکه } \mathrm{j}} + \mathbf{k}\underbrace{(\mathbf{e}_r\cdot\mathbf{k})}_{\text{مولفه بردار } \mathrm{e_r} \text{ در امتداد بردار یکه } \mathrm{k}}$$

$$\mathbf{e}_r\cdot\mathbf{i} = \sin\theta\cos\phi$$
$$\mathbf{e}_r\cdot\mathbf{j} = \sin\theta\sin\phi$$
$$\mathbf{e}_r\cdot\mathbf{k} = \cos\theta$$

$$\mathbf{e}_r = \mathbf{i}\sin\theta\cos\phi + \mathbf{j}\sin\theta\sin\phi + \mathbf{k}\cos\theta$$

به همین روش می‌توان روابط مربوط به $\mathbf{e}_\theta$ و $\mathbf{e}_\phi$ را نیز به‌دست آورد

$$\mathbf{e}_r = \mathbf{i}\sin\theta\cos\phi + \mathbf{j}\sin\theta\sin\phi + \mathbf{k}\cos\theta$$

$$\mathbf{e}_\theta = \mathbf{i}\cos\theta\cos\phi + \mathbf{j}\cos\theta\sin\phi - \mathbf{k}\sin\theta$$

تکلیف؟؟

$$\mathbf{e}_\phi = -\mathbf{i}\sin\phi + \mathbf{j}\cos\phi$$

$$\frac{d\mathbf{e}_r}{dt} = \mathbf{i}(\dot\theta\cos\theta\cos\phi - \dot\phi\sin\theta\sin\phi) + \mathbf{j}(\dot\theta\cos\theta\sin\phi + \dot\phi\sin\theta\cos\phi) - \mathbf{k}\dot\theta\sin\theta$$

$$\frac{d\mathbf{e}_r}{dt} = \mathbf{e}_\phi\dot\phi\sin\theta + \mathbf{e}_\theta\dot\theta$$

تکلیف؟؟

$$\frac{d\mathbf{e}_r}{dt} = \mathbf{e}_\phi\dot\phi\sin\theta + \mathbf{e}_\theta\dot\theta$$

$$\frac{d\mathbf{e}_\theta}{dt} = -\mathbf{e}_r\dot\theta + \mathbf{e}_\phi\dot\phi\cos\theta$$

تکلیف؟؟

$$\frac{d\mathbf{e}_\phi}{dt} = -\mathbf{e}_r\dot\phi\sin\theta - \mathbf{e}_\phi\dot\phi\cos\theta$$

$$\mathbf{r} = r\mathbf{e}_r$$

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \dot r\mathbf{e}_r + r\frac{d\mathbf{e}_r}{dt}$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{e}_r\dot r + \mathbf{e}_\phi r\dot\phi\sin\theta + \mathbf{e}_\theta r\dot\theta$$

شتاب در دستگاه مختصات کروی

$$\mathbf{v} = \mathbf{e}_r\dot{r} + \mathbf{e}_\phi r\dot{\phi}\sin\theta + \mathbf{e}_\theta r\dot{\theta}$$

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt}$$

$$= \mathbf{e}_r\ddot{r} + \dot{r}\frac{d\mathbf{e}_r}{dt} + \mathbf{e}_\phi\frac{d(r\dot{\phi}\sin\theta)}{dt} + r\dot{\phi}\sin\theta\frac{d\mathbf{e}_\phi}{dt} + \mathbf{e}_\theta\frac{d(r\dot{\theta})}{dt} + r\dot{\theta}\frac{d\mathbf{e}_\theta}{dt}$$

$$\mathbf{a} = (\ddot{r} - r\dot{\phi}^۲\sin^۲\theta - r\dot{\theta}^۲)\mathbf{e}_r + (r\ddot{\theta} + ۲\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\phi}^۲\sin\theta\cos\theta)\mathbf{e}_\theta$$
$$+ (r\ddot{\phi}\sin\theta + ۲\dot{r}\dot{\phi}\sin\theta + ۲r\dot{\theta}\dot{\phi}\cos\theta)\mathbf{e}_\phi \qquad (۱۴.۱۲.۱)$$

مثال)

مهره‌ای روی سیمی که به‌شکل مارپیچ خم‌شده می‌لغزد. حرکت مهره در مختصات استوانه‌ای با $R = b$، $\phi = \omega t$، $z = ct$ بیان می‌شود. بردارهای سرعت و شتاب را به‌صورت توابعی از زمان به‌دست آورید.

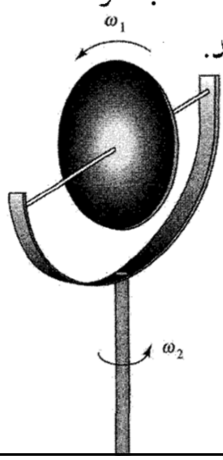
$$\dot{R} = \ddot{R} = ۰$$
$$\ddot{\phi} = ۰ ،\dot{\phi} = \omega$$
$$\ddot{z} = ۰ ،\dot{z} = c$$

$$\mathbf{v} = \dot{R}\mathbf{e}_R + R\dot{\phi}\mathbf{e}_\phi + \dot{z}\mathbf{e}_z \Rightarrow \mathbf{v} = b\omega\mathbf{e}_\phi + c\mathbf{e}_z$$

$$\mathbf{a} = (\ddot{R} - R\dot{\phi}^۲)\mathbf{e}_R + (۲\dot{R}\dot{\phi} + R\ddot{\phi})\mathbf{e}_\phi + \ddot{z}\mathbf{e}_z \Rightarrow \mathbf{a} = -b\omega^۲\mathbf{e}_R$$

مثال)

چرخی به شعاع b بر یک پایهٔ قاب‌مانند سوار شده و چنان ساخته شده است که چرخش آن از این قرار باشد: این چرخ با بزرگی سرعت زاویه‌ای ثابت ω_1 حول محور خودش می‌چرخد و محورش، به‌نوبهٔ خود، با سرعت زاویه‌ای ثابت ω_2 حول محور قائم می‌چرخد به‌طریقی که محور چرخ در صفحهٔ افقی باقی می‌ماند و مرکز چرخ بی‌حرکت است. با بهره‌گیری از مختصات کروی، شتاب هر نقطه بر لبهٔ چرخ را به‌دست آورید. در حالت خاص، شتاب بالاترین نقطهٔ چرخ را بیابید.



$$r = b \qquad \dot{r} = \ddot{r} = 0$$

$$\theta = \omega_1 t \qquad \dot{\theta} = \omega_1 \qquad \ddot{\theta} = 0$$

$$\phi = \omega_2 t \qquad \dot{\phi} = \omega_2 \qquad \ddot{\phi} = 0$$

$$\mathbf{a} = (\ddot{r} - r\dot{\phi}^2 \sin^2\theta - r\dot{\theta}^2)\mathbf{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\phi}^2 \sin\theta\cos\theta)\mathbf{e}_\theta$$
$$+ (r\ddot{\phi}\sin\theta + 2\dot{r}\dot{\phi}\sin\theta + 2r\dot{\theta}\dot{\phi}\cos\theta)\mathbf{e}_\phi \qquad (12)$$

$$\mathbf{a} = (-b\omega_2^2 \sin^2\theta - b\omega_1^2)\mathbf{e}_r - b\omega_2^2 \sin\theta\cos\theta\mathbf{e}_\theta + 2b\omega_1\omega_2\cos\theta\mathbf{e}_\phi$$

مختصهٔ بالاترین نقطهٔ چرخ عبارت است از $\theta = 0$

$$\mathbf{a} = -b\omega_1^2\mathbf{e}_r + 2b\omega_1\omega_2\mathbf{e}_\phi$$

جملهٔ اول در سمت راست، شتاب مرکزگرا و جملهٔ آخر شتاب عرضی عمود بر صفحهٔ چرخ است