فصل دوم – بخش اول

حرکت نوسانی ۱

موضوعات

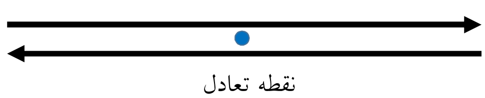
- ❑ تعاریف و مفاهیم حرکت نوسانی هماهنگ ساده
- ❑ سینماتیک حرکت نوسانی
- ❑ دینامیک حرکت نوسانی
- ❑ انرژی حرکت نوسانی
- ❑ حرکت هماهنگ ساده و حرکت زاویه ای
- ❑ نوسانگر هماهنگ ساده زاویه ای
- ❑ آونگ ها
  - آونگ ساده
  - آونگ فیزیک
- ❑ حرکت هماهنگ ساده میرا
- ❑ نوسان های واداشته و پدیده تشدید

تعاریف و مفاهیم در حرکت نوسانی هماهنگ ساده

Simple Harmonic Motion (SHM)

۱- تعریف حرکت تناوبی:

اگر جسم یک حرکت رفت و برگشتی منظم را حول یک نقطه تعادل و در یک بازه زمانی خاص انجام دهد



حرکت هماهنگ ساده یک نوع خاص از حرکت تناوبی

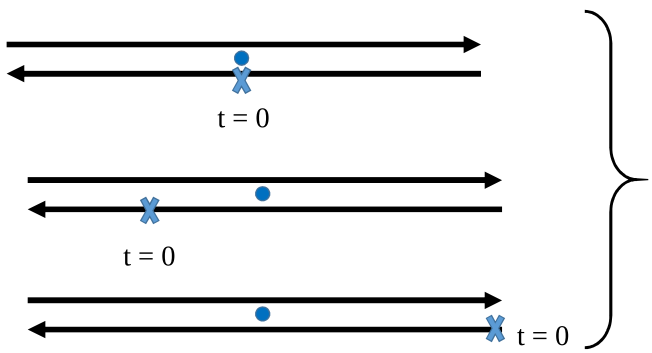
این حرکت تحت تاثیر یک نیرو که همواره متناسب با جابه جایی نسبت به نقطه تعادل است

همواره نیرو به سمت نقطه تعادل می باشد

۲- دوره تناوب (T):

مدت زمان یک رفت و برگشت کامل حول نقطه تعادل

در سنجش این زمان مهم نیست که صفر زمان سنجی در کجای مسیر در نظر گرفته شود



در هر سه مورد دوره تناوب اندازه گیری شده یکسان است

۳- بسامد (f):

تعداد نوسانها یا چرخه های کاملی که یک ذره در مدت یک ثانیه انجام می دهد

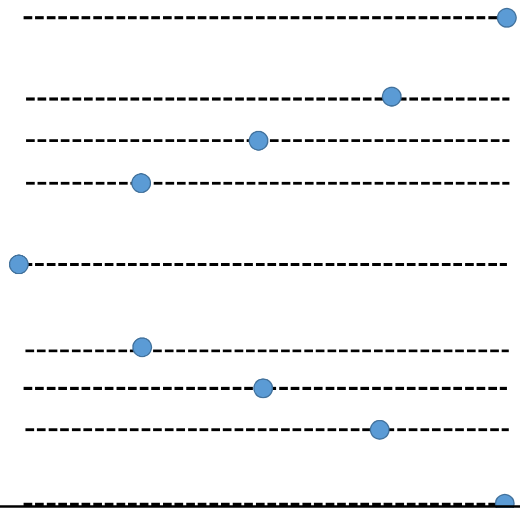
1 oscillation	T s
f oscillation	1 s

$$f = \frac{1}{T}$$

واحد → Hz

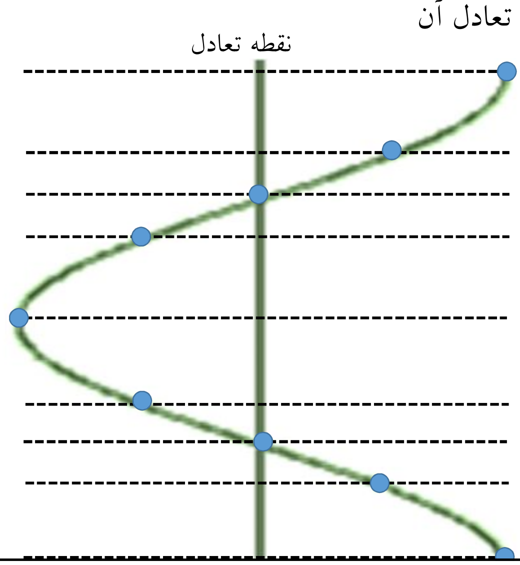
سینماتیک حرکت نوسانی

٤- مکان: موقعیت جسم در هر لحظه نسبت به نقطه تعادل آن



سینماتیک حرکت نوسانی

٤- مکان: موقعیت جسم در هر لحظه نسبت به نقطه تعادل آن



معادله مکان نسبت به مبدا یا جابه جایی نوسانگر

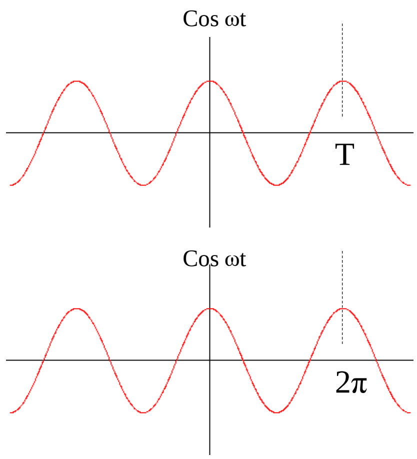
$$x(t) = x_m \cos(\omega t)$$

Film 1

۵– دامنه (x_m):

بیشینه فاصله جسم نسبت به نقطه تعادل آن

٦– بسامد زاویه ای (ω):



$$\omega T = 2\pi \quad \rightarrow \quad \omega = \frac{2\pi}{T}$$

واحد Rad/s

٧– صورت کلی معادله مکان:

$$x(t) = x_m \cos(\omega t + \phi)$$

$\omega t + \phi$ فاز حرکت

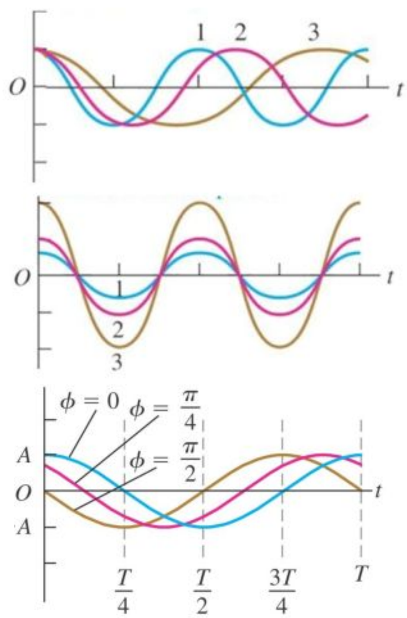
ϕ زاویه فاز یا ثابت فاز

$$x(t = 0) = x_m \cos(\phi) \rightarrow \phi = \cos^{-1}(x_0 / x_m)$$

اختلاف فاز حرکت در لحظه $t = 0$ نسبت به نقطه تعادل (مبدا)

۸- پارامترهای دخیل در حرکت نوسانگر:

$$\left.\begin{array}{r} x_m \\ \omega \text{ یا } T \\ \phi \end{array}\right\}$$

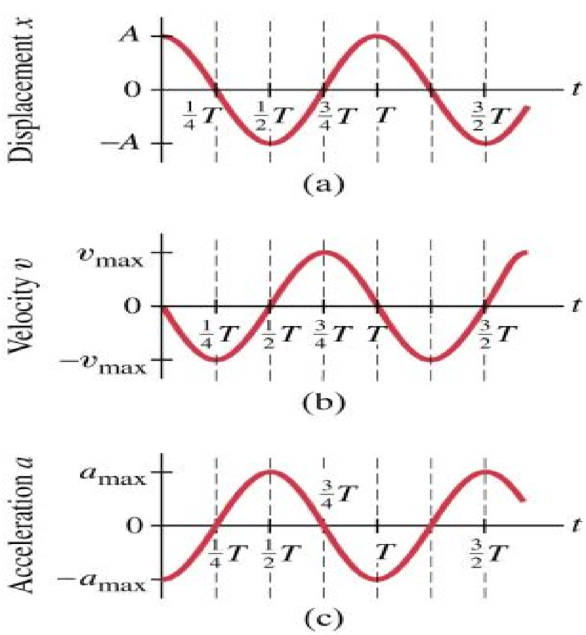


$$x_1 \left| \begin{array}{l} X_m \\ T_1 \\ \phi \end{array} \right. \qquad x_2 \left| \begin{array}{l} X_m \\ T_2 \\ \phi \end{array} \right.$$

$$x_1 \left| \begin{array}{l} X_{m1} \\ T \\ \phi \end{array} \right. \qquad x_2 \left| \begin{array}{l} X_{m2} \\ T \\ \phi \end{array} \right.$$

$$x_1 \left| \begin{array}{l} X_m \\ T \\ \phi_1 \end{array} \right. \qquad x_2 \left| \begin{array}{l} X_m \\ T \\ \phi_2 \end{array} \right.$$

۹- سرعت و شتاب نوسانگر هماهنگ ساده:



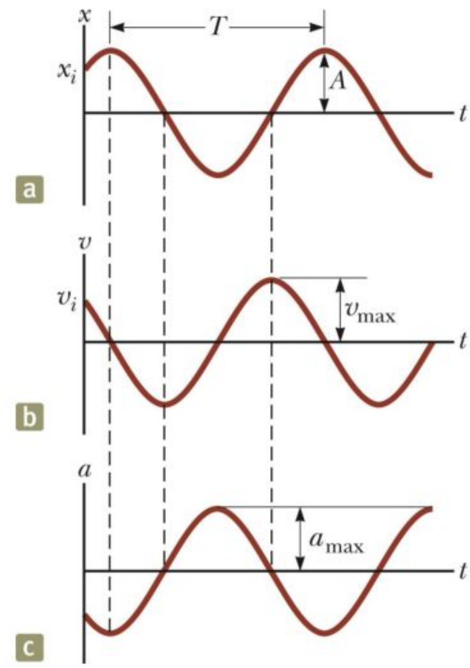
$$x(t) = x_m \cos(\omega t + \phi)$$

$$v = \frac{dx}{dt} = -\omega x_m \sin(\omega t + \phi)$$

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x_m \cos(\omega t + \phi) =$$

$$= -\omega^2 x(t)$$

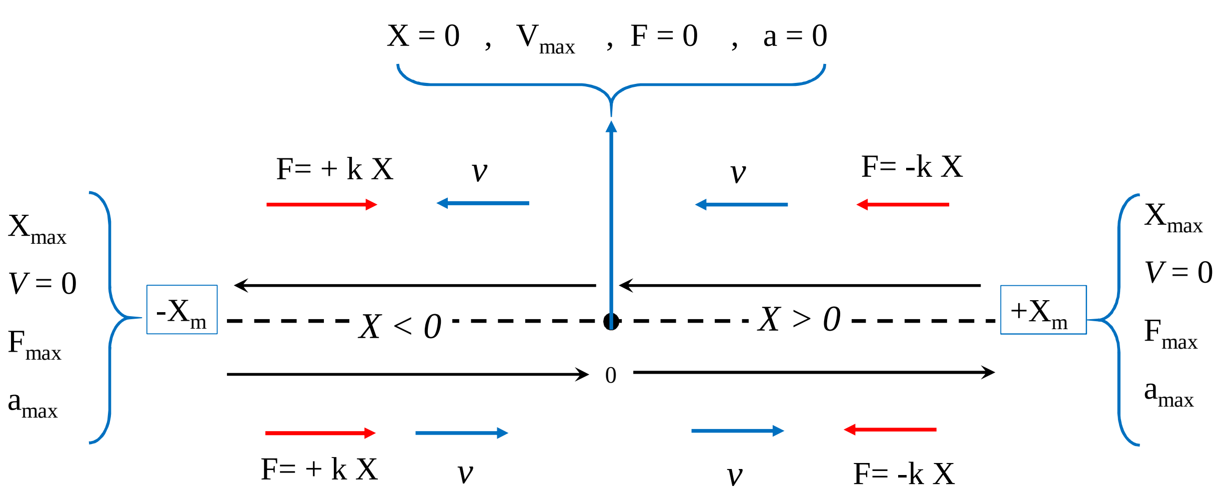
$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x(t) = 0}$$



$$x_{max} = A$$

$$v_{max} = A\omega \qquad \Delta\theta = 90^\circ$$

$$a_{max} = A\omega^2 \qquad \Delta\theta = 180^\circ$$



معادله حرکت به صورت توابع **سینوسی یا کسینوسی یا توابع نمایی موهومی**

۹- دینامیک نوسانگر هماهنگ ساده:

عامل حرکت ⟵ نیروی بازگرداننده: نیرویی که تمایل دارد جسم را به نقطه تعادل بازگرداند

$$F = ma = m(-\omega^2 x) = -m\,\omega^2 x(t)$$

ویژگیهای نیرو:

اندازه این نیرو تابع مکان است (نیروی متغیر)

نیرو هم راستا با x

جهت نیرو همواره خلاف جهت بردار مکان یا به سمت نقطه تعادل است(نیروی بازگرداننده)

عامل حرکت نوسانی مشابه رابطه نیرو صادق در رابطه هوک می باشد

نیروی حرکت نوسانی $F = -m\,\omega^2 x(t)$

نیروی هوک $F = -kx$

⟹ $k = m\,\omega^2$ $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$

نکته۱:

هر نوسانگر هارمونیک ساده را می توان معادل با یک جرم و نیروی فنر معادل سازی نمود

نکته۲:

هرگاه در حرکت نوسانی؛ نیروی وارد بر نوسانگر تابع قانون هوک باشد یعنی:

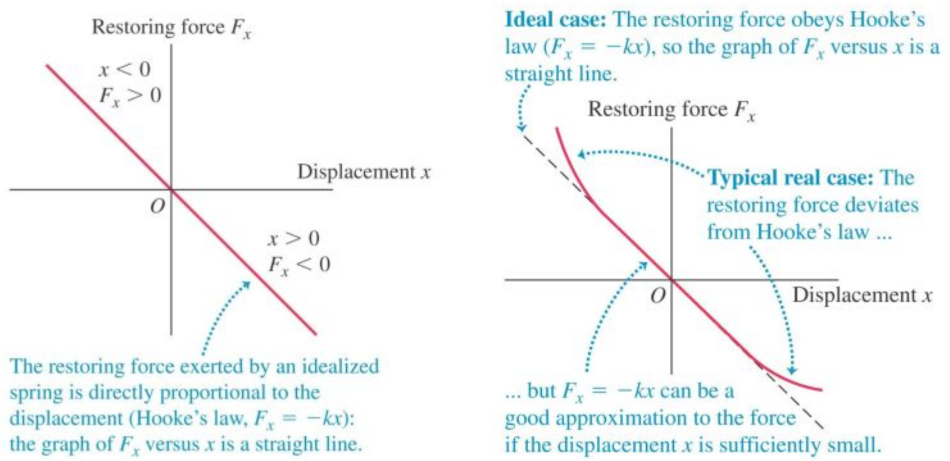
متناسب با جابه جایی

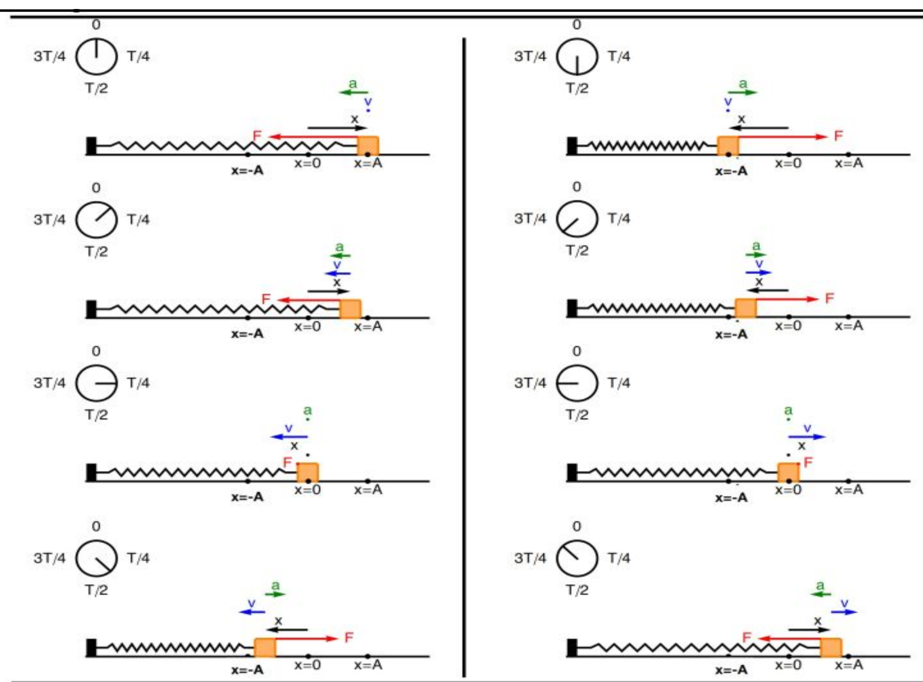
هم راستا با جابه جایی

مخالف جهت جابه جایی

آنگاه حرکت نوسانی، هماهنگ ساده است.

فنر ایده آل از قانون هوک پیروی می نماید





فهم فیزیکی:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

هر نوسانگر دارای

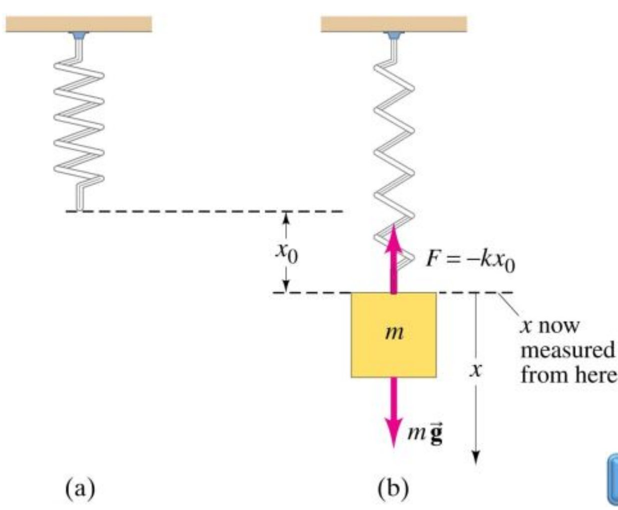
- ✓ جرم m
- ✓ نیروی بازگرداننده با مشخصه ای معادل با نیروی فنر k

k بزرگتر ≡ ω بزرگتر ≡ f بزرگتر ≡ نوسانها در واحد زمان بیشتر ≡ نوسانهای سریعتر

M بزرگتر ≡ لختی بزرگتر ≡ تمایل به حفظ سکون بیشتر ≡ نوسانهای کندتر ≡ ω کوچکتر

اگر جسمی از فنر به صورت عمودی آویزان شده باشد نقطه تعادل تغییر می نماید و نقطه تعادل جدید به اندازه x_0 زیر طول اولیه فنر خواهد بود.

نقطه تعادل جدید جایی خواهد بود که برآیند نیروهای وارد برجسم صفر شود یا به عبارتی نیروی فنر وارد بر جسم معادل با نیروی گرانشی وارد برآن باشد



Film 2

دینامیک حرکت نوسانی هماهنگ ساده:

معادل سازی نوسانگر (به معنای عام) با سیستم جرم و فنر

نیروی بازگرداننده معادل حرکت هماهنگ ساده $F = -kx$

قانون دوم نیوتن $F = ma = m\dfrac{d^2x}{dt^2}$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$$

معادله دیفرانسیلی نوسانگر هماهنگ ساده
(معادله درجه دوم)

جواب معادله دیفرانسیلی $X(t)$: می تواند به صورت سینوسی یا کسینوسی باشد

جواب پیشنهادی $x(t) = x_m \cos wt$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$$

$$\frac{d^2}{dt^2}(x_m \cos\omega t) + \frac{k}{m}(x_m \cos\omega t) = 0$$

$$-\omega^2 x_m \cos\omega t + \frac{k}{m}x_m \cos\omega t = 0$$

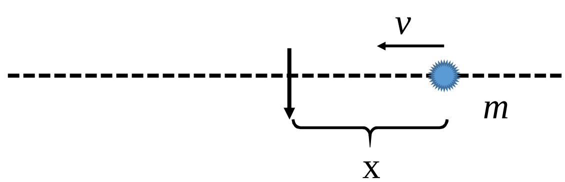
$$(-\omega^2 + \frac{k}{m})x_m \cos\omega t = 0$$

در صورتی جواب پیشنهادی جوابی برای معادله می باشد که $-\omega^2 + \dfrac{k}{m} = 0$

$$\omega^2 = \frac{k}{m} \quad \to \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

انرژی حرکت نوسانگر هماهنگ ساده

نوسانگر هماهنگ ساده = جرم (m) + فنر (k)

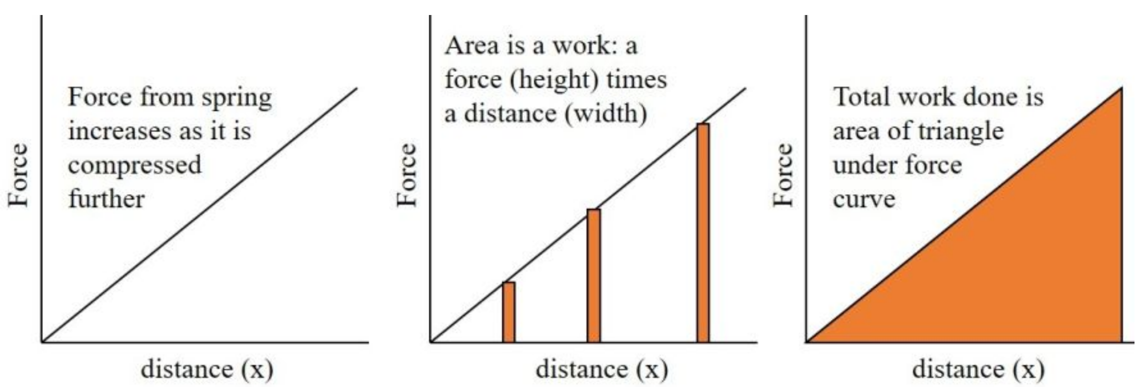


$$E = K + U = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2$$

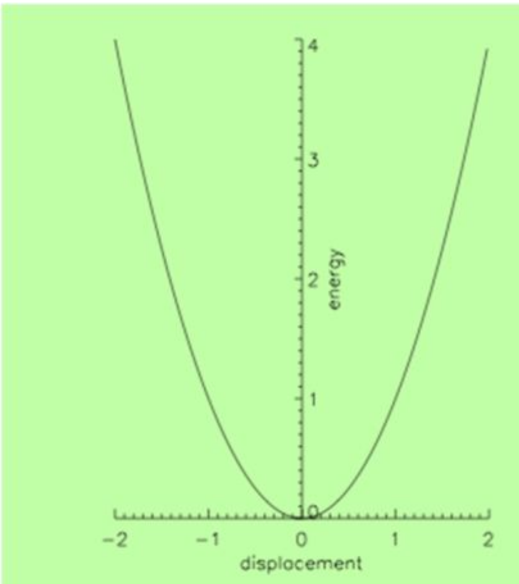
$$\begin{cases} U = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}k(x_m \cos(\omega t + \phi))^2 \\ K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(-\omega x_m \sin(\omega t + \phi))^2 \end{cases}$$

انرژی پتانسیل ذخیره شده در نوسانگر

کار انجام شده توسط نیروی فنر (نیروی بازگرداننده برای نوسانگر) هنگامی که به اندازه x از نقطه تعادل فاصله می گیرد به صورت انرژی پتانسیل در آن ذخیره می گردد.



انرژی پتانسیل



$$U = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}k(x_m \cos(\omega t + \phi))^2$$

- تابع انرژی پتانسیل نسبت به جابه جایی به صورت یک رابطه درجه دو با جابه جایی ذره از نقطه تعادل تغییر می کند
- انرژی پتانسیل در نقطه تعادل صفر است
- در نقاط بازگشت، انرژی پتانسیل ماکزیمم مقدار را دار می باشد.
- مانند حرکت یک توپ در یک کودال

$$E = \frac{1}{2}k(x_m \cos(\omega t + \phi))^2 + \frac{1}{2}m(-\omega x_m \sin(\omega t + \phi))^2$$

$$E = \frac{1}{2}kx_m^2 \cos^2(\omega t + \phi) + \frac{1}{2}m\omega^2 x_m^2 \sin^2(\omega t + \phi) \qquad m\omega^2 = k$$

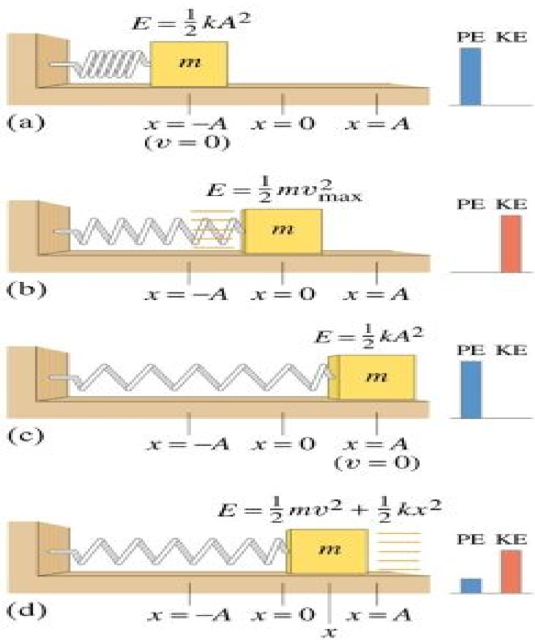
$$E = \frac{1}{2}kx_m^2 \left[\cos^2(\omega t + \phi) + \sin^2(\omega t + \phi)\right]$$

$$E = \frac{1}{2}kx_m^2$$

نکات:

- ❖ تابع انرژی پتانسیل و جنبشی وابسته به موقعیت نوسانگر نسبت به نقطه تعادل هر دو متغیر و تناوبی هستند
- ❖ حاصل جمع انرژی جنبشی و پتانسیل (انرژی کل) یک مقدار ثابت است و با جابه جایی جسم تغییری نمی کند

تغییرات انرژی در یک سیستم جرم و فنر



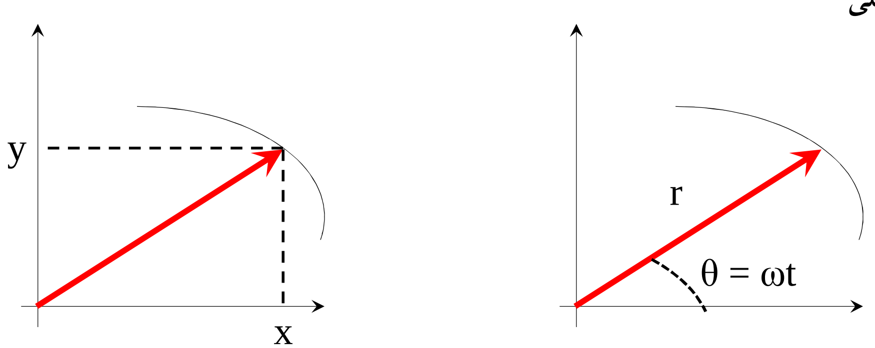
$$E = \frac{1}{2}kA^2 = constant$$

Film 3

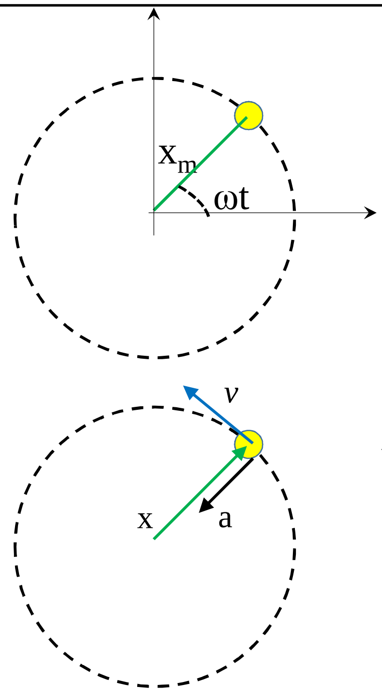
حرکت هماهنگ ساده و حرکت دایره ای یکنواخت

تصویر حرکت دایره ای یکنواخت روی یک قطر = حرکت هماهنگ ساده

الف) حرکت کلی



$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} = r\cos\omega t\ \hat{i} + r\sin\omega t\ \hat{j}$$



الف) حرکت دایره ای یکنواخت

اندازه r ثابت

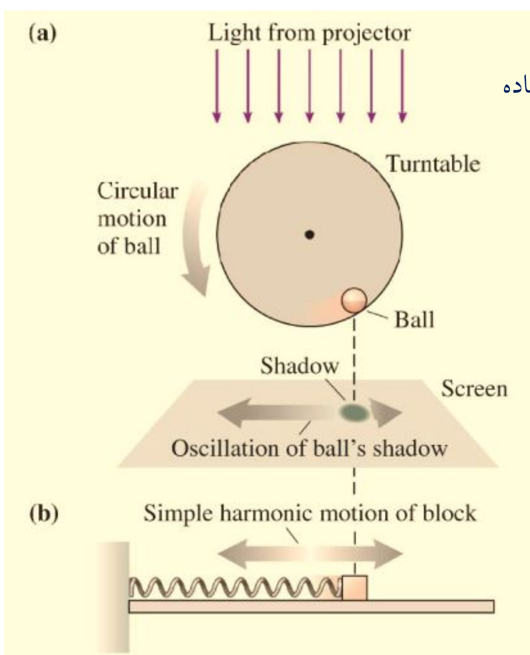
اندازه سرعت ثابت

بردار سرعت متغیر

$$\vec{x} = x_m \cos\omega t\, \hat{i} + x_m \sin\omega t\, \hat{j}$$

$$\vec{v} = -x_m\omega \sin\omega t\, \hat{i} + x_m\omega \sin\omega t\, \hat{j}$$

$$\vec{a} = -x_m\omega^2 \cos\omega t\, \hat{i} - x_m\omega^2 \sin\omega t\, \hat{j} = -\omega^2\vec{x}$$



تصویر حرکت دایره ای یکنواخت روی یک قطر = حرکت هماهنگ ساده

$$x = x_m \cos\omega t$$

$$v = -x_m\omega \sin\omega t$$

$$a = -x_m\omega^2 \cos\omega t$$

Film 4