جلسه هفتم

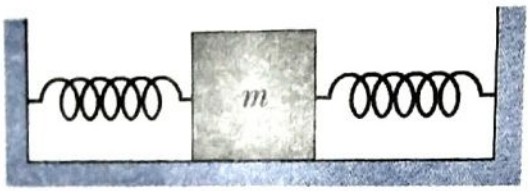
سوالات آخر فصل دوم

•۷ بلندگویی بر اثر نوسان پرده‌ای که دامنه‌ی نوسان ان محدود به $۱/۰۰\mu m$ است، صدای موزیکی را ایجاد می‌کند. (الف) در چه بسامدی بزرگی aی شتاب پرده برابر با g می‌شود؟ (ب) برای بسامدهای بزرگتر، آیا a بزرگتر از g یا کوچکتر از آن می‌شود؟

۲ـ۷:

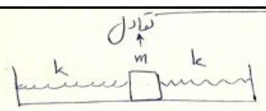
$x_m = ۱\,\mu m = ۱۰^{-۶}\,m$

$a_m = \omega^۲ x_m = g \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{g}{x_m}} = \sqrt{\frac{۱۰}{۱۰^{-۶}}} = \sqrt{۱۰} \times ۱۰۰۰$



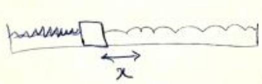
شکل ۱۵-۳۱ مسئله‌ی ۱۱

۱۱• در شکل ۱۵-۳۱، دو فنر یکسان با ثابت فنری $۷۵۸۰ \mathrm{N/m}$ به قطعه‌ای به جرم $۰/۲۴۵ \mathrm{kg}$ بسته شده‌اند. بسامد نوسان بر روی یک سطح بدون اصطکاک چقدر است؟

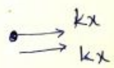


۱۱ -۲

در یک جابه‌جایی



تحلیل نیروهای وارد بر m



$F_{کل} = ۲kx$

هر دو فنر جسم را به سمت راست هل می‌دهند

قانون دوم نیوتن $F_{کل} = ma$

$۲kx = -m\frac{d^۲x}{dt^۲} \Rightarrow m\frac{d^۲x}{dt^۲} + ۲kx = ۰$

نیروی بازگرداننده

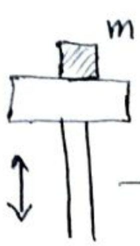
$$\boxed{\frac{d^۲x}{dt^۲} + \frac{۲k}{m}x = ۰}$$

معادله نوسانگر

x ضریب $= \omega^۲ = \frac{۲k}{m} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{۲k}{m}} = \frac{۲\pi}{T}$.

●●۱۹ قطعه‌ای روی پیستونی قرار دارد که در حرکت هماهنگ ساده‌ای به طور قائم حرکت می‌کند. (الف) اگر دوره‌ی تناوب این حرکت هماهنگ ساده ۱٫۰s باشد، در چه دامنه‌ای از حرکت، قطعه و پیستون از هم جدا می‌شوند؟ (ب) اگر دامنه‌ی حرکت پیستون ۵٫۰cm باشد، بسامد بیشینه‌ای که به‌ازای آن قطعه و پیستون دائماً در تماس خواهند بود، چقدر است؟

۲-۱۹ :



پیستون در حال نوسان

شرط جدایی قطعه از پیستون

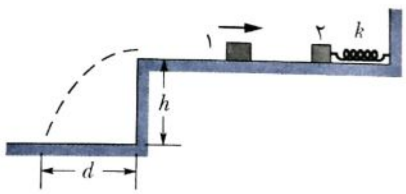
اگر شتاب پایین آمدن پیستون بیش از g باشد m از پیستون جدا می‌شود

$T = 1s$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{1} = 2\pi \ (rad)$$

$$a_m = \omega^2 x_m > g \Rightarrow x_m > \frac{g}{\omega^2} = \frac{10}{(4\pi)^2}$$

۲۲۰۰•• GO شکل ۱۵-۳۴ قطعه‌ای به جرم ۰٫۲۰۰kg را نشان می‌دهد که روی یک سطح مرتفع بدون اصطکاک با تندی ۸٫۰۰m/s به سمت راست می‌لغزد. این قطعه با قطعه‌ی ساکن ۲، که به فنری با ثابت فنر ۱۲۰۸٫۵ N/m بسته شده است، برخوردی کشسان انجام می‌دهد. (فرض کنید که فنر تأثیری در این برخورد ندارد.) پس از برخورد، قطعه‌ی ۲ حرکت هماهنگ ساده‌ای با دوره‌ی تناوب ۰٫۱۴۰s انجام می‌دهد، و قطعه‌ی ۱ به سمت انتهای مقابل می‌لغزد و پس از سقوطی به ارتفاع $h = ۴٫۹۰m$ در فاصله d از کف سطح بلند فرود می‌آید. مقدار d چقدر است؟



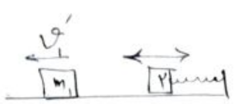
(۳)

۲۲_۲ :

قبل از برخورد

m_2 ساکن و فنر در تعادل

بعد از برخورد



محاسبه سرعت m_2 بعد از برخورد

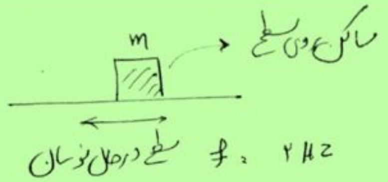
$$\begin{cases} v_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 \\ v_2' = \frac{2 m_1}{m_1 + m_2} v_1 \end{cases}$$

محاسبه حداکثر فشردگی فنر
دامنه نوسان

$$\frac{1}{2} m_2 v_2'^2 = \frac{1}{2} k x^2$$

●●۲۳ WWW قطعه‌ای که روی یک سطح افقی (یک میز لـرزان) قرار دارد، به طـور افقـی در حرکـت هماهنـگ سـاده‌ای بـا بسـامد ۲٫۰Hz به جلو و عقب حرکت می‌کند. ضریب اصـطکاک ایسـتایی بین قطعه و سطح ۰٫۵۰ است. اگر قطعه روی سطح نلغـزد، دامنـه‌ی این حرکت هماهنگ ساده چقدر است؟

۲۳-۲



$f = ۲\,Hz$

نیروی اصطکاک هم جهت حرکت نوسانی سطح خواهد بود تا از لغزش جسم روی سطح جلوگیری شود

$f_s = ma$ و $f_s^{max} = m a_{max} = \mu_s mg$ (۱)

در بیشینه‌ی دامنه $\rightarrow a_{max} = \omega^۲ x_m$ (۲)

(۲), (۱) $\Rightarrow m\omega^۲ x_m = \mu_s mg \Rightarrow x_m = \dfrac{\mu_s g}{\omega^۲}$

۲-۲۴ :

هر دو فنر به یک اندازه کشیده شوند ← در اثر کشیدگی یا جابجایی جسم m به اندازه x

نیروی ظاهر شده در هر فنر یکسان

$$F_{\text{کل}} = F_1 + F_2 = kx + kx$$

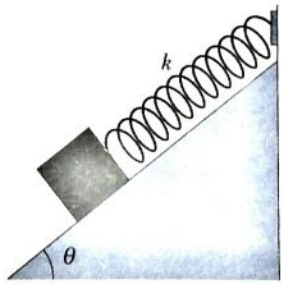
$$F = ma$$

$$\Rightarrow 2kx = -m\frac{d^2x}{dt^2} \Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + \underbrace{\frac{2k}{m}}_{\omega^2}x = 0$$

$$\omega = \sqrt{\frac{2k}{m}} = \frac{2\pi}{T}$$

$$\Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{2k}}$$

●●● ۲۵ GO در شـکل ۱۵-۳۶، قطعـه‌ای بـه وزن ۱۴٫۰N، کـه می‌تواند بدون اصطکاک بر روی شیبی با زاویه‌ی $\theta =$ ۴۰٫۰° بلغزد، توسط فنر بدون جرمی بـا طـول واهلیـده‌ی ۰٫۴۵۰m و ثابـت فنـر ۱۲۰N/m به بالای شیب متصل شده اسـت. (الـف) نقطـه‌ی تعـادل قطعه در چه فاصله‌ای نسبت به بـالای شـیب قـرار دارد؟ (ب) اگـر قطعه اندکی به پایین کشیده شده و سپس رها گردد، دوره‌ی تنـاوب نوسان‌های حاصل چقدر می‌شود؟



۲۵-۲:

فنر در طول اولیه

با اتصال جسم و آرام آوردن به پایین و رساندن به نقطه تعادل

نوسان حول نقطه تعادل

الف)

$$\begin{cases} kx_0 = mg\sin\theta \\ N = mg\cos\theta \end{cases}$$ تعادل

$$x_0 = \frac{mg\sin\theta}{k}$$

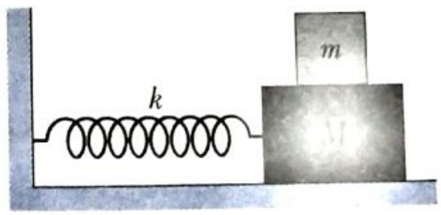
ب) اگر به اندازه x از حالت تعادل خارج گردد (مثلاً کشیده‌تر شده باشد)

$$k(x+x_0) - mg\sin\theta = -m\frac{d^2x}{dt^2}$$

$$kx + \underbrace{kx_0 - mg\sin\theta}_{0} = -m\frac{d^2x}{dt^2}$$

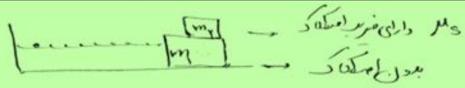
$$\Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{m}{k}x = 0 \rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

۲۶ ●●● GO در شکل ۱۵-۳۷، دو قطعه (به جرم‌های $m = ۱٫۸\text{kg}$ و $M = ۱۰\text{kg}$) و فنری (با ثابت $k = ۲۰۰\text{N/m}$) روی سطح افقی بدون اصطکاکی قرار دارند. ضریب اصطکاک ایستایی بین دو قطعه ۰٫۴۰ است. به‌ازای چه دامنه‌ای از حرکت هماهنگ ساده‌ی دستگاه قطعه ــ فنر، قطعه‌ی کوچکتر در شرف لغزش بر روی قطعه بزرگتر قرار می‌گیرد؟



شکل ۱۵-۳۷ مسئله‌ی ۲۶

۲-۲۶:



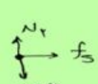
$m_1 = 10\ kg$ و $m_2 = 1/8\ kg$

حداکثر $x_m = ?$ (تا m_2 روی m_1 ساکن باشد)

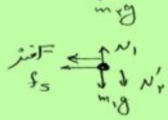
اگر دامنه نوسان از حدی بیشتر باشد شتاب حداکثر در نقاط انتهایی نوسانگر آنقدر زیاد خواهد بود که بیشتر از نیروی اصطکاک (نیرویی که m_2 را روی m_1 ساکن نگه داشته) می‌شود

مثلاً هنگامی که جسم به سمت راست است در حال حرکت

m_2:



m_1:



f_s نیرویی است که m_2 را به همراه m_1 جلو و عقب می‌برد

در آستانه حرکت m_2 روی m_1 (در نقاط انتهای مسیر)

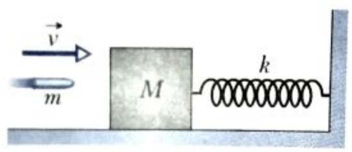
$f_s^{max} = \mu_s N_2 = \mu_s m_2 g$ ①

$f_s^{max} = m_2 a_{max} = m_2 \omega^2 x_m$ ②

①،② $x_m = \dfrac{\mu_s g}{\omega^2}$

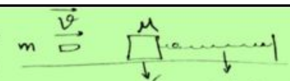
دو جسم با هم حرکت می‌کنند را می‌توان یک جسم دید $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m_1 + m_2}}$ $\Big\}\ x_m = \dfrac{(m_1 + m_2)\mu_s g}{k}$

۳۳۰۰ قطعه‌ای به جرم $M = ۵/۴\text{kg}$ به حالت سکون روی میز افقی بدون اصطکاکی، توسط فنری با ثابت $k = ۶۰۰۰\text{N/m}$ به تکیه‌گاه صلبی بسته شده است. گلوله‌ای به جرم $m = ۹/۵g$ و سرعت $\vec{v}$ به بزرگی ۶۳۰m/s به قطعه برخورد می‌کند و در آن فرو می‌رود (شکل ۱۵–۴۰). با فرض آنکه در حین فرو رفتن گلوله، فشردگی فنر ناچیز باشد، (الف) تندی قطعه را بلافاصله پس از برخورد و (ب) دامنه‌ی حرکت هماهنگ ساده‌ی حاصل چقدر است؟



۳۴

قبل از برخورد



بعد از برخورد

در برخورد کاملاً ناکشسان دو جسم بعد از برخورد با هم دیگر حرکت می‌کنند

الف) سرعت جسم‌ها بعد از برخورد

$$mv = (m+M)v' \Rightarrow v' = \frac{mv}{m+M}$$

ب)
$$\frac{1}{2}(m+M)v'^2 = \frac{1}{2}kx_m^2$$

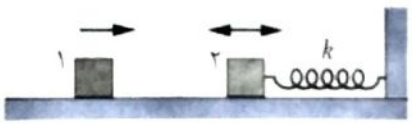
انرژی جنبشی دو جسم در نقطه تعادل

انرژی پتانسیل در حداکثر فشردگی

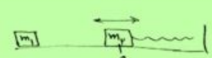
$$x_m = v'\sqrt{\frac{m+M}{k}} = v\sqrt{\frac{m^2}{(m+M)k}}$$

بسامد زاویه‌ای $\omega = \sqrt{\frac{k}{m+M}}$

●● ۳۴ GO در شکل ۱۵-۴۱، قطعه‌ی ۲ به جرم ۲٫۰kg در انتهای یک فنر، حرکت هماهنگ ساده‌ای با دوره‌ی تناوب ۲۰ms انجام می‌دهد. مکان قطعه با $x = (۱٫۰\,\mathrm{cm})\cos(\omega t + \pi/۲)$ داده شده است. قطعه‌ی ۱ به جرم ۴٫۰kg با سرعتی به بزرگی ۶٫۰m/s در امتداد طول فنر، به سمت قطعه‌ی ۲ می‌لغزد. در زمان $t = ۵٫۰\,\mathrm{ms}$ دو قطعه به‌طور کاملاً ناکشسان برخورد می‌کنند (مدت برخورد بسیار کمتر از دوره‌ی تناوب حرکت است.) دامنه‌ی این حرکت هماهنگ ساده پس از برخورد چقدر است؟



۳۴-۲



$T = ۲۰\,ms = ۰/۰۲\,s$

میلی ثانیه

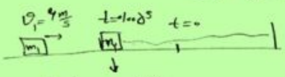
$\omega = \frac{۲\pi}{T} = \frac{۲\pi}{۰/۰۲} = ۱۰۰\pi$

برخورد در کجای مسیر برخورد رخ می‌دهد

زمان

$x = \underbrace{۰/۰۱}_{x_m} \cos(۱۰۰\pi t + \frac{\pi}{۲})$ کامل درلحظه $t=۰$ در تعادل و به سمت منفی می‌رود

با توجه به دوره تناوب بعداز ۵ms ⟸ بعداز $t=۵ms$ کاملاً $\frac{۱}{۴}$ مسیر نوسانی را طی کرده



در انتهای مسیر نوسانی

$v_2 = ۰$

m_1 با سرعت $v_1 = ۶\frac{m}{s}$ به جسم ۲ m_2 با سرعت $v_2 = ۰$ برخورد می‌کند

در این لحظه فنر کاملاً کشیده شده است $x_m = ۰/۰۱m$

برخورد کاملاً ناکشسان $m_1 v_1 = (m_1 + m_2) v_f$

$v_f = \frac{m_1 v_1}{m_1 + m_2} = \frac{۴ \times ۶}{۶} = ۴\frac{m}{s}$

ادامه ۳۴-۲:

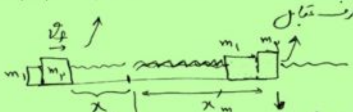
قبل از برخورد m_2 با فرکانس ω_0 در نوسان بوده

$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m_2}}$

$۱۰۰\pi = \sqrt{\frac{k}{۲}} \Rightarrow k = ۲ \times ۱۰^۴ \pi^۲ (\frac{N}{m})$

برای پیدا کردن دامنه نوسان بعداز برخورد کاملاً ناکشسان دو جسم چسبیده دو جسم به هم‌دیگر از پایستگی انرژی استفاده می‌شود

انرژی جنبشی بعداز برخورد = انرژی کشسانی در کشیدگی در طرف مقابل



نقطه تعادل فنر

نقطه سکون در طرف مقابل

$\frac{۱}{۲}(m_1 + m_2) v_f^۲ + \frac{۱}{۲} k x_m^۲ = \frac{۱}{۲} k x'^۲_m$

$\frac{۱}{۲} \times ۶ \times ۴^۲ + \frac{۱}{۲} \times ۲ \times ۱۰^۴ \times \pi^۲ \times ۱۰^{-۴} = \frac{۱}{۲} \times ۲ \times ۱۰^۴ \pi^۲ \times x'^۲_m$

$\pi^۲ \simeq ۱۰ \Rightarrow ۵۸ = ۱۰^۵ x'^۲ \Rightarrow x' = \sqrt{۵٫۸} \times ۱۰^{-۲}\,m$

●● ۳۶ اگر زاویه‌ی فاز برای یک دستگاه قطعه- فنر کـه در حـال حرکت هماهنگ ساده است برابر با $\pi/6$ رادیان باشد و مکان قطعه با $x = x_m \cos(\omega t + \phi)$ داده شود، در زمان $t = 0$ نسـبت انـرژی جنبشی به انرژی پتانسیل چقدر است؟

:۳۶-۲

$$K = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m x_m^2 \omega^2 \sin^2(\omega t + \frac{\pi}{6})$$

$$x = x_m \cos(\omega t + \frac{\pi}{6}) \Rightarrow v = \frac{dx}{dt} = x_m \omega [-\sin(\omega t + \frac{\pi}{6})]$$

$$U = \frac{1}{2} k x^2 = \frac{1}{2} k x_m^2 \cos^2(\omega t + \frac{\pi}{6})$$

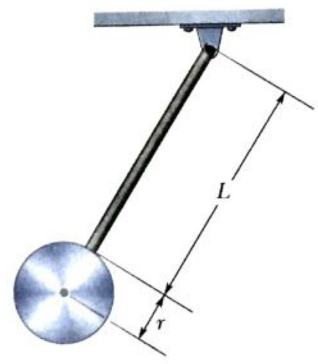
$$\omega^2 = \frac{k}{m} \Rightarrow k = m\omega^2$$

$$U = \frac{1}{2} m \omega^2 x_m^2 \cos^2(\omega t + \frac{\pi}{6})$$

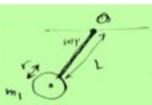
$$\frac{K}{U} = \frac{\frac{1}{2} m \omega^2 x_m^2 \sin^2(\omega t + \frac{\pi}{6})}{\frac{1}{2} m \omega^2 x_m^2 \cos^2(\omega t + \frac{\pi}{6})} = \tan^2(\omega t + \frac{\pi}{6})$$

$$t = 0 \qquad \frac{K}{U} = \tan^2 \frac{\pi}{6}$$

●۴۱ در شکل ۱۵-۴۲، آونگ شامل قـرص یکنـواختی بـه شـعاع $r = 10.0\,\text{cm}$ و جرم ۵۰۰g است که به میله‌ی یکنواختی بـه طـول $L = 500\,\text{mm}$ و جـرم ۲۷۰g متصـل شـده اسـت. (الـف) لختـی چرخشی آونگ را حول نقطه‌ی آویز محاسـبه کنیـد. (ب) فاصـله‌ی بین نقطه‌ی آویز و مرکـز جـرم آونـگ چقـدر اسـت؟ (پ) دوره‌ی نوسان را به‌دست آورید.



۴۱-۲:



$m_1 = 0.5\,\text{kg}$, $r = 10\,\text{cm} = 0.1\,\text{m}$

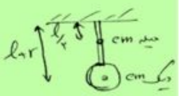
$m_2 = 0.270\,\text{kg}$, $L = 0.5\,\text{m}$

الف) $I_O = ?$ ب) $\cancel{x_{cm}}\ cm = ?$ ج) $T = ?$

الف) $$I_O = I_{\text{میله}} + I_{\text{دیسک}} = \underbrace{\left[I_{cm_{\text{میله}}} + m_2\left(\frac{l}{2}\right)^2\right]}_{\text{میله (قضیه محور موازی)}} + \underbrace{\left[I_{cm_{\text{دیسک}}} + m_1(l+r)^2\right]}_{\text{دیسک}}$$

$$= \underbrace{\left(\frac{1}{12}m_2 l^2 + m_2\frac{l^2}{4}\right)}_{\frac{1}{3}m_2 l^2} + \left[\frac{1}{2}m_1 r^2 + m_1(l+r)^2\right]$$

ب) نقطه آویز مبدا



$$y_{cm} = \frac{\frac{l}{2}\times m_2 + (l+r)\times m_1}{m_1 + m_2}$$

ج)

m_1 گشتاور وارد بر

$\tau_1 = m_1 g (l+r)\sin\theta$

$\tau_2 = m_2 g \frac{l}{2}\sin\theta$

$$\Sigma\tau = I_O\alpha \Rightarrow \left[m_1 g(l+r) + \frac{1}{2}m_2 g l\right]\sin\theta = -I_O\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

ادامه سوال ۴۱-۲:

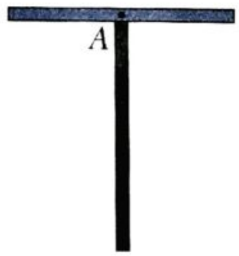
$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{m_1 g(l+r) + \frac{1}{2}m_2 g l}{I_O}\sin\theta = 0$$

$\theta \leq 5^\circ \Rightarrow \theta = \sin\theta$

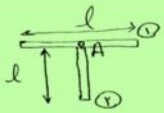
(θ) ضریب زاویه انحراف $= \omega^2$

$$\omega = \sqrt{\frac{m_1 g(l+r) + \frac{1}{2}m_2 g l}{\frac{1}{3}m_2 l^2 + \frac{1}{2}m_1 r^2 + m_1(l+r)^2}} = \frac{2\pi}{T}$$

● ٤٤ یک آونگ فیزیکی از دو خط‌کش بلند تشکیل شده است که مانند شکل ۱۵-۴۳ به یکدیگر متصل شده‌اند. دوره‌ی نوسان آونگ حول نقطه‌ی آویز A واقع در مرکز خط‌کش افقی چقدر است؟

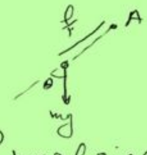


۴۴-۲



میله ۱ حول نقطه‌ی مرکز جرم خود دوران کند
بازوی گشتاور نیروی وزن $= 0 \rightarrow \tau_1 = 0$

گشتاور نیروی وزن وارد بر میله ۲



$$\tau_2 = mg\frac{l}{2}\sin\theta \quad (1)$$

$$\sum \tau = I\alpha \xrightarrow{(1)} \frac{1}{2}mgl\sin\theta = -I\frac{d^2\theta}{dt^2} \quad (2)$$

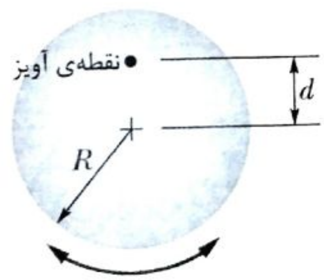
$$I = I_{\text{میله } 1} + I_{\text{میله } 2} = \frac{1}{12}ml^2 + \frac{1}{3}ml^2 = \frac{5}{12}ml^2 \quad (3)$$

$(3), (2)$
$\theta \lesssim 6^\circ$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \underbrace{\left(\frac{\frac{1}{2}mgl}{\frac{5}{12}ml^2}\right)}_{\omega^2}\theta = 0$$

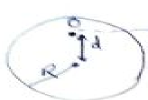
$$\omega^2 = \frac{6g}{5l} \Rightarrow \boxed{\omega = \sqrt{\frac{6g}{5l}}}$$

•٤٧ در شکل ۱۵-۴۴، یک آونگ فیزیکی شامل یک قرص توپر یکنواخت (به شعاع $R = ۲/۳۵\,\mathrm{cm}$) در صفحه‌ای قائم از نقطه‌ای به فاصله‌ی $d = ۱/۷۵\,\mathrm{cm}$ از مرکز قرص آویزان است. قرص تا زاویه‌ی کوچکی جابه‌جا شده و سپس رها می‌شود. دوره‌ی تناوب حرکت هماهنگ ساده‌ی حاصل چقدر است؟



(۸)

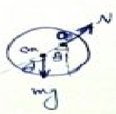
۴۷-۲ :



نقطه آویز

دیسک با قابلیت دوران حول نقطه O → $T = ?$

قرص به اندازه زاویه کوچک θ از وضع تعادل منحرف گردد



نیروهای وارد بر دیسک → نیروی وزن (mg) + نیروی تکیه‌گاهی به نقطه O (N)

$\tau_N = 0$ بدون بازو

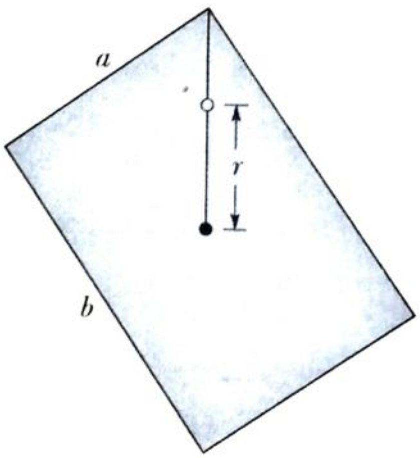
$\tau_{mg} = mgd\sin\theta$

$\Sigma\tau = I\alpha \Rightarrow mgd\sin\theta = -I_0 \frac{d^2\theta}{dt^2}$

قضیه محورهای موازی $I_0 = I_{cm} + md^2 = \frac{1}{2}mR^2 + md^2$

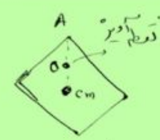
$\Rightarrow \frac{d^2\theta}{dt^2} + \underbrace{\frac{mgd}{\frac{1}{2}mR^2 + md^2}}_{\omega^2} \frac{\sin\theta}{\theta} = 0 \Rightarrow \omega = \frac{2\pi}{T} = \left(\frac{mgd}{\frac{mR^2}{2} + md^2}\right)^{\frac{1}{2}}$

کوچک



۴۸●● GO یک قالب مستطیلی، به ضلع‌های وجه‌ای $a = ۳۵\,\text{cm}$ و $b = ۴۵\,\text{cm}$ باید از میله‌ی افقی نازکی که از حفره‌ی باریکی از قالب می‌گذرد، آویخته شود. سپس قطعه باید تحت زاویه‌ی کوچکی حول میله همچون یک آونگ به نوسان درآید، طوری که حرکت هماهنگ ساده‌ای انجام دهد. شکل ۱۵-۴۵ یک وضعیت ممکن از حفره را نشان می‌دهد که در فاصله‌ی r از مرکز قالب و در امتداد خطی است که این مرکز را به گوشه‌ی قالب وصل می‌کند. (الف) دوره‌ی تناوب آونگ برحسب فاصله‌ی r در امتداد این خط را به گونه‌ای رسم کنید که کمینه‌ی منحنی در آن مشخص باشد. (ب) این کمینه به‌ازای چه مقداری از r رخ می‌دهد؟ درواقع خطی از نقطه‌ها به دور مرکز قالب وجود دارد که برای آن دوره‌ی تناوب نوسان قالب دارای مقدار کمینه‌ی یکسانی است. (پ) این خط چه شکلی را می‌سازد؟

۴۸-۲ :



حالت تعادل

منحرف از وضعیت تعادل به اندازه θ

نیروها → نیروی تکیه‌گاه در نقطه آویز → بدون بازو → $\tau = ۰$

نیروها → نیروی وزن در مرکز جرم $\tau_{mg} = mgr\sin\theta$

$$\Sigma \tau = I\alpha$$

$$mgr\sin\theta = -I_o \frac{d^۲\theta}{dt^۲}$$

$$I_o = I_{cm} + mr^۲ \quad ($$ قضیه محورهای موازی

$$= \frac{m}{۱۲}(a^۲ + b^۲) + mr^۲$$

$$\theta < ۶^\circ \Rightarrow \frac{d^۲\theta}{dt^۲} + \underbrace{\frac{mgr}{I_o}}_{\omega^۲}\theta = ۰$$

$$\omega = \frac{۲\pi}{T} \rightarrow T = ۲\pi\left(\frac{I_o}{mgr}\right)^{\frac{۱}{۲}} = ۲\pi\left(\frac{\frac{a^۲+b^۲}{۱۲} + r^۲}{gr}\right)^{\frac{۱}{۲}}$$

ادامه سوال ۴۸-۲ :

$$\frac{dT}{dr} = ۰ \qquad T = \sqrt{u} \Rightarrow T' = \frac{u'}{۲\sqrt{u}}$$

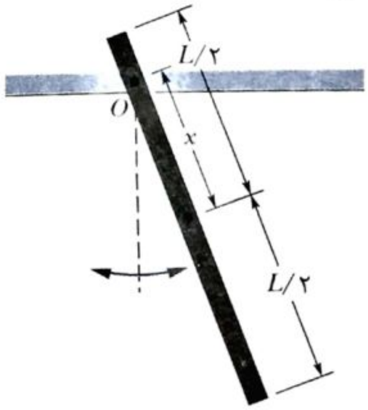
$$\frac{dT}{dr} = ۲\pi \frac{\frac{۲r \times gr - g\left(r^۲ + \frac{a^۲+b^۲}{۱۲}\right)}{(gr)^۲}}{۲\left(\quad\right)} = ۰$$

$$۲gr^۲ - gr^۲ - \frac{a^۲+b^۲}{۱۲}g = ۰$$

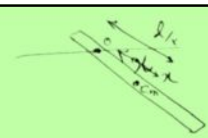
$$r^۲ = \frac{a^۲+b^۲}{۱۲} \Rightarrow$$ مکان هندسی دایره‌ای به شعاع

$$r = \left(\frac{a^۲+b^۲}{۱۲}\right)^{\frac{۱}{۲}}$$

••۵۱ در شکل ۱۵-۴۶، خط‌کشی به طول $L = 1{,}85\,\text{m}$ همچون یک آونگ فیزیکی نوسان می‌کند. (الف) به‌ازای چه مقداری از فاصله‌ی x، بین مرکز جرم خط‌کش و نقطه‌ی آویز O ی آن، کمترین دوره‌ی تناوب به‌دست می‌آید؟ (ب) این کمترین دوره چقدر است؟

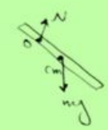


۵۱-۲ :



$x = ?$ که T_{min}

به‌ازای اعداد کوچک



نیروها

بدون بازو $\tau_N = 0$

$\tau_{cm} = mgx\sin\theta$

$$I_O = I_{cm} + mx^2 = \frac{1}{12} m l^2 + mx^2$$

$$\Sigma \tau = I\alpha \Rightarrow mgx\sin\theta = -\left(\frac{1}{12} m l^2 + mx^2\right)\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

$$\Rightarrow \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{mgx}{\frac{1}{12} m l^2 + mx^2}\sin\theta = 0 \xrightarrow{\theta < 6^\circ} \boxed{\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{mgx}{\frac{1}{12} m l^2 + mx^2}\theta = 0}$$

$$\omega = \left(\frac{mgx}{\frac{1}{12} m l^2 + mx^2}\right)^{\frac{1}{2}} \qquad T = 2\pi\left(\frac{\frac{1}{12} m l^2 + mx^2}{mgx}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (*)$$

$$\frac{dT}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{\frac{2mx \times mgx - mg\left(\frac{1}{12} m l^2 + mx^2\right)}{mgx}}{2\left(\frac{\frac{1}{12} m l^2 + mx^2}{mgx}\right)^{\frac{1}{2}}} = 0$$

$$\Rightarrow 2m^2 g x^2 - \frac{1}{12} m^2 g l^2 - m^2 g x^2 = 0$$

(۱۰)

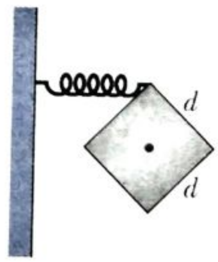
ادامه ۵۱-۲ :

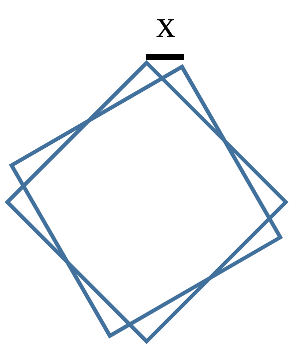
$$\Rightarrow m^2 g x^2 = \frac{1}{12} m^2 g l^2 \Rightarrow x = \sqrt{\frac{1}{12}}\, l$$

~~بنابراین~~ اگر میله در این فاصله از مرکز جرم میله آویز شود کمترین دوره تناوب را خواهد داشت

با جایگذاری x به دست آمده در رابطه $(*)$ T_{min} به دست می‌آید

۵۲●● مکعب شکل ۱۵–۴۷ جرمی برابر $۳/۰۰\text{kg}$ و اضلاعی به طول $d = ۶/۰۰\text{cm}$ دارد و روی محوری که از مرکز آن می‌گذرد، سوار شده است. فنری (با ثابت $k = ۱۲۰۰\text{N/m}$) گوشه‌ی بالایی این مکعب را به دیوار صلبی متصل کرده است. اگر این مکعب به‌اندازه‌ی °۳ چرخانده و سپس رها شود، دوره‌ی نوسان حرکت هماهنگ ساده‌ی حاصل چقدر می‌شود؟

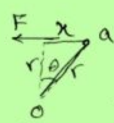




(۱۰)

۵۲- در این مسئله نیروی بازگرداننده برای نوسان زاویه‌ای، نیروی فنری باشد

با چرخش مکعب به اندازه θ حول نقطه مرکزی فنر به اندازه x کشیده می‌شود



نیروی بازگرداننده فنر $F = kx$

به ازای زاویه چرخش θ خیلی کوچک (°۳) $\Rightarrow x = r\theta$

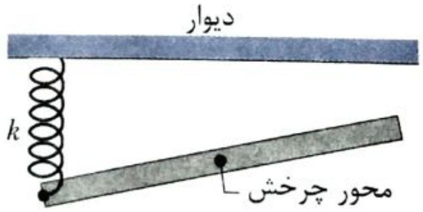
گشتاور نیروی فنر حول مرکز مکعب $Fr = kxr = kr^2\theta$

$$\tau = I\alpha \Rightarrow kr^2\theta = -I\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

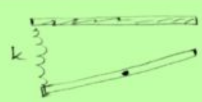
$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \underbrace{\frac{kr^2}{I}}_{\omega^2}\theta = 0$$

$$\omega = r\sqrt{\frac{k}{I}}$$

●●۵۳ ILW در نمای دید از بالای شکل ۱۵-۴۸، میله‌ی یکنواخت بلندی به جرم ۰٫۶۰۰kg می‌تواند آزادانه در صفحه‌ای افقی حول یک محور قائم عبوری از مرکزش، بچرخد. فنری با ثابت $k = ۱۸۵۰ \,\mathrm{N/m}$ به طور افقی بین یک انتهای این میله و دیواری ثابت متصل شده است. وقتی میله در تعادل است، موازی با دیوار قرار دارد. دوره‌ی تناوب نوسان‌های کوچک، وقتی میله کمی چرخانده و سپس رها شود، چقدر است؟

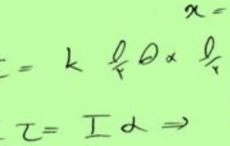


۵۳ -۲



برای نوسانهای کوچک

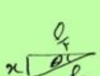
$T = ?$



با کشیده شدن فنر به اندازه x
میله به زاویه θ منحرف می‌شود

نیروی بازگرداننده: $F = kx$

گشتاور نیرو حول مرکز $\tau = F \frac{l}{۲}$



θ خیلی کوچک

$$x = \frac{l}{۲}\theta$$

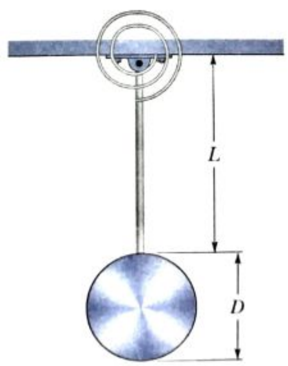
$$\tau = k \frac{l}{۲}\theta \times \frac{l}{۲} = k\left(\frac{l^۲}{۴}\right)\theta$$

$$\Sigma \tau = I\alpha \Rightarrow k\frac{l^۲}{۴}\theta = -I\frac{d^۲\theta}{dt^۲}$$

$$\Rightarrow \frac{d^۲\theta}{dt^۲} + \underbrace{\frac{kl^۲}{۴I}}_{\omega^۲}\theta = ۰ \qquad \omega = \sqrt{\frac{kl^۲}{۴I_{cm}}} = \frac{۲\pi}{T}$$

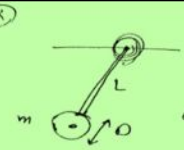
مرکز دوران = مرکز جرم

۵۶●●● در شکل ۱۵-۵۰، قرصی به جرم $2/50\,kg$ و قطر $D = 42/0\,cm$ از میله‌ای به طول $L = 76/0\,cm$ و جرم ناچیز آویخته شده است و می‌تواند حول انتهای آن نوسان کند. (الف) بدون اتصال فنر پیچشی بدون جرم، دوره‌ی تناوب نوسان چقدر است؟ (ب) با اتصال فنر پیچشی، میله به طور قائم در تعادل است. اگر دوره‌ی نوسان به اندازه‌ی $0/500\,s$ کاهش یابد، ثابت پیچشی فنر چقدر است؟



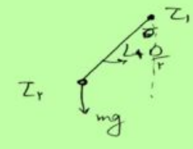
(۱۲)

۵۶-۲ :



گشتاورها حول نقطه دوران ← فنر پیچشی / وزن جسم

ب)



گشتاورها در خلاف جهت همدیگر

$$\tau_1 - \tau_2 = k\theta - mg(L+\tfrac{D}{2})\sin\theta =$$

برای θ خیلی کوچک $\theta = \sin\theta$

$$\Sigma\tau = [k - mg(l+\tfrac{D}{2})]\theta$$

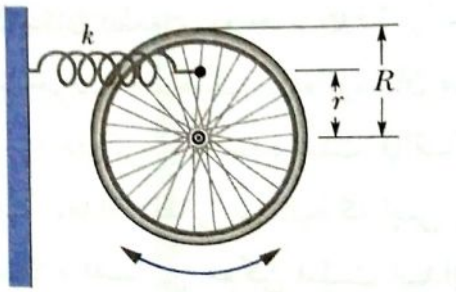
$$\Sigma\tau = I\alpha \Rightarrow I\frac{d^2\theta}{dt^2} = -[k-mg(l+\tfrac{D}{2})]\theta$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{k-mg(l+\frac{D}{2})}{I}\theta = 0$$

میله بدون جرم $I_{کل} = I_{دیسک\ حول\ محور\ دوران} = I_{cm\ دیسک} + m(l+\frac{D}{2})$، $I_{cm} = \frac{1}{2}m\frac{D^2}{4}$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \left(\frac{k-mg(l+\frac{D}{2})}{\frac{1}{2}mD^2+m(l+\frac{D}{2})}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{2\pi}{/5} \;\; ---$$

۷۰ GO چرخی می‌تواند آزادانه حول محور ثابت خـود بچرخـد. مانند شکل ۱۵-۵۲، فنری به یکی از پره‌های چرخ بـه فاصـله‌ی r از محور متصل شده است. (الف) با فرض آنکه چرخ طوقه‌ای به جـرم m و شعاع R داشته باشد، بسامد زاویه‌ای ωی نوسان‌هـای کوچـک این مجموعه را برحسب m ، R ، r ، و ثابت فنر k بـه‌دسـت آوریـد. اگر (ب) $r = R$ و (پ) $r = 0$ باشد، ω چقدر اسـ



شکل ۱۵-۵۲ مسئله‌ی ۷۰

۷۰ - ۲ :

$F_{\text{فنر}} = kx$

تقریباً $x = r\theta$

$\tau = rF$

$\tau = rF = rkx = rkr\theta = kr^2\theta$

$\sum \tau = I_0 \alpha \Rightarrow kr^2\theta = -I_0 \dfrac{d^2\theta}{dt^2}$

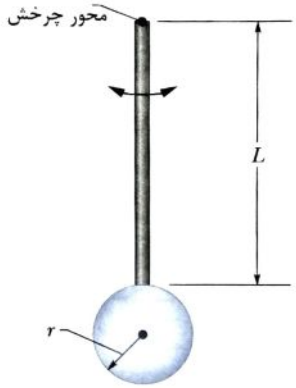
$I_{\text{حول مرکز جرم}} = mR^2$

$\rightarrow \dfrac{d^2\theta}{dt^2} + \underbrace{\dfrac{kr^2}{mR^2}}_{\omega^2}\theta = 0$

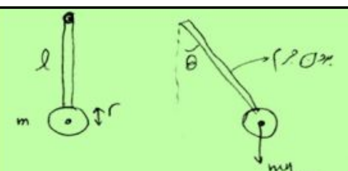
$\omega = \dfrac{2\pi}{T}$

$T = 2\pi\sqrt{\dfrac{mR^2}{kr^2}}$

۹۲ یک ساعت پاندولی قدیمی دارای آونگی است شامل یک قرص برنجی به شعاع $r = ۱۵٫۰۰\text{cm}$ و جرم $۱٫۰۰۰\text{kg}$ است که به یک میله‌ی باریک و بلند با جرم ناچیز متصل شده است. این آونگ آزادانه حول محوری نوسان می‌کند که مانند شکل ۱۵-۵۶ از محوری عمود بر میله واقع در انتهای آن می‌گذرد. اگر آونگ در محلی که $g = ۹٫۸۰۰\text{m/s}^۲$ است، برای نوسان‌های کوچک دارای دوره‌ی تناوبی برابر با $۲٫۰۰۰\text{s}$ باشد، طول L میله تا نزدیکترین دهم میلی‌متر باید چقدر باشد؟



۹۲:



$$\Sigma \tau = I\alpha \quad , \quad \tau = mg(l+r)\sin\theta$$

$$I = I_{cm\,\text{دیسک}} + m(l+r)^2 = m\left[\frac{r^2}{2} + (l+r)^2\right]$$

$$\theta < 9^\circ \rightarrow \sin\theta \approx \theta$$

$$\Rightarrow mg(l+r)\theta = -I\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \underbrace{\frac{mg(l+r)}{m\left[\frac{r^2}{2}+(l+r)^2\right]}}_{\omega^2}\theta = 0$$

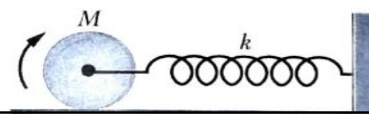
$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2} = \pi = \left(\frac{g(l+r)}{\frac{r^2}{2}+(l+r)^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$r = 0.15 \Rightarrow l = \bigcirc$$

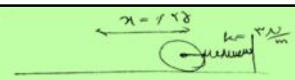
۱۰۰ در شکل ۱۵–۵۹، یک استوانه‌ی توپر که بـه فنـری افقـی (بـا $k = ۳/۰۰\,\mathrm{N/m}$) متصل اسـت، روی سـطحی افقـی بـدون لغـزش می‌غلتد. اگر این مجموعه از حالت سکون و به هنگامی کـه فنـر بـه اندازه‌ی $۰/۲۵۰\,\mathrm{m}$ کشیده است رهـا گـردد، مطلـوب اسـت (الـف) انرژی جنبشی انتقالی و (ب) انرژی جنبشـی چرخشـی اسـتوانه بـه هنگامی که از مکان تعادل می‌گذرد. (پ) نشان دهید که تحـت ایـن شرایط، مرکز جرم استوانه حرکت هماهنگ ساده‌ای با دوره‌ی تناوب

$$T = ۲\pi\sqrt{\frac{۳M}{۲k}}$$

انجام می‌دهد که در آن M جـرم اسـتوانه اسـت. (*راهنمـایی:* مشـتق زمانی انرژی مکانیکی کل را بیابید.)



۱۰۰)



$E_۱ = \frac{۱}{۲}kx^۲$

$E_۲ = \frac{۱}{۲}mv^۲ + \frac{۱}{۲}I\omega^۲$

$\omega = \frac{v}{R}$, $I_{\text{استوانه توپر}} = \frac{۱}{۲}mR^۲$

$E_۲ = \frac{۱}{۲}mv^۲ + \frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}mR^۲\times\frac{v^۲}{R^۲}$

$= \frac{۳}{۴}mv^۲$

$E_۱ = E_۲ \Rightarrow \frac{۱}{۲}kx^۲ = \frac{۳}{۴}mv^۲ \rightarrow v^۲ = \frac{۲}{۳}\frac{k}{m}x^۲$

$v = \sqrt{\frac{۲k}{۳m}}\,x$

الف) $E_{\text{جنبشی انتقالی}} = \frac{۱}{۲}mv^۲$

ب) $E_{\text{جنبشی چرخشی}} = \frac{۱}{۲}I\omega^۲ = \frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}mR^۲\times\frac{v^۲}{R^۲} = \frac{۱}{۴}mv^۲$

ج) $v_{\text{تعادل}} = \sqrt{\frac{۲k}{۳m}}\,x \rightarrow \omega = \sqrt{\frac{۲k}{۳m}} = \frac{۲\pi}{T}$

$v_{\max\,\text{نوسانی}} = \omega x$

$T = ۲\pi\sqrt{\frac{۳m}{۲k}}$