وزارت علوم تحقیقات و فناوری
مرکز نشر دانشگاهی

مکانیک تحلیلی

گرانت فاولز، جورج کسیدی



ترجمهٔ جعفر قیصری

مکانیک تحلیلی

گرانت فاولز، جورج کَسیدَی

ترجمهٔ جعفر قیصری

مرکز نشر دانشگاهی

مرکز نشر دانشگاهی
۱۳۷۲

فیزیک
۱۴۵

وزارت علوم، تحقیقات و فناوری

مرکز نشر دانشگاهی

Analytical Mechanics
Seventh Edition
Grant R. Fowles, George L. Cassiday
Brooks/Cole (Thomson), 2005

مکانیک تحلیلی

تألیف گرانت فاولز، جورج کَسیدی

ترجمهٔ جعفر قیصری

ویراستهٔ بهرام معلمی
دستیار ویراستار: نیلوفر مهدوی
نسخه‌پردازی و تهیه نمایه: نادیا فرهادتوسکی
طراح جلد: بهرام کاووسی راد
حروفچین و صفحه‌آرا: الهه عموحسن
ناظر چاپ: خشایار نصیری‌منش
مرکز نشر دانشگاهی
چاپ اول ۱۳۸۹
تعداد ۱۰۰۰
لیتوگرافی: وسمه
چاپ و صحافی: سامان
۱۳۹۰۰ تومان

نشانی فروشگاه مرکزی: خیابان انقلاب، روبه‌روی سینما سپیده، پاساژ خبیری، تلفن: ۶۶۴۰۸۸۹۱ ، ۶۶۴۱۰۶۸۶

فروش اینترنتی: http:\\eshop.iup.ir

حق چاپ برای مرکز نشر دانشگاهی محفوظ است

فهرست‌نویسی پیش از انتشار کتابخانهٔ ملی جمهوری اسلامی ایران

سرشناسه : فاولز، گرانت Fowles, Grant R
عنوان و نام پدیدآور : مکانیک تحلیلی/گرانت فاولز، جورج کسیدی؛ ترجمهٔ جعفر قیصری.
مشخصات نشر : تهران: مرکز نشر دانشگاهی، ۱۳۸۹.
مشخصات ظاهری : هشت، ۷۰۴ ص.: مصور، جدول.
فروست : مرکز نشر دانشگاهی؛ ۱۳۷۲. فیزیک؛ ۱۴۵.
شابک : 978-964-01-1372-1
وضعیت فهرست‌نویسی : فیپا
یادداشت : عنوان اصلی: Analytical mechanics, 7th ed, c2005.
یادداشت : کتاب حاضر در سالهای مختلف توسط مترجمان و ناشران متفاوت منتشر شده است.
موضوع : مکانیک تحلیلی
شناسه افزوده : کسیدی، جورج
شناسه افزوده : Cassiday, George L.
شناسه افزوده: قیصری، جعفر، مترجم
شناسه افزوده: مرکز نشر دانشگاهی
رده‌بندی کنگره : ۱۳۸۹ ۷ م ۲ ف/QA ۸۰۷
رده‌بندی دیویی : ۵۳۱/۰۱۵۱۵
شماره کتابشناسی ملی : ۲۰۶۳۵۷۸

بسم‌الله‌الرحمن‌الرحیم

فهرست

پیشگفتار ۱

۱ مفاهیم بنیادی: بردارها ۳
۱.۱ مقدمه ۳
۲.۱ سنجش فضا و زمان: یکاها و ابعاد ۵
۳.۱ بردارها ۱۳
۴.۱ ضرب داخلی (اسکالر) ۲۲
۵.۱ ضرب برداری ۲۷
۶.۱ مثالی از ضرب برداری: گشتاور نیرو ۳۰
۷.۱ ضربهای سه‌گانه ۳۲
۸.۱ تغییر دستگاه مختصات: ماتریس تبدیل ۳۳
۹.۱ مشتق بردار ۴۰
۱۰.۱ بردار مکان ذره: سرعت و شتاب در مختصات دکارتی (راستگوشه) ۴۱
۱۱.۱ سرعت و شتاب در مختصات قطبی مسطح ۴۷
۱۲.۱ سرعت و شتاب در مختصات استوانه‌ای و کروی ۵۱
مسائل ۵۷

۲ مکانیک نیوتونی: حرکت راستخط ذره ۶۱
۱.۲ قوانین حرکت نیوتون: مقدمهٔ تاریخی ۶۲

۲.۲ حرکت راستخط: شتاب یکنواخت تحت تأثیر نیروی ثابت ۷۹
۳.۲ نیروهای وابسته به‌مکان: مفاهیم انرژی جنبشی و انرژی پتانسیل ۸۲
۴.۲ نیروهای وابسته به سرعت: مقاومت شاره و سرعت حدی ۸۹
مسائل ۱۰۱
مسائل کامپیوتری ۱۰۴

۳ نوسانات ۱۰۶
۱.۳ مقدمه ۱۰۶
۲.۳ نیروی بازگردانندهٔ خطی: حرکت هماهنگ ۱۰۸
۳.۳ ملاحظات مربوط به انرژی در حرکت هماهنگ ۱۲۱
۴.۳ حرکت هماهنگ میرا ۱۲۵
۵.۳ فضای فاز ۱۳۷
۶.۳ حرکت هماهنگ واداشته: تشدید ۱۴۷
۷.۳ نوسانگر ناخطی: روش تقریبهای متوالی ۱۶۲
۸.۳ نوسانگر ناخطی: حرکت آشوبناک ۱۶۸
۹.۳ نیروی محرک غیرسینوسی: سری فوریه ۱۷۶
مسائل ۱۸۰
مسائل کامپیوتری ۱۸۴

۴ حرکت کلی ذره در سه بعد ۱۸۷
۱.۴ مقدمه: اصول کلی ۱۸۸
۲.۴ تابع انرژی پتانسیل در حرکت سه‌بعدی: عملگرِ دِل ۱۹۶
۳.۴ نیروهایی از نوع جداپذیر: حرکت پرتابی ۲۰۲
۴.۴ نوسانگر هماهنگ در دو و سه بعد ۲۱۶
۵.۴ حرکت ذرات باردار در میدانهای الکتریکی و مغناطیسی ۲۲۲
۶.۴ حرکت مقید ذره ۲۲۷
مسائل ۲۳۱
مسائل کامپیوتری ۲۳۵

عنوان	صفحه
۵ دستگاههای مرجع نالخت	۲۳۷
۱.۵ دستگاههای مختصات شتابدار و نیروهای لخت	۲۳۷
۲.۵ دستگاههای مختصات چرخان	۲۴۴
۳.۵ دینامیک ذره در دستگاه مختصات چرخان	۲۵۲
۴.۵ آثار چرخش زمین	۲۵۸
۵.۵ حرکت پرتابه در استوانهٔ چرخان	۲۶۵
۶.۵ آونگ فوکو	۲۷۳
مسائل	۲۷۵
مسائل کامپیوتری	۲۷۹
۶ گرانش و نیروهای مرکزی	۲۸۰
۱.۶ مقدمه	۲۸۰
۲.۶ نیروی گرانشی بین کرهٔ یکنواخت و ذره	۲۸۷
۳.۶ قوانین حرکت سیاره‌ای کپلر	۲۹۰
۴.۶ قانون دوم کپلر: مساحتهای مساوی	۲۹۱
۵.۶ قانون اول کپلر: قانون بیضیها	۲۹۵
۶.۶ قانون سوم کپلر: قانون هماهنگها	۳۰۵
۷.۶ انرژی پتانسیل در میدان گرانشی: پتانسیل گرانشی	۳۱۳
۸.۶ انرژی پتانسیل در میدان مرکزی عمومی	۳۲۰
۹.۶ معادلهٔ انرژی مدار در میدان مرکزی	۳۲۱
۱۰.۶ انرژیهای مداری در میدان عکس مجذور	۳۲۲
۱۱.۶ حدود حرکت شعاعی: پتانسیل مؤثر	۳۲۹
۱۲.۶ مدارهای تقریباً دایره‌ای در میدانهای مرکزی: پایداری	۳۳۳
۱۳.۶ نقاط و زوایای اوج و حضیض در مدارهای تقریباً دایره‌ای	۳۳۵
۱۴.۶ حرکت در میدان رانشی عکس مجذور پراکندگی ذرات آلفا	۳۳۸
مسائل	۳۴۴
مسائل کامپیوتری	۳۵۰

عنوان	صفحه
۷ دینامیک سیستمهای ذرات	۳۵۳
۱.۷ مقدمه: مرکز جرم و تکانهٔ خطی سیستم	۳۵۳
۲.۷ تکانهٔ زاویه‌ای و انرژی جنبشی سیستم	۳۵۷
۳.۷ حرکت دو جسم برهم‌کنش‌کننده: جرم کاهش‌یافته	۳۶۴
۴.۷ مسئلهٔ سه جسم مقید	۳۶۹
۵.۷ برخوردها	۳۸۹
۶.۷ برخوردهای مایل و پراکندگی: مقایسهٔ مختصات آزمایشگاه و مرکز جرم	۳۹۳
۷.۷ حرکت جسم با جرم متغیر: حرکت موشک	۴۰۱
مسائل	۴۰۹
مسائل کامپیوتری	۴۱۴
۸ مکانیک اجسام صلب: حرکت در صفحه	۴۱۶
۱.۸ مرکز جرم جسم صلب	۴۱۷
۲.۸ چرخش جسم صلب حول محور ثابت: گشتاور لختی	۴۲۲
۳.۸ محاسبهٔ گشتاور لختی	۴۲۴
۴.۸ آونگ فیزیکی	۴۳۵
۵.۸ تکانهٔ زاویه‌ای جسم صلب در حرکت پوسته‌ای	۴۴۳
۶.۸ مثالهایی از حرکت پوسته‌ای جسم صلب	۴۴۶
۷.۸ ضربه و برخورد در اجسام صلب	۴۵۴
مسائل	۴۵۹
مسائل کامپیوتری	۴۶۲
۹ حرکت اجسام صلب در سه بعد	۴۶۴
۱.۹ چرخش جسم صلب حول محور دلخواه: گشتاورها و حاصلضربهای لختی، تکانهٔ زاویه‌ای، و انرژی جنبشی	۴۶۵
۲.۹ محورهای اصلی جسم صلب	۴۷۷
۳.۹ معادلات اویلر حرکت جسم صلب	۴۹۰
۴.۹ چرخش آزاد جسم صلب: توصیف هندسی حرکت	۴۹۲
۵.۹ چرخش آزاد جسم صلب با یک محور تقارن: بررسی تحلیلی	۴۹۶

۶.۹ توصیف چرخش جسم صلب نسبت به دستگاه مختصات ثابت: زاویه‌های اویلری ۵۰۱
۷.۹ حرکت فرفره ۵۱۱
۸.۹ معادلهٔ انرژی و رقص محوری (ناوش) ۵۱۶
۹.۹ قطب‌نمای ژیروسکوپی ۵۲۳
۱۰.۹ چرا لانس آرمسترانگ (معمولاً) زمین نمی‌خورد ۵۲۶
مسائل ۵۳۱
مسائل کامپیوتری ۵۳۶

۱۰ مکانیک لاگرانژی ۵۳۸
۱.۱۰ اصل وردشی هامیلتون: یک مثال ۵۴۰
۲.۱۰ مختصات تعمیم‌یافته ۵۴۶
۳.۱۰ محاسبهٔ انرژیهای جنبشی و پتانسیل برحسب مختصات تعمیم‌یافته: یک مثال ۵۵۰
۴.۱۰ معادلات لاگرانژ حرکت برای سیستمهای پایسته ۵۵۵
۵.۱۰ بعضی کاربردهای معادلات لاگرانژ ۵۵۶
۶.۱۰ تکانه‌های تعمیم‌یافته: مختصات حذف‌شدنی ۵۶۴
۷.۱۰ نیروهای قیدی: ضریبهای لاگرانژ ۵۷۲
۸.۱۰ اصل دالامبر: نیروهای تعمیم‌یافته ۵۷۷
۹.۱۰ تابع هامیلتونی: معادلات هامیلتون ۵۸۵
مسائل ۵۹۱
مسائل کامپیوتری ۵۹۷

۱۱ دینامیک سیستمهای نوسانی ۵۹۹
۱.۱۱ انرژی پتانسیل و تعادل: پایداری ۶۰۰
۲.۱۱ نوسان سیستمی با یک درجهٔ آزادی حول وضعیت تعادل ۶۰۴
۳.۱۱ نوسانگرهای هماهنگ جفت‌شده: مختصات بهنجار (عادی) ۶۰۸
۴.۱۱ نظریهٔ کلی سیستمهای ارتعاشی ۶۳۶
۵.۱۱ ارتعاش نخ باردار یا آرایهٔ خطی نوسانگرهای هماهنگ جفت‌شده ۶۴۳
۶.۱۱ ارتعاش سیستم پیوسته: معادلهٔ موج ۶۵۰

عنوان | صفحه

مسائل ۶۵۵
مسائل کامپیوتری ۶۶۲

پیوست الف ۶۶۴

پیوست ب ۶۶۸

پیوست ج ۶۷۱

پیوست د ۶۷۵

پیوست ه ۶۷۸

پیوست و ۶۸۰

پیوست ز ۶۸۲

پیوست ح ۶۸۴

پیوست ط ۶۹۱

پاسخ مسائل برگزیده ۷۰۰

مراجع برگزیده ۷۰۴

نمایه ۷۰۶

پیشگفتار

این کتاب برای درس مکانیک کلاسیک در دورهٔ کارشناسی در نظر گرفته می‌شود که عموماً دانشجویان رشتهٔ فیزیک، علوم وابسته به فیزیک، یا مهندسی آن را انتخاب می‌کنند. فرض می‌کنیم که دانشجو درس فیزیک پایه را گذرانده و حساب دیفرانسیل و انتگرال را به‌خوبی فراگرفته باشد. توصیهٔ اکید می‌کنیم که درس حساب دیفرانسیل و انتگرال پیشرفته در ریاضیات که معادلات دیفرانسیل مقدماتی و ماتریسها را در برمی‌گیرد، پیش از این درس مکانیک یا همزمان با آن گذرانده می‌شود.

ویراست هفتم این کتاب بر پایهٔ همان بینش و طرح کلی و مندرجات ویراستهای قبلی است: در این کتاب بر شرح و بسط و تفسیر مکانیک نیوتونی با صورت‌بندی پیشرفته‌تر لاگرانژی و هامیلتونی تمرکز می‌کنیم که فقط در دو فصل آخر به‌کار برده می‌شوند. مطالب جدیدی بر برخی فصول افزوده و مطالب قدیمی از برخی از آنها حذف شده است. برای برطرف کردن اشتباهات حروفچینی، خطاهای غیرعمدی، و عرضهٔ غیرشفاف مطالب تلاش دامنه‌داری صورت گرفته است. بر توضیحات برخی از مفاهیم دشوارتر افزوده و شکلها و مثالهای زیادی به آنها اضافه شده است، به این نیت که به شفافیت بیشتری برسیم. اصلاحات زیادی در بسیاری از بخشها صورت گرفته و بخشهای جدید چندی بر آنها اضافه شده است. بخشهایی که در آنها برای قسمتی از حل مسئله از نرم‌افزارهایی مانند مَتکد و متماتیکا[1] بهره‌گیری می‌شود، جمع‌وجورتر شده‌اند و جزئیاتشان به پیوستی در آخر کتاب منتقل شده است.

عنوان هر فصل به‌اختصار از این قرار است:

- فصل ۱. آشنایی مختصری با آنالیز ابعادی و جبر برداری؛ مفاهیم سرعت و شتاب.
- فصل ۲. قوانین حرکت نیوتون؛ حرکت در یک بعد. بسط بحث دستگاههای مرجع لخت. آشنایی با حل عددی مسائل با بهره‌گیری از برنامهٔ متکد (*Mathcad*): سقوط قائم در شاره.

1. Mathematica

- فصل ۳. حرکت هماهنگ، تشدید، نوسانگر واداشته. حل عددی مسائل نوسانگر ناخطی.
- فصل ۴. حرکت ذره در سه بعد. انرژی پتانسیل و نیروهای پایستار. آشنایی با حل عددی مسائل بهره‌گیری از نرم‌افزار متماتیکا؛ حرکت پرتابه در محیط مقاوم؛ سنجش بُرد برای پرتاب توپ بیسبال میکی‌مانتِل به‌کمک نوار اندازه‌گیری (متر).
- فصل ۵. تحلیل حرکت در دستگاه مرجع نالخت و نیروهای پنداری. حل عددی حرکت پرتابه در دستگاه مرجع چرخان.
- فصل ۶. گرانش. بحث گسترده‌تر دربارهٔ نیروهای مرکزی. مقاطع مخروطی و مدارها. بحث دامنه‌دار در خصوص انرژی مداری. معیار مربوط به مدارهای پایدار. پراکندگی رادرفورد.
- فصل ۷. سیستمهای بس(دو یا چند)ذره‌ای. مسئلهٔ سه جسم: حل عددی. نقاط لاگرانژی. قوانین بقا (پایستگی) و برخوردها. نمایش تعمیم‌یافتهٔ حرکت موشک.
- فصل ۸. چرخش جسم حول محور ثابت. بحث گسترده در خصوص حرکت لایه‌ای. گشتاورهای لختی.
- فصل ۹. چرخش جسم در سه بعد. حل عددی مسائل مربوط به چرخش اجسام صلب با گشتاورهای لختی اصلی متفاوت. حرکت فرفره‌ها و ژیروسکوپها. پایداری چرخ دوچرخهٔ چرخان. (علی‌الاصول چرا سر فوارهٔ لولهٔ خرطومی واژگون نمی‌شود؟)
- فصل ۱۰. مکانیک لاگرانژی و هامیلتونی. اصول دالامبر و هامیلتون. قوانین بقا (پایستگی).
- فصل ۱۱. نوسانگرهای جفت‌شده. مختصات بهنجار و مدهای بهنجار نوسان. مسئلهٔ ویژه‌مقدار. ریسمان باردار و حرکت موجی.

مثالهای حل‌شدهٔ بیشتری به این ویراست افزوده شده است. اکثر مثالهای حل‌شده را می‌توان در پایان هر بخش یافت. مسائلی را که در نخستین مجموعهٔ آخر هر فصل یافت می‌شوند، می‌توان به‌طور تحلیلی حل کرد. مجموعهٔ دوم شامل مسائلی است که نوعاً با بهره‌گیری از نرم‌افزارهای مَتکد، متماتیکا یا هر نرم‌افزار دیگری که دانشجو خودش مناسب بداند یا مدرس آن را توصیه کند، به‌طور عددی حل می‌شوند.

پیوستها شامل اطلاعات یا مطالب مرجعی‌اند که به دانشجویی که برای حل مسائل می‌کوشد کمک کنند تا بدون اینکه برای یافتن داده‌ها با مراجعه به جای دیگری وقتش تلف شود، مسائل را حل کند. جواب تعدادی از مسئله‌های گزیده با شمارهٔ فرد در آخر کتاب آمده است.

کتابچهٔ حل‌المسائل به‌روزشده برای مدرسانی تهیه شده است که تدریس این کتاب را اختیار کرده‌اند.

جورج کسیدی

۱

مفاهیم بنیادی:
بردارها

«هرکس هندسه نمی‌داند وارد نشود.»
نوشتهٔ سر درآکادمی افلاتون

۱.۱ مقدمه

علم مکانیک کلاسیک دربارهٔ حرکت اشیاء در فضا و زمانِ مطلق، به‌معنای نیوتونی آن، بحث می‌کند. هرچند مفاهیم فضا و زمان در تکوین مکانیک کلاسیک جنبهٔ اساسی داشته‌اند، بعد از گذشت مدتی بیش از دو و نیم قرن از انتشار کتاب اصول ریاضی فلسفهٔ طبیعی سر آیزاک نیوتون در سال ۱۶۸۷، کماکان مباحثی بحث‌انگیزند. چنان‌که نیوتون در صفحات اول پرینکیپیا آورده است: "زمان مطلق، حقیقی، و ریاضی، به‌تنهایی، و بنابر ماهیتش، به‌آرامی و بدون رابطه با هر چیز خارجی جاری می‌شود، و نام دیگرش دوام و استمرار است. فضای مطلق، بنابر ماهیتش، بدون رابطه با هر چیز خارجی، همواره یکسان و بی‌حرکت باقی می‌ماند".

ارنست ماخ (۱۹۱۶ـ۱۸۳۸) که تأثیر بسیار زیادی بر آلبرت اینشتین برجای نهاد، اعتبار این دو مفهوم نیوتونی را در کتابش تحت عنوان بیان انتقادی و تاریخی علم مکانیک (۱۹۰۷) مورد تردید قرار داد. وی در این کتاب ادعا کرد که نیوتون برخلاف منظورش مبنی بر اینکه "هیچ فرضیه‌ای نمی‌سازم" عمل کرده است، یعنی به‌عنوان مقدمات بنیادی یک نظریهٔ علمی، هیچ چیزی را نپذیرد که نتواند مستقیماً از "پدیده‌های مشاهده‌پذیر" یا از طریق برهان و استدلال از آنها استنتاج کند. در واقع گرچه نیوتون در آستانهٔ بیان تام و تمام این مطلب در جلد سوم اصول به‌عنوان قانون پنجم و آخرین قانون از قوانین فلسفی (قوانین استدلال در فلسفه) قرار گرفته بود، جالب است که از انجام این کار خودداری ورزیده است.

نیوتون در سراسر حیات علمیش فرضیه‌های زیادی را بیان و بسیاری از آنها را به‌عنوان باطل رد کرده است؛ او بسیاری از این فرضیه‌ها را صرفاً تحت این عنوان که بدون زیان‌اند، تحمل کرده است؛ وی از فرضیه‌های قابل اثبات به‌خوبی بهره جسته است. اما با دسته‌ای از فرضیه‌ها مواجه شد که نه "بر پایهٔ پدیده‌های مشاهده‌پذیر بودند و نه از طریق بحث و بر پایهٔ استقرار از آن پدیده‌ها قابل‌استنتاج،" و در عین‌حال اجتناب‌ناپذیر به‌نظر می‌رسیدند. مفاهیم فضا و زمان در نزد او در این دسته قرار می‌گرفتند. پذیرش چنین فرضیه‌هایی به‌صورت فرضیه‌های بنیادی، ضرورتی نامطلوب بود؛ ازاین‌رو، وی از پذیرفتن قاعدهٔ اجتناب از فرضیه‌سازی اکراه داشت. قطعاً می‌توان نیوتون را از این تصور تبرئه کرد. رویهمرفته، پذیرش این فرضیه‌ها و فرضیه‌های دیگر از این دست (مانند "نیروی" گرانش) به نگرشی ظریف و جامع بر جهان انجامید، که مانند آن هرگز مشاهده نشده است.

در اواخر قرن هجدهم و اوایل قرن نوزدهم، انجام آزمایشهایی در حوزهٔ الکتریسیته و مغناطیس پدیده‌هایی را آشکار کردند که آنها را فقط می‌شد از دیدگاه الگوی جدید فضاـزمان، که ناشی از نسبیت خاص آلبرت اینشتین بود، درک کرد. هرمان مینکوفسکی این الگوی جدید را در سخنرانی نه‌چندان همگانی خود در کُلن، در آلمان در سال ۱۹۰۸ از این قرار معرفی کرد:

> آقایان! چشم‌اندازهای فضا و زمانی که می‌خواهم در برابر چشمان شما قرار دهم از خاک فیزیک تجربی سربرآورده‌اند و پایه‌هایشان را هم در همان خاک استوار می‌کنند. این چشم‌اندازها ریشه‌نگرند. از این پس، فضا به‌تنهایی و زمان به‌تنهایی محکوم به نابودی و محو شدن در سایه‌هاست، و فقط یک نوع اتحاد بین این دو واقعیتی مستقل را حفظ خواهد کرد.

به این ترتیب، گرچه مفاهیم فضا و زمان نیوتونی جای خود را به مفهومی جدید سپردند، وی با قطعیت تمام از ظهور مفهوم جدید فضاـزمان مبتنی بر "پدیده‌های" مشاهده‌پذیر، که قاعدهٔ نانوشتهٔ اجتناب از فرضیه‌سازی او را به‌ثبوت رسانده، بسیار شادکام شده است.

۲.۱ سنجش فضا و زمان: یکاها[۱] و ابعاد

فرض می‌کنیم فضا و زمان دقیقاً به معنی نیوتونی توصیف می‌شوند. فضای سه‌بعدی اقلیدسی است، و مکان نقاط در آن فضا با مجموعهٔ سه‌عددی (x, y, z) نسبت به مبدأ $(۰, ۰, ۰)$ دستگاه مختصات دکارتی راست‌گوشه مشخص می‌شود. طول عبارت است از فاصلهٔ فضایی بین دو نقطه نسبت به طولی استاندارد.

زمان نسبت به طول مدت بازگشت پیکربندی مفروضی از یک دستگاه چرخه‌ای به حالت اولیه‌اش سنجیده می‌شود؛ مثلاً، آونگی که نوسان رفت‌وبرگشتی اجرا می‌کند، زمین چرخان حول محورش، یا امواج الکترومغناطیسی یک اتم سزیم که داخل یک کاواک فلزی ارتعاش می‌کند. زمان وقوع هر رویدادی را با عددی چون t مشخص می‌کنند که تعداد برگشتهای پیکربندی مفروض یک استاندارد چرخه‌ای برگزیده را نشان می‌دهد. مثلاً، اگر یک ارتعاش آونگ فیزیکی استانداردی را برای تعریف یک ثانیه به‌کار گیرند، در این صورت وقتی گفته می‌شود که رویدادی در $t = ۲٫۳\text{s}$ اتفاق افتاده، منظور این است که وقتی آن رویداد اتفاق افتاده، آونگ استاندارد ۲٫۳ ارتعاش بعد از "شروع" حرکتش در $t = ۰$ انجام داده است.

تمام این سنجشها به‌قدر کافی ساده‌اند، ولی یک مشکل اساسی در این‌گونه سنجشها پیش می‌آید: یکاهای استاندارد چیستند؟ انتخاب استانداردها معمولاً به‌جای آنکه به‌دلایل علمی باشد بیشتر به‌دلایل سیاسی صورت گرفته است. مثلاً، وقتی می‌گویند طول اندام کسی ۶ فوت است، یعنی فاصلهٔ بین نوک سر تا کف پایش شش برابر طول چیزی است که یکای استاندارد یک فوت انتخاب شده است. قبلاً، ممکن بود عملاً طول کف پای آدمی یا چیزی را که تقریباً به‌همان طول بود یکای طول در نظر می‌گرفتند، مطابق نوشتهٔ لئوناردو داوینچی در خصوص چشم‌اندازهای ویتروویوس پولیو[۲]، معمار-مهندس (قرن اول ق‌م):

> ...ویتروویوس توضیح می‌دهد که طبیعت اندازه‌های انسانی را به این طریق آراسته است: چهار انگشت یک کف دست و چهار کف دست یک فوت است؛ شش کف دست یک ذراع (۴۵ تا ۶۵ سانتیمتر) می‌شود؛ چهار ذراع یک قد انسان است. چهار ذراع یک گام را تشکیل می‌دهد، و ۲۴ کف دست یک قد انسان است...

واضح است که اختیار کردن چنین استانداردی برای یک سنجه و معیار دقیقاً تکثیرکردنی جایز نیست. یک بانوی خانه‌دار پیشین ممکن است هنگامی که یک توپ پارچه خریده که طول آن با

۱. شرحی دلچسب از تاریخچهٔ استانداردسازی یکاها را می‌توان درکتابی با مشخصات زیر یافت:
Klein, H. A., *The Science of Measurement–A Historical Survey*, Dover Publ., Mineola, 1988, ISBN0-486-25839-4(pbk).

2. Vitruvius Pollio

معیار منطبق با فوت کوتاه‌قدشدهٔ معمول شاهی، اندازه‌گیری شده بود، خشم خود را بر اثر "فوتهای کوتاه‌شده" فرو خورده باشد.

یکای طول

انقلاب فرانسه، که با کودتای سال ۱۷۹۹ ناپلئون به‌نقطهٔ پایان خود رسید، (از جملهٔ چیزهای دیگر) به تدوین طرحی فوق‌العاده مهم برای اصلاح اندازه‌گیریها انجامید. ثمرهٔ آن اصلاحات، یعنی دستگاه متریک، در سال ۱۹۶۰ به دستگاه بین‌المللی یکاها (SI) تعمیم یافت.

در سال ۱۷۹۱، در پایان نشست (مجلس) ملی فرانسه، شارل موریس دو تالیران-پریگور[1] (۱۸۳۸-۱۷۵۴) پیشنهاد کرد که تکلیف اصلاحات اوزان و مقادیر بر عهدهٔ هیئت "نوار آبی" که اعضای آن از اعضای فرهنگستان علوم فرانسه انتخاب می‌شدند، واگذار شود. موضوع واضح و روشن نبود. جامعهٔ فرانسه، هم از لحاظ سیستمهای اندازه‌گیری (اندازه‌شناسی) و هم از نظر سیاسی، به نحو مضحکی متفرق، آشفته و پیچیده بود. یکای طولی که در پاریس رسمی شناخته می‌شد در بوردو حدود ۴٪ کوتاهتر، در مارسی ۲٪ کوتاهتر و در لیل هم ۲٪ بلندتر بود. قرار شد هیئت بررسی آکادمی علوم تمام این موارد را تغییر دهد. بریتانیا و ایالات متحدهٔ امریکا دعوت فرانسه را برای مشارکت در فرایند استانداردسازی یکاها رد کردند. به این ترتیب بود که در کشورهای انگلیسی زبان ضدیت با دستگاه متریک به‌وجود آمد.

این هیئت عدد ده را مبنای عددی تمام سنجه‌ها اختیار کرد. یکای بنیادی طول یک‌ده‌میلیونیم یک‌چهارم محیط دایرهٔ استوای زمین یا یک‌چهارم یک مدار نصف‌النهاری کامل گرفته شد. عملیات نقشه‌برداری (مساحیی) از دون کرک بر کانال انگلیس تا جایگاهی در نزدیکی بارسلونا در ساحل مدیترانه‌ای اسپانیا (طولی معادل ده درجهٔ عرض جغرافیایی یا یک‌نهم ربع محیط دایرهٔ استوای زمین) صورت گرفت تا این یکای بنیادی طول به‌دقت تعیین شود. سرانجام، این ره‌نوردی به‌یادماندنی، که از سال ۱۷۹۲ تا ۱۷۹۹ به درازا کشید، متر استاندارد را ــ و از روی مساحیهای کمتر بلندپروازانهٔ پیشین برآورد شده بود ــ به اندازهٔ ۳ر° میلی‌متر یا حدود ۳ قسمت در ۱۰۰۰۰، تغییر داد. حالا می‌دانیم که این نتیجه نیز با همان ضریب اشتباه بوده است. طول یک چهارم نصف‌النهاری استاندارد ۱۰۰۰۲۲۸۸٫۳m، کمی بیشتر از ۲ قسمت در ۱۰۰۰۰ است، که در اندازه‌گیری طول یک‌چهارم محیط دایرهٔ استوایی در سفر اکتشافی دون کرک[2]ـبارسلونا تعیین و تثبیت شد.

موضوع جالب اینکه، در سال ۱۷۹۹ که طی آن نقشه‌برداری دون کرکـبارسلونا کامل شد، مجلس ملی فرانسه استانداردهای جدیدی، از جمله متر، را تصویب کرد. متر استاندارد در آن هنگام فاصلهٔ بین دو خراش ظریف روی میله‌ای از آلیاژ پلاتین و ایریدیم با سطح مقطعی به‌شکل X بود

1. Charles Maurice de Talleyrand-Perigord 2. Dunkirk

که پیچش و خمیدگی میله را به حداقل می‌رساند. ایالات متحده دو بدل از این میله را ساخت و به شماره‌های ۲۱ و ۲۷ در ادارهٔ استانداردها در گیترزبورگ، امدی[1]، در مجاورت واشینگتن دی‌سی، نگهداری کرد. اندازه‌گیریهای مبتنی بر این استاندارد از دقتی حدود یک قسمت در 10^6 برخوردارند. بنابراین، هر شیئی (میله‌ای از جنس پلاتین)، به‌جای مفاهیمی که به‌آن منجر شدند، به‌صورت متر استاندارد تثبیت شد. اگر محیط دایرهٔ زمین برای این منظور انتخاب می‌شد، شاید تغییری در آن رخ می‌داد، اما متر استاندارد در یک سردابه واقع در شهر سِوْر در نزدیکی پاریس، برای همیشه سالم و دست‌نخورده باقی می‌ماند؛ این استاندارد تا دههٔ ۱۹۶۰ پابرجا بود.

در یازدهمین همایش عمومی اوزان و مقادیر که در سال ۱۹۶۰ برگزار شد، نور نارنجی مایل به قرمز تابشی از اتمهای کریپتون ۸۶ استاندارد بعدی طول اختیار شد، که بر مبنای آن، متر بنابر تعریف، از این قرار است:

> متر عبارت است از طولی مساوی با ۱۶۵۰۷۶۳٫۷۳ برابر طول‌موجهای تابش متناظر با گذار بین ترازهای $2p^{10}$ و $5d^5$ اتم کریپتون در خلأ.

کریپتون پیرامون محیط زندگی ما یافت می‌شود؛ حدود یک قسمت در میلیون جوّ کنونی کرهٔ زمین را تشکیل می‌دهد. وزن اتمی کریپتون جوّیْ ۸۳٫۸ و مخلوطی از شش ایزوتوپ، به وزن اتمی ۷۸ تا ۸۶، است. کریپتون ۸۶ حدود ۶۰٪ این ایزوتوپها را تشکیل می‌دهد. بنابراین، متر برحسب "نوع غالب" کریپتون تعریف شده است. در لامپهای استاندارد میزان ایزوتوپهای دیگر بیشتر از ۱٪ نیست. دقت اندازه‌گیریهایی که براساس این استاندارد انجام شدند، حدود یک در 10^8 بود.

از سال ۱۹۸۳ به بعد، متر استاندارد برحسب سرعت نور مشخص و تعریف شده است. متر عبارت است از فاصله‌ای که نور در مدت‌زمان ۱/۲۹۹۷۹۲۴۵۸ ثانیه در خلأ می‌پیماید. به بیان دیگر، این تعریف سرعت نور را ۲۹۹۷۹۲۴۵۸ متر بر ثانیه تعیین می‌کند. واضح است که این تعریف استاندارد طول را به استاندارد زمان وابسته می‌کند.

یکای زمان

حرکتهای نجومی، سه یکای بزرگ "طبیعی" زمان یعنی روز، ماه، و سال را در اختیار ما قرار می‌دهند. روز براساس چرخش زمین حول محور خودش، ماه بر پایهٔ دوران ماه به دور زمین، و سال بر مبنای دوران زمین به گرد خورشید استوار است. علت وجود نسبتهای ۶۰:۱ و ۲۴:۱، که ارتباط‌دهندهٔ روز، ساعت، دقیقه، و ثانیه‌اند، چیست؟ این روابط حدود ۶۰۰۰ سال پیش، در جلگه‌های آبرفتی بین‌النهرین (عراق کنونی) پدید آمدند، که نخستین تمدن و شهرنشینی در جهان در آنجا پاگرفت. دستگاه عددی بین‌النهرینی بر مبنای ۶۰ استوار بود، نه بر پایه یا مبنای رده که

1. Gaithersburg, MD

اکنون متداول است. ظاهراً، دستگاه اعداد اهالی بین‌النهرین بیشتر تحت تأثیر ۳۶۰ روز سال، ۳۰ روز ماه، و ۱۲ ماه سال بود. در چنین محیطی بود که نظارهٔ آسمان و سنجش مواضع ستارگان از همان ابتدا از دقت و تداوم برخوردار شد. حرکات اجرام آسمانی در پهنهٔ آسمان به دستگاههای اندازه‌گیری زمان (ساعتهای کنونی) بدل شدند.

ثانیه، یکای بنیادی زمان در SI، از همان آغاز کسر دلخواهی (۱/۸۶۴۰۰) از روز خورشیدی میانگین (۸۶۴۰۰ = ۶۰ × ۶۰ × ۲۴) بوده است. ولی اشکال ساعتهای نجومی از این قرار است که ثابت باقی نمی‌مانند. روز متوسط خورشیدی طولانی می‌شود، و ماه قمری، یا فاصلهٔ زمانی بین دو اهلهٔ متوالی قمر، کوتاه می‌شود. در سال ۱۹۵۶ یک ثانیهٔ جدید تعریف شد که عبارت بود از (۱/۳۱۵۵۶۹۲۶) یک سال خورشیدی متوسط، که با دقت و به‌نحو خاصی در سال ۱۹۰۰ اندازه‌گیری شده بود. این تعریف ثانیه مدت زیادی دوام نیافت. در سال ۱۹۶۷، مجدداً ثانیه برحسب تعداد مشخصی از نوسانهای ساعت اتمی سزیم تعریف شد.

ساعت اتمی سزیم از یک باریکهٔ اتم سزیم ۱۳۳ تشکیل می‌شود که از کاواک فلزی خالی از هوایی، با میکروموجهای جذب‌شونده و تابش‌کننده‌ای با بسامد خاص تشدید ۹٬۱۹۲٬۶۳۱٬۷۷۰ هرتز (Hz)، یا حدود 10^{10} سیکل بر ثانیه، می‌گذرد. این فرایند جذب و تابش وقتی اتفاق می‌افتد که اتم سزیم معینی وضعیت خود را در این فرایند تغییر می‌دهد؛ یعنی مقدار معینی انرژی به شکل جذب پرتو میکروموجی کسب می‌کند یا با تولید پرتو میکروموجی، از دست می‌دهد. دو پیکربندی متفاوت انرژی با وضعیتهایی متناظرند که در آنها اسپینهای هستهٔ سزیم و تک الکترون پوستهٔ خارجی آن، در جهتهای مخالف (پایین‌ترین حالت انرژی)، یا هم‌خط (بالاترین حالت انرژی) باشند. این نوع گذار اتمی ناشی از "تغییر اسپین" را گذار فوق‌ریز می‌نامند. تفاوت انرژی، و بنابراین، بسامد تشدید دقیقاً به‌کمک ساختار تغییرناپذیر اتم سزیم تعیین می‌شوند. این ساختار از یک اتم به اتم دیگر تغییر نمی‌کند. ساعت سزیم که به‌طور دقیق تنظیم و نگهداری شده باشد، می‌تواند زمان را با دقتی حدود یک قسمت در 10^{12} بسنجد. بنابراین، ظرف مدت یک‌سال، اختلاف آن از زمان صحیح نباید بیشتر از حدود ۳۰ میکروثانیه (30×10^{-6} s) باشد. وقتی دو ساعت سزیم مختلف را با هم مقایسه کنیم، معلوم می‌شود که با دقتی حدود یک قسمت در 10^{10}، بر هم منطبق‌اند.

به‌علت چنین پایداری و قابلیت تکثیری، طی سیزدهمین نشست عمومی اوزان و مقادیر در سال ۱۹۶۷، جایگزینی اتم سزیم ۱۳۳ برای تمامی اجسام آسمانی به‌صورت پایهٔ اولیهٔ یکای زمین، اجتناب‌ناپذیر شد. در این نشست، مبنای جدید با کلمات تاریخی مشروح در زیر تثبیت شد:

"ثانیه عبارت است از طول مدت اجرای ۹٬۱۹۲٬۶۳۱٬۷۷۰ دورهٔ تناوب تابش متناظر با گذار بین دو تراز فوق‌ریز اتم سزیم ۱۳۳".

به این ترتیب درست همان‌طوری که متر دیگر به سطح زمین بستگی ندارد، ثانیه هم دیگر از حرکت "تیک‌ـتاک" اجرام آسمانی مشتق نمی‌شود.

یکای جرم

این فصل را با این گزاره که "علم مکانیک به حرکت در اشیاء می‌پردازد"، آغاز کردیم. جرم مفهوم[۱] آخری است که برای مشخص کردن کامل هر کمیت فیزیکی ضروری است. کیلوگرم یکای پایهٔ جرم به شمار می‌آید. این استاندارد اولیه نیز در یک سردابه در سِوْرِ فرانسه نگهداری می‌شود؛ بدلهای این استاندارد اولیه در اختیار اکثر کشورهای دنیا قرار داده شده است و آنها آن را در کشور خود حفظ کرده‌اند. توجه کنید که یکاهای طول و زمان بر مبنای استانداردهای اتمی استوار شده‌اند. این یکاها در تمام دنیا تکثیرپذیر و واقعاً فناناپذیرند. متأسفانه، یکای جرم از جنبهٔ چندان مستحکمی برخوردار نیست.

مفهوم جرم، که در این کتاب به‌کار می‌بریم، همان مفهوم ذره یا نقطهٔ مادی، یعنی هویتی دارای جرم اما بدون امتداد فضایی (مکانی) است. واضح است که این ذره یک آرمان‌سازی بدون موجودیت است، و وجود خارجی ندارد. با همهٔ این احوال، این مفهوم به‌عنوان تقریب مفید اشیاء فیزیکی در شرایطی خاص، به‌کار می‌آید، یعنی در وضعیتی که بعد شیئی در مقایسه با ابعاد محیط اطرافش کوچک باشد. نمونه‌های این مورد عبارت‌اند از حشره‌ای روی صفحهٔ گرامافون، توپ بیسبالی در حال حرکت در هوا، و گردش زمین در مداری به‌دور خورشید.

این یکاها (کیلوگرم، متر، و ثانیه) پایه‌های دستگاه SI را تشکیل می‌دهند.[۲] معمولاً دستگاههای دیگری نیز؛ مانند دستگاههای cgs (سانتی‌متر، گرم، ثانیه)، و fps (فوت، پوند، ثانیه) به‌کار گرفته می‌شوند. این دستگاهها را می‌توان دستگاههای ثانوی پنداشت، زیرا یکاهای آنها به‌صورت کسرهایی از یکاهای استاندارد SI تعریف شده‌اند (ر.ک. پیوست الف).

ابعاد

معمولاً، ابعاد را سه جهت دوبه‌دو عمود بر هم در فضا تلقی می‌کنیم که هر جسم می‌تواند در امتداد آنها حرکت کند. مثلاً، حرکت هواپیما را می‌توان برحسب حرکتش در جهتهای شرق‌ـغرب، شمال‌ـجنوب، و بالا‌ـپایین تشریح کرد. اما، این اصطلاح در فیزیک مشابهی دارد که معنی آن خیلی بنیادی‌تر است.

مثال ۱.۲.۱ تبدیل یکاها

طول یک سال نوری (LY) به‌متر چقدر است؟

۱. دربارهٔ مفهوم جرم در فصل دوم صحبت خواهیم کرد.
۲. سایر یکاهای بنیادی و فرعی را در پیوست الف ببینید.

حل:
سرعت نور عبارت است از $c = 1\mathrm{LY/Y}$. فاصله‌ای که نور در مدت یک سال $T = 1Y$، می‌پیماید عبارت است از

$$D = cT = \left(1\frac{\mathrm{LY}}{\text{¥}}\right) \times 1\,\text{¥} = 1\mathrm{LY}$$

اگر بخواهیم یک سال نوری را برحسب متر بیان کنیم، با سرعت نور که برحسب آن یکاها بیان شده‌اند شروع می‌کنیم. این سرعت عبارت است از ثانیه/متر^{8}۱۰ × ۳٫۰۰ = c . اما، یکای زمانی که در این عبارت آمده ثانیه است، و حال آنکه فاصلهٔ زمانی T به سال بیان می‌شود، از این‌رو

$$1\mathrm{LY} = (3{,}00 \times 10^{8}\mathrm{m/s}) \times (1\mathrm{Y}) = 3{,}00 \times 10^{8}\mathrm{m} \times (1\mathrm{Y}/1\mathrm{s})$$

در نتیجه‌ای که به‌دست می‌آوریم، باید زمانهای مختلف برحسب یکای یکسانی بیان شوند تا نسبت بدون بعد به‌دست آید و جواب فقط برحسب یکای متر باقی بماند. با تبدیل ۱Y به مقدار معادلش برحسب ثانیه، این خواست تحقق می‌یابد:

$$\begin{aligned}1\mathrm{LY} = &(3{,}00\times10^{8}\text{متر})\times(1\text{سال}/1\text{ سال})\times(365\text{روز}/1\text{سال})\times(24\text{ساعت}/1\text{روز})\\ &\times(60\text{دقیقه}/1\text{ساعت})\times(60\text{ثانیه}/1\text{دقیقه})=(3{,}15\times10^{7}\text{ثانیه}/1\text{ثانیه})\\ &\times(3{,}00\times10^{8}\text{متر})=9{,}46\times10^{15}\text{متر}\end{aligned}$$

یک سال را در نسبتهای متوالی که مقادیر هر کدام ذاتاً بدون بعد و مساوی یک‌اند، ضرب کرده‌ایم. مثلاً ۳۶۵روز= ۱سال؛ از این‌رو، ۱ = (۱سال/۱سال) = (۱سال/۳۶۵روز). ضربها مقدار ذاتی نتیجه را تغییر نداده‌اند. آنها فقط مقدار (۱ سال) را به‌مقدار معادلش برحسب ثانیه تبدیل کرده‌اند تا یکای ثانیه "حذف شود" و نتیجه‌ای که به متر بیان شده، باقی بماند.

برای توصیف کامل یا مشخص کردن خصوصیت رفتار یک دستگاه فیزیکی که در مطالعهٔ مکانیک کلاسیک با آن مواجه‌ایم، در اختیار داشتن بیشتر از سه کمیت بنیادی لازم نیست: فضایی که اجسام اشغال می‌کنند، ماده‌ای که از آن تشکیل شده‌اند، و مدت زمان حرکت اجسام. به بیان دیگر، مکانیک کلاسیک دربارهٔ حرکت اشیائی فیزیکی در فضا و زمان بحث می‌کند. همهٔ اندازه‌گیریهای آن حرکت سرانجام می‌تواند به ترکیباتی از اندازه‌گیریهای جرم، طول، و زمان تجزیه شوند. شتاب، a، سببی که می‌افتد به‌صورت نسبت تغییر سرعت به تغییر زمان و سرعت به‌صورت نسبت تغییر مکان (طول) به تغییر زمان اندازه‌گیری می‌شود. بنابراین، اندازه‌گیری شتاب با اندازه‌گیرهای طول و زمان

کاملاً مشخص می‌شود. مفاهیم جرم، طول، و زمان بنیادی‌تر از یکاهای دلخواهی‌اند که مقیاس اندازه‌گیری آنها انتخاب می‌کنیم. جرم، طول، و زمان، سه بعد مقدماتی تمام کمیتهای فیزیکی را مشخص می‌کنند. ما نمادهای $[M]$، $[L]$، و $[T]$ را برای مشخص کردن این سه بعد مقدماتی به‌کار می‌بریم. بعد هر کمیت فیزیکی به‌صورت ترکیب جبری $[M]$، $[L]$، و $[T]$ تعریف می‌شود که لازم است به‌طور کامل اندازه‌گیری آنها کمیت فیزیکی را مشخص کند. به بیان دیگر، بعد هر کمیت فیزیکی را می‌توان به‌صورت $[M]^{\alpha}[L]^{\beta}[T]^{\gamma}$ نوشت، که α، β، و γ به‌ترتیب توانهای این بعدهای مقدماتی به‌شمار می‌آیند. مثلاً، بعد شتاب a عبارت است از

$$[\alpha] = \left[\frac{L/T}{T}\right] = [L][T]^{-2}$$

گوشزد! بعد هر کمیت را با یکاهای برگزیده برای بیان آن کمیت اشتباه نکنید. شتاب را می‌توان به یکاهای فوت بر ثانیه بر ثانیه، کیلومتر بر ساعت بر ساعت بیان کرد، یا اگر تحقیق گالیله را دربارهٔ قِل‌خوردن توپی به سمت پایین سطح شیب‌دار انجام می‌دادید، برای شتاب یکای پونتی[1] بر زنش را به‌کار می‌بردید! تمام این یکاها با بعد $[L][T]^{-2}$ سازگارند.

تجزیه و تحلیل ابعادی

تجزیه و تحلیل ابعادی معادلاتی که روابط بین کمیتهای فیزیکی مختلف را بیان می‌کنند. ابزاری مهم است که می‌تواند بلافاصله برای بررسی اینکه نتیجهٔ محاسبه صحیح بوده یا ممکن است اشتباه باشد، به‌کار می‌رود. تمام معادلات باید از سازگاری ابعادی برخوردار باشند. بعد یک کمیت فیزیکی در سمت چپ هر معادله باید با ترکیب ابعاد تمام کمیتهای فیزیکی در سمت راست آن یکسان باشد. مثلاً، در مثال ۳.۵.۶، سرعت ماهواره‌ای در مداری دایره‌ای به شعاع R_c حول زمین (شعاع R_e) را محاسبه می‌کنیم و به این نتیجه می‌رسیم:

$$v_c = \left(\frac{gR_e^2}{R_c}\right)^{1/2}$$

که در آن g شتاب گرانشی است و در بخش ۲.۲ با آن آشنا می‌شویم. اگر این نتیجه درست باشد، ابعاد دو سمت این معادله باید یکسان باشند. برای بررسی موضوع، ابتدا ترکیب ابعادی سمت راست این معادله را می‌نویسیم و آنها را حتی‌الامکان ساده می‌کنیم

$$\left(\frac{([L][T]^{-2})[L]^2}{[L]}\right)^{\frac{1}{2}} = ([L]^2[T]^{-2})^{\frac{1}{2}} = [L][T]^{-1}$$

1. punti

بعد سرعت، v_c، نیز $[L][T]^{-1}$ است. بنابراین، با یکسان شدن ابعاد دو سوی معادله پی‌می‌بریم که همسانی ابعادی این معادله می‌تواند صحیح باشد، می‌تواند صحیح هم نباشد. تجزیه و تحلیل ابعادی به صراحت به‌ما نمی‌گوید که معادله صحیح است. آنچه به‌وضوح به ما می‌گوید، از این قرار است که در مواردی که ابعاد دو طرف معادله یکسان نباشند، معادله صحیح نیست.

تعیین روابط از طریق تحلیل ابعادی

تحلیل ابعادی می‌تواند به‌صورت روشی برای به‌دست آوردن روابط بین کمیتهای فیزیکی نیز به‌کار رود بدون اینکه با زحمت زیادی به جزئیات تحلیل مبتنی بر قوانین فیزیکی وارد شویم. مثلاً، آونگ سادهٔ مثال ۲.۲.۳ را در نظر می‌گیریم. این آونگ شامل یک وزنهٔ کوچک به‌جرم m است که به انتهای ریسمانی صلب و بدون جرم به‌طول l آویخته شده است. وقتی آن را از حالت تعادل، یعنی وضعیت قائم ریسمان و واقع بودن گلولهٔ آن در پایین‌ترین مکان ممکن خود، جابه‌جا کنیم، بر اثر گرانش که می‌خواهد گلوله را به حداقل ارتفاع از سطح زمین برساند، به راست و چپ تاب می‌خورد. این آونگ در نبودن اصطکاک، مقاومت هوا، و سایر نیروهای اتلافی تا ابد به تاب خوردن خود ادامه می‌دهد! مدت زمانی که طول می‌کشد آونگ به وضعیت و جهت معینی از حرکت خود برگردد، یا مدت زمانی، τ، که طول می‌کشد یک دورکامل حرکتش را انجام دهد، زمان تناوب آونگ می‌نامند. حال این پرسش پیش می‌آید: بستگی زمان تناوب آن، τ، به پارامترهای فیزیکی مشخص‌کنندهٔ آونگ و پیرامونش، چگونه است؟

ابتدا، پارامترهایی را تعیین می‌کنیم که به آونگ مرتبط می‌شوند. چون فرض کرده‌ایم که آونگ متشکل از ریسمانی آرمانی به جرم صفر، انعطاف‌ناپذیر، و بدون مقاومت هوا و اصطکاک است، هر عامل دیگر مربوط به آنها را از ملاحظات خود حذف می‌کنیم. فقط سه چیز باقی می‌ماند: جرم گلولهٔ آونگ، m، طول ریسمان آن، l، و شتاب گرانشی، g. بعد زمان تناوب آونگ $[T]$ است و ترکیب m، l، و g که با زمان تناوب مساوی قرار می‌گیرد باید ابعادش به $[T]$ تبدیل شود. به بیان دیگر زمان تناوب آونگ، τ، به ترکیب جبری m، l، و g، به معادله‌ای ابعادی از قرار زیر بستگی دارد:

$$\tau \propto m^{\alpha} l^{\beta} g^{\gamma}$$

$$[T] = [M]^{\alpha}[L]^{\beta}([L]^{\gamma}[T]^{-2\gamma})$$

چون توانی از $[M]$ در سمت چپ وجود ندارد، هر $\alpha = 0$ و جرم گلولهٔ آونگ بی‌تأثیر است. برای اینکه بعد $[T]$ در هر دو طرف این معادله یکسان باشد، باید داشته باشیم $\gamma = -\frac{1}{2}$، و برای اینکه

بعد $[L]$ در هر دو طرف یکسان شود، باید $\beta + \gamma = 0$ یا $\beta = \frac{1}{2}$. بنابراین، نتیجه می‌گیریم

$$\tau \propto \sqrt{\frac{l}{g}}$$

تحلیل ابعادی نمی‌تواند از اینها فراتر برود. این رابطه ثابت تناسب را به ما نمی‌دهد، اما به ما می‌گوید که ممکن است τ به l و g بستگی داشته باشد. این رابطه می‌گوید که زمان تناوب مستقل از جرم گلوله است. به‌علاوه، یک تک‌اندازه‌گیری زمان تناوب آونگ با طول معلوم l، ثابت تناسب را به ما می‌دهد.

عامل ممکن دیگر، یعنی زاویهٔ تاب خوردن آونگ، را در نظر نگرفته‌ایم. آیا مقدار این عامل می‌تواند بر زمان تناوب تأثیر بگذارد؟ شاید، ولی تحلیل ابعادی به‌تنهایی این کمیت را به ما نمی‌دهد. زاویهٔ تاب خوردن (زاویهٔ نوسان) کمیتی بی‌بعد است، و زمان تناوب احتمالاً می‌تواند از چندین روش به آن بستگی پیدا کند. البته، در مثال ۱.۷.۳ می‌بینیم که اگر دامنهٔ زاویه‌ای تاب خوردن به‌قدر کافی بزرگ باشد، این زاویه بر زمان تناوب تأثیر می‌گذارد. با همهٔ این احوال، آنچه را صرفاً با به‌کار بردن تحلیل ابعادی فرا گرفته‌ایم، بسیار چشمگیر است. تحلیل مشروحتر بر مبنای قوانین فیزیکی باید به نتیجه‌ای بینجامد که با آنچه از تحلیل ابعادی ساده به‌دست می‌آید سازگار باشد، وگرنه باید علت این ناسازگاری را درک کنیم. وقتی به چنین مشکلی برمی‌خوریم، پی‌می‌بریم که احتمال نزدیک به یقین می‌رود که در تحلیل خود اشتباهاتی مرتکب شده باشیم.

تحلیل ابعادی که به این طریق به‌کار رفت همیشه هم چندان آسان نیست. معمولاً آزمایش باید متوجه متغیرهای مناسب و متوجه حدسی دربارهٔ بستگیهای تابعی مناسب شود. در حالت خاص، وقتی توابع مثلثاتی در روابط گنجیده باشند، فقدان بعد آنها تحلیل ابعادی را نقش بر آب می‌کند. گیریم که چنین باشد، در این صورت تحلیل ابعادی کماکان اسلحهٔ ارزشمندی در دست دانشجوست که همواره می‌تواند آن را در زرادخانهٔ خود حفظ کند.

۳.۱ بردارها

حرکت سیستمهای دینامیکی نوعاً برحسب دو نوع کمیت اساسی، کمیتهای عددی یا اسکالر و کمیتهای برداری یا بردارها، توصیف می‌شود. کمیت عددی یا اسکالر عبارت است ازکمیتی فیزیکی که فقط بزرگی دارد، مانند جرم هر جسم که به‌طور کامل با یک تک‌عدد برحسب یکاهای مناسب بیان می‌شود. مقدار این کمیت از هر دستگاه مختصات انتخابی برای توصیف حرکت سیستم، مستقل است. نمونه‌های کمیتهای عددی که با آنها آشناییم، عبارت‌اند از: چگالی، حجم، دما، و

انرژی. از لحاظ ریاضی، کمیتهای عددی را اعداد حقیقی تلقی می‌کنند. تمام قواعد معمولی جبر، یعنی جمع، تفریق، ضرب، و تقسیم و مانند آنها بر این کمیتها حاکم‌اند.

اما، بردار هم بزرگی و هم جهت دارد، مانند تغییر مکان از یک نقطهٔ فضا به نقطهٔ دیگر. بردار، برخلاف کمیت عددی یا اسکالر، مستلزم مجموعه‌ای از اعداد است تا به‌طور کامل مشخص شود. مقادیر آن اعداد، عموماً، به دستگاه مختصات بستگی دارند. علاوه بر تغییر مکان در فضا، مثالهای دیگر بردارها عبارت‌اند از سرعت، شتاب، و نیرو. از لحاظ ریاضی، بردارها بنابر قاعدهٔ جمع متوازی‌الاضلاع، که به‌زودی دربارهٔ آن بحث خواهیم کرد، با یکدیگر ترکیب می‌شوند.[۱] مفهوم بردار به ظهور شاخه‌ای از ریاضیات انجامیده که برای گسترش و بیان مطالب در مبحث مکانیک کلاسیک اجتناب‌ناپذیر از کار درآمده است. بردارها برای توصیف رفتار حتی پیچیده‌ترین سیستمهای فیزیکی راهی دقیق و کوتاه (فشرده) مهیا می‌کنند. افزون بر اینها، بهره‌گیری از بردارها در کاربرد قوانین فیزیکی به ما اطمینان می‌دهد که نتایجمان از انتخاب دستگاه مختصات مستقل است.

معمولاً در اکثر مطالب نوشتاری، با علامتی شاخص، مانند پیکان، بردار، مثلاً $\vec{\mathbf{A}}$، را مشخص می‌کنند. ولی در این کتاب برای سادگی، کمیتهای برداری را با حروف سیاه، مانند $\mathbf{A}$، نشان می‌دهیم. معمولاً حروف ایتالیک را برای نمایش کمیت عددی یا اسکالر، مثلاً A، به‌کار می‌بریم.

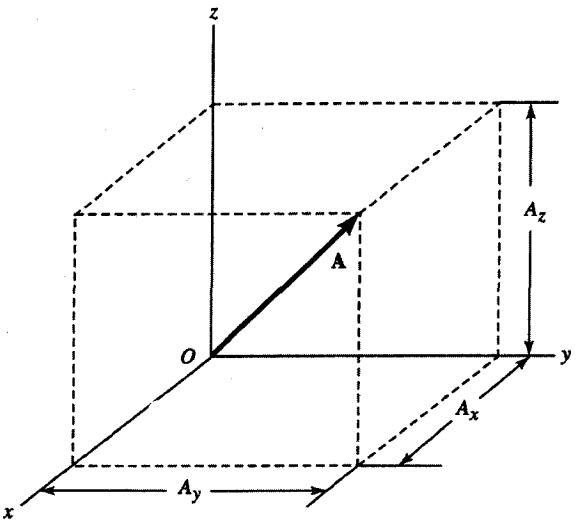
هر بردار مفروض $\mathbf{A}$ با بزرگی و راستایش نسبت به دستگاه مرجع انتخابی مشخص می‌شود. بردار از نظر نموداری با یک قطعه خط جهت‌دار، مطابق نمایش سه‌بعدی در شکل ۱.۳.۱، نمایش داده می‌شود.

بردار را می‌توان با مجموعهٔ مؤلفه‌هایش، یا تصاویرش بر محورهای مختصات، نیز مشخص کرد. مثلاً، مجموعهٔ سه اسکالر، (A_x, A_y, A_z)، را در شکل ۱.۳.۱ مشاهده می‌کنید، که مؤلفه‌های بردار $\mathbf{A}$ هستند و روش دیگری از نمایش بردار به‌شمار می‌آیند. بنابراین، منظور از معادلهٔ

$$\mathbf{A} = (A_x, A_y, A_z) \qquad (۱.۳.۱)$$

از این قرار است که می‌شود بردار را با نماد $\mathbf{A}$ یا مجموعهٔ سه مؤلفهٔ (A_x, A_y, A_z)، که در دستگاه مختصات خاصی بیان شده است، نشان داد. مثلاً، اگر بردار $\mathbf{A}$ نمایانگر تغییر مکان از نقطهٔ $\mathrm{P}_۱(x_۱, y_۱, z_۱)$ به نقطهٔ $\mathbf{P}_۲(x_۲, y_۲, z_۲)$ باشد، در این صورت، سه مؤلفهٔ آن عبارت‌اند از $A_x = x_۲ - x_۱$، $A_y = y_۲ - y_۱$، و $A_z = z_۲ - z_۱$؛ و نمایش معادل $\mathbf{A}$ مجموعهٔ سه مؤلفهٔ

۱. یکی از نمونه‌های کمیت جهت‌دار که از قاعدهٔ جمع پیروی نمی‌کند، چرخش متناهی جسم حول محوری مفروض است. خواننده می‌تواند به‌آسانی درستی این نکته را تحقیق کند که دو چرخش متوالی حول محورهای مختلف همان اثر ناشی از یک تک‌چرخش را پدید نمی‌آورند که از قاعدهٔ متوازی‌الاضلاع تعیین شده است. ولی در حال حاضر، با این نوع کمیتهای جهت‌دار غیربرداری سروکار نداریم.



شکل ۱.۳.۱ بردار **A** و مؤلفه‌هایش در مختصات دکارتی.

عددی $(x_۲ - x_۱, y_۲ - y_۱, z_۲ - z_۱)$ است. اگر **A** نمایش نیرو باشد، در این صورت A_x مولفهٔ x آن نیرو است، و به همین ترتیب الی آخر.

اگر بحث خاصی به بردارهای واقع در صفحه محدود شود، فقط دو مؤلفه برای مشخص کردن آنها ضروری است. به‌طور کلی، فضایی ریاضی با هر تعداد، n، بعد می‌توان تعریف کرد. بنابراین، مجموعهٔ n عدد $(A_۱, A_۲, A_۳, \cdots, A_n)$ نماد یک بردار در فضای n بعدی است. در این معنای تجریدی، بردار عبارت است از مجموعهٔ مرتبی از اعداد.

بررسی جبر برداری را با برخی گزاره‌های صوری مربوط به بردارها شروع می‌کنیم.

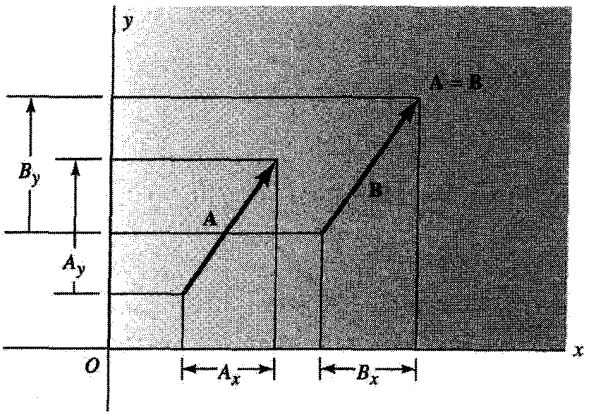
I. تساوی بردارها

معادلهٔ

$$\mathbf{A} = \mathbf{B} \qquad (۲.۳.۱)$$

یا

$$(A_x, A_y, A_z) = (B_x, B_y, B_z)$$



شکل ۲.۳.۱ نمایش بردارهای مساوی.

معادل سه معادلهٔ زیر است:

$$A_x = B_x \qquad A_y = B_y \qquad A_z = B_z$$

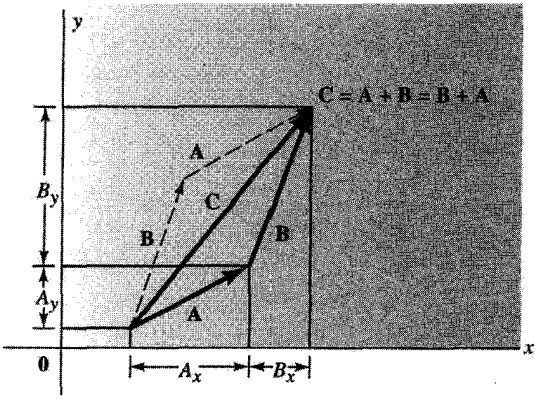
یعنی، دو بردار مساوی‌اند، اگر و فقط اگر، مؤلفه‌های آنها به‌ترتیب با هم مساوی باشند. به تعبیر هندسی، بردارهای مساوی با هم موازی‌اند و طولهای یکسانی دارند، ولی ضرورتاً مکان آنها یکی نیست. در شکل ۲.۳.۱، بردارهای مساوی را مشاهده می‌کنید که گرچه مساوی‌اند، از لحاظ فیزیکی از یکدیگر جدایند. (بردارهای مساوی ضرورتاً از هر حیث معادل نیستند. بنابراین، ممکن است دو نیرو که از لحاظ برداری مساوی‌اند و بر دو نقطهٔ مختلف یک جسم وارد می‌آیند، آثار مکانیکی متفاوتی پدید آورند.)

II. جمع برداری

جمع دو بردار به‌کمک معادلهٔ زیر تعریف می‌شود:

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = (A_x, A_y, A_z) + (B_x, B_y, B_z) = (A_x + B_x, A_y + B_y, A_z + B_z) \tag{۳.۳.۱}$$

مجموع دو بردار عبارت است از برداری که مؤلفه‌هایش مجموع مؤلفه‌های آن بردارها باشد. نمایش هندسی جمع برداری دو بردار ناموازی ضلع سوم یک مثلث را تشکیل می‌دهد که دو ضلع دیگرش بردارهای یادشده باشند. جمع برداری را در شکل ۳.۳.۱ مشاهده می‌کنید. این مجموع نیز مطابق



شکل ۳.۳.۱ جمع دو بردار.

شکل به‌کمک قاعدهٔ متوازی‌الاضلاع به‌دست می‌آید. به‌هرحال، جمع برداری طبق معادلهٔ بالا تعریف می‌شود، حتی اگر بردارها نقطهٔ مشترکی نداشته باشند.

III. ضرب بردار در اسکالر

اگر c کمیتی اسکالر و $\mathbf{A}$ بردار باشد، آنگاه

$$c\mathbf{A} = c(A_x, A_y, A_z) = (cA_x, cA_y, cA_z) = \mathbf{A}c \qquad (۴.۳.۱)$$

حاصلضرب $c\mathbf{A}$ برداری است با مؤلفه‌های c برابر مؤلفه‌های بردار $\mathbf{A}$. به‌تعبیر هندسی، بردار $c\mathbf{A}$ با $\mathbf{A}$ موازی و طولش c برابر طول $\mathbf{A}$ است. وقتی $c = -۱$، بردار $-\mathbf{A}$، مطابق شکل ۴.۳.۱، برداری خواهد بود که جهتش عکس جهت $\mathbf{A}$ است.

IV. تفریق برداری

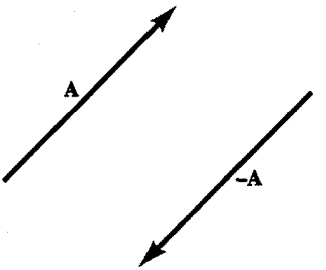
بنابر تعریف، تفریق عبارت است از

$$\mathbf{A} - \mathbf{B} = \mathbf{A} + (-۱)\mathbf{B} = (A_x - B_x, A_y - B_y, A_z - B_z) \qquad (۵.۳.۱)$$

یعنی، تفریق بردار مفروض $\mathbf{B}$ از بردار $\mathbf{A}$، با جمع کردن $-\mathbf{B}$ و $\mathbf{A}$ هم‌ارز است.

V. بردار صفر

بردار $\mathbf{O} = [۰, ۰, ۰]$ را بردار صفر می‌نامند. جهت بردار صفر تعریف نشده (نامشخص) است.



شکل ۴.۳.۱ منفی یک بردار.

بنابر بند IV، $\mathbf{A}-\mathbf{A}=\mathbf{O}$. چون بردار صفر با یک صفر نشان داده می‌شود، برای اینکه اشتباهی صورت نگیرد، از این پس نمادگذاری $\mathbf{O}=0$ را به کار خواهیم برد.

VI. قانون جابه‌جایی جمع

این قانون در مورد بردارها صادق است، یعنی

$$\mathbf{A}+\mathbf{B}=\mathbf{B}+\mathbf{A} \qquad (۶.۳.۱)$$

زیرا $A_x+B_x=B_x+A_x$، و این رابطه به همین ترتیب برای مؤلفه‌های y و z برقرار است.

VII. قانون شرکت‌پذیری

قانون شرکت‌پذیری نیز دربارهٔ بردارها صادق است، زیرا

$$\begin{aligned}\mathbf{A}+(\mathbf{B}+\mathbf{C}) &= (A_x+(B_x+C_x), A_y+(B_y+C_y), A_z+(B_z+C_z)) \\ &= ((A_x+B_x)+C_x, (A_y+B_y)+C_y, (A_z+B_z)+C_z) \qquad (۷.۳.۱) \\ &= (\mathbf{A}+\mathbf{B})+\mathbf{C}\end{aligned}$$

VIII. قانون توزیع‌پذیری

قانون توزیع‌پذیری در مورد ضرب بردار در اسکالر، صدق می‌کند. زیرا با استفاده از بندهای (II) و (III)،

$$\begin{aligned} c(\mathbf{A}+\mathbf{B}) &= c(A_x+B_x, A_y+B_y, A_z+B_z) \\ &= (c(A_x+B_x), c(A_y+B_y), c(A_z+B_z)) \\ &= (cA_z+cB_x, cA_y+cB_y, cA_z+cB_z) \\ &= c\mathbf{A}_z + c\mathbf{B} \end{aligned} \qquad (۸.۳.۱)$$

بنابراین، تا آنجا که به عملیات یادشده در بالا مربوط می‌شود، بردارها از قواعد جبر معمولی پیروی می‌کنند.

IX بزرگی بردار

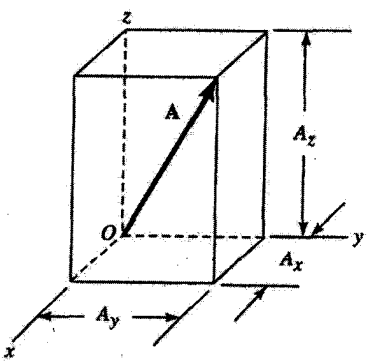
بزرگی بردار $\mathbf{A}$، که با نماد $|\mathbf{A}|$ یا با A نمایش داده می‌شود، بنابر تعریف، عبارت است از ریشهٔ دوم مجموع مربعات مؤلفه‌های آن، یعنی

$$A = |\mathbf{A}| = (A_x^۲ + A_y^۲ + A_z^۲)^{\frac{۱}{۲}} \qquad (۹.۳.۱)$$

که ریشهٔ مثبت این معادله، مورد نظر ماست. به تعبیر هندسی، بزرگی هر بردار همان طول آن، یعنی طول قطر یک مکعب مستطیل به ابعاد A_x، A_y، و A_z است، که با یکاهای مناسبی بیان شده باشد (شکل ۵.۳.۱).

X. بردارهای مختصات یکه

بردار یکه برداری است به بزرگی واحد. بردارهای یکه را غالباً با نماد $\mathbf{e}$، سرواژهٔ آلمانی *Einheit*



شکل ۵.۳.۱ بزرگی بردار $\mathbf{A}$: $A = (A_x^۲ + A_y^۲ + A_z^۲)^{۱/۲}$.

(به معنی مقیاس) نشان می‌دهند. سه بردار یکهٔ مشروح زیر،

$$\mathbf{e}_x = (۱, ۰, ۰) \quad \mathbf{e}_y = (۰, ۱, ۰) \quad \mathbf{e}_z = (۰, ۰, ۱) \qquad (۱۰.۳.۱)$$

را بردارهای مختصات یکه یا بردارهای پایه می‌نامند. هر بردار را می‌توان برحسب بردارهای پایه، به‌صورت جمع برداری مؤلفه‌ها، به قرار زیر بیان کرد:

$$\begin{aligned}\mathbf{A} &= (A_x, A_y, A_z) = (A_x, ۰, ۰) + (۰, A_y, ۰) + (۰, ۰, A_z) \\ &= A_x(۱, ۰, ۰) + A_y(۰, ۱, ۰) + A_z(۰, ۰, ۱) \\ &= \mathbf{e}_x A_x + \mathbf{e}_y A_y + \mathbf{e}_z A_z\end{aligned} \qquad (۱۱.۳.۱)$$

نمادگذاری بردارهای یکهٔ دکارتی که با حروف $\mathbf{i}$، $\mathbf{j}$، و $\mathbf{k}$ نموده می‌شوند، کاربرد گسترده‌ای یافته‌اند:

$$\mathbf{i} = \mathbf{e}_x \quad \mathbf{j} = \mathbf{e}_y \quad \mathbf{k} = \mathbf{e}_z \qquad (۱۲.۳.۱)$$

از این پس معمولاً این نمادگذاری را به‌کار خواهیم برد.

جهت بردارهای مختصات یکهٔ دکارتی، مطابق شکل ۶.۳.۱، به‌کمک محورهای مختصات تعریف می‌شوند. این بردارها بسته به نوع دستگاه مختصاتی که به‌کار می‌رود، مجموعهٔ سه‌تایی راستگرد یا چپگردی را تشکیل می‌دهند؛ معمولاً دستگاههای مختصات راستگرد به‌کار می‌روند. دستگاه نموده شده در شکل ۶.۳.۱ راستگرد است. (راستگرد یا چپگرد بودن دستگاه مختصات را در بخش ۵.۱ تعریف خواهیم کرد.)

مثال ۱.۳.۱

مجموع و بزرگی مجموع دو بردار $\mathbf{A} = (۱, ۰, ۲)$ و $\mathbf{B} = (۰, ۱, ۱)$ را بیابید.

حل:

با جمع کردن مؤلفه‌ها داریم: $\mathbf{A} + \mathbf{B} = (۱, ۰, ۲) + (۰, ۱, ۱) = (۱, ۱, ۳)$

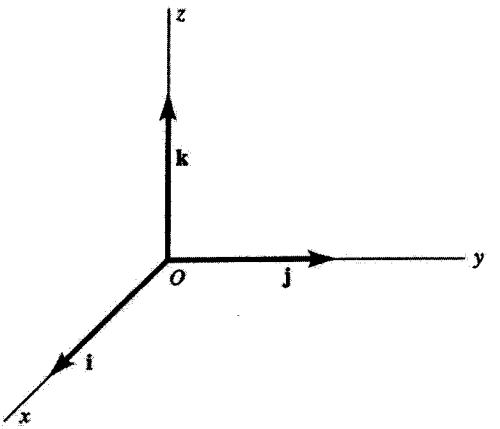
$$|\mathbf{A} + \mathbf{B}| = (۱ + ۱ + ۹)^{\frac{۱}{۲}} = \sqrt{۱۱}$$

مثال ۲.۳.۱

تفاضل دو بردار بالا را به‌شکل $\mathbf{ijk}$ بیان کنید.

حل:

از تفاضل مؤلفه‌ها داریم،



شکل ۶.۳.۱ بردارهای یکهٔ ijk.

$$\mathbf{A}-\mathbf{B}=(۱,-۱,۱)=\mathbf{i}-\mathbf{j}+\mathbf{k}$$

مثال ۳.۳.۱

هلیکوپتری ۱۰۰m به‌طور قائم به بالا، بعد ۵۰۰m به‌طور افقی به شرق، سپس ۱۰۰۰m به‌طور افقی به شمال پرواز می‌کند. این هلیکوپتر از هلیکوپتر دومی که از همان نقطه حرکت خود را شروع کرده ۲۰۰m به بالا، ۱۰۰۰m به غرب، و ۵۰۰m به شمال می‌رود، چقدر فاصله دارد؟

حل:

با انتخاب جهتهای «بالا»، «شرق»، و «شمال» به‌عنوان جهتهای اصلی موضع نهایی هلیکوپتر اول از لحاظ برداری به‌صورت $\mathbf{A}=(۱۰۰,۵۰۰,۱۰۰۰)$ و دومی به‌صورت $\mathbf{B}=(۲۰۰,-۱۰۰,۵۰۰)$، برحسب متر، بیان می‌شود. از این‌رو، فاصلهٔ بین مواضع نهایی از عبارت زیر به‌دست می‌آید:

$$|\mathbf{A}-\mathbf{B}|=|((۱۰۰-۲۰۰),(۵۰۰+۱۰۰),(۱۰۰۰-۵۰۰))|\mathrm{m}$$
$$=(۱۰۰^{۲}+۶۰۰^{۲}+۵۰۰^{۲})^{\frac{۱}{۲}}\mathrm{m}=۷۸۷٫۴\mathrm{m}$$

۴.۱ ضرب داخلی (اسکالر)

در مورد دو بردار مفروض $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ حاصلضرب «داخلی» یا ضرب «نقطه‌ای»، $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$ عبارت از کمیتی اسکالر خواهد بود که، بنابر تعریف، از این قرار است:

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}=A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z \qquad (۱.۴.۱)$$

از تعریف بالا نتیجه می‌شود که ضرب اسکالری تعویض‌پذیر است:

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}=\mathbf{B}\cdot\mathbf{A} \qquad (۲.۴.۱)$$

زیرا، $A_xB_x=B_xA_x$ و به همین ترتیب الی آخر. توزیع‌پذیری این نوع ضرب را نیز می‌توان نتیجه گرفت:

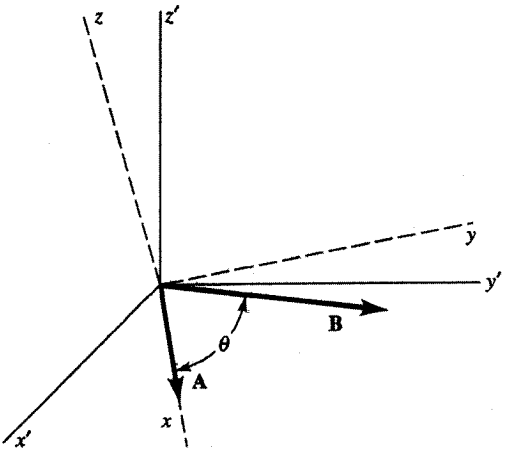
$$\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}+\mathbf{C})=\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}+\mathbf{A}\cdot\mathbf{C} \qquad (۳.۴.۱)$$

زیرا اگر از جزئیات تعریف (۱.۴.۱) بهره گیریم،

$$\begin{aligned}\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}+\mathbf{C})&=A_x(B_x+C_x)+A_y(B_y+C_y)+A_z(B_z+C_z)\\&=A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z+A_xC_x+A_yC_y+A_zC_z\\&=\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}+\mathbf{A}\cdot\mathbf{C}\end{aligned} \qquad (۴.۴.۱)$$

ضرب نقطه‌ای، $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$، تعبیر هندسی ساده‌ای دارد و می‌توان از آن برای محاسبهٔ زاویهٔ θ بین آن دو بردار سود جست. مثلاً، بنا بر شکل ۱.۴.۱، دو بردار $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ را زاویهٔ θ از هم جدا کرده، همراه با دستگاه مختصات x'، y'، و z' که به‌طور دلخواه مبنای آن بردارها انتخاب شده است. ولی چون کمیت $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$ اسکالر است، مقدار آن مستقل از انتخاب مختصات است. می‌توانیم، بدون از دست‌دادن عمومیت، دستگاه x'، y'، و z' را با چرخش به دستگاه مختصات x، y، و z تبدیل کنیم، به‌طوری که محور x در امتداد بردار $\mathbf{A}$ قرارگرفته و محور z بر صفحهٔ مشخص‌شده به‌وسیلهٔ دو بردار عمود باشد. این دستگاه مختصات نیز در شکل ۱.۴.۱ نمایش داده شده است. مؤلفه‌های بردارها و حاصلضرب نقطه‌ای آنها خیلی ساده‌تر از آن هستند که در این دستگاه محاسبه شوند. بردار $\mathbf{A}$ به‌صورت $(A,۰,۰)$ و بردار $\mathbf{B}$ به‌صورت $(B_x,B_y,۰)$ یا $(B\cos\theta,B\sin\theta,۰)$ بیان می‌شود. بنابراین،

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}=A_xB_x=A(B\cos\theta)=|\mathbf{A}||\mathbf{B}|\cos\theta \qquad (۵.۴.۱)$$



شکل ۱.۴.۱ محاسبهٔ ضرب نقطه‌ای اسکالر بین دو بردار.

از نظر هندسی، $B\cos\theta$ صرفاً تصویر $\mathbf{B}$ بر $\mathbf{A}$ است؛ در صورتی که x را در امتداد $\mathbf{B}$ می‌گرفتیم، همان نتیجه را به‌دست می‌آوردیم، با این تعبیر هندسی که $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$ اکنون تصویر $\mathbf{A}$ بر $\mathbf{B}$ ضرب در طول $\mathbf{B}$ است. بنابراین، $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$ را می‌توان تصویر $\mathbf{A}$ بر $\mathbf{B}$ ضرب در طول $\mathbf{B}$ یا تصویر $\mathbf{B}$ بر $\mathbf{A}$ ضرب در طول $\mathbf{A}$ دانست. هر دو تعبیر صحیح است. شاید جنبهٔ مهمتر آن است که، می‌توان ملاحظه کرد که دقیقاً ثابت کرده‌ایم کسینوس زاویهٔ بین دو پاره‌خط از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}}{|\mathbf{A}||\mathbf{B}|} = \frac{\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}}{AB} \tag{۶.۴.۱}$$

این معادلهٔ آخر را می‌توان تعریف دیگر ضرب نقطه‌ای دانست.

(**توجه**: اگر $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$ صفر باشد و $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ هیچ‌کدام صفر نباشند، در این صورت $\cos\theta$ صفر است و $\mathbf{A}$ بر $\mathbf{B}$ عمود است.)

مجذور بزرگی بردار $\mathbf{A}$ با ضرب نقطه‌ای بردار $\mathbf{A}$ در خودش به‌دست می‌آید

$$A^2 = |\mathbf{A}|^2 = \mathbf{A}\cdot\mathbf{A} \tag{۷.۴.۱}$$

از تعریف بردارهای مختصات یکهٔ $\mathbf{i}$، $\mathbf{j}$، و $\mathbf{k}$ روشن است که روابط زیر برقرارند:

$$\begin{aligned} \mathbf{i}\cdot\mathbf{i} = \mathbf{j}\cdot\mathbf{j} = \mathbf{k}\cdot\mathbf{k} &= 1 \\ \mathbf{i}\cdot\mathbf{j} = \mathbf{i}\cdot\mathbf{k} = \mathbf{j}\cdot\mathbf{k} &= 0 \end{aligned} \tag{۸.۴.۱}$$

بیان هر بردار به‌صورت حاصلضرب بزرگی آن در بردار یکه: تصویر

این معادله را در نظر بگیرید:

$$\mathbf{A} = \mathbf{i}A_x + \mathbf{j}A_y + \mathbf{k}A_z \qquad (۹.۴.۱)$$

با ضرب کردن سمتْ راست در بزرگی A و تقسیم بر آن می‌رسیم به:

$$\mathbf{A} = A\left(\mathbf{i}\frac{A_x}{A} + \mathbf{j}\frac{A_y}{A} + \mathbf{k}\frac{A_z}{A}\right) \qquad (۱۰.۴.۱)$$

حال $A_x/A = \cos\alpha$، $A_y/A = \cos\beta$، و $A_z/A = \cos\gamma$ کسینوسهای هادی بردار $\mathbf{A}$، و α، β، و γ زاویه‌های هادی‌اند. بنابراین، می‌توانیم بنویسیم:

$$\mathbf{A} = A(\mathbf{i}\cos\alpha + \mathbf{j}\cos\beta + \mathbf{k}\cos\gamma) = A(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma) \qquad (۱۱.۴.۱\text{الف})$$

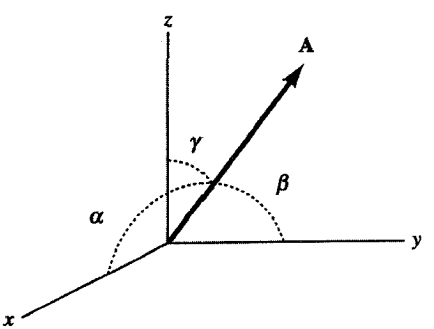
یا

$$\mathbf{A} = A\mathbf{n} \qquad (۱۱.۴.۱\text{ب})$$

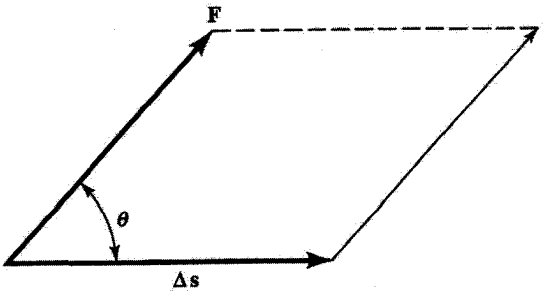
که $\mathbf{n}$ یک بردار یکه با مؤلفه‌های $\cos\alpha$، و $\cos\beta$، و $\cos\gamma$ است (شکل ۲.۴.۱). بردار دیگر، $\mathbf{B}$، را در نظر بگیرید. واضح است که، تصویر $\mathbf{B}$ روی $\mathbf{A}$ عبارت است از

$$B\cos\theta = \frac{\mathbf{B}\cdot\mathbf{A}}{A} = \mathbf{B}\cdot\mathbf{n} \qquad (۱۲.۴.۱)$$

که θ زاویهٔ بین $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ است.



شکل ۲.۴.۱ زاویه‌های هادی α، β، و γ بردار.



شکل ۳.۴.۱ نیروی وارد بر جسمی که تغییر مکان می‌دهد.

مثال ۱.۴.۱ مؤلفهٔ بردار: کار

به‌عنوان مثالی از ضرب نقطه‌ای، فرض می‌شود که، مطابق شکل ۳.۴.۱، تغییر مکان خطی جسمی تحت تأثیر نیروی ثابت[1] $\Delta\mathbf{s}$ باشد. بنابر تعریف، کاری که این نیرو انجام می‌دهد، ΔW، عبارت است از حاصلضرب مؤلفهٔ نیروی $\mathbf{F}$ در جهت $\Delta\mathbf{s}$، در بزرگی تغییر مکان Δs، یعنی

$$\Delta W = (F\cos\theta)\Delta s$$

θ زاویهٔ بین $\mathbf{F}$ و $\Delta\mathbf{s}$ است. اما عبارت سمت راست همان ضرب نقطه‌ای $\mathbf{F}$ و $\Delta\mathbf{s}$ به‌شمار می‌آید، یعنی:

$$\Delta W = \mathbf{F}\cdot\Delta\mathbf{s}$$

مثال ۲.۴.۱ قانون کسینوسها

مطابق شکل ۴.۴.۱، مثلثی با اضلاع $\mathbf{A}$، $\mathbf{B}$، و $\mathbf{C}$ را در نظر بگیرید. در این صورت $\mathbf{C}=\mathbf{A}+\mathbf{B}$. ضرب نقطه‌ای بردار $\mathbf{C}$ در خودش را به‌دست آورید:

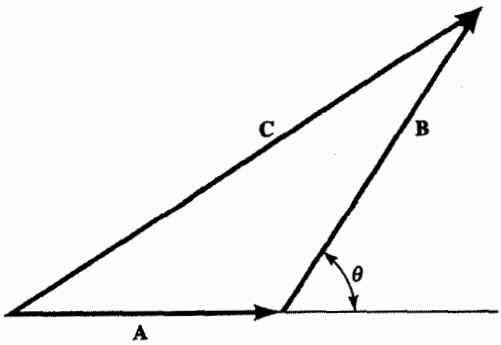
$$\begin{aligned}\mathbf{C}\cdot\mathbf{C} &= (\mathbf{A}+\mathbf{B})\cdot(\mathbf{A}+\mathbf{B})\\ &= \mathbf{A}\cdot\mathbf{A}+2\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}+\mathbf{B}\cdot\mathbf{B}\end{aligned}$$

مرحلهٔ دوم ازکاربرد قواعد پیش‌گفته در معادلات (۲.۴.۱) و (۳.۴.۱) نتیجه می‌شود. با قرار دادن $AB\cos\theta$ به‌جای $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$ می‌رسیم به

$$C^2 = A^2 + 2AB\cos\theta + B^2$$

که همان قانون آشنای کسینوسهاست.

۱. در خصوص مفهوم نیرو در فصل ۲ بحث خواهیم کرد.



شکل ۴.۴.۱ قانون کسینوسها.

مثال ۳.۴.۱

کسینوس زاویهٔ بین قطر مکعب و قطر یکی از وجوه مجاور آن را پیدا کنید.

حل:

می‌توانیم دو قطر یادشده را با بردارهای $\mathbf{A} = (۱, ۱, ۱)$ و $\mathbf{B} = (۱, ۱, ۰)$ نمایش دهیم. بنابراین، از معادلات ۱.۴.۱ و ۶.۴.۱ خواهیم داشت:

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}}{AB} = \frac{۱+۱+۰}{\sqrt{۳}\sqrt{۲}} = \sqrt{\frac{۲}{۳}} = ۰٫۸۱۶۵$$

مثال ۴.۴.۱

بردار $a\mathbf{i}+\mathbf{j}-\mathbf{k}$ بر بردار $\mathbf{i}+۲\mathbf{j}-۳\mathbf{k}$ عمود است. مقدار a چقدر است؟

حل:

اگر بردارها بر یکدیگر عمود باشند، ضرب نقطه‌ای آنها باید صفر شود $(\cos ۹۰^\circ = ۰)$

$$(a\mathbf{i}+\mathbf{j}-\mathbf{k})\cdot(\mathbf{i}+۲\mathbf{j}-۳\mathbf{k}) = a+۲+۳ = a+۵ = ۰$$

بنابراین،

$$a = -۵$$

۵.۱ ضرب برداری

حاصلضرب برداری یا حاصلضرب خارجی دو بردار مفروض $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$، $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$، بنابر تعریف، عبارت است از برداری که مؤلفه‌هایش از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آیند:

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = (A_yB_z - A_zB_y, A_zB_x - A_xB_z, A_xB_y - A_yB_x) \qquad (۱.۵.۱)$$

می‌توان نشان داد که قواعد زیر در ضرب برداری برقرارند:

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = -\mathbf{B} \times \mathbf{A} \qquad (۲.۵.۱)$$

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \times \mathbf{B} + \mathbf{A} \times \mathbf{C} \qquad (۳.۵.۱)$$

$$n(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = (n\mathbf{A}) \times \mathbf{B} = \mathbf{A} \times (n\mathbf{B}) \qquad (۴.۵.۱)$$

اثبات درستی این روابط مستقیماً از تعریف آنها حاصل می‌شود و آن را برای تمرین به خواننده وامی‌گذاریم.

(**توجه**: معادلهٔ اول بیانگر این نکته است که ضرب برداری تعویض‌ناپذیر است.)

بنابر تعریف بردارهای مختصات یکه (بخش ۳.۱)، نتیجه می‌گیریم:

$$\begin{aligned} \mathbf{i} \times \mathbf{i} = \mathbf{j} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} \times \mathbf{k} &= 0 \\ \mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i} &= -\mathbf{k} \times \mathbf{j} \\ \mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} &= -\mathbf{j} \times \mathbf{i} \\ \mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j} &= -\mathbf{i} \times \mathbf{k} \end{aligned} \qquad (۵.۵.۱)$$

سه رابطهٔ آخر یک مجموعهٔ سه‌تایی راستگرد را تعریف می‌کنند. مثلاً،

$$\mathbf{i} \times \mathbf{j} = (0 - 0, 0 - 0, 1 - 0) = (0, 0, 1) = \mathbf{k} \qquad (۶.۵.۱)$$

سایر معادلات به همین روش اثبات می‌شوند.

ضرب برداری، که به شکل $\mathbf{ijk}$ بیان می‌شود، عبارت است از:

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \mathbf{i}(A_yB_z - A_zB_y) + \mathbf{j}(A_zB_x - A_xB_z) + \mathbf{k}(A_xB_y - A_yB_x) \qquad (۷.۵.۱)$$

هر جملهٔ داخل پرانتز معادل یک دترمینان است:

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \mathbf{i}\begin{vmatrix} A_y & A_z \\ B_y & B_z \end{vmatrix} + \mathbf{j}\begin{vmatrix} A_z & A_x \\ B_z & B_x \end{vmatrix} + \mathbf{k}\begin{vmatrix} A_x & A_y \\ B_x & B_y \end{vmatrix} \qquad (۸.۵.۱)$$

سرانجام،

$$\mathbf{A}\times\mathbf{B}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ A_x & A_y & A_z\\ B_x & B_y & B_z\end{vmatrix} \qquad (۹.۵.۱)$$

که می‌توان درستی آن را از طریق بسط تحقیق کرد. شکل دترمینانی برای به‌خاطر سپردن تعریف ضرب برداری کمک مناسبی به ما می‌کند. از خواص دترمینانها فوراً می‌توان پی‌برد که اگر $\mathbf{A}$ موازی $\mathbf{B}$ باشد، یعنی $\mathbf{A}=c\mathbf{B}$، آنگاه دو سطر پایین دترمینان با هم متناسب‌اند و از این رو دترمینان صفر است. بنابراین، ضرب برداری دو بردار موازی صفر است.

اینک بزرگی حاصلضرب برداری را محاسبه می‌کنیم. داریم،

$$|\mathbf{A}\times\mathbf{B}|^2=(A_yB_z-A_zB_y)^2+(A_zB_x-A_xB_z)^2+(A_xB_y-A_yB_x)^2 \qquad (۱۰.۵.۱)$$

می‌توان این عبارت را تبدیل کرد به

$$|\mathbf{A}\times\mathbf{B}|^2=(A_x^2+A_y^2+A_z^2)(B_x^2+B_y^2+B_z^2)-(A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z)^2 \qquad (۱۱.۵.۱)$$

یا، بنابر تعریف ضرب اسکالر، می‌توان معادلهٔ بالا را به‌صورت زیر نوشت:

$$|\mathbf{A}\times\mathbf{B}|^2=A^2B^2-(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})^2 \qquad (۱۲.۵.۱)$$

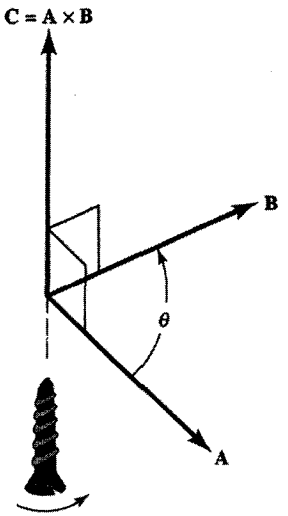
با جذر گرفتن از طرفین معادلهٔ (۱۲.۵.۱)، و بهره‌گیری از معادلهٔ (۶.۴.۱)، می‌توانیم بزرگی حاصلضرب برداری را به‌صورت زیر بیان کنیم:

$$|\mathbf{A}\times\mathbf{B}|=AB(1-\cos^2\theta)^{\frac{1}{2}}=AB\sin\theta \qquad (۱۳.۵.۱)$$

که θ زاویهٔ بین $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ است.

برای ارائهٔ تعبیر هندسی ضرب برداری، مشاهده می‌کنیم که بردار $\mathbf{C}=\mathbf{A}\times\mathbf{B}$ بر $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ عمود است، زیرا:

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{C}=A_xC_x+A_yC_y+A_zC_z \qquad (۱۴.۵.۱)$$
$$=A_x(A_yB_z-A_zB_y)+A_y(A_zB_x-A_xB_z)+A_z(A_xB_y-A_yB_x)=0$$



شکل ۱.۵.۱ ضرب خارجی دو بردار.

به‌همین‌ترتیب، $\mathbf{B} \cdot \mathbf{C} = 0$. بنابراین، بردار $\mathbf{C}$ بر صفحهٔ حاوی بردارهای $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ عمود است.

سوی بردار $\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B}$ به اعتبار این شرط تعیین می‌شود که سه بردار $\mathbf{A}$، $\mathbf{B}$، و $\mathbf{C}$، مطابق شکل ۱.۵.۱، مجموعهٔ سه‌تایی راستگردی را تشکیل دهند. (این بیان با نتیجهٔ برقرارشدهٔ پیشین که در مورد مجموعهٔ سه‌تایی راستگرد $\mathbf{ijk}$ داریم: $\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}$، سازگار است.) از این‌رو، از معادلهٔ (۱۳.۵.۱) به این نتیجه می‌رسیم:

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = (AB \sin\theta)\mathbf{n} \qquad (۱۵.۵.۱)$$

که $\mathbf{n}$ برداری یکه عمود بر صفحهٔ دو بردار $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ است. راستای $\mathbf{n}$ را از قاعدهٔ دست راست تعیین می‌کنیم. یعنی، جهت پیشروی یک پیچ راستگرد است که از جهت مثبت $\mathbf{A}$ به‌جهت مثبت $\mathbf{B}$ با طی کوچکترین زاویهٔ بین آنها می‌چرخد، مطابق شکل ۱.۵.۱، معادلهٔ (۱۵.۵.۱) را می‌توان تعریف دیگر ضرب برداری در دستگاه مختصات راستگرد دانست.

مثال ۱.۵.۱

دو بردار $\mathbf{A} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$ و $\mathbf{B} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ مفروض‌اند. $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ را بیابید.

حل:

در این حالت، بهتر است از شکل دترمینانی بهره گیریم:

$$\mathbf{A}\times\mathbf{B}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ ۲ & ۱ & -۱\\ ۱ & -۱ & ۲\end{vmatrix}=\mathbf{i}(۲-۱)+\mathbf{j}(-۱-۴)+\mathbf{k}(-۲-۱)$$

$$=-\mathbf{i}-۵\mathbf{j}-۳\mathbf{k}$$

مثال ۲.۵.۱

بردار یکهٔ عمود بر صفحهٔ شامل دو بردار $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ یادشده در بالا را بیابید.

حل:

$$\mathbf{n}=\frac{\mathbf{A}\times\mathbf{B}}{|\mathbf{A}\times\mathbf{B}|}=\frac{\mathbf{i}-۵\mathbf{j}-۳\mathbf{k}}{[۱^۲+۵^۲+۳^۲]^{\frac{۱}{۲}}}$$
$$=\frac{\mathbf{i}}{\sqrt{۳۵}}\frac{۵\mathbf{i}}{\sqrt{۳۵}}-\frac{۳\mathbf{k}}{\sqrt{۳۵}}.$$

مثال ۳.۵.۱

با محاسبهٔ مستقیم نشان دهید که $\mathbf{A}\times\mathbf{B}$ عبارت است از برداری که راستای آن بر $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ عمود و بزرگیش $AB\sin\theta$ باشد.

حل:

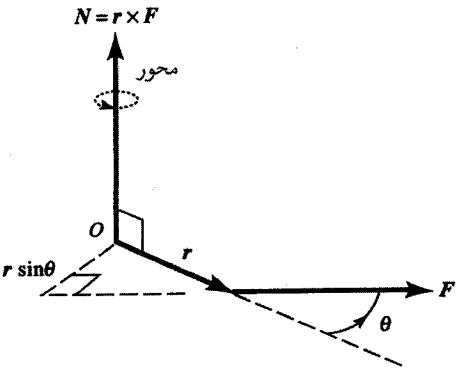
با بهره‌گیری از چارچوب مرجع مورد بحث برای شکل (۱.۴.۱) که در آن بردارهای $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ در صفحهٔ x,y تعریف می‌شوند، $\mathbf{A}$ به‌صورت $(A,۰,۰)$ و $\mathbf{B}$ به‌صورت $(B\cos\theta,B\sin\theta,۰)$ بیان می‌شود. در این صورت

$$\mathbf{A}\times\mathbf{B}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ A & ۰ & ۰\\ B\cos\theta & B\sin\theta & ۰\end{vmatrix}=\mathbf{k}AB\sin\theta$$

۶.۱ مثالی از ضرب برداری: گشتاور نیرو

گشتاور نیرو، یا لنگر، را با ضرب برداری نمایش می‌دهند. فرض کنید نیروی $\mathbf{F}$، مطابق شکل ۱.۶.۱، بر نقطهٔ $P(x,y,z)$ وارد آید؛ و فرض کنید بردار $\mathbf{OP}$ را با $\mathbf{r}$ مشخص کرده باشیم، یعنی

$$\mathbf{OP}=\mathbf{r}=\mathbf{i}x+\mathbf{j}y+\mathbf{k}z \qquad (۱.۶.۱)$$



شکل ۱.۶.۱ نمایش گشتاور نیرو حول نقطهٔ O.

گشتاور نیروی $\mathbf{N}$، یا لنگر $\mathbf{N}$، حول نقطهٔ مفروض O، بنابر تعریف، عبارت است از

$$\mathbf{N} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \qquad (۲.۶.۱)$$

به این ترتیب، گشتاور هر نیرو حول یک نقطه عبارت است از کمیتی برداری با بزرگی و جهت. اگر یک تک‌نیرو بر نقطهٔ P واقع بر جسمی وارد آید، و آن جسم ابتدا در حال سکون باشد و بتواند حول نقطهٔ ثابت O مثل لولا بگردد، در این صورت جسم به چرخش در می‌آید. محور این چرخش بر نیروی $\mathbf{F}$، و نیز بر خط $\mathbf{OP}$ عمود است. از این‌رو راستای بردار گشتاور $\mathbf{N}$ در امتداد محور چرخش واقع است.

بزرگی گشتاور نیرو از طریق زیر به‌دست می‌آید:

$$|\mathbf{N}| = |\mathbf{r} \times \mathbf{F}| = rF \sin\theta \qquad (۳.۶.۱)$$

که در آن θ زاویهٔ بین $\mathbf{r}$ و $\mathbf{F}$ است. بنابراین، $|\mathbf{N}|$ را می‌توان حاصلضرب بزرگی نیرو در کمیت $r \sin\theta$، یعنی فاصلهٔ عمودی خط عمل نیرو تا نقطهٔ O، دانست.

وقتی چند نیرو بر نقاط مختلف یک جسم وارد آیند، گشتاورها با هم جمع برداری می‌شوند. این موضوع پیامد قانون توزیع‌پذیری ضرب برداری است. شرط تعادل چرخشی آن است که جمع برداری تمام گشتاورها صفر باشد

$$\sum_i (r_i \times \mathbf{F}_i) = \sum_i \mathbf{N}_i = ۰ \qquad (۴.۶.۱)$$

در فصلهای ۸ و ۹ در باب گشتاورهای نیرو به بحث کاملتری خواهیم پرداخت.

۷.۱ ضربهای سه‌گانه

عبارت

$$\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C})$$

را ضرب اسکالر سه‌گانهٔ $\mathbf{A}$، $\mathbf{B}$، و $\mathbf{C}$ می‌گویند. حاصل این ضرب کمیتی اسکالر (یا عددی) است، زیرا از ضرب نقطه‌ای دو بردار به‌دست می‌آید. با مراجعه به عبارت دترمینانی ضرب برداری، معادلات (۸.۵.۱) و (۹.۵.۱)، می‌بینیم که ضرب اسکالر سه‌گانه را می‌توان از این قرار نوشت:

$$\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C})=\begin{vmatrix}A_x & A_y & A_z\\ B_x & B_y & B_z\\ C_x & C_y & C_z\end{vmatrix} \qquad (۱.۷.۱)$$

چون تعویض جمله‌های دو سطر یا دو ستون دترمینان با یکدیگر، علامت دترمینان را تغییر می‌دهد، اما مقدار آن فرقی نمی‌کند، می‌توانیم به‌آسانی به معادلهٔ مفید زیر دست یابیم

$$\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C})=(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\cdot\mathbf{C} \qquad (۲.۷.۱)$$

بنابراین، می‌توان علامت نقطه و ضرب را در ضرب سه‌گانه با هم جابه‌جا کرد.

عبارت،

$$\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C})$$

را ضرب برداری سه‌گانه می‌گویند. اثبات این نکته را که معادلهٔ زیر در ضرب برداری سه‌گانه برقرار است، برعهده دانشجو می‌گذاریم:

$$\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C})=\mathbf{B}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{C})-\mathbf{C}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) \qquad (۳.۷.۱)$$

این نتیجهٔ آخری را می‌توان صرفاً به‌صورت قاعدهٔ "bac منهای cab" به خاطر سپرد.

ضربهای سه‌گانهٔ بردارها به‌خصوص در مطالعهٔ دستگاههای مختصات چرخان و چرخشهای اجسام صلب که در فصلهای بعد به آنها خواهیم پرداخت، مفیدند. یکی ازکاربردهای هندسی آن را در مسئله ۱۲.۱ خواهید دید.

مثال ۱.۷.۱

سه بردار $\mathbf{A} = \mathbf{i}$، $\mathbf{B} = \mathbf{ij}$، و $\mathbf{C} = \mathbf{k}$ مفروض‌اند. $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$ را بیابید.

حل:

با بهره‌گیری از عبارت دترمینانی، معادلهٔ ۱.۷.۱، می‌نویسیم:

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \begin{vmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۱ & -۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{vmatrix} = ۱(-۱ + ۰) = -۱$$

مثال ۲.۷.۱

$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$ مشروح در بالا را بیابید.

حل:

از معادلهٔ ۳.۷.۱ داریم

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) &= \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \\ &= (\mathbf{i} - \mathbf{j})۰ - \mathbf{k}(۱ - ۰) = -\mathbf{k} \end{aligned}$$

مثال ۳.۷.۱

نشان دهید که ضرب برداری سه گانه شرکت‌پذیر نیست.

حل:

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = -\mathbf{c} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = -\mathbf{a}(\mathbf{c} \cdot \mathbf{b}) + \mathbf{b}(\mathbf{c} \cdot \mathbf{a})$$

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) - (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \mathbf{a}(\mathbf{c} \cdot \mathbf{b}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$$

که لزوماً صفر نیست.

۸.۱ تغییر دستگاه مختصات: ماتریس تبدیل

در این بخش نشان خواهیم داد که چگونه یک بردار در دستگاههای مختصات مختلف نمایش داده می‌شود. بردار $\mathbf{A}$ را در نظر بگیرید که نسبت به مجموعهٔ سه‌تایی $\mathbf{ijk}$ به‌صورت زیر بیان شده

است:

$$\mathbf{A} = \mathbf{i}A_x + \mathbf{j}A_y + \mathbf{k}A_z \qquad (۱.۸.۱)$$

نسبت به مجموعهٔ سه‌تایی جدید $\mathbf{i}'\mathbf{j}'\mathbf{k}'$ که راستایش نسبت به $\mathbf{ijk}$ متفاوت است، همین بردار $\mathbf{A}$ به‌صورت

$$\mathbf{A} = \mathbf{i}'A_{x'} + \mathbf{j}'A_{y'} + \mathbf{k}'A_{z'} \qquad (۲.۸.۱)$$

بیان می‌شود. حال، حاصلضرب نقطه‌ای $\mathbf{A}\cdot\mathbf{i}'$ دقیقاً عبارت است از $A_{x'}$، یعنی تصویر $\mathbf{A}$ بر بردار یکهٔ $\mathbf{i}'$. بنابراین می‌توان نوشت

$$\begin{aligned} A_{x'} &= \mathbf{A}\cdot\mathbf{i}' = (\mathbf{i}\cdot\mathbf{i}')A_x + (\mathbf{j}\cdot\mathbf{i}')A_y + (\mathbf{k}\cdot\mathbf{i}')A_z \\ A_{y'} &= \mathbf{A}\cdot\mathbf{j}' = (\mathbf{i}\cdot\mathbf{j}')A_x + (\mathbf{j}\cdot\mathbf{j}')A_y + (\mathbf{k}\cdot\mathbf{j}')A_z \\ A_{z'} &= \mathbf{A}\cdot\mathbf{k}' = (\mathbf{i}\cdot\mathbf{k}')A_x + (\mathbf{j}\cdot\mathbf{k}')A_y + (\mathbf{k}\cdot\mathbf{k}')A_z \end{aligned} \qquad (۳.۸.۱)$$

حاصلضربهای نقطه‌ای $(\mathbf{i}\cdot\mathbf{i}')$، $(\mathbf{i}\cdot\mathbf{j}')$، و غیره، ضرایب تبدیل نامیده می‌شوند. اینها با کسینوسهای هادی محورهای مختصات پریم‌دار نسبت به محورهای مختصات بدون پریم برابرند. به‌همین ترتیب، مؤلفه‌های بدون پریم عبارت‌اند از:

$$\begin{aligned} A_x &= \mathbf{A}\cdot\mathbf{i} = (\mathbf{i}'\cdot\mathbf{i})A_{x'} + (\mathbf{j}'\cdot\mathbf{i})A_{y'} + (\mathbf{k}'\cdot\mathbf{i})A_{z'} \\ A_y &= \mathbf{A}\cdot\mathbf{j} = (\mathbf{i}'\cdot\mathbf{j})A_{x'} + (\mathbf{j}'\cdot\mathbf{j})A_{y'} + (\mathbf{k}'\cdot\mathbf{j})A_{z'} \\ A_z &= \mathbf{A}\cdot\mathbf{k} = (\mathbf{i}'\cdot\mathbf{k})A_{x'} + (\mathbf{j}'\cdot\mathbf{k})A_{y'} + (\mathbf{k}'\cdot\mathbf{k})A_{z'} \end{aligned} \qquad (۴.۸.۱)$$

تمام ضرایب تبدیل معادلهٔ (۴.۸.۱) در معادلهٔ (۳.۸.۱) نیز ظاهر می‌شوند. زیرا $\mathbf{i}\cdot\mathbf{i}' = \mathbf{i}'\cdot\mathbf{i}$ و الی آخر. اما آنها که در سطرهای (معادلاتِ) معادلهٔ (۴.۸.۱) هستند در ستونهایی به‌صورت جمله در معادلهٔ (۳.۸.۱) ظاهر می‌شوند، و برعکس. قواعد تبدیل که در این دو مجموعه معادلات بیان شده‌اند، خاصیت کلی و عمومی بردارها محسوب می‌شوند. در واقع، اینها شیوهٔ دیگر تعریف بردار به‌شمار می‌آیند.[۱]

معادلات تبدیل را می‌توان به‌صورت مناسبی به‌شکل ماتریس بیان کرد.[۲] بنابراین، معادلهٔ

---

۱. مثلاً کتاب زیر را ببینید: ماریون، جری [و] استیفن تورنتون، دینامیک کلاسیک ذرات و سیستمها، ترجمهٔ جلال‌الدین پاشایی‌راد [و] بهرام معلمی، تهران، مرکز نشر دانشگاهی، ج۳، ۱۳۸۵.

۲. مرور مختصر ماتریسها در پیوست ح آمده است.

(۳.۸.۱) به‌صورت زیر نوشته می‌شود

$$\begin{pmatrix} A_{x'} \\ A_{y'} \\ A_{z'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{i}\cdot\mathbf{i}' & \mathbf{j}\cdot\mathbf{i}' & \mathbf{k}\cdot\mathbf{i}' \\ \mathbf{i}\cdot\mathbf{j}' & \mathbf{j}\cdot\mathbf{j}' & \mathbf{k}\cdot\mathbf{j}' \\ \mathbf{i}\cdot\mathbf{k}' & \mathbf{j}\cdot\mathbf{k}' & \mathbf{k}\cdot\mathbf{k}' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} \qquad (۵.۸.۱)$$

ماتریس سه در سه در معادلهٔ (۵.۸.۱) ماتریس تبدیل نامیده می‌شود. از فواید نماد ماتریسی آن است که ضرب ماتریسی تبدیلات متوالی را به‌سادگی انجام می‌دهند.

کاربرد ماتریس تبدیل مفروضی در مورد برداری مانند $\mathbf{A}$ نیز صریحاً با چرخش آن بردار در داخل دستگاه مختصات بدون پریم (ثابت) معادل است. مؤلفه‌های بردار چرخیده را معادلهٔ (۵.۸.۱) بیان می‌کند. بنابراین، چرخشهای محدود را می‌توان از طریق ماتریسها نشان داد. (توجه کنید که سوی چرخش بردار در این قسمت بحث، مخالف سوی چرخش دستگاه مختصات در قسمت قبلی است).

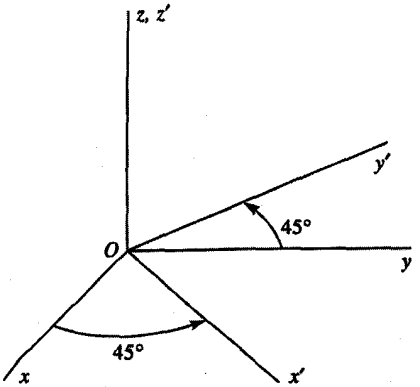
با توجه به مثال (۲.۸.۱)، ماتریس تبدیل مربوط به چرخش حول محورهای مختصات مختلف ــ یعنی، چرخش محور به‌اندازهٔ θ ــ به کمک ماتریس زیر بیان می‌شود:

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & ۰ & -\sin\theta \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ \sin\theta & ۰ & \cos\theta \end{pmatrix}$$

در نتیجه، ماتریس مربوط به ترکیب دو چرخش، ابتدا حول محور z (با زاویهٔ ϕ) و سپس حول محور جدید y' (به اندازهٔ زاویهٔ θ)، از طریق ماتریس حاصلضربی به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & ۰ & -\sin\theta \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ \sin\theta & ۰ & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi & ۰ \\ -\sin\phi & \cos\phi & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\phi & \cos\theta\sin\phi & -\sin\theta \\ -\sin\phi & \cos\phi & ۰ \\ \sin\theta\sin\phi & \sin\theta\sin\phi & \cos\theta \end{pmatrix} \qquad (۶.۸.۱)$$

در این صورت، به‌طورکلی ضرب ماتریس تعویض‌ناپذیر است، از این‌رو می‌توان انتظار داشت، که اگر ترتیب چرخشها، و بنابراین ترتیب ضرب ماتریسی، وارونه شود، نتیجهٔ نهایی فرق کند. به‌نظر می‌رسد که این حالتی باشد که خواننده خود بتواند آن را بررسی کند. این موضوع با اظهارنظر قبلیمان مبنی بر اینکه چرخشهای محدود از قانون جمع برداری پیروی نمی‌کنند و از این‌رو بردار نیستند، حتی اگر یک تک‌چرخش دارای راستا (محور) و بزرگی (زاویهٔ چرخش) باشد، سازگار



شکل ۱.۸.۱ چرخش حول محور.

است. ولی بعداً نشان خواهیم داد که چرخشهای بینهایت کوچک از قانون جمع برداری پیروی می‌کنند و می‌توان آنها را بردار نشان داد.

مثال ۱.۸.۱

بردار $\mathbf{A} = ۳\mathbf{i} + ۲\mathbf{j} + \mathbf{k}$ را برحسب مجموعهٔ سه‌تایی $\mathbf{i}'\mathbf{j}'\mathbf{k}'$ بنویسید، در صورتی که محورهای $x'y'$ به‌اندازهٔ $۴۵°$ حول محور z بچرخند؛ مطابق شکل ۱.۸.۱، محورهای z و z' برهم منطبق‌اند. با توجه به شکل، برای ضرایب تبدیل داریم: $\mathbf{i} \cdot \mathbf{i}' = \cos ۴۵°$ و الی آخر. بنابراین:

$$\begin{aligned} &\mathbf{i}\cdot\mathbf{i}' = ۱/\sqrt{۲} \quad &&\mathbf{j}\cdot\mathbf{i}' = ۱/\sqrt{۲} \quad &&\mathbf{k}\cdot\mathbf{i}' = ۰ \\ &\mathbf{i}\cdot\mathbf{j}' = -۱/\sqrt{۲} \quad &&\mathbf{j}\cdot\mathbf{j}' = ۱/\sqrt{۲} \quad &&\mathbf{k}\cdot\mathbf{j}' = ۰ \\ &\mathbf{i}\cdot\mathbf{k}' = ۰ \quad &&\mathbf{j}\cdot\mathbf{k}' = ۰ \quad &&\mathbf{k}\cdot\mathbf{k}' = ۱ \end{aligned}$$

از اینجا، می‌رسیم به:

$$A_{x'} = \frac{۳}{\sqrt{۲}} + \frac{۲}{\sqrt{۲}} = \frac{۵}{\sqrt{۲}} \qquad A_{y'} = \frac{-۳}{\sqrt{۲}} + \frac{۲}{\sqrt{۲}} = \frac{-۱}{\sqrt{۲}} \qquad A_{z'} = ۱$$

از این‌رو، در دستگاه مختصات پریم‌دار، بردار $\mathbf{A}$ به‌صورت زیر در می‌آید

$$\mathbf{A} = \frac{۵}{\sqrt{۲}}\mathbf{i}' - \frac{۱}{\sqrt{۲}}\mathbf{j}' + \mathbf{k}'$$

مثال ۲.۸.۱

ماتریس تبدیل برای چرخش دستگاه مختصات پریم‌دار به اندازهٔ زاویهٔ ϕ حول محور z را به‌دست آورید. (مثال ۱.۸.۱ حالت خاصی از این مثال است.) داریم:

$$\mathbf{i}\cdot\mathbf{i}' = \mathbf{j}\cdot\mathbf{j}' = \cos\phi$$

$$\mathbf{j}\cdot\mathbf{i}' = \mathbf{i}\cdot\mathbf{j}' = \sin\phi$$

$$\mathbf{k}\cdot\mathbf{k}' = ۱$$

و تمام ضربهای نقطه‌ای دیگر صفرند، از این‌رو، ماتریس تبدیل عبارت خواهد شد از:

$$\begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi & ۰ \\ -\sin\phi & \cos\phi & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{pmatrix}$$

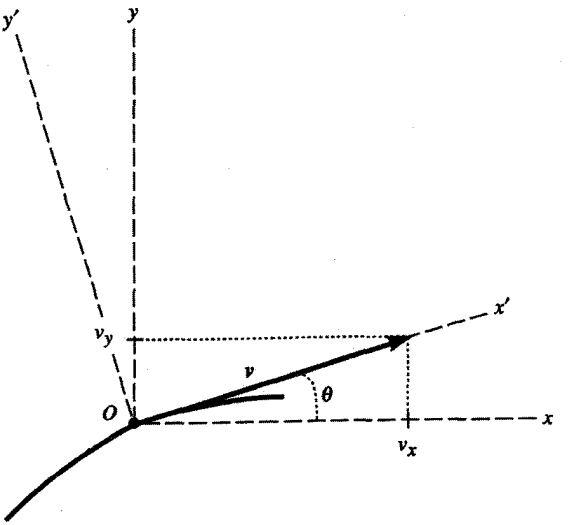
مثال ۳.۸.۱ تبدیلات متعامد

در متون پیشرفته‌تر، بردارها را کمیتهایی تعریف می‌کنند که مؤلفه‌هایشان بنابر قواعد تبدیلات متعامد تغییر می‌کنند. تعمیم این مبحث از حوصلهٔ این کتاب خارج است؛ اما، مثال ساده‌ای از این‌گونه تبدیل ارائه می‌کنیم که بتواند درکی دوباره از ظرافت این تعریف کوتاهتر بردارها به دانشجو بدهد. چرخش دستگاه مختصات دکارتی مثالی از تبدیل متعامد است. در اینجا، نشان می‌دهیم که وقتی دستگاه مختصات دکارتی، که در آن مؤلفه‌ها بیان می‌شوند، به‌اندازهٔ زاویهٔ θ می‌چرخد و بعد دوباره برمی‌گردد مؤلفه‌های بردار چگونه تبدیل می‌شوند.

فرض کنید سرعت، $\mathbf{v}$، یک پرتابه به جرم m را که در فضا روی مسیری سهمیوار حرکت می‌کند، مثالی از بردار یادشده در نظر بگیریم.[۱] در شکل ۲.۸.۱، مکان و سرعت پرتابه را در لحظهٔ زمانی t نشان می‌دهیم. جهت $\mathbf{v}$ مماس بر مسیر پرتابه است و جهت لحظه‌ای حرکت آن را نمایش می‌دهد. چون حرکت فقط در دو بعد صورت می‌گیرد، می‌توانیم سرعت را برحسب مؤلفه‌هایش در امتداد محورهای x و y دستگاه مختصات دکارتی دوبعدی مشخص کنیم. نیز، می‌توانیم سرعت پرتابه را برحسب مؤلفهٔ آن در دستگاه مختصات $x'y'$ که با چرخش دستگاه

۱. گالیله در سال ۱۶۰۹ نشان داد که مسیر چنین پرتابه‌ای سهمی است. ر.ک.، مثلاً،

1. Stillman Drake, *Galileo at work–His Scientific Biography*, Dover Publications, New York 1978. 2. *Galileo Manuscripts,* Folio 116v, vol. 72, Biblioteca Nationale Centrale, Florence, Italy.



شکل ۲.۸.۱ سرعت یک ذرهٔ متحرک که نسبت به دو دستگاه مختصات دوبعدی متفاوت سنجیده می‌شود.

xy به‌اندازهٔ θ به‌دست می‌آید، مشخص کنیم؛ زاویهٔ چرخش θ را اختیار می‌کنیم که محور x' را هم‌راستا با جهت بردار سرعت می‌نماید.

چرخش مختصات را برحسب ماتریس تبدیل بیان می‌کنیم که در معادلهٔ ۵.۸.۱ تعریف شده است. تمام بردارها را به‌صورت ماتریسهایی ستونی می‌نویسیم؛ بنابراین، بردار $\mathbf{v} = (v_x, v_y)$ عبارت است از:

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v\cos\theta \\ v\sin\theta \end{pmatrix}$$

با معلوم بودن مؤلفه‌ها در دستگاه مختصات، می‌توانیم آنها را در دستگاه مختصات دیگر با به‌کار بردن تبدیل ماتریسی معادلهٔ ۵.۸.۱ محاسبه کنیم. این ماتریس را با نماد $\mathbf{R}$ نمایش می‌دهیم:[۱]

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} \mathbf{i}\cdot\mathbf{i}' & \mathbf{j}\cdot\mathbf{i}' \\ \mathbf{i}\cdot\mathbf{j}' & \mathbf{j}\cdot\mathbf{j}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

۱. ما نیز در این کتاب ماتریسها را با نمادهای حروفی درشت نمایش می‌دهیم. برای اینکه روشن شود، این نماد بردار را نمایش می‌دهد یا ماتریس، باید به‌مطلب مربوطه در متن کتاب مراجعه شود.

مؤلفه‌های $\mathbf{v}'$ در دستگاه مختصات $x'y'$ عبارت‌اند از:

$$\mathbf{v}' = \begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v\cos\theta \\ v\sin\theta \end{pmatrix}$$

یا به‌طور نمادی، $\mathbf{v}' = \mathbf{R}\mathbf{v}$. در اینجا این بردار را در دستگاه مختصات پریم‌دار با $\mathbf{v}'$ نشان داده‌ایم هر چند، به‌خاطر می‌آوریم که $\mathbf{v}$ و $\mathbf{v}'$ هر دو یک بردار را نمایش می‌دهند. بردار سرعت در راستای محور x' از دستگاه مختصات چرخیدهٔ $x'y'$ متوجه، و با شکل $v_{x'} = v$ و $v_{y'} = 0$ سازگار است. مقادیر مؤلفه‌های بردار، وقتی در دستگاههای مختصاتی بیان شوند، که نسبت به یکدیگر چرخیده باشند، تغییر می‌کنند.

مجذور بزرگی بردار $\mathbf{v}$ عبارت است از:

$$(\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}) = \tilde{\mathbf{v}}\mathbf{v} = (v\cos\theta\, v\sin\theta)\begin{pmatrix} v\cos\theta \\ v\sin\theta \end{pmatrix} = v^2\cos^2\theta + v^2\sin^2\theta = v^2$$

($\tilde{\mathbf{v}}$ ترانهاد بردار ستونی $\mathbf{v}$ است ــ ترانهاد $\tilde{\mathbf{A}}$ هر ماتریس $\mathbf{A}$ با تعویض ستونهای آن با سطرهایش به‌دست می‌آید.)

به‌همین ترتیب، مجذور بزرگی بردار $\mathbf{v}'$ عبارت است از

$$(\mathbf{v}'\cdot\mathbf{v}') = \tilde{\mathbf{v}}'\mathbf{v}' = (v\ 0)\begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix} = v^2 + 0^2 = v^2$$

در هر یک از این حالتها، بزرگی بردار عبارت است از کمیت اسکالر v که مقدار آن از دستگاه مختصات اختیارشدهٔ ما مستقل است. همین مطلب دربارهٔ جرم پرتابه نیز صادق است. اگر جرمش در دستگاه مختصات xy یک کیلوگرم باشد، در دستگاه مختصات $x'y'$ هم یک کیلوگرم خواهد بود. کمیتهای اسکالر تحت چرخش دستگاه مختصات ناوردایند.

فرض کنید نسبت به دستگاه مختصات xy تبدیل وارونه اجرا کنیم. باید مؤلفه‌های بردار اصلی $\mathbf{v}$ را به‌دست آوریم. تبدیل وارونه با چرخش دستگاه $x'y'$ به‌اندازهٔ $-\theta$ به‌دست می‌آید. ماتریس تبدیل را که عامل این تبدیل است، می‌توان با تغییر علامت θ در ماتریس $\mathbf{R}$ به‌دست آورد:

$$\mathbf{R}(-\theta) = \begin{pmatrix} \cos(-\theta) & \sin(-\theta) \\ -\sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \equiv \tilde{\mathbf{R}}$$

می‌بینیم که چرخش وارونه به‌وسیلهٔ ماتریس ترانهاد $\mathbf{R}$، یعنی $\tilde{\mathbf{R}}$ ایجاد می‌شود.
حال اگر $\tilde{\mathbf{R}}$ را روی $\mathbf{v}'$ اعمال کنیم، می‌رسیم به $\tilde{\mathbf{R}}\mathbf{v}' = \tilde{\mathbf{R}}\mathbf{R}\mathbf{v} = \mathbf{v}$، یا در نماد ماتریسی

$$\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v\\ 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v\cos\theta\\ v\sin\theta\end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v\cos\theta\\ v\sin\theta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}v\cos\theta\\ v\sin\theta\end{pmatrix}$$

به بیان دیگر، $\tilde{\mathbf{R}}\mathbf{R} = \mathbf{I}$، عملگر واحد یا $\tilde{\mathbf{R}} = \mathbf{R}^{-1}$ وارون $\mathbf{R}$ است. تبدیلاتی که از این خصوصیات برخوردارند، تبدیلات متعامد نامیده می‌شوند. چرخشهای دستگاههای مختصات مثالهایی از این‌گونه تبدیل به‌شمار می‌آیند.

۹.۱ مشتق بردار

تا اینجا بیشتر با جبر برداری سروکار داشته‌ایم. اکنون مطالعهٔ حساب دیفرانسیل و انتگرال بردارها و کاربرد آن در توصیف حرکت ذرات را آغاز می‌کنیم.

بردار $\mathbf{A}$ را در نظر بگیرید که مؤلفه‌های آن تابعی از یک تک متغیر u هستند. این بردار می‌تواند نمایشگر مکان، سرعت، و کمیتهایی از این دست باشد. پارامتر u معمولاً زمان، t، است، اما می‌تواند هر کمیت دیگری هم باشد که مؤلفه‌های $\mathbf{A}$ را تعیین می‌کند

$$\mathbf{A}(u) = \mathbf{i}A_x(u) + \mathbf{j}A_y(u) + \mathbf{k}A_z(u) \qquad (۱.۹.۱)$$

مشتق $\mathbf{A}$ نسبت به u، کاملاً شبیه به مشتق معمولی یک تابع اسکالر، به‌کمک حد تعریف می‌شود:

$$\frac{d\mathbf{A}}{du} = \lim_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta\mathbf{A}}{\Delta u} = \lim_{\Delta u\to 0}\left(\mathbf{i}\frac{\Delta A_x}{\Delta u} + \mathbf{j}\frac{\Delta A_y}{\Delta u} + \mathbf{k}\frac{\Delta A_z}{\Delta u}\right)$$

که $\Delta A_x = A_x(u+\Delta u) - A_x(u)$ و به‌همین‌ترتیب الی آخر. به این ترتیب،

$$\frac{d\mathbf{A}}{du} = \mathbf{i}\frac{dA_x}{du} + \mathbf{j}\frac{dA_y}{du} + \mathbf{k}\frac{dA_z}{du} \qquad (۲.۹.۱)$$

بنابراین، مشتق هر بردار عبارت است از برداری که مؤلفه‌های دکارتی آن مشتقهای معمولی باشند.

از معادلهٔ (۲.۹.۱) نتیجه می‌گیریم که مشتق مجموع دو بردار با مجموع مشتقات آن دو بردار برابر است، یعنی

$$\frac{d}{du}(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = \frac{d\mathbf{A}}{du} + \frac{d\mathbf{B}}{du} \qquad (۳.۹.۱)$$

قواعد مشتق‌گیری ضرب برداری از قواعد مشابه حساب دیفرانسیل و انتگرال بردارها پیروی می‌کنند. مثلاً،

$$\frac{d(n\mathbf{A})}{du} = \frac{dn}{du}\mathbf{A} + n\frac{d\mathbf{A}}{du} \qquad (۴.۹.۱)$$

$$\frac{d(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})}{du} = \frac{d\mathbf{A}}{du}\cdot\mathbf{B} + \mathbf{A}\cdot\frac{d\mathbf{B}}{du} \qquad (۵.۹.۱)$$

$$\frac{d(\mathbf{A}\times\mathbf{B})}{du} = \frac{d\mathbf{A}}{du}\times\mathbf{B} + \mathbf{A}\times\frac{d\mathbf{B}}{du} \qquad (۶.۹.۱)$$

توجه کنید که باید ترتیب جملات در مشتق حاصلضرب برداری رعایت شود. اثبات این ادعا برای تمرین به دانشجو واگذار می‌شود.

۱۰.۱ بردار مکان ذره: سرعت و شتاب در مختصات دکارتی (راستگوشه)

در هر دستگاه مختصات مرجع معین، مکان ذره را می‌توان به‌کمک یک تک بردار، یعنی مکان آن ذره نسبت به مبدأ، دستگاه مختصات، مشخص کرد. این بردار را بردار مکان ذره می‌گویند. در مختصات راستگوشه یا دکارتی یا متعامد (شکل ۱.۱۰.۱)، بردار مکان صرفاً از این قرار است:

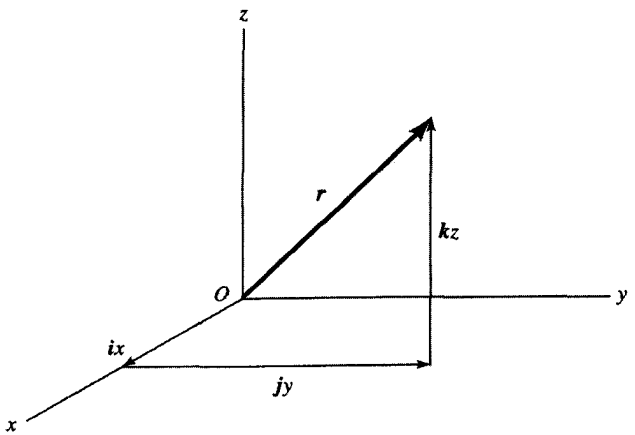
$$\mathbf{r} = \mathbf{i}x + \mathbf{j}y + \mathbf{k}z \qquad (۱.۱۰.۱)$$

مؤلفه‌های بردار مکان هر ذرهٔ متحرک توابعی از زمان‌اند، یعنی:

$$x = x(t) \qquad y = y(t) \qquad z = z(t) \qquad (۲.۱۰.۱)$$

در معادلهٔ ۲.۹.۱، تعریف رسمی مشتق هر بردار را نسبت به پارامتری بیان کردیم. در حالت خاص، اگر بردار عبارت باشد از بردار مکان ذرهٔ متحرک، $\mathbf{r}$، و پارامتر زمان هم t باشد، مشتق $\mathbf{r}$ نسبت به t را سرعت می‌نامیم، که آن را با $\mathbf{v}$ نشان می‌دهیم:

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{i}\dot{x} + \mathbf{j}\dot{y} + \mathbf{k}\dot{z} \qquad (۳.۱۰.۱)$$



شکل ۱.۱۰.۱ بردار مکان $\mathbf{r}$ و مؤلفه‌هایش در دستگاه مختصات دکارتی.

در اینجا نقطه‌های واقع در سه حروف مشتق را نسبت به زمان t نمایش می‌دهند. (این قرارداد استاندارد است و در سراسر این کتاب به‌کار خواهد رفت.) حال مفهوم هندسی بردار سرعت را بررسی کنیم. ذره‌ای را در مکان معین و در زمان t فرض کنید. پس از سپری شدن مدت زمان Δt، ذره از مکان $\mathbf{r}(t)$ به مکان $\mathbf{r}(t+\Delta t)$ جابه‌جا خواهد شد. بردار تغییر مکان در بازهٔ زمانی Δt عبارت است از:

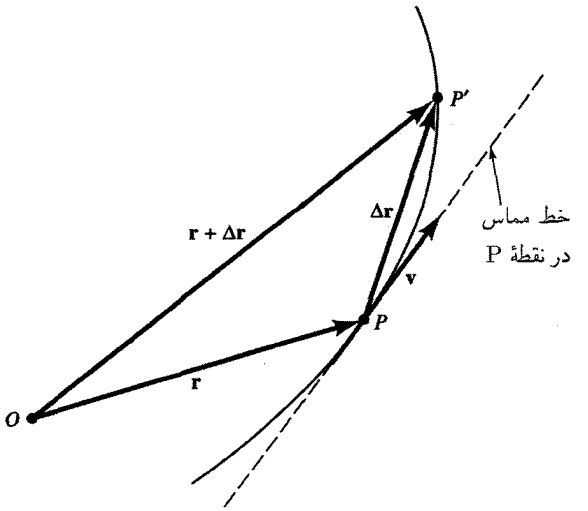
$$\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}(t+\Delta t) - \mathbf{r}(t) \qquad (۴.۱۰.۱)$$

به این ترتیب، خارج‌قسمت $\Delta\mathbf{r}/\Delta t$ **بردار** موازی تغییر مکان است. هنگامی که فواصل (بازه‌های) زمانی را کوچکتر و کوچکتر در نظر بگیریم، خارج‌قسمت $\Delta\mathbf{r}/\Delta t$ به حد $d\mathbf{r}/dt$ نزدیک می‌شود که آن را سرعت می‌نامیم. بردار $d\mathbf{r}/dt$ هم جهت و هم آهنگ حرکت را مشخص می‌کند. این معنی را در شکل ۲.۱۰.۱ به طریق نموداری نشان داده‌ایم. در بازهٔ زمانی Δt، ذره مسیری از P تا P' را می‌پیماید. وقتی Δt به صفر نزدیک شود، نقطهٔ P' به P و جهت بردار $\Delta\mathbf{r}/\Delta t$ به جهت مماس بر مسیر در نقطهٔ P نزدیک می‌شود. از این‌رو، بردار سرعت همیشه بر مسیر حرکت مماس است.

بزرگی سرعت برحسب مؤلفه‌های دکارتی، عبارت است از:

$$v = |\mathbf{v}| = (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)^{\frac{1}{2}} \qquad (۵.۱۰.۱)$$

اگر فاصلهٔ اسکالر تجمعی در امتداد مسیر را به s نشان دهیم، در این صورت می‌توانیم بزرگی



شکل ۲.۱۰.۱ بردار سرعت ذرهٔ متحرک به‌صورت حد نسبت $\Delta\mathbf{r}/\Delta t$.

سرعت را به این قرار بنویسیم:

$$v = \frac{ds}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{[(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2]^{\frac{1}{2}}}{\Delta t} \qquad (۶.۱۰.۱)$$

که این خود به عبارت سمت راست معادلهٔ (۵.۱۰.۱) تبدیل می‌شود.

مشتق زمانی سرعت را، شتاب می‌گویند. شتاب را با $\mathbf{a}$ نمایش می‌دهیم؛ در این صورت

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} \qquad (۷.۱۰.۱)$$

برحسب مؤلفه‌های دکارتی

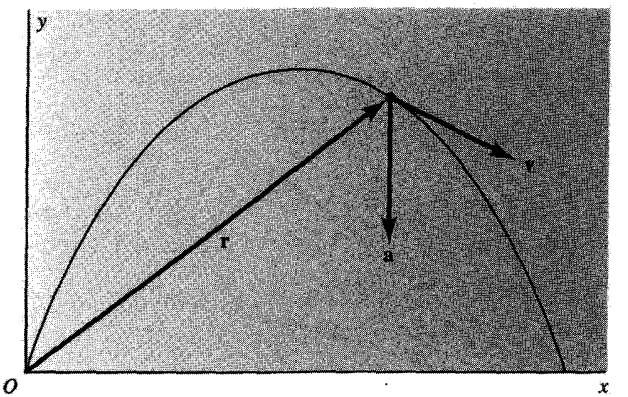
$$\mathbf{a} = \mathbf{i}\ddot{x} + \mathbf{j}\ddot{y} + \mathbf{k}\ddot{z} \qquad (۸.۱۰.۱)$$

به این ترتیب، شتاب کمیتی برداری است که مؤلفه‌هایش، در مختصات دکارتی، مشتقات دوم مختصات مکانی یک ذرهٔ متحرک را تشکیل می‌دهند.

مثال ۱.۱۰.۱ حرکت پرتابی

حرکتی را بررسی می‌کنیم که معادلهٔ زیر بیانگر آن است

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{i}bt + \mathbf{j}\left(ct - \frac{gt^2}{2}\right) + \mathbf{k}0$$



شکل ۳.۱۰.۱ بردارهای مکان، سرعت، و شتاب ذرهٔ متحرک (پرتابه) در مسیر سهموی.

این معادله حرکت در صفحهٔ xy را نشان می‌دهد، زیرا مؤلفهٔ z ثابت و صفر است. سرعت، $\mathbf{v}$، به‌کمک مشتق‌گیری نسبت به زمان t به‌دست می‌آید، یعنی:

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{i}b + \mathbf{j}(c - gt)$$

شتاب نیز از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\mathbf{j}g$$

بنابراین، $\mathbf{a}$ در جهت منفی محور y و دارای بزرگی ثابت g است. مسیر حرکت، مطابق شکل ۳.۱۰.۱، یک سهمی است. بزرگی سرعت، بنابر معادلهٔ زیر، متناسب با زمان تغییر می‌کند:

$$v = [b^2 + (c - gt)^2]^{\frac{1}{2}}$$

مثال ۲.۱۰.۱ حرکت دایره‌ای

فرض می‌کنیم بردار مکان یک ذره از این قرار است:

$$\mathbf{r} = \mathbf{i}b\sin\omega t + \mathbf{j}b\cos\omega t$$

ω در این عبارت مقداری ثابت است.

حال حرکت را تحلیل می‌کنیم. فاصلهٔ ذره تا مبدأ مختصات ثابت باقی می‌ماند:

$$|\mathbf{r}| = r = (b^2 \sin^2 \omega t + b^2 \cos^2 \omega t)^{\frac{1}{2}} = b$$

به‌این ترتیب، مسیر دایره‌ای به‌شعاع b و به مرکز مبدأ مختصات است. با مشتق‌گیری از $\mathbf{r}$، بردار سرعت را به دست می‌آوریم:

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{i}b\omega \cos \omega t - \mathbf{j}b\omega \sin \omega t$$

ذره مسیرش را با بزرگی سرعت ثابتی از قرار زیر می‌پیماید:

$$v = |\mathbf{v}| = (b^2\omega^2 \cos^2 \omega t + b^2\omega^2 \sin^2 \omega t)^{\frac{1}{2}} = b\omega$$

شتاب حرکت این ذره عبارت است از

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\mathbf{i}b\omega^2 \sin \omega t - \mathbf{j}b\omega^2 \cos \omega t$$

در این حالت، شتاب بر سرعت عمود است. زیرا حاصلضرب نقطه‌ای $\mathbf{v}$ و $\mathbf{a}$ صفر می‌شود

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{a} = (b\omega \cos \omega t)(-b\omega^2 \sin \omega t) + (-b\omega \sin \omega t)(-b\omega^2 \cos \omega t) = 0$$

ملاحظه می‌شود که از مقایسهٔ دو عبارت مربوط به $\mathbf{a}$ و $\mathbf{r}$، می‌توان نوشت

$$\mathbf{a} = -\omega^2 \mathbf{r}$$

از این‌رو، $\mathbf{a}$ و $\mathbf{r}$ مختلف‌الجهت‌اند، یعنی $\mathbf{a}$ همیشه به‌سوی مرکز مسیر دایره‌ای متوجه است (شکل ۴.۱۰.۱).

مثال ۳.۱۰.۱ چرخ غلتان

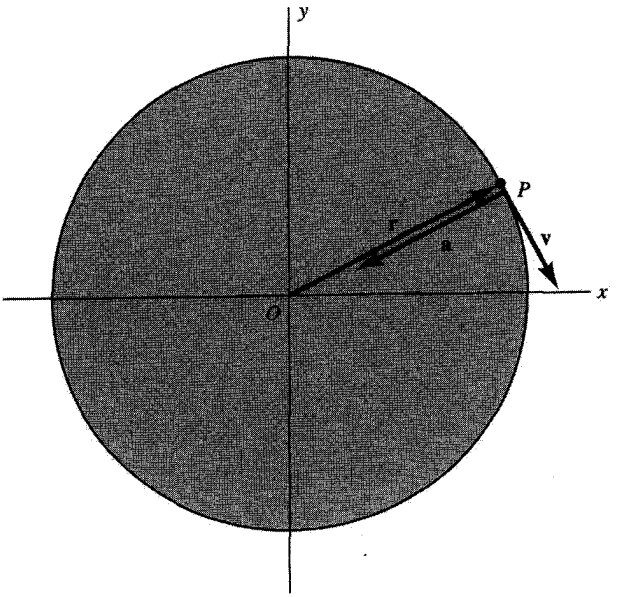
بردار مکان ذرهٔ P را از این قرار در نظر می‌گیریم:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2$$

که در آن

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{i}b\omega t + \mathbf{j}b$$

$$\mathbf{r}_2 = \mathbf{i}b \sin \omega t + \mathbf{j}b \cos \omega t$$



شکل ۴.۱۰.۱ ذرهٔ متحرک در مسیر دایره‌ای با سرعت ثابت.

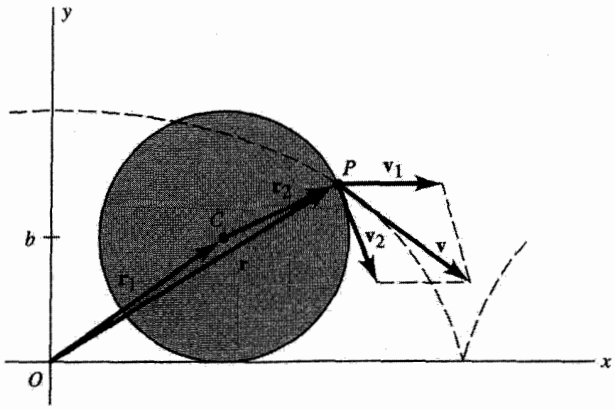
حال $\mathbf{r}_1$ خودش به‌صورت نقطهٔ متحرکی در امتداد خط $y = b$ و با سرعت ثابت بروز پیدا می‌کند، به‌شرطی که ω ثابت باشد، یعنی

$$\mathbf{v}_1 = \frac{d\mathbf{r}_1}{dt} = \mathbf{i}b\omega$$

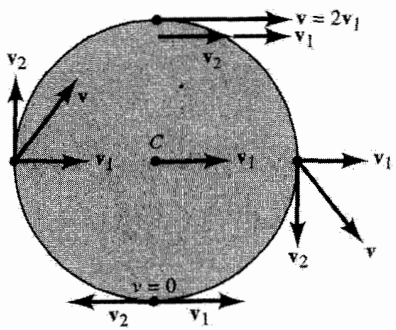
جزء دوم، $\mathbf{r}_2$، همان بردار مکان در حرکت دایره‌ای است که در مثال ۲.۱۰.۱ درباره‌اش بحث کردیم. از این‌رو، مجموع برداری $\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2$ نقطه‌ای را نشان می‌دهد که دایره‌ای به شعاع b حول یک مرکز متحرک ترسیم می‌کند. این دقیقاً همان اتفاقی است که در مورد یک ذره بر لبهٔ چرخ غلتان رخ می‌دهد؛ $\mathbf{r}_1$ بردار مکان مرکز چرخ و $\mathbf{r}_2$ بردار مکان ذرهٔ P نسبت به مرکز متحرک است. مسیر واقعی حرکت چرخزاد است (شکل ۵.۱۰.۱). سرعت P عبارت است از

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 = \mathbf{i}(b\omega + b\omega\cos\omega t) - \mathbf{j}b\omega\sin\omega t$$

در حالت خاص، به‌ازای $\omega t = 0, 2\pi, 4\pi, \cdots$، داریم $\mathbf{v} = \mathbf{i}2b\omega$؛ که درست دو برابر سرعت مرکز C است. در این نقاط، ذره در بالاترین قسمت مسیرش واقع است. علاوه بر این، به‌ازای



شکل ۵.۱۰.۱ مسیر چرخزادی (سیکلوییدی) ذره واقع بر چرخ غلتان.



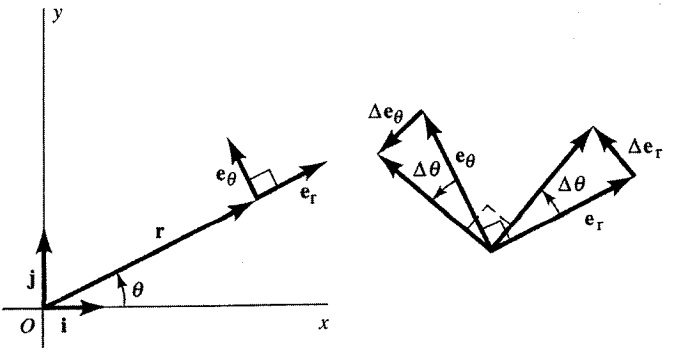
شکل ۶.۱۰.۱ بردارهای سرعت نقاط مختلف واقع بر چرخ غلتان.

$\omega t = \pi, 3\pi, 5\pi, \cdots$، داریم، $\mathbf{v} = 0$. در این نقاط، ذره در پایین‌ترین نقطهٔ خود واقع و به‌طور لحظه‌ای با زمین در تماس است (شکل ۶.۱۰.۱).

۱۱.۱ سرعت و شتاب در مختصات قطبی مسطح

غالباً بهتر است برای نمایش مکان ذرهٔ متحرک در صفحه، از مختصات قطبی r و θ بهره گیریم. از لحاظ برداری، مکان این ذره را می‌توان با حاصلضرب فاصلهٔ شعاعی، r، در بردار شعاع یکه، $\mathbf{e}_r$، نشان داد:

$$\mathbf{r} = r\mathbf{e}_r \qquad (۱.۱۱.۱)$$



شکل ۱.۱۱.۱ بردارهای یکهٔ مربوط به مختصات قطبی در صفحه.

با حرکت ذره، هم r و هم $\mathbf{e}_r$ تغییر می‌کنند؛ به این ترتیب، هر دو کمیت تابعی از زمان‌اند. از این‌رو، اگر نسبت به t مشتق بگیریم:

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \dot{r}\mathbf{e}_r + r\frac{d\mathbf{e}_r}{dt} \qquad (۲.۱۱.۱)$$

برای محاسبهٔ مشتق، $d\mathbf{e}_r/dt$، نمودار برداری نمایش یافته در شکل ۱.۱۱.۱ را در نظر می‌گیریم. از مطالعهٔ این شکل پی‌می‌بریم که وقتی جهت $\mathbf{r}$ به‌اندازهٔ $\Delta\theta$ تغییر می‌کند، تغییر بردار شعاعی یکهٔ متناظر با آن، $\Delta\mathbf{e}_r$، به این طریق اتفاق می‌افتد: بزرگی $|\Delta\mathbf{e}_r|$ تقریباً مساوی $\Delta\theta$ و جهت $\Delta\mathbf{e}_r$ خیلی به خط عمود بر $\mathbf{e}_r$ نزدیک است. بردار یکهٔ دیگری، $\mathbf{e}_\theta$، را معرفی می‌کنیم که جهتش بر $\mathbf{e}_r$ عمود باشد. در این صورت، داریم:

$$\Delta\mathbf{e}_r \simeq \mathbf{e}_\theta\Delta\theta \qquad (۳.۱۱.۱)$$

اگر طرفین این عبارت را بر Δt تقسیم کنیم و حد آن را بگیریم، برای مشتق زمانی بردار یکهٔ شعاعی می‌رسیم به:

$$\frac{d\mathbf{e}_r}{dt} = \mathbf{e}_\theta\frac{d\theta}{dt} \qquad (۴.۱۱.۱)$$

به‌همین ترتیب، می‌توانیم استدلال کنیم که تغییر بردار یکهٔ $\mathbf{e}_\theta$ از رابطهٔ تقریبی زیر به‌دست می‌آید:

$$\Delta\mathbf{e}_\theta \simeq -\mathbf{e}_r\Delta\theta \qquad (۵.۱۱.۱)$$

در اینجا، علامت منها نشان می‌دهد که، مطابق شکل، جهت تغییر $\Delta\mathbf{e}_\theta$ خلاف جهت تغییر $\mathbf{e}_r$

است. در نتیجه، مشتق زمانی از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید

$$\frac{d\mathbf{e}_\theta}{dt} = -\mathbf{e}_r \frac{d\theta}{dt} \qquad (۶.۱۱.۱)$$

برای دستیابی به مشتق بردار شعاعی یکه، از معادلهٔ (۴.۱۱.۱) بهره می‌گیریم، و بالاخره می‌توانیم معادلهٔ سرعت را به‌صورت زیر بنویسیم:

$$\mathbf{v} = \dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta \qquad (۷.۱۱.۱)$$

بنابراین، $\dot{r}$ مؤلفهٔ شعاعی بردار سرعت و $r\dot{\theta}$ مؤلفهٔ عرضی آن است.

به‌منظور یافتن بردار شتاب، از سرعت نسبت به زمان مشتق می‌گیریم:

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \ddot{r}\mathbf{e}_r + \dot{r}\frac{d\mathbf{e}_r}{dt} + (\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\mathbf{e}_\theta + r\dot{\theta}\frac{d\mathbf{e}_\theta}{dt} \qquad (۸.۱۱.۱)$$

مقادیر $d\mathbf{e}_r/dt$ و $d\mathbf{e}_\theta/dt$ از معادلات (۴.۱۱.۱) و (۶.۱۱.۱) به‌دست می‌آیند و به معادلهٔ زیر برای بردار شتاب در مختصات قطبی دست می‌یابیم

$$\mathbf{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\mathbf{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\mathbf{e}_\theta \qquad (۹.۱۱.۱)$$

بنابراین، مؤلفهٔ شعاعی بردار شتاب عبارت است از

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \qquad (۱۰.۱۱.۱)$$

و مؤلفهٔ عرضی آن از این قرار خواهد بود:

$$a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = \frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) \qquad (۱۱.۱۱.۱)$$

مثلاً، نتایج بالا نشان می‌دهند که اگر ذره‌ای روی دایره‌ای به شعاع ثابت b حرکت کند، آنگاه $\dot{r} = 0$، و در این صورت بزرگی مؤلفهٔ شعاعی بردار شتاب عبارت است از $b\dot{\theta}^2$ و جهت آن به سمت مرکز این مسیر دایره‌ای است. مؤلفهٔ عرضی در این حالت عبارت است از $b\ddot{\theta}$. از سوی دیگر، اگر ذره در امتداد یک خط ثابت شعاعی حرکت کند، یعنی اگر θ ثابت باشد، مؤلفهٔ شعاعی دقیقاً $\ddot{r}$ و مؤلفهٔ عرضی صفر خواهد بود؛ اگر r و θ هر دو تغییر کنند، در این حالت از معادلهٔ کلی (۹.۱۱.۱) بردار شتاب به‌دست می‌آید.

مثال ۱.۱۱.۱

یک زنبور عسل در مسیر مارپیچ چنان به کندوی خود مراجعت می‌کند که فاصلهٔ شعاعی با آهنگ ثابت $r = b - ct$ کاهش یابد. در حالی که سرعت زاویه‌ای زنبور با آهنگ ثابت $\dot{\theta} = kt$ فزونی می‌گیرد، بزرگی سرعت را به‌صورت تابعی از زمان به‌دست آورید:

حل:

داریم: $\dot{r} = c$ و $\ddot{r} = ۰$. به این ترتیب، از معادلهٔ ۷.۱۱.۱ می‌رسیم به:

$$\mathbf{v} = -c\mathbf{e}_r + (b - ct)kt\mathbf{e}_\theta$$

به این طریق،

$$v = [c^۲ + (b - ct)^۲k^۲t^۲]^{\frac{۱}{۲}}$$

که این معادله به ازای $t \leq b/c$ برقرار است (مقادیر بزرگتر t، r را منفی می‌کنند). توجه کنید که هم به‌ازای $t = ۰$ و $r = b$ و هم به‌ازای $t = b/c$ و $r = ۰$، داریم $v = c$.

مثال ۲.۱۱.۱

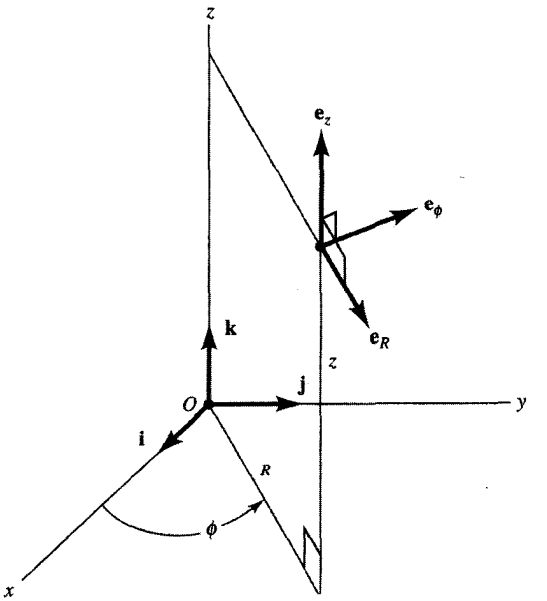
روی میز گردان افقی که بزرگی سرعت زاویه‌ای چرخیدنش ثابت است، حشره‌ای روی یک خط شعاعی به‌سوی خارج می‌خزد، به‌طوری که فاصلهٔ آن از مرکز به‌صورت توان دوم زمان افزایش می‌یابد: $r = bt^۲$ و $\theta = \omega t$، که b و ω ثابت‌اند. شتاب این حشره را به‌دست آورید.

حل:

داریم: $\dot{r} = ۲bt$ و $\ddot{r} = ۲b$ و $\dot{\theta} = \omega$ و $\ddot{\theta} = ۰$. این مقادیر را در معادلهٔ ۹.۱۱.۱ می‌نشانیم. خواهیم داشت

$$\begin{aligned}\mathbf{a} &= \mathbf{e}_r(۲b - bt^۲\omega^۲) + \mathbf{e}_\theta[۰ + ۲(۲bt)\omega] \\ &= b(۲ - t^۲\omega^۲)\mathbf{e}_r + ۴b\omega t\mathbf{e}_\theta\end{aligned}$$

به این نکته توجه کنید که مؤلفهٔ شعاعی شتاب به‌ازای مقادیر بزرگ t در این مثال، منفی می‌شود. هر چند که شعاع همیشه به‌طور یکنواخت با زمان افزایش می‌یابد.



شکل ۱.۱۲.۱ بردارهای یکهٔ مختصات استوانه‌ای.

۱۲.۱ سرعت و شتاب در مختصات استوانه‌ای و کروی

مختصات استوانه‌ای

در حرکت سه‌بعدی، می‌توان مکان ذره را در مختصات استوانه‌ای R، ϕ، z توصیف کرد؛ از این‌رو، بردار مکان را می‌توان به این طریقه نوشت:

$$\mathbf{r} = R\mathbf{e}_R + z\mathbf{e}_z \qquad (۱.۱۲.۱)$$

که $\mathbf{e}_R$ بردار یکهٔ شعاعی در صفحهٔ xy و $\mathbf{e}_z$ بردار یکه در جهت z است. بردار یکهٔ سومی، $\mathbf{e}_\phi$، هم لازم است تا، مطابق شکل ۱.۱۲.۱، سه بردار $\mathbf{e}_R\mathbf{e}_\phi\mathbf{e}_z$ یک مجموعهٔ سه‌تایی راستگرد تشکیل دهند. توجه می‌کنیم که $\mathbf{k} = \mathbf{e}_z$.

بردارهای سرعت و شتاب، مانند قبل، از طریق مشتق‌گیری به‌دست می‌آیند. در اینجا نیز این عمل شامل مشتقات برداری یکه خواهد شد. با استدلالی نظیر آنچه در مورد مختصات قطبی در صفحه به‌دست آوردیم، می‌توان نشان داد که $d\mathbf{e}_R/dt = \mathbf{e}_\phi\dot{\phi}$ و $d\mathbf{e}_\phi/dt = -\mathbf{e}_R\dot{\phi}$. جهت بردار یکهٔ $\mathbf{e}_z$ تغییر نمی‌کند، از این‌رو، مشتق زمانی آن صفر است.

با در نظر داشتن این نکات، به‌آسانی پی‌می‌بریم که بردارهای سرعت و شتاب به‌کمک معادلات زیر بیان می‌شوند:

$$\mathbf{v} = \dot{R}\mathbf{e}_R + R\dot{\phi}\mathbf{e}_\phi + \dot{z}\mathbf{e}_z \qquad (۲.۱۲.۱)$$

$$\mathbf{a} = (\ddot{R} - R\dot{\phi}^2)\mathbf{e}_R + (2\dot{R}\dot{\phi} + R\ddot{\phi})\mathbf{e}_\phi + \ddot{z}\mathbf{e}_z \qquad (۳.۱۲.۱)$$

از این معادلات مقادیر $\mathbf{v}$ و $\mathbf{a}$ برحسب مؤلفه‌های آنها در سه‌گانهٔ چرخیدهٔ $\mathbf{e}_R\mathbf{e}_\phi\mathbf{e}_z$، به‌دست می‌آیند.

روش دیگر برای دستیابی به مشتق بردارهای یکه، مشتق‌گیری از معادلات زیر است که رابطه‌هایی بین بردارهای یکهٔ مجموعهٔ سه‌گانهٔ $\mathbf{ijk}$ و مجموعهٔ سه‌گانهٔ چرخیده به‌شمار می‌آیند:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_R &= \mathbf{i}\cos\phi + \mathbf{j}\sin\phi \\ \mathbf{e}_\phi &= -\mathbf{i}\sin\phi + \mathbf{j}\cos\phi \\ \mathbf{e}_z &= \mathbf{k} \end{aligned} \qquad (۴.۱۲.۱)$$

عملیاتی که باید روی آنها انجام شود، به‌صورت تمرین بر عهدهٔ خواننده گذاشته می‌شود. این نتیجه را نیز می‌توان با استفاده از ماتریس چرخش، مطابق مثال ۲.۸.۱، به‌دست آورد.

مختصات کروی

وقتی مختصات کروی r، θ، ϕ را برای توصیف مکان ذره به‌کار می‌بریم، بردار مکان نظیر مختصات قطبی در صفحه، به‌صورت حاصلضرب فاصلهٔ شعاعی، r، و بردار یکهٔ شعاعی، $\mathbf{e}_r$، نوشته می‌شود. بنابراین

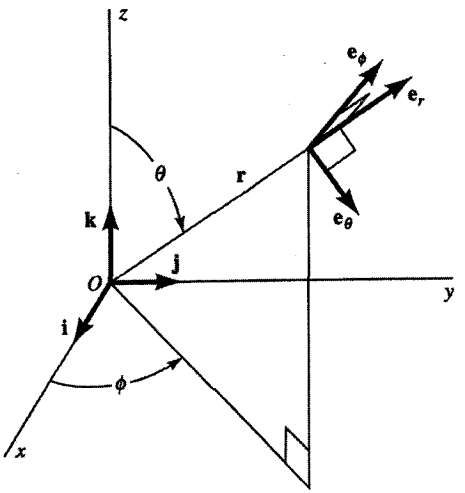
$$\mathbf{r} = r\mathbf{e}_r \qquad (۵.۱۲.۱)$$

اکنون جهت $\mathbf{e}_r$ با دو زاویهٔ ϕ و θ مشخص می‌شود. دو بردار یکهٔ دیگر، $\mathbf{e}_\phi$ و $\mathbf{e}_\theta$، را مطابق شکل ۲.۱۲.۱ معرفی می‌کنیم.

سرعت عبارت است از

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \dot{r}\mathbf{e}_r + r\frac{d\mathbf{e}_r}{dt} \qquad (۶.۱۲.۱)$$

مسئلهٔ بعدی ما این است که چگونه مشتق $d\mathbf{e}_r/dt$ را برحسب بردارهای یکه در مجموعهٔ سه‌تایی چرخیده بیان کنیم.



شکل ۲.۱۲.۱ بردارهای یکهٔ مختصات کروی.

با توجه به شکل ۲.۱۲.۱، می‌توانیم بین دو مجموعهٔ سه‌گانهٔ $\mathbf{ijk}$ و $\mathbf{e}_r\mathbf{e}_\theta\mathbf{e}_\phi$ روابطی برقرار کنیم. مثلاً، به این علت که هر بردار را می‌توان برحسب تصویرهایش روی محورهای مختصات x، y، و z بیان کرد:

$$\mathbf{e}_r = \mathbf{i}(\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{i}) + \mathbf{j}(\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{j}) + \mathbf{k}(\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{k}) \qquad (۷.۱۲.۱)$$

$\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{i}$ تصویر بردار یکهٔ $\mathbf{e}_r$ مستقیماً روی بردار یکهٔ $\mathbf{i}$، بنابر معادلهٔ ۱۱.۴.۱ الف، برابر با $\cos\alpha$، یعنی کسینوس زاویهٔ بین آن دو بردار یکه، است. لازم است این حاصلضرب نقطه‌ای را به‌جای اینکه برحسب α باشد، برحسب θ و ϕ بیان کرد. رابطهٔ موردنظر را می‌توان با انجام دو تصویراندازی متوالی، تا رسیدن به محور x، به‌دست آورد. ابتدا $\mathbf{e}_r$ را روی صفحهٔ xy تصویر و بعد از آنجا بر محور x تصویر می‌کنیم. اولین تصویر ضریب $\sin\theta$ و دومین تصویر ضریب $\cos\phi$ را به‌دست می‌دهد. بزرگی تصویری که به این روش به‌دست می‌آید، حاصلضرب نقطه‌ای موردنظر است:

$$\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{i} = \sin\theta\cos\phi \qquad (۸.۱۲.۱ \text{ الف})$$

حاصلضربهای نقطه‌ای باقیمانده را می‌توان با روشی مشابه محاسبه کرد

$$\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{j} = \sin\theta\sin\phi \quad \text{و} \quad \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{k} = \cos\theta \qquad (۸.۱۲.۱ \text{ ب})$$

به همین روش می‌توان روابط مربوط به $\mathbf{e}_\theta$ و $\mathbf{e}_\phi$ را نیز به‌دست آورده به روابط موردنظر به‌صورت زیر رسید:

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_r &= \mathbf{i}\sin\theta\cos\phi + \mathbf{j}\sin\theta\sin\phi + \mathbf{k}\cos\theta\\ \mathbf{e}_\theta &= \mathbf{i}\cos\theta\cos\phi + \mathbf{j}\cos\theta\sin\phi - \mathbf{k}\sin\theta\\ \mathbf{e}_\phi &= -\mathbf{i}\sin\phi + \mathbf{j}\cos\phi\end{aligned} \qquad (۹.۱۲.۱)$$

اینها بردارهای یکهٔ مجموعهٔ سه‌گانهٔ چرخیده را برحسب مجموعهٔ سه‌گانهٔ ثابت $\mathbf{ijk}$ بیان می‌کنند. پی‌می‌بریم که بین این تبدیل و تبدیل جزء دوم مثال ۲.۸.۱ شباهتی برقرار است. در واقع، اگر چرخشها را به‌درستی بازشناسیم، این دو تبدیل یکسان‌اند. از معادلهٔ اول نسبت به زمان مشتق می‌گیریم؛ در این صورت می‌رسیم به:

$$\frac{d\mathbf{e}_r}{dt} = \mathbf{i}(\dot\theta\cos\theta\cos\phi - \dot\phi\sin\theta\sin\phi) + \mathbf{j}(\dot\theta\cos\theta\sin\phi + \dot\phi\sin\theta\cos\phi) - \mathbf{k}\dot\theta\sin\theta \qquad (۱۰.۱۲.۱)$$

حالا، با بهره‌گیری از عبارتهای مربوط به $\mathbf{e}_\phi$ و $\mathbf{e}_\theta$ در معادلهٔ ۹.۱۲.۱، پی‌می‌بریم که معادلهٔ بالا به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$\frac{d\mathbf{e}_r}{dt} = \mathbf{e}_\phi\dot\phi\sin\theta + \mathbf{e}_\theta\dot\theta \qquad (۱۱.۱۲.۱ \text{ الف})$$

دو مشتق دیگر با روشی مشابه به‌دست می‌آیند. نتایج از این قرار خواهند بود:

$$\frac{d\mathbf{e}_\theta}{dt} = -\mathbf{e}_r\dot\theta + \mathbf{e}_\phi\dot\phi\cos\theta \qquad (۱۱.۱۲.۱ \text{ ب})$$

$$\frac{d\mathbf{e}_\phi}{dt} = -\mathbf{e}_r\dot\phi\sin\theta - \mathbf{e}_\phi\dot\phi\cos\theta \qquad (۱۱.۱۲.۱ \text{ ج})$$

مراحل این عملیات را برای تمرین به خواننده وامی‌گذاریم. اکنون به مسئلهٔ یافتن $\mathbf{v}$ برمی‌گردیم. عبارت $d\mathbf{e}_r/dt$ را که معادلهٔ ۱۱.۱۲.۱ الف بیانگر آن است، در معادلهٔ ۶.۱۲.۱ قرار می‌دهیم

$$\mathbf{v} = \mathbf{e}_r\dot r + \mathbf{e}_\phi r\dot\phi\sin\theta + \mathbf{e}_\theta r\dot\theta \qquad (۱۲.۱۲.۱)$$

که بردار سرعت را برحسب مؤلفه‌هایش در مجموعهٔ سه‌گانهٔ چرخیده به‌دست می‌دهد. برای به‌دست

آوردن شتاب، از روابط فوق نسبت به زمان مشتق می‌گیریم. خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}\mathbf{a} &= \frac{d\mathbf{v}}{dt} \\ &= \mathbf{e}_r\ddot{r} + \dot{r}\frac{d\mathbf{e}_r}{dt} + \mathbf{e}_\phi\frac{d(r\dot{\phi}\sin\theta)}{dt} + r\dot{\phi}\sin\theta\frac{d\mathbf{e}_\phi}{dt} + \mathbf{e}_\theta\frac{d(r\dot{\theta})}{dt} \\ &\quad + r\dot{\theta}\frac{d\mathbf{e}_\theta}{dt} \qquad (۱۳.۱۲.۱)\end{aligned}$$

با بهره‌گیری از فرمولهای قبلی مربوط به مشتق بردارهای یکه، رابطهٔ بالا برای شتاب به‌صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$\begin{aligned}\mathbf{a} &= (\ddot{r} - r\dot{\phi}^2\sin^2\theta - r\dot{\theta}^2)\mathbf{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\phi}^2\sin\theta\cos\theta)\mathbf{e}_\theta \\ &\quad + (r\ddot{\phi}\sin\theta + 2\dot{r}\dot{\phi}\sin\theta + 2r\dot{\theta}\dot{\phi}\cos\theta)\mathbf{e}_\phi \qquad (۱۴.۱۲.۱)\end{aligned}$$

که بردار شتاب را برحسب مؤلفه‌هایش در مجموعهٔ سه‌گانهٔ $\mathbf{e}_r\mathbf{e}_\theta\mathbf{e}_\phi$ به‌دست می‌دهد.

مثال ۱.۱۲.۱

مهره‌ای روی سیمی که به‌شکل مارپیچ خم‌شده می‌لغزد. حرکت مهره در مختصات استوانه‌ای با $R = b$، $\phi = \omega t$، $z = ct$ بیان می‌شود. بردارهای سرعت و شتاب را به‌صورت توابعی از زمان به‌دست آورید.

حل:

به‌کمک مشتق‌گیری می‌رسیم به: $\dot{R} = \ddot{R} = 0$، $\dot{\phi} = \omega$، $\ddot{\phi} = 0$، $\dot{z} = c$، $\ddot{z} = 0$. از این‌رو، با توجه به معادلات ۲.۱۲.۱ و ۳.۱۲.۱ می‌رسیم به:

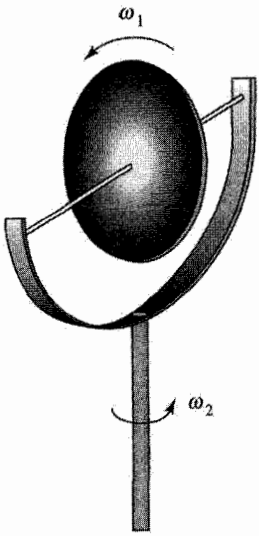
$$\mathbf{v} = b\omega\mathbf{e}_\phi + c\mathbf{e}_z$$

$$\mathbf{a} = -b\omega^2\mathbf{e}_R$$

از این‌رو، در این حالت بزرگی سرعت و شتاب ثابت است. اما جهتشان تغییر می‌کند، زیرا با حرکت مهره $\mathbf{e}_r$ و $\mathbf{e}_\phi$ هر دو با زمان تغییر می‌کنند.

مثال ۲.۱۲.۱

چرخی به شعاع b بر یک پایهٔ قاب‌مانند سوار شده و چنان ساخته شده است که چرخش آن از این قرار باشد: این چرخ با بزرگی سرعت زاویه‌ای ثابت ω_1 حول محور خودش می‌چرخد و محورش،



شکل ۳.۱۲.۱ چرخ چرخان روی پایهٔ چرخان.

به‌نوبهٔ خود، با سرعت زاویه‌ای ثابت ω_2 حول محور قائم می‌چرخد به‌طریقی که محور چرخ در صفحهٔ افقی باقی می‌ماند و مرکز چرخ بی‌حرکت است. با بهره‌گیری از مختصات کروی، شتاب هر نقطه بر لبهٔ چرخ را به‌دست آورید. در حالت خاص، شتاب بالاترین نقطهٔ چرخ را بیابید.

حل:

می‌توانیم از این نکته بهره گیریم که مختصات کروی را می‌توان چنان برگزید که داشته باشیم $r = b$ و $\theta = \omega_1 t$ و $\phi = \omega_2 t$ (شکل ۳.۱۲.۱). در این صورت داریم: $\dot{r} = \ddot{r} = 0$، $\dot{\theta} = \omega_1$، $\ddot{\theta} = 0$، $\dot{\phi} = \omega_2$، و $\ddot{\phi} = 0$. از معادلهٔ (۱۴.۱۲.۱) مستقیماً می‌رسیم به:

$$\mathbf{a} = (-b\omega_2^2 \sin^2\theta - b\omega_1^2)\mathbf{e}_r - b\omega_2^2 \sin\theta\cos\theta\mathbf{e}_\theta + 2b\omega_1\omega_2\cos\theta\mathbf{e}_\phi$$

مختصهٔ بالاترین نقطهٔ چرخ عبارت است از $\theta = 0$. از این‌رو در آن نقطه داریم:

$$\mathbf{a} = -b\omega_1^2\mathbf{e}_r + 2b\omega_1\omega_2\mathbf{e}_\phi$$

جملهٔ اول در سمت راست، شتاب مرکزگرا و جملهٔ آخر شتاب عرضی عمود بر صفحهٔ چرخ است.

مسائل

۱.۱ دو بردار $\mathbf{A} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$ و $\mathbf{B} = \mathbf{j} + \mathbf{k}$ مفروض‌اند. کمیتهای زیر را بیابید:

(الف) $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ و $|\mathbf{A} + \mathbf{B}|$

(ب) $3\mathbf{A} - 2\mathbf{B}$

(ج) $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$

(د) $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ و $|\mathbf{A} \times \mathbf{B}|$

۲.۱ سه بردار $\mathbf{A} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j}$، $\mathbf{B} = \mathbf{i} + \mathbf{k}$، و $\mathbf{C} = 4\mathbf{j}$ مفروض‌اند. کمیتهای زیر را بیابید.

(الف) $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} + \mathbf{C})$ و $(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C}$

(ب) $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$ و $(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C}$

(ج) $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$ و $(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{C}$

۳.۱ زاویهٔ بین بردارهای $\mathbf{A} = a\mathbf{i} + 2a\mathbf{j}$ و $\mathbf{B} = a\mathbf{i} + 2a\mathbf{j} + 3a\mathbf{k}$ را پیدا کنید (نکته: این دو بردار قطر یکی از وجوه و یکی از قطرهای خود قطعهٔ مکعب مستطیلی به‌ابعاد a، $2a$، و $3a$ را مشخص می‌کنند.)

۴.۱ مکعبی که طول ضلع آن واحد است، در نظر بگیرید. یک رأس آن بر مبدأ دستگاه مختصات دکارتی xyz منطبق است و سه‌ضلع متعامد آن که از این رأس می‌گذرند، در راستای مثبت هر یک از محورهای مختصات امتداد یافته‌اند. برداری را به‌دست آورید که از مبدأ شروع می‌شوند و در امتداد:

(الف) قطر بزرگ مکعب،

(ب) قطر وجه پایینی مکعب، امتداد می‌یابند.

(ج) این بردارها را $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ بنامید و $\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B}$ را به‌دست آورید.

(د) زاویهٔ بین $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ را بیابید.

۵.۱ فرض کنید دو بردار $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ معلوم باشند. فرض کنید $\mathbf{C}$ برداری نامعلوم باشد چنان‌که $\mathbf{A} \cdot \mathbf{C} = u$ کمیتی معلوم باشد $\mathbf{A} \times \mathbf{C} = \mathbf{B}$. $\mathbf{C}$ را برحسب $\mathbf{A}$، $\mathbf{B}$، u، و بزرگی $\mathbf{A}$ به‌دست آورید.

۶.۱ بردار متغیر با زمان زیر را در نظر بگیرید

$$\mathbf{A} = \mathbf{i}\alpha t + \mathbf{j}\beta t^2 + \mathbf{k}\gamma t^3$$

که در آن α، β، و γ ثابت‌اند؛ مشتقهای زمانی اول و دوم $d\mathbf{A}/dt$ و $d^2\mathbf{A}/dt^2$ بیابید.

۷.۱ به‌ازای چه مقدار (یا مقادیری) از q بردار $\mathbf{A} = \mathbf{i}q + 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$ بر بردار $\mathbf{B} = \mathbf{i}q - q\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ عمود است؟

۸.۱ اثبات جبری و هندسی روابط زیر را بیان کنید:

$$|\mathbf{A} + \mathbf{B}| \leq |\mathbf{A}| + |\mathbf{B}|$$

$$|\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}| \leq |\mathbf{A}||\mathbf{B}|$$

۹.۱ تساوی برداری $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})$ را اثبات کنید.

۱۰.۱ دو بردار $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ نمایشگر دو ضلع متقاطع یک متوازی‌الاضلاع‌اند. نشان دهید که مساحت این متوازی‌الاضلاع عبارت است از $|\mathbf{A} \times \mathbf{B}|$.

۱۱.۱ نشان دهید که $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$ با $\mathbf{B} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{C})$ برابر نیست.

۱۲.۱ سه بردار $\mathbf{A}$، $\mathbf{B}$، و $\mathbf{C}$ سه یال متقاطع یک متوازی‌السطوح هستند. نشان دهید که حجم متوازی‌السطوح عبارت است از $|\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C})|$.

۱۳.۱ درستی ماتریس تبدیل را برای چرخش حول محور z به‌اندازهٔ زاویهٔ ϕ که در پی آن چرخش حول محور y' به‌اندازهٔ θ صورت می‌گیرد، مطابق شکل ۲.۸.۱، تحقیق کنید.

۱۴.۱ بردار $\mathbf{r} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - \mathbf{k}$ را در مجموعهٔ سه‌گانهٔ $\mathbf{i}'\mathbf{j}'\mathbf{k}'$ بیان کنید، در صورتی که محورهای $x'y'$ از چرخش xy حول محور z (منطبق بر محور z') به‌اندازهٔ زاویهٔ $30°$ به‌دست آمده باشند.

۱۵.۱ دو دستگاه مختصات دکارتی xyz و $x'y'z'$ را در نظر بگیرید که ابتدا برهم منطبق باشند. $x'y'z'$ سه چرخش $45°$ متوالی پادساعتگرد حول محورهای زیر انجام می‌دهد: اول حول محور ثابت z؛ دوم حول محور x' خودش (که اکنون چرخیده است)؛ و سرانجام حول محور z' خودش (که آن نیز چرخیده است). مؤلفه‌های بردار یکهٔ $\mathbf{X}$ در دستگاه مختصات xyz را که در جهت محور x' در دستگاه چرخیدهٔ $x'y'z'$ باشد، به‌دست آورید. (راهنمایی: بهتر است سه ماتریس تبدیل، که هر یک چرخشهای یادشده را پدید می‌آورند، پیدا کنید. ماتریس تبدیل برایند حاصلضرب آن ماتریسهاست.)

۱۶.۱ اتومبیل مسابقه‌ای روی دایره‌ای به شعاع ثابت b حرکت می‌کند. اگر بزرگی سرعت این اتومبیل، بنابر معادلهٔ $v = ct$ برحسب زمان t تغییر کند (که c ثابتی مثبت است)، نشان دهید که زاویهٔ بین بردار سرعت و بردار شتاب در زمان $t = \sqrt{b/c}$ برابر $45°$ است. (راهنمایی: در این مدت زمان بزرگی مؤلفه‌های مماسی و قائم شتاب یکسان‌اند.)

۱۷.۱ گوی کوچکی، محکم بسته‌شده به یک نوار دراز لاستیکی را می‌چرخانند به‌طریقی که در

مسیری بیضوی به‌معادلهٔ زیر حرکت می‌کند:

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{i}b\cos\omega t + \mathbf{j}۲b\sin\omega t$$

b و ω ثابت‌اند. بزرگی سرعت توپ را به‌صورت تابعی از t به‌دست آورید. در حالت خاص، v را در زمانهای $t = ۰$ و $t = \pi/۲\omega$ به‌دست آورید. در این زمانها گوی به‌ترتیب، در کمینه و بیشینهٔ فاصله‌اش از مبدأ قرار دارد.

۱۸.۱ مگسی در مسیر مارپیچ مانند معادلهٔ

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{i}b\sin\omega t + \mathbf{j}b\cos\omega t + \mathbf{k}ct^۲$$

حرکت می‌کند. نشان دهید که بزرگی شتاب حرکت این مگس ثابت است، به‌شرطی که b و ω و c ثابت باشند.

۱۹.۱ زنبور عسل از کندوی خود در مسیری مارپیچ خارج می‌شود، معادلهٔ مسیر در مختصات قطبی عبارت است از

$$r = be^{kt} \qquad \theta = ct$$

b، k، و c ثابتهای مثبت‌اند. نشان دهید در حالی که سوی حرکت به خارج است، زاویهٔ بین بردار سرعت و بردار شتاب ثابت باقی می‌ماند. (راهنمایی: $\mathbf{v}\cdot\mathbf{a}/va$ را بیابید.)

۲۰.۱ مسئلهٔ ۱۸.۱ را با بهره‌گیری از مختصات استوانه‌ای که در آن $R = b$، $\phi = \omega t$، و $z = ct^۲$ حل کنید.

۲۱.۱ مکان یک ذره به‌صورت تابعی از زمان به کمک رابطهٔ زیر بیان می‌شود:

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{i}(۱ - e^{-kt}) + \mathbf{j}e^{kt}$$

k ثابتی مثبت است. سرعت و شتاب ذره را پیدا کنید. مسیر سادهٔ آن را نمایش دهید.

۲۲.۱ مورچه‌ای بر رویهٔ توپی به‌شعاع b چنان می‌خزد که معادلات مشروح زیر حرکت آن را در مختصات کروی بیان می‌کنند

$$r = b \qquad \phi = \omega t \qquad \theta = \frac{\pi}{۲}\left[۱ + \frac{۱}{۴}\cos(۴\omega t)\right]$$

بزرگی سرعت این مورچه را به‌صورت تابعی از زمان t به‌دست آورید. معادلات بالا چه نوع مسیری را نمایش می‌دهند؟

۲۳.۱ ثابت کنید که $\mathbf{v}\cdot\mathbf{a}=v\dot{v}$؛ و از آنجا ثابت کنید که اگر در ذرهٔ متحرک بزرگی سرعت، v، ثابت باشد، $\mathbf{v}$ و $\mathbf{a}$ برهم عمودند. (راهنمایی: از دو طرف معادلهٔ $\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}=v^2$ نسبت به t مشتق بگیرید. به یاد داشته باشید که $\dot{v}$ با $|\mathbf{a}|$ یکی نیست، بلکه بزرگی شتاب ذره در طول جهت لحظه‌ای حرکت آن است.)

۲۴.۱ ثابت کنید

$$\frac{d}{dt}[\mathbf{r}\cdot(\mathbf{v}\times\mathbf{a})]=\mathbf{r}\cdot(\mathbf{v}\times\dot{\mathbf{a}})$$

۲۵.۱ نشان دهید که مؤلفهٔ مماسی شتاب ذرهٔ متحرک به کمک عبارت زیر بیان می‌شود

$$a_\tau=\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{a}}{v}.$$

بنابراین، مؤلفهٔ قائم عبارت است از

$$a_n=(a^2-a_\tau^2)^{1/2}=\left[a^2-\frac{(\mathbf{v}\cdot\mathbf{a})^2}{v^2}\right]^{1/2}$$

۲۶.۱ با بهره‌گیری از نتیجهٔ بالا مؤلفه‌های مماسی و قائم شتاب را در مسئله‌های ۱۸.۱ و ۱۹.۱ به‌صورت تابعی از زمان به‌دست آورید.

۲۷.۱ ثابت کنید $|\mathbf{v}\times\mathbf{a}|=v^3/\rho$، که ρ شعاع انحنای مسیر ذرهٔ متحرک است.

۲۸.۱ چرخی به شعاع b با شتاب ثابت a_0 بر روی زمین به جلو می‌غلتد. نشان دهید که در هر لحظهٔ معین، بزرگی شتاب هر نقطه روی چرخ نسبت به مرکزش به‌صورت $(a_0^2+v^4/b^2)^{1/2}$، و نسبت به زمین نیز عبارت است از $a_0[2+2\cos\theta+v^4/a_0^2b^2-(2v^2/a_0b)\sin\theta]^{1/2}$ که v بزرگی سرعت لحظه‌ای رو به جلو، و θ وضعیت نقطه‌ای را روی چرخ تعیین می‌کند که از بالاترین نقطه به جلو اندازه‌گیری شده است. شتاب کدام نقطه نسبت به زمین بیشترین مقدار است؟

۲۹.۱ مقدار x که ماتریس تبدیل $\mathbf{R}$ را متعامد می‌سازد، چقدر است؟

$$\mathbf{R}=\begin{pmatrix}x & x & 0\\ -x & x & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$\mathbf{R}$ چه تبدیلی را نشان دهد؟

۳۰.۱ برای به‌دست آوردن اتحادهای مثلثاتی زیر را از جبر برداری بهره گیرید:

(الف) $\cos(\theta-\phi)=\cos\theta\cos\phi+\sin\theta\sin\phi$

(ب) $\sin(\theta-\phi)=\sin\theta\cos\phi-\cos\theta\sin\phi$

۲

مکانیک نیوتونی:
حرکت راستخط ذره

"سالویاتی: اما اگر این موضوع درست باشد، و اگر سنگی بزرگ با بزرگی سرعت مثلاً هشت و سنگی کوچکتر با سرعت چهار حرکت کند، وقتی یکی شوند، دستگاه حاصل با سرعتی کمتر از هشت حرکت خواهد کرد؛ اما، دو سنگ وقتی به‌هم بسته شوند سنگی بزرگتر از سنگی که قبلاً با سرعت هشت حرکت می‌کرد، تشکیل می‌دهند. به این ترتیب، این جسم سنگینتر با سرعتی کمتر از جسم سبکتر حرکت می‌کند؛ اثری که با فرض شما مخالف است. بنابراین، ملاحظه می‌کنید چگونه از فرض شما مبنی بر این که جسم سنگین سریعتر از جسم سبکتر حرکت می‌کند، استنباط می‌کنیم که جسم سنگینتر آهسته‌تر حرکت می‌کند."

گالیله: گفتگو در باب دو علم جدید

۱.۲ قوانین حرکت نیوتون: مقدمهٔ تاریخی

آیساک نیوتون در کتاب اصول ریاضیات (پرینکیپیای) خود در سال ۱۶۸۷، سه قانون بنیادی حرکت را وضع کرد و برای همیشه تعبیر بشر را نسبت به جهان تغییر داد:

I. هر جسمی به حالت سکون، یا حرکت یکنواختش بر خطی مستقیم ادامه خواهد داد، مگر اینکه نیرویی وارد بر آن، به تغییر حالت وادارش کند.

II. تغییر حرکت با نیروی محرک متناسب است و در جهت خط اثر نیرو روی می‌دهد.

III. به‌ازای هر کنش، واکنشی مساوی و مختلف‌الجهت با آن وجود دارد؛ یا کنشهای متقابل دو جسم همواره مساوی و در خلاف جهت یکدیگرند.

اکنون این سه قانون حرکت در مجموع قوانین حرکت نیوتون یا، به بیان ساده‌تر، قوانین نیوتون نامیده می‌شوند. اینکه این قوانین به‌راستی قوانین نیوتون‌اند، بحث‌برانگیز است. اما، هیچ‌کس قبل از نیوتون این قوانین را به‌دقت بیان نکرده است، و قطعاً هیچ‌کس قبل از او درک روشنی از مفهوم کلی و توانایی این قوانین نداشت. به‌نظر می‌رسد رفتار پدیده‌های طبیعی که این قوانین بر آنها دلالت دارند، مغایر تجربهٔ عادی باشد. آن‌طورکه دانشجویان مبتدی فیزیک پی‌خواهند برد، قوانین نیوتون فقط با صرف تلاش زیاد برای فهم کامل ناشناخته‌های دستگاههای فیزیکی، "معقول و موجه" می‌شوند.

ارسطو (۳۲۲ـ۳۸۴ ق‌م) مفهوم و تصور مربوط به راه و رسم کارکرد عالم را به‌مدت تقریباً ۲۰ قرن متوقف کرده بود و این کار را با استعانت از استدلالهای منطقی قدرتمندی انجام داد که به فیزیکی منجر شد که در چارچوب آن تمام اشیاء متحرک وابسته به زمین سرانجام به سکون می‌رسیدند مگر آنکه بر آنها نیرویی متحرک وارد می‌آمد. از این دیدگاه، برای به حرکت واداشتن اشیاء زمینی، حتی با سرعت ثابت، نیرویی ضرورت می‌یافت؛ قانونی که با قوانین اول و دوم نیوتون در تناقض آشکاری است. از سوی دیگر، اجرام آسمانی در قلمرو کاملتری جای می‌گرفتند که در آنجا حرکت دایره‌ای دائم هنجار به حساب می‌آمد و برای نگهداشتن این حرکت ساعت‌مانند، هیچ نیرویی لازم نبود.

دانشمندان ایام جدید، ارسطو را به‌خاطر تحمیل چنین بینش آشکارا معیوبی خوار می‌شمرند. مخصوصاً او را به‌خاطر کوتاهیش در اجرای حتی آسانترین آزمایشی که اشتباه شیوه و راه و رسم او را نشان می‌داد، به باد انتقاد می‌گیرند. با وجود این، در آن زمان باور عمومی بر این بود که آزمایش روش عمل مناسبی برای هر فیلسوف محترمی نیست، و بنابراین ارسطو، که خودش هم بر این باور بود، در کسب تصویری صحیح از طبیعت ناکام بود. اما، این دیدگاه کمی هم گمراه‌کننده است. اگرچه ارسطو به هیچ آزمایشی در حوزهٔ علوم طبیعی دست نزد، از نخستین کسانی به‌شمار می‌آید که دربارهٔ طبیعت اظهارنظر کرده‌اند. اگر او به‌خاطر چیزی مقصر باشد، بیشتر به‌خاطر کوتاهیش

در مشاهدهٔ طبیعت است، و نه قصور در فرایند تجرید بر پایهٔ مشاهده. در واقع، اجسامی که در هوا سقوط می‌کنند، در ابتدا شتاب می‌گیرند، ولی سرانجام به‌سرعت سقوط تقریباً ثابتی می‌رسند. اجسام سنگین، عموماً، سریعتر از اجسام سبکتر سقوط می‌کنند. نیروی معینی برای کشیدن یک کشتی در داخل آب لازم است و هرچه این نیرو بزرگتر باشد، سرعت کشتی بیشتر است. نیزه‌ای که از یک ارابهٔ جنگی متحرک از جهت به‌بالا پرتاب می‌شود، در پشت سر ارابه‌ران، و نه بر بالای سرش، بر زمین فرود خواهد آمد. حرکت اجسام آسمانی ظاهراً بر مسیری منحنی و دائماً بدون هرگونه وسیلهٔ محرک مشاهده‌پذیری ادامه می‌یابد. البته، امروزه اگر بر تمام متغیرهایی دقت کنیم که بر حرکت اشیاء مؤثرند، و بعد قوانین نیوتون را به‌درستی دربارهٔ آنها به‌کار بریم، می‌توانیم این واقعیتها را درک کنیم.

علت آنکه ارسطو در استخراج قوانین نیوتون از مشاهدات جهان واقعی شکست خورد، فقط پیامد این واقعیت است که جهان و کارکردهای آن را به‌شیوه‌ای نسبتاً سطحی مشاهده و تعبیر و تفسیر کرد. وی اساساً از آثار مقاومت هوا، اصطکاک، و مانند آنها، که در آن زمان نامحسوس بود، اطلاع نداشت. فقط ظهور توانایی و انگیزهٔ اجرای آزمایشهای دقیق درپی فرایند تجرید به دیدگاهی انقلابی دربارهٔ طبیعت انجامید که در الگوی (پارادایم) نیوتونی جلوه‌گر شد. حتی امروز، کارکردهای آن الگو، بدون در نظر گرفتن اصطکاک و مقاومت هوا که در جهان واقعی برقرارند (آن‌طور که اگر کسی کتاب مقدماتی فیزیک را مطالعه کند اغلب به عبارت "از اصطکاک چشم بپوشید" برمی‌خورد)، در قلمرو مصنوعی افکار خودمان خیلی آسان قابل رؤیت است. به‌طور کلی، فیزیک ارسطویی خیلی بیشتر از فیزیک نیوتونی طرزکار طبیعت را منطبق بر تصور غلط عامیانهٔ مردم امروزی (از جمله دانشجویی که دورهٔ تحصیلی بدون انتخاب دروس فیزیکی می‌گذراند)، منعکس می‌کند.

ناگفته پیداست که قانون اول، به‌نام قانون لختی، قبلاً پیش از زمان نیوتون بیان شده بوده است. این قانون که آن را عموماً به گالیله (۱۶۴۲ـ۱۵۶۴) نسبت می‌دهند، در واقع ابتدا به دست رنه دکارت (۱۶۵۰ـ۱۵۹۶) تدوین شده است. بر طبق نظر دکارت، «لختی» باعث پافشاری اجسام در حرکت همیشگی می‌شود. البته نه در حرکت دایره‌ای ارسطویی کامل، بلکه در خط مستقیم. دکارت صرفاً با اندیشیدن، و نه به‌کمک آزمایش، به این نتیجه رسید. برخلاف عقیدهٔ رایج زمانه (که در آن زمان به‌معنای اعتقاد به تعالیم ارسطویی بود)، دکارت عقیده داشت که فقط می‌توان به اندیشیدن خود آدمی اتکا کرد. نیتش این بود که "معلولها را به‌کمک علل آنها، و نه علل را به‌کمک معلولها، توضیح دهد". از نظر دکارت، استدلال خالص به‌صورت تنها اساس قطعیت به‌کار گرفته شد. چنین الگویی به گذار از جهان‌بینی ارسطویی به جهان‌بینی نیوتونی، کمک کرد. ولی به‌خودی‌خود حاوی بذرهای نابودی خودش هم بود.

جای شگفتی نبود که دکارت در درک معنی ضمنی قانون لختی خود در ارتباط با حرکت سیاره‌ای ناکام ماند. سیارات قطعاً بر خطوط مستقیم حرکت نمی‌کردند. دکارت بی‌رحم‌تر از هریک از پیشینیان خود در روش راه بردن عقل، استدلال کرد که چیزی فیزیکی سیارات را "وادار به حرکت" بر مسیر منحنی می‌کند. دکارت نسبت به این مفهوم و تصورکه نیرویی فیزیکی لازم است تا موجودی نامرئی در سراسر فضای تهی دست درازکند و به سیارات چنگ زند و آنها در مدار خود قرار دهد، به‌سختی سرپیچی و نافرمانی کرد. به‌علاوه، هیچ گونه اطلاعاتی از قانون دوم نیوتون نداشت. دکارت هرگز پی‌نبرد که نیروی لازم یک نیروی "محرک" نیست که باید "به سوی" خورشید متوجه شود. او، درکنار بسیاری افراد دیگر در آن عصر، عقیده داشت که سیارات باید در طول مسیرشان، به دور خورشید (یا زمین) هل داده شوند. به این ترتیب، او مفهوم اترِ همه‌جا پراکنده، شبیه به سیالی ساخته‌شده از تعداد بیشماری ذرات نادیدنی، را از خود ابداع کرد که سیارات در داخل آن به هر سو رانده می‌شوند؛ نتیجهٔ نادرستی که از خیالپردازیهای ذهنی مشغول به اندیشه‌های ناب و نظری ناشی می‌شد، که کمترین داده‌های تجربی یا مشاهداتی در آن جایی نداشت.

از سوی دیگر، گالیله، عمدتاً مجهز به استدلالها و برهانهای واضح مبتنی بر نتایج آزمایشی عملی، به‌تدریج درک نسبتاً روشنی از آن‌چیزی به‌دست آورده بود که باید قانون اول، و نیز قانون دوم، نیوتون از آب درمی‌آمد.

پیش‌درآمدی ضروری به برهم‌نهاد (سنتز) یک سیستم درست مکانیک مشاهدات وی از این بابت بود که حرکت آونگ دستخوش نوسانهای کم‌دامنه هم‌زمان است؛ یعنی، دورهٔ زمان نوسان آن از دامنه‌اش مستقل است. این کشف به ساخت نخستین ساعتی منجر شد که می‌توانست بازه‌های زمانی بسیار کوتاه را اندازه‌گیری کند؛ آن توانایی که ارسطو فاقد آن بود. گالیله به‌زودی برای انجام آزمایشهایی با دقت بی‌سابقه با اشیائی که سقوط آزاد می‌کردند یا بر سطوح شیبدار می‌لغزیدند، از این توانایی بهره گرفت. گالیله به تدوین دو قانون اول نیوتون بسیار نزدیک شد.

مثلاً، در ارتباط با قانون اول، گالیله مانند ارسطو، توجه پیدا کرد که شیئی لغزان در امتداد سطحی در تراز زمین در واقع ساکن می‌شود. اما در اینجا گالیله به جهش ذهنی شگفتی نایل آمد که استدلالهای ارسطویی را به عقب راند. او سطح دومی را تصورکرد که از سطح اولی لغزنده‌تر بود. جسمی که در امتداد سطح دوم هل داده می‌شد، نسبت به وقتی روی سطح اولی بود، براثر همان نیروی هل‌دادن، مسافت بیشتری را می‌پیمود تا متوقف شود. گالیله برای نتیجه‌گیری نهایی از این فرایند تجرید استدلال کرد که اگر جسمی روی سطحی "با لغزندگی نامحدود" (یعنی "با چشم‌پوشی از اصطکاک") هل داده شود، باید برای همیشه به حرکت خود ادامه دهد و هرگز به سکون نرسد. بنابراین، برخلاف فیزیک ارسطویی، او استدلال کرد که برای تداوم حرکت جسم

صرفاً نیرو لازم نیست. در واقع، برای متوقف کردنش باید نیرویی وارد آید. این بیان به قانون لختی نیوتون خیلی نزدیک است، اما با کمال شگفتی، گالیله در این باره بحثی به میان نیاورد که حرکت، در غیاب نیروها، برای همیشه در امتداد خط راست ادامه خواهد داشت!

در نزد گالیله و معاصرانش، جهان هستی عالمی بی‌روح و خشک نبود که قوانین مکانیکی بر آن حاکم باشند، بلکه، کیهانی بود که با آهنگ صانع فوق‌العاده هوشمندی حرکت می‌کرد. گالیله، به پیروی از سنت ارسطویی، دنیایی منظم مطابق با شکل کامل، دایره را می‌دید. حرکت راستخط بر بی‌نظمی دلالت می‌کرد. اشیائی که خود را در چنین حالتی می‌یافتند نباید همیشه در خطی مستقیم به پرواز ادامه می‌دادند، ولی سرانجام به حالت طبیعی‌ترشان که حرکت دایره‌ای کامل بود می‌افتادند. آزمایشهای لازم برای تمیزگذاری بین حرکت راستخط دائمی و حرکت راستخطی که سرانجام به حرکت دایره‌ای خالص منجر شد، آشکارا در عمل امکان‌پذیر نبود، بلکه فقط در اذهان انسانها می‌توانست وجود داشته باشد و فقط در صورتی که ذهن به‌نحو درستی از شرطگذاریهای تعصبات بی‌اساس قرنهای متمادی رها می‌شد. گالیله، گرچه زیرک و هوشمند بود، باز هم بایست با اشباح گذشته به مبارزه بر می‌خاست و هنوز به‌حالت ذهنی و فکری لازم خود دست نیافته بود.

آزمایشهای گالیله دربارهٔ سقوط اجسام او را به حاشیهٔ قانون دوم نیوتون هدایت کرد. در اینجا نیز، همانطور که ارسطو نیز فهمیده بود، گالیله ملاحظه کرد که اجسام سنگین، نیز مانند سنگ، سریعتر از اجسام سبکتر، مانند پَر، سقوط می‌کنند. ولی با زمان‌گیری دقیق اجسام هم‌شکل، گرچه با وزنهای متفاوت پی‌برد که چنین اجسامی در حال سقوط شتاب می‌گیرند و همگی کم‌وبیش همزمان به زمین می‌رسند! البته، اجسام خیلی‌سنگین، گرچه خودشان از لحاظ وزن خیلی با هم فرق داشتند، با آهنگهای تقریباً یکسان با سرعتی که هر ثانیه حدود ۱۰ m/s افزایش می‌یافت، به زمین می‌رسیدند. (در ضمن، آزمایش مشهور سقوط گلوله‌های توپ از برج کج پیزا به‌دست گالیله اجرا نشد، بلکه یکی از مخالفان ارسطومشرب وی در پیزا، به‌نام جیورجیو کورسیو، این آزمایش را انجام داد و امید وی دستیابی به نتایجی بود که دیدگاههای ارسطویی را تأیید و نه رد کند، مبنی بر اینکه اجسام بزرگتر نسبت به اجسام کوچکتر باید خیلی سریعتر سقوط کنند!)[1]. در اینجا نیز از طریق فرایندهای تجرید تابناکی بود که گالیله پی‌برد اگر آثار مقاومت هوا را بتوان حذف کرد، تمام اشیاء با شتاب یکسان، مستقل از وزن یا شکلشان، سقوط می‌کنند. به این ترتیب، بخش اعظم عمارت ارسطویی از هم گسیخته شده بود؛ جسم سنگینتر نسبت به جسم سبکتر سریعتر سقوط نمی‌کرد، و وارد آمدن نیرو باعث می‌شد که اشیاء، شتاب پیدا کنند و نه اینکه با سرعت ثابتی حرکت کنند.

1. *Aristotle, Galileo, and the Tower of Pisa*, L. Cooper, Cornell University Press, Ithaca, 1935.

تصورات گالیله از مکانیک بر روی کرهٔ زمین به قوانین نیوتون نزدیکتر بود تا به حدس و گمانهای پیشینیانش. وی گاهی از آنها ماهرانه برای دفاع از دیدگاههای کپرنیک، یعنی مدل خورشیدمرکزی منظومهٔ شمسی، بهره می‌گرفت. به‌ویژه، هرچند تصورش از قانون لختی اندکی ناپخته بود، آن را در این استدلال به‌درستی به‌کار گرفت که با آزمایشهای زمینی نمی‌توان ثابت کرد که زمین به دور خورشید نمی‌چرخد. وی خاطرنشان کرد که سنگی که از دکل یک کشتی متحرک فرو می‌افتد نباید «عقب بماند» زیرا سنگ نیز با همان سرعت افقی کشتی در حرکت است. با مقایسه، برخلاف برهان ارسطویی، سنگی که از بالای یک برج بلند فرود می‌افتد، از حرکت زمین عقب نمی‌ماند. این استدلال محکم بر این امر دلالت می‌کرد که نمی‌شود از چنین مشاهده‌ای بهره برد و نشان داد که آیا زمین می‌چرخد یا خیر. بذرهای نظریهٔ نسبیت در این استدلال گنجیده بود.

متأسفانه، همان‌طور که در بالا گفتیم، گالیله نمی‌توانست به‌طور کامل از باورهای جزمی حرکت دایره‌ای ارسطویی، بند بگسلد. وی، در تناقض آشکار با قانون لختی، این اصل موضوع را ابراز داشت که هر جسم که به حال خود رها شود، برای همیشه به حرکت ادامه خواهد داد، اما نه روی یک خط مستقیم بلکه در مسیری دایره‌ای. استدلال او از این قرار بود:

> ...سرشت حرکت مستقیم نامتناهی است (زیرا خط مستقیم نامتناهی و نامعین است)، ناممکن است که هر چیزی، بنابر ماهیتش، از اصل حرکت در خط مستقیم برخوردار باشد؛ یا، به‌بیان دیگر، به‌سوی مکانی برود که ممکن نیست به آن برسد، مکانی که وجود ندارد. برای کاری که نمی‌توان انجام داد، کوشش برای حرکت به آنجا و ورود به آن ناممکن است.

این گزاره نیز با دانش اولیه‌اش از نیروهای مرکزگریز، یعنی، گرایش جسم متحرک در مسیر دایره‌ای که در خط مستقیم مماس بر دایره حرکت کند، تناقض داشت. او می‌دانست که اشیاء مقید به زمین می‌توانند در مسیرهای دایره‌ای حرکت کنند، فقط اگر این نیروی مرکزگریز یا با نیروی جبران‌کنندهٔ دیگری در حالت تعادل قرار گیرد یا نیروی یادشده بر آن چیره شود. در واقع، یکی از برهانهای ارسطویی در تقابل با چرخش زمین از این قرار بود که اشیاء واقع بر سطح زمین باید از آن به‌سرعت به بیرون پرتاب شوند. گالیله استدلال می‌کرد که این نتیجه معتبر و صادق نیست، زیرا "گرانش" زمین بر این گرایش نیروی مرکزگریز غلبه می‌کند! با همهٔ این احوال، او به‌نحوی در ساختن این تصور ذهنی مبنی بر اینکه اثر مشابهی باید وجود داشته باشد تا سیارات را در مدار دایره‌ای به‌دور خورشید نگه‌دارد، ناکام ماند!

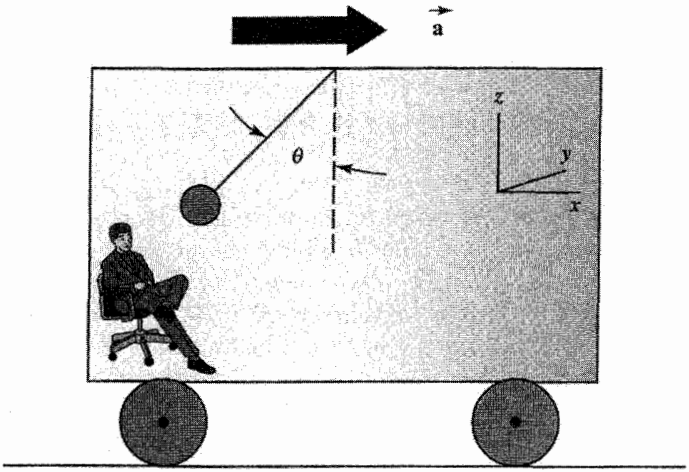
به این ترتیب، سرانجام نیوتون بود که تمامی دانش پراکنده‌ای را که دربارهٔ حرکت اشیاء مقید به زمین فراهم آمده، گرد آورد و به‌هم پیوند داد و به‌صورت ترکیب ماهرانهٔ سه قانون خود درآورد و سپس نشان داد که حرکت اشیاء آسمانی هم از این قوانین به‌خوبی پیروی می‌کنند.

قوانین حرکت نیوتون را می‌توان دستورالعملی برای محاسبه یا پیشگویی حرکت آتی ذره (یا دستگاه ذرات) دانست؛ هرگاه مکان و سرعت آن در لحظه‌ای از زمان معلوم باشد. این قوانین و نتایج آنها دربارهٔ علت اینکه چرا یک دستگاه فیزیکی معلوم به‌طریقی که می‌بینیم رفتار می‌کند، مطلبی بازگو نمی‌کنند. نیوتون دربارهٔ آن قصور خیلی صریح بود. او (دست‌کم در اثر چاپ‌شده) از اظهار این نکته که چرا اشیاء به آن طریقی حرکت می‌کنند که نشان می‌دهند، امتناع ورزید. هر "ساز و کار" نهفته در دستگاههای فیزیکی، برای همیشه از چشمان نیوتون هم پنهان ماند. او صرفاً اظهار داشت که، به هر دلیلی، کارکرد هر چیزی چنین است، چنان‌که توانایی تشریح محاسباتی او برای پیش‌بینی تکوین دستگاههای فیزیکی متحرک، با دقتی شگفت‌آور این امر را نشان داد. از زمان نیوتون به بعد مطالب زیادی روشن شده و اطلاعات فراوانی به‌دست آمده است، اما یک واقعیت اساسی قانون فیزیکی کماکان پابرجاست: قوانین حرکت توصیفهایی ریاضی به‌شمار می‌آیند که این امکان را به ما می‌بخشند تا حرکت آتی سیستمهای فیزیکی را به‌دقت پیشگویی می‌کنیم، به‌شرط اینکه اطلاعاتی دربارهٔ حالت کنونی آنها در دسترس باشد. این قوانین چگونگی کارکرد همه‌چیز را تشریح می‌کنند. اما این قوانین علت را برای ما بازگو نمی‌کنند.

قانون اول نیوتون: چارچوبهای مرجع لخت

قانون اول خاصیت مشترک مواد، یعنی لختی، را توصیف می‌کند. به بیانی همراه با تساهل، لختی عبارت است از مقاومت تمامی ماده در مقابل تغییر حرکت. اگر ذره‌ای ساکن باشد، در برابر حرکت مقاومت می‌کند؛ یعنی، نیرویی برای حرکت دادنش لازم است. اگر ذره در حال حرکت باشد، در برابر گرایش به سکون مقاومت می‌کند. در اینجا نیز، برای ساکن کردن ذره باید نیرویی وارد آید. غالباً چنین به‌نظر می‌رسد که گویا به ماده انزجاری ذاتی برای شتاب گرفتن اعطا شده است. گیریم که به هر دلیلی چنین باشد، برای شتاب گرفتن آن وارد آمدن نیرویی لازم است؛ ماده، در غیاب نیروهای وارد بر آن، صرفاً حالت سرعت جاریش را، برای همیشه، نگه می‌دارد.

توصیف ریاضی حرکت ذره نیازمند اختیار چارچوب مرجع، یا مجموعهٔ مختصات در فضای پیکربندی است تا با بهره‌گیری از آن مکان، سرعت، و شتاب ذره در هر لحظه از زمان مشخص شود. هر دستگاه مرجع که در آن قانون اول حرکت نیوتون صادق باشد، دستگاه مرجع لخت نامیده می‌شود. بنابراین قانون، دستگاههای مرجع شتابدار لخت نیستند، زیرا هر شیئی "واقعاً" در حال سکون یا متحرک با سرعت ثابت، که از دستگاه مرجع شتابدار مشاهده شود، شتابدار به‌نظر می‌رسد. به‌علاوه، هر شیئی که در چنین دستگاه مرجعی نسبت به چارچوب لخت شتابدار مشاهده شود، ساکن دیده می‌شود. از این‌رو در باور ما مفهوم لختی و اعتبار قوانین حرکت نیوتون چندان مستحکم



شکل ۱.۱.۲ آونگی که در چارچوب مرجع شتابدار نسبت به قائم زاویهٔ θ تشکیل می‌دهد.

است که وادار می‌شدیم نیروهای "پنداری" ابداع کنیم تا فقدان ظاهری شتاب شیئی ساکن را در دستگاه مرجع شتابدار منظور کرده باشیم.

یک مثال ساده از چارچوب مرجع نالخت، این وضعیت را روشنتر می‌کند. ناظری را در داخل واگن باری در نظر بگیرید که با شتاب $\mathbf{a}$ حرکت می‌کند. فرض کنید آونگی از سقف واگن آویخته است. ناظر آن را چگونه می‌بیند؟ نگاهی به شکل ۱.۱.۲ بیندازید. نکته این است که ناظر در واگن در دستگاه مرجع نالخت واقع و نسبت به آن در حال سکون است. او می‌بیند که آونگ نیز ظاهراً در حال سکون و چنان آویزان است که نسبت به راستای قائم زاویهٔ θ می‌سازد. می‌داند که، در غیاب هر نیروی دیگر غیر از نیروی گرانشی و نیروی کشش در راستای آونگ، چنین آونگی باید خودش در راستای قائم قرار گیرد. ولی چنین نیست، و نتیجه می‌گیرد که نیروی ناشناخته‌ای باید آونگ را هل بدهد یا در جهت عقب ماشین بکشد. (البته، او نیز چنین نیرویی را حس می‌کند و مانند کسی که در یک وسیلهٔ نقلیهٔ شتابدار قرار گرفته است، با نخستین تجربه به این موضوع پی می‌برد.)

پرسشی که به‌طور طبیعی پیش می‌آید، از این قرار است که چگونه ممکن است تعیین کرد که آیا دستگاه مرجع مشخصی، دستگاه لخت تشکیل می‌دهد یا خیر. پاسخ، بدیهی نیست! (مثلاً، اگر واگن آب‌بندی شده و رابطه‌اش با جهان خارج قطع باشد، چگونه ناظر باید بداند که نیروی ظاهریی که باعث می‌شود آونگ قائم نایستد، مربوط به این حقیقت نیست که کل واگن با جهت گرانشی

"همخط نباشد"، یعنی نیروی مربوط به گرانی در واقع نسبت به قائم زاویهٔ θ تشکیل می‌دهد؟). قبل از بررسی این موضوع که آیا اشیاء در چارچوب مرجعشان از قانون اول نیوتون پیروی کرده‌اند یا خیر، ناظران باید بدانند که تمام نیروهای خارجی وارد بر جسم حذف شده بودند؛ لازم است جسم را به‌طور کل مجزا کرد تا تمام نیروهای وارد بر آن حذف شوند. این کار ناممکن است، زیرا همیشه چند نیروی گرانشی بر جسم وارد می‌آیند، مگر اینکه جسم به‌فاصلهٔ بینهایت دوری از تمام ماده منتقل شود.

آیا چارچوب مرجع لخت کامل وجود دارد؟ در بیشتر موارد، دستگاه مختصات متصل به سطح زمین تقریباً لخت است. مثلاً، به‌نظر می‌رسد گوی بیلیارد مادامی که با گوی دیگری یا به دیوارهٔ میز برخورد نکرده، با سرعت ثابت و بر مسیری مستقیم حرکت می‌کند. اما، اگر حرکت گوی بیلیارد خیلی دقیق اندازه‌گیری می‌شد، آنگاه پی‌می‌بردیم که مسیر حرکتش اندکی خمیده است. این امر ناشی از آن حقیقت است که زمین می‌چرخد و به این جهت سطح آن به طرف محورش شتاب می‌گیرد. بنابراین، دستگاه مختصات متصل به سطح زمین لخت نیست. دستگاه مناسبتر در این حالت، دستگاهی است به مبدأ مرکز زمین، و خورشید و یک ستاره نقاط مرجع این دستگاه به‌شمار می‌آیند. اما حتی این دستگاه به‌علت حرکت مداری زمین به دور خورشید، دستگاه لختی نیست.

در این صورت، فرض کنید دستگاه مختصاتی اختیار کنیم که مبدأ آن بر مرکز خورشید واقع باشد. به بیان دقیقتر، این دستگاه نیز دستگاه لخت کاملی نیست، چون خورشید در حرکت چرخشی عمومی کهکشان راه شیری مشارکت می‌کند. از این‌رو، مرکز راه شیری را امتحان می‌کنیم، اما با کمال تأسف، این دستگاه هم جزئی از یک گروه محلی و موضعی، یا خوشهٔ کوچک، متشکل از حدود بیست کهکشان است که جملگی حول مرکز جرم مشترکشان می‌چرخند. با ادامهٔ این رشته استدلال، می‌بینیم که این گروه موضعی در لبهٔ اَبَرخوشهٔ سنبله[1] قرار دارد، که شامل تعداد زیادی خوشهٔ کهکشانی به مرکز خوشهٔ سنبله با ۲۰۰۰ عضو، به فاصلهٔ ۶۰ سال نوری از هم، است که جملگی حول مرکز جرم مشترکشان می‌چرخند! در آخرین مرحلهٔ حکایتمان که بیهوده هم به‌نظر می‌رسد، باید به یافتن دستگاه مرجعی اقدام کنیم که نسبت به حرکت نسبی مشاهده‌شدهٔ تمام مواد جهان، در حال سکون باشد، ولی نمی‌توانیم تمام مواد جهان را مشاهده کنیم. قدری از ماده بیشتر از آن تارند که دیده شوند، قدری از ماده حتی قابل رؤیت هم نیستند، و به این جهت مادهٔ تاریک نامیده می‌شوند که وجودشان را فقط غیرمستقیم می‌توانیم استنباط کنیم. به‌علاوه، به‌نظر می‌رسد جهان هستی (عالم) دارای منبع بزرگی از انرژی تاریک، و نامرئی، است که با همهٔ این احوال از طریق شتاب دادن به انبساط عالم حضور خود را اعلام می‌کند.

1. Virgo

اما، ما خیلی هم فاقد اطلاعات نیستیم: جهان هستی با انفجار بزرگ (مهبانگ) در حدود ۱۲٫۷ میلیارد سال قبل پیدایش یافت و از آن زمان تا کنون در حال انبساط است. از جمله شواهد این انبساط، مشاهدهٔ تابش پس‌زمینهٔ میکروموجی کیهانی (CMB) است، باقی‌مانده‌ای از آتشگوی نخستین ناشی از یک تک رویداد.[۱] وجود آن وسایل جدیدی برایمان فراهم می‌کند که سرعت "واقعی" زمین را در داخل فضا، بدون مرجع قرار دادن کهکشانهای مجاور، خوشه‌ها، یا ابرخوشه‌ها عملاً اندازه‌گیری کنیم. اگر دقیقاً نسبت به انبساط جهان ساکن بودیم،[۲] در این صورت باید CMB را کاملاً همسانگرد می‌دیدیم، یعنی توزیع تابش باید در تمام جهات آسمان یکسان می‌بود. دلیل این امر آن است که در ابتدا عالم فوق‌العاده داغ بود و این تابش و مادهٔ ناشی از مهبانگ برهم‌کنش نسبتاً قوی داشتند که محکم به یکدیگر جفت شده بودند. اما ۳۸۰۰۰۰ سال بعد، عالم در حال انبساط تا دمایی حدود ۳۰۰۰K سرد شد و تا آن موقع ماده اکثراً از پروتونها و الکترونهای باردار تشکیل شده بود، سپس با هم ترکیب شدند و اتمهای هیدروژن خنثی پدید آمدند و تابش از ماده جدا شد. از آن پس، جهان هستی حتی بیشتر، و با ضریبی حدود ۱۰۰۰، انبساط یافته و سرد شده و دمایش به ۲٫۷۳K رسیده است. مطابق با آن، توزیع طیفی باقی‌ماندهٔ CMB تغییر کرده است. البته، این تابش گرچه نه به‌طور کامل، اما به‌نحو چشمگیری همسانگرد است. ظاهراً تابشی که از جهت صورت فلکی اسد به زمین وارد می‌شود، از ناحیهٔ اندکی گرمتر عالم ناشی می‌شود، و بنابراین طول‌موج آن اندکی کوتاهتر، یا آبیتر، از تابشی است که از جهت مخالف صورت فلکی دَلْوْ ناشی می‌شود (شکل ۲.۱.۲). این اختلاف طیفی جزئی ناشی از آنجاست که زمین حدود ۴۰۰km/s به‌طرف اسد حرکت می‌کند که به جابه‌جایی دوپلر کوچک در توزیع طیفی مشاهده‌شده می‌انجامد.[۳] ناظرهای دستگاه مرجع متحرک از اسد به‌طرف دلو با سرعت

۱. برای دستیابی به‌روزترین اطلاعات دربارهٔ CMB، مادهٔ تاریک، و انرژی تاریک تاکنون، ر.ک.

NASA Goddard Space Flight Center at http://map.gsfc.nasa.gov

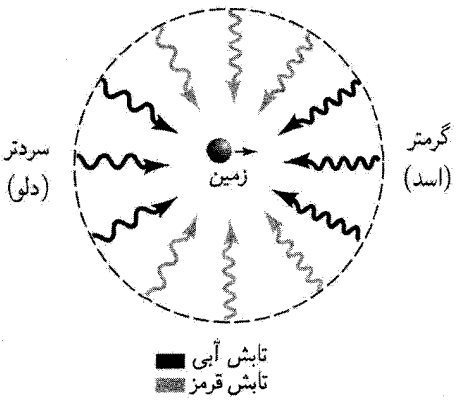
و برای جستن مقالاتی در این زمینه ر.ک.

Wilkinson Microwave Anisotropy Project (WMAP)

برای دستیابی به بحثهایی دربارهٔ CMB و پیامدهای آن، می‌توانید تقریباً به هر کتاب درسی نجوم رجوع کنید، مثلاً *The Universe*, 6th ed., Kaufmann and Freedman, Wiley Publishing, Indianapolis, 2001.

۲. یکی از تشابهات متداول این موقعیت، بالنی در حال بادشدن است که دکمه‌هایی به‌طور کاتوره‌ای بر سطح آن توزیع شده باشد. هر دکمه به بالن چسبیده و به این جهت نسبت به انبساط دو بعدی سطح "در حال سکون" است؛ هر دستگاه مرجع متصل به هر دکمه باید دستگاه مرجع لخت معتبری باشد.

۳. حرکت نسبی به‌طرف منبع نور، طول‌موج نور مشاهده‌شده را کاهش می‌دهد. حرکت نسبی در جهت دور شدن از منبع، طول‌موج مشاهده‌شده را افزایش می‌دهد. این تغییر در طول‌موج مشاهده‌شده را اثر دوپلر می‌گویند. کوتاه‌شدن طول‌موج را انتقال به آبی و بلندتر شدنش را انتقال به سرخ می‌نامند.



شکل ۲.۱.۲ حرکت زمین در داخل تابش زمینهٔ میکروموج کیهانی.

$400\,km/s$ نسبت به زمین، باید توزیع همسانگرد کاملی را مشاهده کنند (به‌استثنای تغییراتی که از تابش ناشی از ماده در نواحی جایگزیدهٔ فضای با چگالی مادهٔ اندکی متفاوت، جدا شود). این ناظران باید نسبت به انبساط کلی عالم، ساکن باشند! به‌طور کلی، همگان موافقت دارند که چنین دستگاه مرجعی نزدیکترین وضعیت را به دستگاه لخت کامل دارد.

اما، فکر نکنید که منظور این است که چیزی به‌صورت دستگاه مرجع لخت مطلق وجود دارد. نظریهٔ نسبیت، تا حدودی، از ناکامی تلاشها برای یافتن دستگاه مرجع مطلقی ناشی شد که در آن فرض می‌شد تمام قوانین اساسی فیزیک، نه فقط قانون اول نیوتون، صادق‌اند. همین امر اینشتین را به این نتیجه رساند که شکست دریافتن چارچوبی مطلق از این دلیل ساده ناشی شد که چنین دستگاهی وجود ندارد. در نتیجه، او به‌عنوان سنگ بنای نظریهٔ نسبیت پیشنهاد داد که قوانین اساسی فیزیک در تمام دستگاههای مرجع لخت یکسان‌اند و هیچ تک چارچوب لختی وجود ندارد.

نکتهٔ جالب اینکه گالیله که سیصدسال پیش از اینشتین می‌زیست، به نتیجهٔ بسیار مشابهی رسیده بود. به محاورهٔ دو شخصیت کتاب معروفش تحت عنوان گفتگو درباره دو دستگاه عمدهٔ جهان،[1] یعنی سالویاتی[2] و ساگردو[3] توجه کنید که با کلماتی شاعرانه دربارهٔ اصل موضوع نسبیت گالیله‌ای صحبت می‌کنند.

"خود را با دوستی در کابین اصلی دربسته زیر عرشهٔ یک کشتی بزرگ تصور کنید که همراه

1. *Dialogue Concerning the Two Chief World Systems*, Galileo Galilei (1632), *The Second Day*, 2nd printing, p. 186, translated by Stillman Drake, University of California Press, Berkeley, 1970.

2. Salviati 3. Sagredo

خود چند مگس، پروانه، و سایر حشرات پردار کوچک دارید. فرض کنید کاسه‌ای بزرگ پر از آب با چند ماهی در آن، و یک بطری که آویزان شده و قطره‌قطره آب آن در ظرف پهن زیر آن خالی می‌شود، در اختیار دارید. هنگامی که کشتی هنوز ایستاده است به‌دقت نگاه کنید که چگونه جانوران با سرعت یکسان در همه طرف کابین پرواز می‌کنند. ماهیها با بی‌تفاوتی در تمام جهات شنا می‌کنند؛ قطرات به داخل ظرف پایین خود می‌افتند؛ و هنگامی که چیزی به‌طرف دوستتان پرتاب می‌کنید، نیاز ندارید آن را نسبت به جهات دیگر در یک جهت نیز محکمتر پرتاب کنید. در حالی که فواصل مساوی‌اند و با جفت پاهایتان می‌پرید، در هر جهت فضایی مساوی طی می‌کنید، در خلال اینکه همهٔ این چیزها را با دقت مشاهده می‌کنید؛ (گرچه شکی نیست که وقتی هنوز کشتی ایستاده است، هر چیز به همان صورت که ذکر شد رخ می‌دهد). کشتی را با هر سرعتی که می‌خواهید به حرکت درآورید، تا وقتی که حرکت یکنواخت است و به هر سو نوسان نمی‌کند، کمترین تغییری در اثرات گفته‌شده نخواهید یافت؛ از طریق آنها نمی‌توانید بگویید که آیا کشتی در حال حرکت یا ساکن است. هنگام جستن، همان فاصلهٔ گذشته را روی کف کشتی طی خواهید کرد. جهیدن به عقب کشتی را بلندتر از جهیدن به‌طرف جلو کشتی انجام نخواهید داد، حتی اگر کشتی خیلی سریع حرکت کند، با این حقیقت که در مدت‌زمانی که در هوا هستید، کف کشتی زیر شما در جهت مخالف جهیدنتان حرکت خواهد کرد. در هنگام پرتاب کردن چیزی به‌طرف دوستتان، نیروی بیشتری لازم ندارید تا آن را به او برسانید، اعم از اینکه در جهت جلو یا عقب کشتی باشد و شما در جهت مقابل قرار داشته باشید. قطرات مانند قبل در ظرف می‌افتند، بدون اینکه به‌طرف عقب کشتی بیفتد، گرچه هنگامی که قطره‌ها در هوا هستند کشتی مسافتی طولانی طی می‌کند. ماهیها در آبشان، بدون تلاش بیشتری، از عقب به جلو شنا می‌کنند و با سهولتی یکسان به‌سوی طعمه که در جایی اطراف لبه‌های ظرف قرار دارد، خواهند رفت. سرانجام، پروانه‌ها و مگسها با بی‌تفاوتی به هر طرف پرواز خواهند کرد، و هرگز پیش نمی‌آید که در عقب کشتی متمرکز شوند، مثل اینکه خیلی خسته شده و از حرکت با کشتی خودداری کرده، یا در خلال پرواز در فواصل طولانی با نگه‌داشتن خودشان در هوا از کشتی جدا شده باشند. . . .“

مثال ۱.۱.۲ آیا زمین دستگاه مرجع لخت مطلوبی است؟

شتاب مرکزگرا (مثال ۲.۱۲.۱) را نسبت به شتاب گرانشی، g، در حالتهای زیر محاسبه کنید:

(الف) نقطه‌ای واقع بر استوای زمین (شعاع زمین، $R_E = ۶٫۴ \times ۱۰^۳ \mathrm{km}$).

(ب) زمین در مدار خود به دور خورشید (شعاع مدار زمین، $a_E = ۱۵۰ \times ۱۰^۶ \mathrm{km}$).

(ج) شتاب خورشید در حرکت چرخشیش حول مرکز کهکشان (شعاع مدار خورشید حول مرکز کهکشان، سال نوری $R_G = ۲٫۸ \times ۱۰^۴$، سرعت مداریش $v_G = ۲۲۰ \mathrm{km/s}$).

حل:

شتاب مرکزگرای نقطه‌ای که در مسیری دایره‌ای به شعاع R می‌چرخد، از این قرار است:

$$a_c = \omega^2 R = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 R = \frac{4\pi^2 R}{T^2}$$

که T دورهٔ تناوب یک چرخش کامل است. بنابراین، نسبت به g، داریم

$$\frac{a_c}{g} = \frac{4\pi^2 R}{gT^2}$$

$$\frac{a_c}{g} = \frac{4\pi^2(6{,}4 \times 10^6\,\mathrm{m})}{9{,}8\,\mathrm{m \cdot s^{-2}}(3{,}16 \times 10^7\,\mathrm{s})^2} = 3{,}4 \times 10^{-3}$$

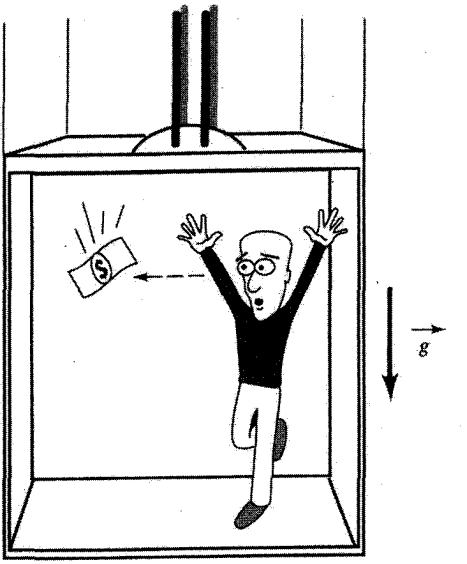
(الف) $3{,}4 \times 10^{-3}$

(ب) 6×10^{-4}

(ج) $1{,}5 \times 10^{-12}$

پرسش و بحث

فرض کنید به آسانسوری سریع‌السیر در طبقهٔ صدوبیستم یک آسمانخراش وارد شده‌اید. آسانسور شروع به پایین رفتن می‌کند، اما گویی هولناکترین کابوس تحقق پیدا کرده باشد سیم نگهدارندهٔ آسانسور گسیخته می‌شود و شما ناگهان خود را در حالت سقوط آزاد می‌یابید. پی می‌برید کارتان تمام است، یا به‌زودی تمام خواهد شد؛ تصمیم می‌گیرید در مدت زمان کوتاهی که تا برخوردتان به زمین مانده، چند آزمایش فیزیکی انجام دهید! ابتدا، کیف بغلی خود را بیرون می‌آورید و یک اسکناس یک دلاری برمی‌دارید. آن را مقابل صورتتان می‌گیرید و رهایش می‌کنید. عجیب آنکه اتفاق خاصی نمی‌افتد! این اسکناس ظاهراً به‌صورت معلق در برابر صورتتان باقی می‌ماند (شکل ۳.۱.۲)! اگر درسی در حدّ فهمیدن قانون اول نیوتون خوانده باشید، نتیجه می‌گیرید که هیچ نیرویی بر اسکناس وارد نمی‌آید. اما، اگر فرد شکاکی باشید، تصمیم می‌گیرد این نتیجه‌گیری را بار دیگر بیازمایید. تکه‌ای نخ اختیار می‌کنید و سر آن را به قلاب سبکی، که بر سقف آسانسور افتان نصب شده، و کیف بغلی خود را به‌طرف دیگر نخ می‌بندید، تا رفتاری مانند آونگ (تقریبی) داشته باشد. می‌دانید که آونگ آویزان در راستای گرانش قرار می‌گیرد، که پیش‌بینی می‌کنید عمود بر صفحهٔ سقف باشد. اما، پی‌می‌برید که مستقل از اینکه در ابتدا راستای آونگ نسبت به سقف چگونه باشد، صرفاً در همان جهت آویخته می‌ماند. به‌نظر می‌رسد که دیگر هیچ نیرویی گرانشی بر آونگ وارد نمی‌آید. در واقع، به‌نظر می‌رسد که هیچ نوع نیرویی بر اشیاء داخل آسانسور وارد نمی‌آید. اکنون تعجب می‌کنید که چرا استاد فیزیکتان در تلاش برای یافتن دستگاه مرجع لخت کامل چنین با



شکل ۳.۱.۲ شخصی در آسانسور افتان.

دشواری مواجه بوده است، زیرا به‌نظر می‌رسد یک دستگاه مرجع لخت را به‌آسانی یافته‌اید و این دستگاه را دقیقاً در آسانسور در حال سقوط آزاد اختیار می‌کنید. متأسفانه، پی‌می‌برید که در ظرف چند لحظه، نخواهید توانست کس دیگری را در این شادی ناشی از این اکتشاف شریک کنید.

به این ترتیب، آیا آسانسور در حال سقوط آزاد چارچوب مرجع لخت کاملی است یا خیر؟

راهنمایی: به این نقل قول از اینشتین توجه کنید:

شادی‌بخشترین لحظات حیاتم در آن هنگام فرارسید. . .در نزد ناظری که در حال سقوط آزاد از بام یک خانه است، هیچ نیروی گرانشی در خلال سقوط برقرار نیست ــ دست‌کم در مجاورت بلافصلش چنین است. یعنی، اگر ناظری اشیائی را رها کند، این اشیاء مستقل از ماهیت شیمیایی یا فیزیکی منحصر به‌فردشان، به‌ترتیب، در حال سکون یا حرکت یکنواخت نسبت به او باقی خواهند ماند. بنابراین، هیچ ناظری مجاز نیست حالت خود را تحت حالت «سکون» تعبیر و تلقی کند.

برای دستیابی به بحثی جامع دربارهٔ چارچوبهای مرجع لخت و رابطهٔ آنها با گرانش، کتاب خواندنی مشروح زیر را بخوانید:

Spacetime physics, 2nd ed., by Taylor and Wheeler, W. H. Freeman & Co, New York, 1992.

جرم و نیرو: قوانین دوم و سوم نیوتون

معیار کمّی لختی را جرم می‌گویند. همه با این مفهوم آشناییم که هرچه جسمی سنگینتر (دارای جرم بیشتر) باشد، مقاومتش در برابر شتاب گرفتن بیشتر است. دوچرخه‌ای را هل دهید تا به حرکت درآید و بعد همین کار را با اتومبیل انجام دهید. تلاشهایتان در این دو حالت را با هم مقایسه کنید. اتومبیل خیلی سنگینتر است، و برای شتاب‌دارکردنش نیروی خیلی بیشتری نسبت به دوچرخه لازم است. می‌توان با نظر به دو جرم، m_1 و m_2، که فنری آنها را به هم بسته و در چارچوب مرجعی لخت در ابتدا در حال سکون است، تعریفی کمّیتر ادامه داد. مثلاً، می‌توانیم تصور کنیم که این دو جسم بر سطحی بدون اصطکاک واقع باشند، که عملاً به تقریب با قرار دادن دو ارابه بر ریل تحقق می‌پذیرد، که معمولاً در آزمایشهای فیزیک پایه مشاهده می‌شود. حال فرض کنید کسی این دو جرم را همراه یکدیگر هل دهد، فنر را فشرده، و بعد ناگهان آنها را رها کند به‌طوری که از هم جدا شوند و به‌سرعتهای v_1 و v_2 برسند. نسبت این دو جرم بنابر تعریف، عبارت خواهند بود از

$$\frac{m_2}{m_1} = \left|\frac{\mathbf{v}_1}{\mathbf{v}_2}\right| \qquad (۱.۱.۲)$$

اگر m_1 را جرم استاندارد بگیریم، در این صورت تمام جرمهای دیگر را می‌توان عملاً مطابق روش بالا برحسب این جرم استاندارد تعریف کرد. این تعریف عملیاتی جرم، به‌طوری که خواهیم دید، با قوانین دوم و سوم حرکت نیوتون سازگار است. معادلهٔ (۱.۱.۲) معادل است با

$$\Delta(m_1\mathbf{v}_1) = -\Delta(m_2\mathbf{v}_2) \qquad (۲.۱.۲)$$

زیرا سرعت اولیهٔ هر جرم صفر است و سرعتهای نهایی $\mathbf{v}_1$ و $\mathbf{v}_2$ در جهتهای عکس یکدیگرند. اگر طرفین این عبارت را بر Δt تقسیم کنیم و به‌ازای $\Delta t \to 0$ حد بگیریم، خواهیم داشت:

$$\frac{d}{dt}(m_1\mathbf{v}_1) = -\frac{d}{dt}(m_2\mathbf{v}_2) \qquad (۳.۱.۲)$$

حاصلضرب جرم و سرعت، $m\mathbf{v}$، را تکانهٔ خطی می‌گویند. "تغییر حرکت" را که در قالب قانون دوم حرکت بیان می‌شود، نیوتون، دقیقاً آهنگ زمانی تغییر تکانهٔ خطی جسم تعریف کرد، و از این‌رو قانون دوم را از این قرار می‌توان بازنویسی کرد: آهنگ زمانی تغییر تکانهٔ خطی هر جسم با نیروی وارد بر آن جسم، $\mathbf{F}$، متناسب است. به‌این‌ترتیب، قانون دوم را می‌توان از این قرار نوشت:

$$\mathbf{F} = k\frac{d(m\mathbf{v})}{dt} \qquad (۴.۱.۲)$$

که k ثابت تناسب است. هرگاه جرم را ثابت و مستقل از سرعت بگیریم (که در مورد اجسامی که با سرعتهای نسبیتی یا سرعتهایی نزدیک به‌سرعت نور، $۳ \times ۱۰^۸ \mathrm{m/s}$، حرکت می‌کنند، صادق نیست، و در این کتاب به این شرایط نخواهیم پرداخت)، می‌توانیم بنویسیم

$$\mathbf{F} = km\frac{d\mathbf{v}}{dt} = km\mathbf{a} \qquad (۵.۱.۲)$$

که $\mathbf{a}$ برایند شتاب جرم m است که نیروی $\mathbf{F}$ بر آن وارد می‌آید. ثابت تناسب را، طبق تعریف یکای نیرو در دستگاه SI، که نیرویی است که باعث می‌شود جرم یک کیلوگرمی شتاب $۱\mathrm{m/s}^۲$ پیدا کند، می‌توان گرفت: $k = ۱$. این یکای نیرو را یک نیوتون می‌گویند.

به این ترتیب، سرانجام قانون دوم نیوتون را در قالب آشنای زیر بیان می‌کنیم:

$$\mathbf{F} = \frac{d(m\mathbf{v})}{dt} = m\mathbf{a} \qquad (۶.۱.۲)$$

نیروی $\mathbf{F}$ در سمت راست معادلهٔ (۶.۱.۲) نیروی خالص است که بر جرم m وارد می‌آید؛ یعنی، جمع برداری تمامی نیروهای وارد بر m است. توجه داریم که معادلهٔ ۳.۱.۲ معادل است با

$$\mathbf{F}_۱ = -\mathbf{F}_۲ \qquad (۷.۱.۲)$$

یا قانون سوم نیوتون، به این معنا که وقتی دو جسم با یکدیگر برهم‌کنش دارند، نیروهای مساوی و مختلف‌الجهت بر یکدیگر وارد می‌آورند. بنابراین، تعریف ما از جرم با قانونهای دوم و سوم نیوتون سازگار است.

تکانهٔ خطی

تکانهٔ خطی نماد مفیدی از کار درمی‌آید که به این طریق بیان می‌شود:

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v} \qquad (۸.۱.۲)$$

قانون دوم نیوتون را می‌توان از این قرار نوشت:

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \qquad (۹.۱.۲)$$

به این ترتیب، معادلهٔ (۳.۱.۲)، که رفتار دو جرمی را توصیف می‌کند که متقابلاً برهم‌کنش دارند، معادل است با

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{p}_۱ + \mathbf{p}_۲) = ۰ \qquad (۱۰.۱.۲)$$

یا

$$\mathbf{p}_۱ + \mathbf{p}_۲ = \text{ثابت} \qquad (۱۱.۱.۲)$$

به بیان دیگر، قانون سوم نیوتون حاکی از آن است که تکانهٔ کل دو جسمی که متقابلاً برهم‌کنش دارند همواره ثابت باقی می‌ماند. این ثابت ماندن، حالت خاصی از موقعیت کلیتری است که در آن تکانهٔ خطی کل هر دستگاه منزوی (دستگاهی که هیچ نیروی خارجی خالص بر آن وارد نیاید) ثابت باقی می‌ماند. قانون بقای (پایستگی) تکانهٔ خطی از بنیادیترین قوانین فیزیک به‌شمار می‌آید و حتی در مواردی هم که مکانیک نیوتونی صادق نیست، کماکان اعتبار خود را حفظ می‌کند.

مثال ۲.۱.۲

یک سفینهٔ فضایی به جرم M با سرعت $v_i = ۲۰\text{km/s}$ نسبت به خورشید، به عمق فضا می‌رود. این سفینه قسمت عقبی خود به جرم $۰٫۲M$ را با سرعت نسبی $u = ۵\text{km/s}$ (شکل ۴.۱.۲) به بیرون پرتاب می‌کند. از آن پس، سرعت این سفینهٔ فضایی چقدر خواهد بود؟

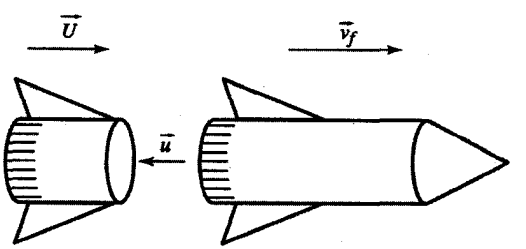
حل:

سیستم سفینهٔ فضایی با قسمت عقبی آن سیستم بسته‌ای را تشکیل می‌دهد که بر آن هیچ نیروی خارجی‌ای (با چشم‌پوشی از نیروی گرانشی خورشید) وارد نمی‌آید؛ بنابراین، تکانهٔ خطی کل پایستار می‌ماند. به این ترتیب،

$$\mathbf{P}_f = \mathbf{P}_i$$

که اندیسهای i و f، به‌ترتیب، مقادیر اولیه و نهایی‌اند. هرگاه سرعت را در جهت حرکت سفینهٔ فضایی مثبت بگیریم، قبل از بیرون انداخته شدن قسمت عقبی،

$$P_i = Mv_i$$



شکل ۴.۱.۲ سفینهٔ فضایی در حال پرتاب قسمت عقبی خود به بیرون.

اگر U سرعت قسمت عقبی پرتاب‌شده و v_f سرعت سفینه بعد از پرتاب آن قسمت باشد، تکانهٔ خطی کل سیستم بعد از پرتاب عبارت است از:

$$P_f = ۰٫۲۰MU + ۰٫۸۰Mv_f$$

سرعت، u، قسمت پرتاب‌شده نسبت به سفینهٔ فضایی برابر است با اختلاف سرعتهای سفینهٔ فضایی و قسمت پرتاب‌شده:

$$u = v_f - U$$

یا

$$U = v_f - u$$

با قراردادن عبارت اخیر در معادلهٔ بالا و با بهره‌گیری از شرط پایستگی تکانهٔ خطی، می‌رسیم به:

$$۰٫۲۰M(v_f - u) + ۰٫۸Mv_f = Mv_i$$

که خواهیم داشت:

$$v_f = v_i + ۰٫۲u = ۲۰\text{km/s} + ۰٫۲۰(۵\text{km/s}) = ۲۱\text{km/s}$$

حرکت ذره

معادلهٔ (۶.۱.۲)، عبارت است از معادلهٔ بنیادی حرکت مربوط به ذره‌ای تحت تأثیر نیروی خالص، یعنی $\mathbf{F}$. با نوشتن $\mathbf{F}$ به‌صورت $\mathbf{F}_{net}$ بر این نکته تأکید می‌ورزیم، که $\mathbf{F}_{net}$ جمع برداری تمامی نیروهای وارد بر ذره است

$$\mathbf{F}_{net} = \sum \mathbf{F}_i = m\frac{d^۲\mathbf{r}}{dt^۲} = m\mathbf{a} \qquad (۱۲.۱.۲)$$

مسئلهٔ متداول دینامیک را می‌توان از این طریق بیان کرد: با معلوم بودن نیروهای وارد بر ذره (یا سیستم ذرات)، شتابش را محاسبه می‌کنیم. با معلوم بودن شتاب، سرعت و مکان را به‌صورت تابعی از زمان محاسبه می‌کنیم. این فرایند شامل حل معادلهٔ دیفرانسیل مرتبهٔ دوم حرکت است که معادلهٔ (۱۲.۱.۲) آن را بازنمایی می‌کند. حل کامل این معادله مستلزم مشخص‌بودن شرایط اولیهٔ مسئله، وضعیت مکانی، و مقدار سرعت ذره در لحظهٔ $t = ۰$ است. شرایط اولیه به‌علاوهٔ دینامیکی که معادلهٔ دیفرانسیل حرکت قانون دوم نیوتون آن را تعیین کرده است، حرکت بعدی ذره

را به‌طورکامل مشخص می‌کنند. در مواردی، این روش نمی‌تواند به‌طورکلی به‌طریق تحلیلی اجرا شود. به‌طورکلی، حل مسائل پیچیده باید با به‌کار بردن روشهای تقریبی عددی روی کامپیوتر رقمی اجرا و حل شوند.

۲.۲ حرکت راستخط: شتاب یکنواخت تحت تأثیر نیروی ثابت

وقتی ذرهٔ متحرکی کماکان مسیر یک تک خط مستقیم را طی می‌کند، به این حرکت راستخط گویند. در این حالت، بدون آنکه به کلیت موضوع لطمه وارد آید، می‌توانیم محور x را خط حرکت اختیارکنیم. در این صورت، معادلهٔ کلی حرکت عبارت خواهد بود از

$$F_x(x, \dot{x}, t) = m\ddot{x} \qquad (۱.۲.۲)$$

(**توجه**: از این پس در این فصل، معمولاً تنها متغیر x را برای نمایش مکان ذره به‌کار خواهیم برد. برای اجتناب از کاربرد اضافی و غیرضروری اندیسها، غالباً نمادهای v و a را، به‌ترتیب، برای $\dot{x}$ و $\ddot{x}$ به‌جای v_x و a_x، و F را به‌جای F_x به‌کار می‌بریم).

ثابت بودن نیرو ساده‌ترین وضعیت است. در این حالت شتاب هم ثابت است

$$\ddot{x} = \frac{dv}{dt} = \frac{F}{m} = \text{ثابت} = a \qquad (۲.۲.۲ \text{ الف})$$

و جواب این معادله به‌آسانی و به‌کمک انتگرال‌گیری مستقیم نسبت به زمان به‌دست می‌آید:

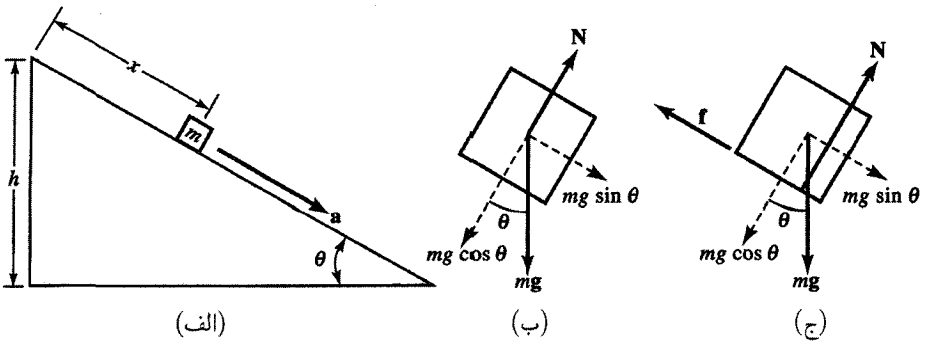
$$\dot{x} = v = at + v_0 \qquad (۲.۲.۲ \text{ ب})$$

$$x = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + x_0 \qquad (۲.۲.۲ \text{ ج})$$

که v_0 سرعت و x_0 مکان اولیه (یعنی، مکان در $t = 0$) است. با حذف زمان، t، بین معادلات (۲.۲.۲ ب) و (۲.۲.۲ ج) می‌رسیم به:

$$2a(x - x_0) = v^2 - v_0^2 \qquad (۲.۲.۲ \text{ د})$$

خواننده معادلات آشنای بالا، مربوط به حرکت با شتاب یکنواخت، را به خاطر خواهد آورد. کاربردهای بنیادی این معادلات متعددند. مثلاً، شتاب جسمی که در نزدیکی سطح زمین سقوط آزاد می‌کند، با چشم‌پوشی از مقاومت هوا، با تقریب خوبی ثابت می‌ماند. شتاب سقوط آزاد جسم را با g نشان می‌دهیم. بزرگی آن عبارت است از $g = 9.8 \text{m/s}^2$. به‌همین ترتیب، نیروی پایین‌سوی



(الف) (ب) (ج)

شکل ۱.۲.۲ (الف) جسم بر سطح شیبدار و به پایین می‌لغزد. (ب) نمودار نیرو (بدون اصطکاک). (ج) نمودار نیرو (اصطکاک: $f = \mu_k N$).

گرانشی (وزن) mg است. نیروی گرانشی، همواره مستقل از حرکت جسم، حضور دارد و از هر نیروی دیگری نیز که ممکن است بر جسم وارد آید مستقل است.[۱] از این پس آن را mg خواهیم نامید.

مثال ۱.۲.۲

قطعه‌جسمی را در نظر بگیرید که، مطابق شکل ۱.۲.۲ (الف)، روی سطحی هموار و بدون اصطکاک به زاویهٔ شیب θ نسبت به سطح افق رو به پایین می‌لغزد. اگر ارتفاع سطح h باشد و این جسم از حال سکون از بالای سطح رها شود، وقتی به انتهای سطح شیبدار می‌رسد، سرعتش چقدر است؟

حل:

دستگاه مختصاتی اختیار می‌کنیم که، مطابق شکل، جهت مثبت محور x آن به طرف پایین سطح و جهت مثبت محور y آن «به طرف بالا»، عمود بر سطح، باشد. تنها نیروی در جهت x عبارت است از مؤلفهٔ نیروی گرانشی، $mg\sin\theta$ (شکل ۱.۲.۲ (ب)). این نیرو ثابت است. بنابراین، معادلات ۲.۲.۲ الف تا د، معادلات حرکت‌اند، که در آنها

$$\ddot{x} = a = \frac{F_x}{m} = g\sin\theta$$

و

$$x - x_\circ = \frac{h}{\sin\theta}$$

۱. آثار چرخش زمین را در فصل ۵ مطالعه خواهیم کرد.

بنابراین،

$$v^2 = 2(g\sin\theta)\left(\frac{h}{\sin\theta}\right) = 2gh$$

فرض کنید سطح، به‌جای صاف و هموار بودن، ناهموار باشد؛ یعنی، نیروی اصطکاکی، f، بر ذره وارد آید. در این صورت، نیروی خالص در جهت x (شکل ۱.۲.۲ (ج)) عبارت است از $mg\sin\theta - f$. اکنون، پی‌می‌بریم که در حالت تماس لغزشی بزرگی نیروی اصطکاک با بزرگی نیروی عمود بر سطح، N، متناسب است؛ یعنی

$$f = \mu_\kappa N$$

ثابت تناسب μ_κ است که به آن ضریب اصطکاک لغزشی یا جنبشی[1] می‌گویند. در مثال مورد بحث، نیروی عمود بر سطح، مطابق شکل، عبارت است از $mg\cos\theta$؛ از این‌رو

$$f = \mu_\kappa mg\cos\theta$$

در نتیجه، نیروی خالص در جهت x عبارت خواهد بود از

$$mg\sin\theta - \mu_\kappa mg\cos\theta$$

در اینجا نیز نیرو ثابت است و معادلات ۲.۲.۲ الف تا د را به‌کار می‌گیریم، در حالی‌که

$$\ddot{x} = \frac{F_x}{m} = g(\sin\theta - \mu_k\cos\theta)$$

اگر عبارت داخل پرانتز مثبت باشد، یعنی اگر $\theta > \tan^{-1}\mu_\kappa$، سرعت ذره افزایش می‌یابد. این زاویه، $\tan^{-1}\mu_\kappa$، را که معمولاً با ϵ نشان می‌دهیم، زاویهٔ اصطکاک جنبشی می‌گویند. اگر $\theta = \epsilon$، در این صورت $a = 0$ و ذره با سرعت ثابت به طرف پایین سطح شیبدار می‌لغزد. اگر $\theta < \epsilon$، آنگاه a منفی است و ذره سرانجام به حال سکون در می‌آید. در حالت حرکت به سوی بالای سطح شیبدار، جهت نیروی اصطکاک وارونه می‌شود، یعنی نیروی اصطکاک در جهت مثبت محور x وارد می‌آید. بنابراین، شتاب (در واقع شتاب منفی) عبارت است از $\ddot{x} = g(\sin\theta + \mu_\kappa\cos\theta)$.

---

۱. ضریب اصطکاک دیگری هم به‌نام ضریب اصطکاک ایستا، μ_s، وجود دارد، که وقتی در نیروی عمود بر سطح ضرب شود، نیروی اصطکاک بیشینه را تحت تماس ایستایی به‌دست می‌دهد. یعنی، نیروی لازم برای اینکه جسمی تازه در حالت شروع به حرکت قرار گیرد، هنگامی که ابتدا در حال سکون باشد. به‌طور کلی، داریم، $\mu_s > \mu_\kappa$.

۳.۲ نیروهای وابسته به‌مکان: مفاهیم انرژی جنبشی و انرژی پتانسیل

در اغلب موارد نیروی وارد بر ذره به مکانش نسبت به سایر اجسام بستگی دارد. مثلاً نیروهای گرانشی و الکتروستاتیکی مواردی از این قبیل‌اند. این موضوع در مورد نیروهای کشسان کششی یا نیروهای تراکمی نیز صدق می‌کند. اگر نیرو مستقل از سرعت یا زمان باشد، معادلهٔ دیفرانسیل حرکت راستخط به‌صورت ساده زیر در می‌آید:

$$F(x) = m\ddot{x} \qquad (۱.۳.۲)$$

معمولاً حل این نوع معادلهٔ دیفرانسیل با یکی از چند روش موجود امکان‌پذیر است. یکی از روشهای مفید حل این معادله از این قرار است که از قاعدهٔ زنجیری بهره گیریم و شتاب را به طریق زیر بنویسیم:

$$\ddot{x} = \frac{d\dot{x}}{dt} = \frac{dx}{dt}\frac{d\dot{x}}{dx} = v\frac{dv}{dx} \qquad (۲.۳.۲)$$

بنابراین، می‌توان معادلهٔ حرکت را به این شرح نوشت:

$$F(x) = mv\frac{dv}{dx} = \frac{m}{۲}\frac{d(v^۲)}{dx} = \frac{dT}{dx} \qquad (۳.۳.۲)$$

کمیت $T = \frac{۱}{۲}mv^۲$ انرژی جنبشی ذره نام دارد. حال می‌توانیم معادلهٔ بالا را به‌صورت انتگرالی بیان کنیم:

$$W = \int_{x_۰}^{x} F(x)dx = T - T_۰ \qquad (۴.۳.۲)$$

انتگرال $\int F(x)dx$ عبارت است از کار، W، که نیروی $F(x)$ وارد بر ذره روی آن انجام می‌دهد. کار عبارت است از تغییر انرژی جنبشی ذره. حال تابع $V(x)$ را چنان تعریف می‌کنیم که

$$-\frac{dV(x)}{dx} = F(x) \qquad (۵.۳.۲)$$

تابع $V(x)$ را انرژی پتانسیل می‌نامند: این تابع فقط با افزودن یک ثابت دلخواه تعریف می‌شود. انتگرال کار برحسب $V(x)$ عبارت است از

$$W = \int_{x_۰}^{x} F(x)dx = -\int_{x_۰}^{x} dV = -V(x) + V(x_۰) = T - T_۰ \qquad (۶.۳.۲)$$

توجه کنید که اگر $V(x)$ با افزودن هر ثابت C تغییر کند، معادلهٔ (۶.۳.۲) بدون تغییر می‌ماند، زیرا

$$-[V(x) + C] + [V(x_۰) + C] = -V(x) + V(x_۰) \qquad (۷.۳.۲)$$

حال جملات را جابه‌جا می‌کنیم و معادلهٔ (۶.۳.۲) را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$T_\circ + V(x_\circ) = \text{ثابت} = T + V(x) \equiv E \qquad (۸.۳.۲)$$

این عبارت معادلهٔ انرژی است. E، بنابر تعریف، عبارت است از انرژی کل ذره (واژهٔ تخصصی آن انرژی مکانیکی کل است). انرژی کل با مجموع انرژیهای جنبشی و پتانسیل برابر و در تمام طول حرکت ذره ثابت است. این ثابت‌بودن از آنجا ناشی می‌شود که نیروی وارد بر ذره فقط تابعی از مکان x (مربوط به ذره که در نتیجه می‌تواند از انرژی پتانسیلش نتیجه شود)، $V(x)$، است. چنین نیرویی را پایستار[1] گویند. معمولاً ماهیت نیروهای ناپایستار، یعنی نیروهایی که تابع انرژی پتانسیل در آنها برقرار نیست، مانند اصطکاک، اتلافی است.

حرکت ذره را می‌توان از طریق حل معادلهٔ انرژی (معادلهٔ ۸.۳.۲) برحسب v به‌دست آورد:

$$v = \frac{dx}{dt} = \pm\sqrt{\frac{۲}{m}[E - V(x)]} \qquad (۹.۳.۲)$$

که می‌توان آن را به‌صورت انتگرالی نوشت،

$$\int_{x_\circ}^{x} \frac{dx}{\pm\sqrt{\frac{۲}{m}[E - V(x)]}} = t - t_\circ \qquad (۱۰.۳.۲)$$

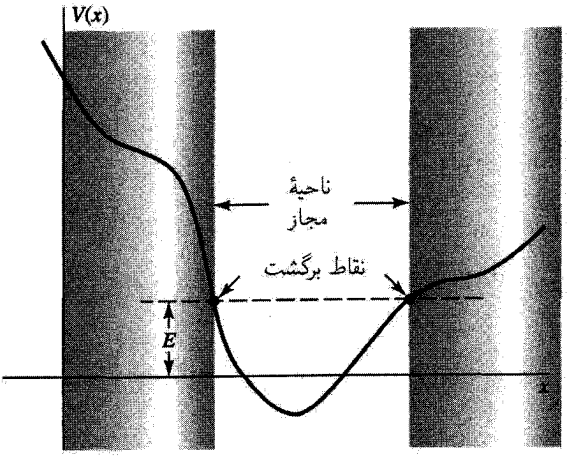
این معادله t را به‌صورت تابعی از x به‌دست می‌دهد.

با توجه به معادلهٔ (۹.۳.۲) می‌بینیم که رابطهٔ v فقط به‌ازای مقادیری از x حقیقی است که $V(x)$ را کمتر یا مساوی با انرژی کل، E، کند. به تعبیر فیزیکی، ذره در ناحیه، یا ناحیه‌هایی، محبوس می‌شود که شرط $V(x) \leq E$ نسبت به آنها برقرار باشد. به‌علاوه، به‌ازای $V(x) = E$، v صفر می‌شود، یعنی ذره باید متوقف شود و جهت حرکت خود را در نقاطی که این تساوی در آنجا برقرار می‌شود، تغییر دهد. این نقاط را نقاط برگشت حرکت نامند. نکات یادشده در بالا را در شکل ۱.۳.۲ مشاهده می‌کنید.

مثال ۱.۳.۲ سقوط آزاد

حرکت سقوطی آزاد جسم (که در بالا در خصوص آن در حالت شتاب ثابت بحث کردیم) نمونه‌ای از حرکت پایستار است. اگر جهت بالاسوی x را مثبت بگیریم، نیروی گرانشی $-mg$ است. بنابراین، $-dV/dx = -mg$ و $V = mgx + C$. ثابت انتگرال‌گیری، C، مقداری اختیاری است و فقط

۱. بحث کاملتری در باب نیروهای پایستار را در فصل ۴ خواهید یافت.



شکل ۱.۳.۲ نمودار تابع انرژی پتانسیل یک بعدی $V(x)$ که ناحیهٔ مجاز حرکت و نقاط برگشت را به‌ازای مقدار معینی از انرژی کل E نشان می‌دهد.

به انتخاب تراز مرجع اندازه‌گیری V بستگی دارد. می‌توانیم بگیریم $C = ۰$، یعنی هرگاه $x = ۰$ آنگاه $V = ۰$. در این صورت، معادلهٔ انرژی عبارت خواهد بود از:

$$\frac{۱}{۲}mv^۲ + mgx = E$$

ثابت انرژی E را شرایط اولیه تعیین می‌کند. مثلاً، فرض کنیم جسم با سرعت اولیهٔ $v_۰$ از مبدأ $x = ۰$ به بالا پرتاب شود. با توجه به این مقادیر می‌رسیم به $E = mv_۰^۲/۲ = mv^۲/۲ + mgx$، از این‌رو

$$v^۲ = v_۰^۲ - ۲gx$$

نقطهٔ برگشت حرکت، که در این حالت در حداکثر ارتفاع واقع است، با قرار دادن $v = ۰$ به‌دست می‌آید. از اینجا می‌رسیم به: $۰ = v_۰^۲ - ۲gx_{max}$، یا

$$h = x_{max} = \frac{v_۰^۲}{۲g}$$

مثال ۲.۳.۲ تغییر نیروی گرانی با ارتفاع

در مثال ۱.۳.۲ مقدار g را ثابت فرض کردیم. در واقع، نیروی گرانی بین دو ذره با عکس مجذور فاصلهٔ بین آنها متناسب است (قانون گرانش نیوتون).[۱] به‌این ترتیب، نیروی گرانشی که زمین بر

۱. این قانون را به‌تفصیل در فصل ۶ مطالعه خواهیم کرد.

جسمی به جرم m وارد می‌آورد، از این قرار بیان می‌شود

$$F_r = -\frac{GM_m}{r^2}$$

که در آن G ثابت گرانش نیوتون، M جرم زمین، و r فاصلهٔ جسم تا مرکز زمین است. بنا بر تعریف، وقتی جسم در سطح زمین واقع باشد، این نیرو عبارت است از کمیت $-mg$؛ از این‌رو $mg = GMm/r_e^2$. بنابراین، $g = GM/r_e^2$ شتاب گرانی در سطح زمین است. در اینجا، r_e شعاع زمین است (زمین کروی فرض می‌شود). اگر x فاصلهٔ جسمی واقع در بالای زمین تا سطح آن باشد، آنگاه $r = r_e + x$. در این صورت، با چشمپوشی از هر نیروی دیگری مانند مقاومت هوا، برای معادلهٔ دیفرانسیل حرکت جسمی با سقوط (یا صعود) قائم، وقتی تغییر گرانشی را منظور کنیم، می‌توانیم بنویسیم

$$F(x) = -mg\frac{r_e^2}{(r_e + x)^2} = m\ddot{x}$$

برای انتگرال‌گیری قرار می‌دهیم $\ddot{x} = vdv/dx$. در این صورت

$$-mgr_e^2 \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{(r_e + x)^2} = \int_{v_0}^{v} mvdv$$

$$mgr_e^2 \left(\frac{1}{r_e + x} - \frac{1}{r_e + x_0} \right) = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2$$

این عبارت دقیقاً همان معادلهٔ انرژی به شکل معادلهٔ (۶.۳.۲) است. در اینجا، به جای اینکه انرژی پتانسیل برابر mgx باشد، عبارت است از $V(x) = -mg[r_e^2/(r_e + x)]$.

ارتفاع بیشینه: سرعت گریز

فرض کنید جسمی با سرعت اولیهٔ v_0 در سطح زمین، $x_0 = 0$، به بالا پرتاب شود. در این صورت بعد از حل معادلهٔ انرژی برحسب V^2، می‌رسیم به:

$$v^2 = v_0^2 - 2gx\left(1 + \frac{x}{r_e}\right)^{-1}$$

اگر x در مقایسه با r_e خیلی کوچک باشد، به‌طوری که بتوان از جملهٔ x/r_e چشم پوشید، رابطهٔ بالا به نتیجهٔ مثال ۱.۲.۲ در مورد میدان گرانشی یکنواخت تبدیل می‌شود. نقطهٔ برگشت (بیشینهٔ ارتفاع) با قرار دادن $v = 0$ و حل معادلهٔ بالا برحسب x، به‌دست می‌آید. در نتیجه،

$$x_{\max} = h = \frac{v_0^2}{2g}\left(1 - \frac{v_0^2}{2gr_e}\right)^{-1}$$

در اینجا نیز اگر بتوان از جملهٔ دوم داخل پرانتز چشم پوشید، یعنی اگر v_0^2 خیلی از $2gr_e$ کوچکتر باشد، به فرمول مثال ۱.۲.۲ می‌رسیم.

با بهره‌گیری از این عبارت دقیق آخر، آن را برحسب مقدار v_0 حل می‌کنیم که مقداری نامتناهی برای h به‌دست می‌دهد. سرعت را در این حالت سرعت گریز نامند، و با صفر قراردادن کمیت داخل پرانتز، آن را صریحاً به دست می‌آوریم؛ نتیجه زیر به‌دست خواهد آمد

$$v_e = (2gr_e)^{\frac{1}{2}}$$

که به‌ازای، $g = 9{,}8\text{m/s}^2$ و $r_e = 6{,}4 \times 10^6\text{m}$، مقدار عددی سرعت گریز از سطح زمین عبارت خواهد بود از:

$$v_e \simeq 11\text{km/s} \simeq 7\text{mi/s}$$

در جوّ زمین، میانگین سرعت مولکولهای هوا (O_2 و N_2) در حدود $0{,}5\text{km/s}$، به‌نحو چشمگیری کوچکتر از سرعت گریز، است، و به این علت است که زمین جو را پیرامون خود نگه می‌دارد. از سوی دیگر، ماه جوی ندارد زیرا بزرگی سرعت گریز از سطح ماه، به علت کمی جرمش نسبت به بزرگی سرعت گریز از سطح زمین به میزان قابل‌ملاحظه‌ای کمتر است. به این جهت، هر اکسیژن یا نیتروژنی [در اطراف ماه م.] سرانجام ناپدید می‌شود. حال حتی اگرچه هیدروژن روی‌هم‌رفته فراوانترین عنصر در عالم است، جو زمین هیدروژن قابل‌ملاحظه‌ای در خود نگه نمی‌دارد. هیدروژن جو باید مدتها قبل از زمین گریخته باشد، زیرا سرعت مولکولی هیدروژن (به‌علت جرم اندک این مولکول) چندان زیاد است که در هر لحظه سرعت تعداد چشمگیری از مولکولهای هیدروژن از بزرگی سرعت گریزشان بیشتر است.

مثال ۳.۳.۲

تابع مورس، $V(x)$، انرژی پتانسیل یک مولکول دو اتمی مرتعش را به‌صورت تابعی از x، فاصلهٔ بین دو اتم تشکیل‌دهندهٔ آن، با تقریب نشان می‌دهد و با رابطهٔ زیر بیان می‌شود

$$V(x) = V_0[1 - e^{-(x-x_0)/\delta}]^2 - V_0$$

V_0، x_0، و δ پارامترهایی‌اند که برای توصیف رفتار مشاهده‌شدهٔ زوج خاصی از اتمها برگزیده می‌شوند. نیرویی که هر اتم بر اتم دیگر وارد می‌آورد با مشتق این تابع نسبت به x بیان می‌شود. نشان دهید که x_0 فاصلهٔ دو اتم است، هنگامی که تابع انرژی پتانسیل کمینه، و مقدار انرژی پتانسیل

برای این فاصله عبارت باشد از $V(x_0) = -V_0$. (وقتی مولکول در این پیکربندی واقع شود، می‌گوییم در حال تعادل است.)

حل:

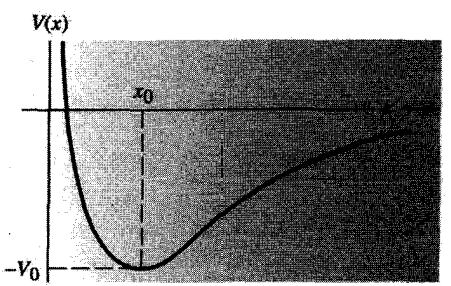
انرژی پتانسیل مولکول دو اتمی وقتی کمینه است که مشتقش نسبت به x، فاصلهٔ بین اتمها، صفر باشد. بنابراین

$$F(x) = -\frac{dV(x)}{dx} = 0$$
$$2\frac{V_0}{\delta}(1 - e^{-(x-x_0)/\delta})(e^{-(x-x_0)/\delta}) = 0$$
$$1 - e^{-(x-x_0)/\delta} = 0$$
$$\ln(1) = -(x - x_0)/\delta = 0$$
$$\therefore x = x_0$$

کمینهٔ انرژی پتانسیل را می‌توان با قراردادن $x = x_0$ در رابطهٔ $V(x)$ یافت، که حاصل عبارت است از $V(x_0) = -V_0$.

مثال ۴.۳.۲

شکل ۲.۳.۲، تابع انرژی پتانسیل یک مولکول دواتمی را مشاهده می‌کنید. نشان دهید که به‌ازای فواصل x نزدیک به x_0، تابع انرژی پتانسیل سهموی و نیروی برایند وارد بر هر یک از اتمهای این زوج، خطی، و همواره به‌طرف وضعیت تعادل متوجه است.



شکل ۲.۳.۲ تابع انرژی پتانسیل یک مولکول دو اتمی.

حل:
تمام آنچه در اینجا لازم داریم، بسط تابع انرژی پتانسیل در نزدیکی وضعیت تعادل است

$$V(x) \approx V_0 \left[1 - \left(1 - \left(\frac{x - x_0}{\delta}\right)\right)\right]^2 - V_0$$
$$\approx \frac{V_0}{\delta^2}(x - x_0)^2 - V_0$$
$$F(x) = -\frac{dV(x)}{dx} = -\frac{2V_0}{\delta^2}(x - x_0)$$

(**گوشزد:** نیرو خطی است و سمتگیری آن چنان است که مولکول دو اتمی به‌وضعیت تعادلش برگردد.)

مثال ۵.۳.۲

انرژی بستگی ($-V_0$) مولکول هیدروژن دواتمی، H_2، عبارت است از -4.52eV ($1\text{N}\cdot\text{m} = 1$ ژول؛ ژول $1\text{eV} = 1.6 \times 10^{-19}$). مقدار ثابتهای x_0 و δ، به‌ترتیب، عبارت‌اند از 0.074nm و 0.036nm ($1\text{nm} = 10^{-9}\text{m}$). فرض کنید در دمای اتاق، انرژی کل مولکول هیدروژن حدود $\Delta E = 1/40\text{eV}$ بیشتر از انرژی بستگی باشد. بیشینهٔ فاصلهٔ بین دو اتم در مولکول هیدروژن دو اتمی را محاسبه کنید.

حل:
از آنجا که انرژی این مولکول اندکی که بیشتر از مقدار انرژی ممکن کمینه‌اش است، این دو اتم بین دو مقدار x، که در آنجا انرژی جنبشی‌شان صفر است، ارتعاش می‌کنند. در این نقاط برگشت، تمام انرژی پتانسیل است؛ به‌این ترتیب،

$$V(x) = -V_0 + \Delta E \approx \frac{V_0}{\delta^2}(x - x_0)^2 - V_0$$
$$x = x_0 \pm \delta\sqrt{\frac{\Delta E}{V_0}}$$

با عددگذاری، می‌بینیم که مولکول هیدروژن در دمای اتاق تا فاصله‌ای حدود $\pm 4\%$ فاصلهٔ جدایی تعادلش، ارتعاش می‌کند.

برای این وضعیت که نوسان کم‌دامنه است، دو اتم به‌طور متقارن حول وضعیت تعادلشان جابه‌جا می‌شوند. این امر از آنجا ناشی می‌شود که تابع پتانسیل در نزدیکی وضعیت تعادل تقریباً سهموی

است. بنا بر شکل ۲.۳.۲، دورتر از وضعیت تعادل، تابع انرژی پتانسیل متقارن نیست؛ و در فواصل کوچکتر شیب آن بیشتر می‌شود. بنابراین، هنگامی که مولکول دو اتمی "گرمتر می‌شود"، به‌طور میانگین جزء زمانی افزونتری را در فاصلهٔ جدایی طولانیتر از فاصلهٔ اتمها در حالت تعادلشان صرف می‌کند. به این دلیل، بیشتر مواد با گرم شدن منبسط می‌شوند.

۴.۲ نیروهای وابسته به سرعت: مقاومت شاره و سرعت حدی

غالباً پیش می‌آید که نیروی وارد بر جسم تابع سرعت آن باشد. این حالت، مثلاً، در مورد جسمی صادق است که در داخل شاره‌ای حرکت می‌کند و مقاومت چسبنده‌ای بر آن وارد می‌آید. اگر بتوان نیرو را فقط به‌صورت تابعی از v بیان کرد، معادلهٔ دیفرانسیل حرکت را می‌شود به یکی از دو صورت زیر نوشت:

$$F_0 + F(v) = m\frac{dv}{dt} \qquad (۱.۴.۲)$$

$$F_0 + F(v) = mv\frac{dv}{dx} \qquad (۲.۴.۲)$$

در اینجا، $\mathbf{F}_0$ نیروی ثابتی است که به v بستگی ندارد. بعد از جداسازی متغیرها، از طریق انتگرال‌گیری t یا x به‌صورت توابعی از سرعت به‌دست می‌آیند، در این صورت، انتگرال‌گیری دوم می‌تواند رابطه‌ای تابعی بین x و t به‌دست دهد.

در مورد مقاومت عادی شاره، از جمله مقاومت هوا، $F(v)$ تابع ساده‌ای نیست و به‌طور کلی می‌توان آن را از طریق اندازه‌گیریهای تجربی به‌دست آورد. به‌هرحال، در موارد متعدد، به‌کمک معادلهٔ زیر به تقریب خوبی می‌رسیم:

$$F(v) = -c_1 v - c_2 v|v| = -v(c_1 + c_2|v|) \qquad (۳.۴.۲)$$

که در آن c_1 و c_2 ثابتهایی‌اند که مقادیرشان به ابعاد و شکل جسم بستگی دارد (علامت قدرمطلق روی جملهٔ آخری ضروری است زیرا نیروی مقاومت شاره، همواره در خلاف جهت v عمل می‌کند.) اگر معادلهٔ اخیر برحسب $F(v)$ به‌کار برده شود تا از طریق حل معادلات ۱.۴.۲ یا ۲.۴.۲ معادلهٔ حرکت به‌دست آید، انتگرالهای حاصل قدری پیچیده می‌شوند؛ ولی در حالتهای حدیِ مقدار کم و زیاد v، به‌ترتیب، جملهٔ خطی یا جملهٔ درجهٔ دوم در $F(v)$ غالب است و معادلات دیفرانسیل اندکی ساده‌تر می‌شوند.

برای اجسام کروی که در هوا حرکت می‌کنند، مقادیر تقریبی به‌ازای ثابتها در معادلهٔ $F(v)$، برحسب یکای SI عبارت‌اند از

$$c_۱ = ۱٫۵۵ \times ۱۰^{-۴} D$$
$$c_۲ = ۰٫۲۲ D^۲$$

که D قطرکره به متر است. بنابراین، نسبت جملهٔ درجهٔ دوم $c_۲ v|v|$ به جملهٔ خطی $c_۱ v$، عبارت است از

$$\frac{۰٫۲۲ v|v| D^۲}{۱٫۵۵ \times ۱۰^{-۴} v D} = ۱٫۴ \times ۱۰^{۳} |v| D$$

یعنی، مثلاً، در مورد اجسامی با اندازهٔ توپ بیسبال ($D \sim ۰٫۰۷\mathrm{m}$)، جملهٔ درجهٔ دوم در سرعتهای بیشتر از $۰٫۰۱\mathrm{m/s}(۱\mathrm{cm/s})$ غالب است و جملهٔ خطی در سرعتهای کمتر از این مقدار غلبه خواهد داشت. به‌ازای سرعتهایی در اطراف این مقدار، هر دو جمله را باید به حساب آورد (مسئلهٔ ۱۵.۲).

مثال ۱.۴.۲ حرکت افقی با مقاومت خطی

فرض کنید قطعه جسمی با سرعت اولیهٔ $v_۰$ روی یک سطح صاف افقی پرتاب شده است. مقاومت هوا چنان است که جملهٔ خطی غالب باشد. بنابراین، در جهت حرکت، در معادلات ۱.۴.۲ و ۲.۴.۲ داریم، $F_۰ = ۰$ و $F(v) = -c_۱ v$. از این‌رو، معادلهٔ دیفرانسیل حرکت عبارت است از

$$-c_۱ v = m \frac{dv}{dt}$$

که نتیجهٔ انتگرال‌گیری از این قرار خواهد بود،

$$t = \int_{v_۰}^{v} -\frac{m dv}{c_۱ v} = -\frac{m}{c_۱} \ln\left(\frac{v}{v_۰}\right)$$

حل:

می‌توانیم با ضرب‌کردن طرفین رابطهٔ بالا در $-c_۱/m$ و نوشتن طرفین به‌صورت نمایی، آن را به‌آسانی حل کنیم و v را به‌صورت تابعی از t به‌دست آوریم. خواهیم داشت

$$v = v_۰ e^{-c_۱ t/m}$$

بنابراین، سرعت به‌طور نمایی با زمان کاهش می‌یابد. از انتگرال‌گیری دوم، خواهیم رسید به

$$\begin{aligned} x &= \int_{\circ}^{t} v_{\circ} e^{-c_{\backslash} t/m} dt \\ &= \frac{m v_{\circ}}{c_{\backslash}} (\backslash - e^{-c_{\backslash} t/m}) \end{aligned}$$

این رابطه نشان می‌دهد که قطعه جسم به مکانی حدی که با عبارت $x_{\lim} = m v_{\circ}/c_{\backslash}$ معین می‌شود، نزدیک خواهد شد.

مثال ۲.۴.۲ حرکت افقی با مقاومت درجهٔ دوم

اگر چگونگی پارامترها به غلبهٔ جملهٔ درجهٔ دوم بینجامد، در این صورت به‌ازای مقادیر مثبت v خواهیم داشت:

$$-c_{\mathsf{۲}} v^{\mathsf{۲}} = m \frac{dv}{dt}$$

که از اینجا می‌رسیم به:

$$t = \int_{v_n}^{v} \frac{-m dv}{c_{\mathsf{۲}} v^{\mathsf{۲}}} = \frac{m}{c_{\mathsf{۲}}} \left(\frac{\backslash}{v} - \frac{\backslash}{v_{\circ}} \right)$$

حل:

انتگرال بالا را برحسب v حل می‌کنیم

$$v = \frac{v_{\circ}}{\backslash + kt}$$

که $k = c_{\mathsf{۲}} v_{\circ}/m$. انتگرال‌گیری دوم، مکان را به‌صورت تابعی از زمان به‌دست می‌دهد:

$$x(t) = \int_{\circ}^{t} \frac{v_{\circ} dt}{\backslash + kt} = \frac{v_{\circ}}{k} \ln(\backslash + kt)$$

بنابراین، به‌ازای $t \to \infty$، مقدار v به‌صورت $\backslash/t$ کاهش می‌یابد، اما مکان به حدی که در مورد نیروی کندکنندهٔ خطی به‌دست آمد، نزدیک نمی‌شود. چرا باید چنین باشد؟ ممکن است حدس بزنید که پس‌افتادگی (کندکنندگی) درجهٔ دوم باید در متوقف‌کردن قطعه جسم از نیروی پس‌افت‌کنندهٔ خطی مؤثرتر باشد. قطعاً این موضوع در سرعتهای زیاد صادق است، اما هنگامی که سرعت به صفر نزدیک می‌شود، نیروی کندکنندهٔ درجهٔ دوم خیلی سریعتر از درجهٔ اول صفر می‌شود، آنقدر که به قطعه جسم اجازه می‌دهد تا راه خود را به‌خوبی ادامه دهد، هر چند سرعتش خیلی کم باشد.

سقوط قائم به داخل شاره: سرعت حدی

(الف) حالت خطی. در مورد شیئی که دریک شارهٔ مقاوم به‌طور قائم سقوط کند، نیروی $F_۰$ در معادلات ۱.۴.۲ و ۲.۴.۲ وزن شیء، یعنی $-mg$، در صورتی که جهت مثبت محور x بالاسو انتخاب شود، به‌شمار می‌آید. پس، در حالت خطیِ مقاومت شاره، معادلهٔ دیفرانسیل حرکت عبارت خواهد بود از

$$-mg - c_۱v = m\frac{dv}{dt} \qquad (۴.۴.۲)$$

پس از جداکردن متغیرها و انتگرال‌گیری می‌رسیم به:

$$t = \int_{v_۰}^{v} \frac{mdv}{-mg - c_۱v} = -\frac{m}{c}\ln\frac{mg + c_۱v}{mg + c_۱v_۰} \qquad (۵.۴.۲)$$

که در آن $v_۰$ عبارت است از سرعت اولیه در $t = ۰$. طرفین را در $-c_۱/m$ ضرب می‌کنیم و سپس آن را به‌صورت نمایی می‌نویسیم؛ می‌توانیم معادلهٔ بالا را حل کنیم و v را به‌دست آوریم

$$v = -\frac{mg}{c_۱} + \left(\frac{mg}{c_۱} + v_۰\right)e^{-c_۱t/m} \qquad (۶.۴.۲)$$

جملهٔ نمایی بعد از گذشت زمانی کافی ($t \gg m/c_۱$) به‌مقداری چشم‌پوشیدنی کاهش می‌یابد، و سرعت به‌مقدار حدی $-mg/c_۱$ نزدیک می‌شود. سرعت محدودشوندهٔ جسم افتان را سرعت حدی می‌نامند؛ سرعت حدی عبارت است از سرعتی که در آن نیروی مقاومت دقیقاً با وزن جسم مساوی و مختلف‌العلامت می‌شود به‌طوری که نیروی کل صفر است، از این‌رو شتاب صفر می‌شود. بزرگی سرعت حدی عبارت است از اندازهٔ سرعت حدی.

بزرگی سرعت حدی، $mg/c_۱$، را با v_t، و $m/c_۱$ را با τ نشان می‌دهیم (که τ را زمان مشخصه می‌نامیم). در این صورت، معادلهٔ (۶.۴.۲) را می‌توان به این شکل با معنی‌تر نوشت

$$v = -v_t(۱ - e^{-t/\tau}) + v_۰e^{-t/\tau} \qquad (۷.۴.۲)$$

این دو جمله، دو سرعت را نشان می‌دهند: جملهٔ مربوط به سرعت حدی، v_t، که به‌طور نمایی «ظاهر می‌شود»، و سرعت اولیه، $v_۰$، که ناشی از تأثیر نیروی پس‌کشی چسبنده به‌طور نمایی «ناپدید می‌شود».

در حالت خاص، برای جسمی که در زمان $t = ۰$ از حال سکون فرومی‌افتد، داریم $v_۰ = ۰$، و خواهیم رسید به

$$v = -v_t(۱ - e^{-t/\tau}) \qquad (۸.۴.۲)$$

به این ترتیب، بعد از گذشت یک مدت زمان مشخصه، سرعت عبارت است از $۱ - e^{-۱}$ برابر سرعت حدی، و پس از گذشت دو زمان مشخصه، ضریب v_t برابر $۱ - e^{-۲}$ می‌شود، و به همین ترتیب الی آخر. بعد از بازهٔ زمانی ۵τ، سرعت یک درصد سرعت حدی خواهد بود، یعنی $(۱ - e^{-۵})v_t = ۰٫۹۹۳v_t$.

(ب) حالت درجهٔ دوم. در این حالت، بزرگی $F(v)$ با $v^۲$ متناسب است. برای اطمینان از اینکه نیرو کماکان مقاوم باقی خواهد ماند، باید به‌خاطر آوریم که علامت قبل از جملهٔ $F(v)$ به این بستگی دارد که جهت حرکت شیء بالاسو یا پایین‌سو باشد. این حالت مربوط به هر نیروی متناسب با هر توان زوج سرعت است. معمولاً جواب کلی از این قرار است که حرکتهای بالاسو و پایین‌سو را به‌طور جداگانه بررسی می‌کنیم. در اینجا، برای سادگی فقط موقعیتی را در نظر می‌گیریم که جسم از حال سکون فرومی‌افتد یا با سرعت اولیهٔ $v_۰$ به پایین پرتاب می‌شود. بررسی موقعیتی را که جسم به طرف بالا می‌رود. برای تمرین به دانشجو وامی‌گذاریم. جهت رو به پایین را در امتداد محور مثبت y می‌گیریم. معادلهٔ دیفرانسیل حرکت عبارت خواهد شد از

$$\begin{aligned} m\frac{dv}{dt} &= mg - c_۲v^۲ = mg\left(۱ - \frac{c_۲}{mg}v^۲\right) \\ &= mg\left(۱ - \frac{v^۲}{v_t^۲}\right) \qquad (۹.۴.۲) \\ \frac{dv}{dt} &= g\left(۱ - \frac{v^۲}{v_t^۲}\right) \end{aligned}$$

که

$$v_t = \sqrt{\frac{mg}{c_۲}} \text{ (سرعت حدی)} \qquad (۱۰.۴.۲)$$

با انتگرال‌گیری از معادلهٔ ۹.۴.۲، زمان t به‌صورت تابعی از v به‌دست می‌آید

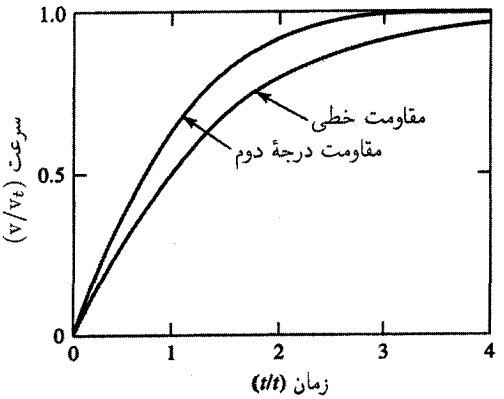
$$t - t_۰ = \int_{v_۰}^{v} \frac{dv}{g\left(۱ - \frac{v^۲}{v_t^۲}\right)} = \tau\left(\tanh^{-۱}\frac{v}{v_t} - \tanh^{-۱}\frac{v_۰}{v_t}\right) \qquad (۱۱.۴.۲)$$

که

$$\tau = \frac{vt}{g} = \sqrt{\frac{m}{c_۲g}} \text{ (زمان مشخصه)} \qquad (۱۲.۴.۲)$$

رابطهٔ بالا را برحسب v حل کنیم،

$$v = v_t \tanh\left(\frac{t - t_۰}{\tau} - \tanh^{-۱}\frac{v_۰}{v_t}\right) \qquad (۱۳.۴.۲)$$



شکل ۱.۴.۲ نمودارهای سرعت (یکاهای سرعت حدی) برحسب زمان (یکاهای زمان مشخصهٔ τ) برای جسم افتان.

اگر جسم از حال سکون در زمان $t = ۰$ رها شود،

$$v = v_t \tanh \frac{t}{\tau} = v_t \left(\frac{e^{۲t/\tau} - ۱}{e^{۲t/\tau} + ۱} \right) \qquad (۱۴.۴.۲)$$

سرعت حدی بعد از سپری‌شدن تعداد زمان مشخصه به‌دست می‌آید؛ مثلاً، به‌ازای $t = ۵\tau$ سرعت عبارت خواهد شد از $۰٫۹۹۹۹۱v_t$. نمودارهای سرعت برحسب زمان سقوط برای حالتهای مقاومت خطی و درجهٔ دوم در شکل ۱.۴.۲ نشان داده شده‌اند.

در بسیاری موارد می‌خواهیم بدانیم که جسم پس از پیمودن مسافت سقوطی معینی، به چه سرعتی می‌رسد. می‌شود با انتگرال‌گیری معادلهٔ ۱۳.۴.۲، و با محاسبهٔ y به‌صورت تابعی از زمان و سپس با حذف پارامتر زمان و یافتن سرعت برحسب فاصله، این سرعت را بیابیم. جواب مستقیمتر می‌تواند با تغییر و اصطلاح مستقیم معادلهٔ دیفرانسیل بنیادی حرکت، به‌طریقی به‌دست آید که متغیر مستقل به‌جای زمان، مسافت باشد. مثلاً، چون

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dy}\frac{dy}{dt} = \frac{۱}{۲}\frac{dv^۲}{dy} \qquad (۱۵.۴.۲)$$

معادلهٔ ۹.۴.۲ را می‌توان درحالی بازنویسی کرد که y متغیر مستقلی باشد:

$$\frac{dv^۲}{dy} = ۲g\left(۱ - \frac{v^۲}{v_t^۲} \right) \qquad (۱۶.۴.۲)$$

این معادله را به‌صورت زیر حل می‌کنیم:

$$\frac{du}{dy} = -\frac{1}{v_t^2}\frac{dv^2}{dy} = -\left(\frac{2g}{v_t^2}\right)u \qquad \text{بنابراین} \qquad u = 1 - \frac{v^2}{v_t^2}$$

$$u(y=0) = 1 - \frac{v_0^2}{v_t^2} \qquad \text{اما} \qquad u = u(y=0)e^{-2gy/v_t^2}$$

$$u = \left(1 - \frac{v_0^2}{v_t^2}\right)e^{-2gy/v_t^2} = 1 - \frac{v^2}{v_t^2}$$

$$\therefore v^2 = v_t^2\left(1 - e^{-2gy/v_t^2}\right) + v_0^2 e^{-2gy/v_t^2} \qquad (17.4.2)$$

بنابراین، می‌بینیم که بعد از طی یک طول مشخصهٔ $v_t^2/2g$، جملهٔ مربوط به مجذور سرعت اولیه کاسته و به جملهٔ مربوط به مجذور سرعت حدی نزدیک می‌شود.

مثال ۳.۴.۲ سقوط قطرات باران و توپ بسکتبال

سرعت حدی در هوا و زمان مشخصه را برای (الف) یک قطرهٔ باران کروی خیلی کوچک به قطر $0.1\text{mm} = 10^{-4}\text{m}$ و (ب) یک توپ بسکتبال به قطر 0.25m و جرم 0.6kg محاسبه کنید.

حل:

برای اینکه بدانیم کدام نوع قانون نیرو، درجهٔ دوم یا خطی، را به‌کار ببریم، به‌یاد می‌آوریم که رابطه‌ای که قبلاً بیان شد، نسبت نیروی درجهٔ دوم به خطی را برای مقاومت هوا، یعنی $1.4 \times 10^3|v|D$، به‌دست می‌دهد، که مقدار عددی آن برای قطرهٔ باران $0.14v$ و برای توپ بسکتبال $350v$، و v برحسب متر بر ثانیه است. بنابراین، در مورد قطرهٔ باران، v باید از $0.4/1 = 7.1\text{m/s}$ برای نیروی درجهٔ دوم غلبه پیدا کند. در مورد توپ بسکتبال، v باید فقط از $0.0029\text{m/s} = 1/350$ بیشتر باشد تا نیروی درجهٔ دوم غالب شود؛ نتیجه می‌گیریم که حالت خطی باید در قطرهٔ باران در حال سقوط منظور شود، در صورتی که در مورد توپ بسکتبال حالت درجهٔ دوم صادق است. (مسئلهٔ ۱۵.۲).

حجم قطرهٔ باران عبارت است از $\pi D^3/6 = 0.52 \times 10^{-12}\text{m}^3$؛ از این رو پس از ضرب کردن آن در چگالی آب، 10^3kg/m^3، جرم از این قرار به‌دست می‌آید: $m = 0.52 \times 10^{-9}\text{kg}$. ضریب پس‌کشی را به این قرار به‌دست می‌آوریم: $c_1 = 1.55 \times 10^{-4}\text{D} = 1.55 \times 10^{-8}\text{N}\cdot\text{s/m}$. از این مقدار سرعت حدی به‌صورت زیر به‌دست می‌آید،

$$v_t = \frac{mg}{c_1} = \frac{0.52 \times 10^{-9} \times 9.8}{1.55 \times 10^{-8}}\text{m/s} = 0.33\text{m/s}$$

که زمان مشخصه عبارت است از

$$\tau = \frac{vt}{g} = \frac{۰٫۳۳\text{m/s}}{۹٫۸\text{m/s}^۲} = ۰٫۰۳۴\text{s}$$

در مورد توپ بسکتبال، ضریب پس‌کشی عبارت است از

$$c_۲ = ۰٫۲۲D^۲ = ۰٫۲۲ \times (۰٫۲۵)^۲ = ۰٫۰۱۳۸\text{N.s}^۲/\text{m}^۳$$

و بنابراین سرعت حدی به این شرح خواهد بود

$$v_t = \left(\frac{mg}{c_۲}\right)^{۱/۲} = \left(\frac{۰٫۶ \times ۹٫۸}{۰٫۰۱۳۸}\right)^{۱/۲} \text{m/s} = ۲۰٫۶\text{m/s}$$

و زمان مشخصه عبارت است از

$$\tau = \frac{v_t}{g} = \frac{۲۰٫۶\text{m/s}}{۹٫۸\text{m/s}^۲} = ۲٫۱\text{s}$$

بنابراین، قطرهٔ باران در مدتی کمتر از یک ثانیه پس از لحظهٔ شروع به سقوط از حال سکون عملاً به‌سرعت حدی خود می‌رسد، درصورتی که توپ بسکتبال برای اینکه به یک درصد سرعت حدی خود برسد چند ثانیه طول می‌کشد.

برای دستیابی به اطلاعات بیشتر دربارهٔ نیروی پس‌کشی آئرودینامیکی به مقاله‌ای با مشخصات C. Frohlich in *Am. J. Phys.*, **52**, 325 (1984) مراجعه کنید.

*۵.۲ سقوط قائم در شاره:حل عددی

بسیاری از مسائل مکانیک کلاسیک به‌کمک معادلات حرکت نسبتاً پیچیده‌ای بیان می‌شوند که نمی‌توان آنها را به‌طریق تحلیلی و با شکل بسته حل کرد. وقتی با چنین مسئله‌ای روبرو می‌شویم، تنها روش موجود دیگر، اقدام به حل آن از طریق عددی است. هرگاه معلوم شد که چنین راه‌حل و روشی ضروری است، بسیاری راه و روشهای جایگزین دیگر گشوده می‌شود. کاربرد گستردهٔ کامپیوترهای شخصی (PC) با حافظه و ظرفیت ذخیره‌سازی پرحجم، این امکان را فراهم آورده تا ابزار حل مسائل با تنوع زیاد در زبانهای سطح بالا بدون روند خسته‌کنندهٔ برنامه‌ریزی، تکمیل شوند. از جمله ابزاری که در میان فیزیکدانان به‌طور گسترده به‌کار گرفته شده‌اند، بسته‌های نرم‌افزاری

* بخشهایی را که در این کتاب با * علامت‌گذاری شده‌اند می‌توان با اندکی تساهل حذف کرد.

مَتکد، متماتیکا (پیوست I)، و مَپل[1] اند، که از طراحی مخصوص برای حل عددی (و نمادی) مسائل ریاضی برخوردارند.

همان‌طور که در فصلهای بعدی این کتاب عمل می‌کنیم، معمولاً در پایان هر فصل، یکی از این ابزار را به‌کار می‌بریم، تا مسئله‌ای را حل کنیم که برای آن هیچ حل بسته‌ای وجود ندارد. در اینجا، مَتکد را، برای حل مسئلهٔ جسمی که در داخل شاره‌ای به‌طور قائم سقوط می‌کند به‌کار می‌گیریم. این مسئله به‌طور تحلیلی در بخش قبلی حل شده است، و از جوابی سود می‌بریم که برای وارسی نتیجهٔ عددی به‌دست آوردیم؛ با این امید که قدرت و سهولت شیوه‌های حل عددی مسئله را تشریح کنیم.

تجدیدنظر در حالتهای خطی و درجهٔ دوم. معادلهٔ دیفرانسیل مرتبهٔ اول حرکت برای جسمی که به‌طور قائم در شاره‌ای سقوط می‌کند و در آن نیروی کندکننده خطی است، به‌کمک معادلهٔ (۴.۴.۲) بیان شد:

$$mg - c_1 v = m\frac{dv}{dt} \qquad \text{(الف ۱.۵.۲)}$$

در اینجا، جهت پایین‌سوی y را مثبت گرفته‌ایم، زیرا فقط موقعیتی را در نظر می‌گیریم که جسمی از حالت سکون سقوط می‌کند. معادله را می‌توان به‌صورت خیلی ساده‌تر نوشت، در صورتی که آن را با زمان مشخصهٔ $\tau = m/c_1$ و سرعت حدی $v_t = mg/c_1$ بیان کنیم

$$\frac{dv/v_t}{dt/\tau} = 1 - \frac{v}{v_t} \qquad \text{(ب ۱.۵.۲)}$$

اکنون در معادلهٔ بالا، سرعت v و زمان سقوط را به‌ترتیب به‌یکاهای v_t و τ مقیاس‌بندی می‌کنیم؛ یعنی قرار می‌دهیم: $u = v/v_t$ و $T = t/\tau$. معادلهٔ قبلی به‌صورت زیر در می‌آید

$$\text{خطی} : \frac{du}{dT} = u' = 1 - u \qquad \text{(ج ۱.۵.۲)}$$

که مشتق مرتبهٔ اول u را با u' نشان می‌دهیم.

تحلیلی مشابه معادلهٔ بالا به معادلهٔ دیفرانسیل مرتبهٔ اول «مقیاس‌بندی‌شدهٔ» حرکت برای حالتی که نیروی کندکننده درجهٔ دوم باشد (معادلهٔ ۹.۴.۲) منجر می‌شود.

$$\text{درجهٔ دوم} : \frac{du}{dT} = u' = 1 - u^2 \qquad (۲.۵.۲)$$

از بستهٔ نرم‌افزاری مت‌کد با تابع $rkfixed$ بهره می‌گیریم که با حل‌کنندهٔ چندمنظورهٔ رونج‌ـکوتا[2] همراه است و می‌تواند روی معادلات دیفرانسیل مرتبهٔ mام یا روی دستگاه معادلات دیفرانسیلی عمل

1. Maple 2. Runge-kutta

کند که شرایط اولیه‌شان معلوم باشد. این وضعیتی است که در هر دو حالت قبلی در مقابل ما قرار دارد. تمام آنچه باید انجام دهیم و معلوم می‌شود، این است که برای حل این دو معادلهٔ دیفرانسیل، آنها را برای تابع $rkfixed$ در متکد مهیا کنیم. این تابع روش مرتبهٔ چهارم رونج‌ـکوتا[1] را برای حل این معادلات به‌کار می‌برد. وقتی در متکد فراخوانده شوند ماتریسی دوستونی می‌دهد که در آن:

- ستون سمت چپ (ستون صفرم) شامل نقاط داده‌هاست که در آنها جواب معادلهٔ دیفرانسیل ارزیابی می‌شود (در این حالت، نقاط داده‌ها زمانهای T_i هستند)؛
- ستون سمت راست (ستون اول) شامل مقادیر مربوط به جواب است (مقادیر u_i).

نحوهٔ فراخوانی تابع و شناسه‌های تابع از این قرار است:

$$rkfixed(\mathbf{y}, x_0, x_f, npoints, \mathbf{D})$$

$= \mathbf{y}$ برداری با n مقدار اولیه، که n مرتبهٔ معادلهٔ دیفرانسیل یا اندازهٔ دستگاه معادلاتی است که حل می‌کنید. برای یک تک معادلهٔ دیفرانسیل مرتبهٔ اول، مانند حالتی که با آن سروکار داریم، این بردار به تک مقدار اولیه، $y(0) = y(x_0)$، کاهش می‌یابد.

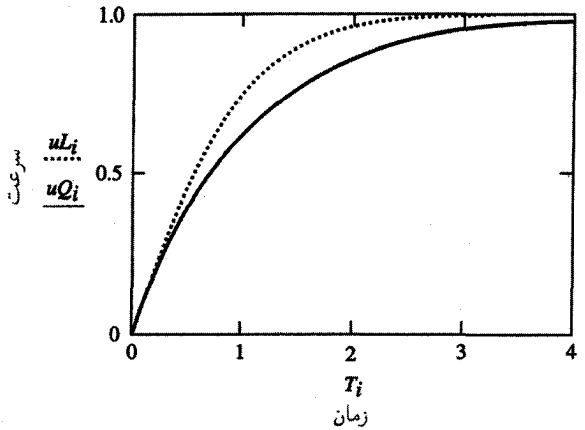
$= x_0, x_f$ نقاط انتهایی بازه‌ای که در آنها جوابهای معادلهٔ دیفرانسیل ارزیابی می‌شوند. مقادیر اولیهٔ $\mathbf{y}$، مقادیری در x_0 هستند.

$= npoints$ تعداد نقاط بعد از نقطهٔ اولیه‌ای که در آن جواب ارزیابی می‌شود؛ این مقدار تعداد سطرها را به $(1 + npoints)$ در ماتریس $rkfixed$ می‌رساند.

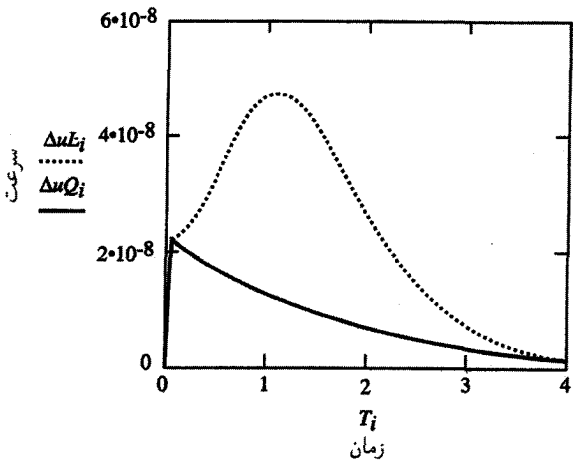
$= \mathbf{D}(x, \mathbf{y})$ تابع برداری n عنصری شامل مشتقات اول توابع نامعلوم $\mathbf{y}$. در اینجا نیز، برای یک تک معادلهٔ دیفرانسیل مرتبهٔ اول، این تابع برداری به یک تک تابع مساوی با یک مشتق اول تک تابع y کاهش می‌یابد.

در صفحات بعد مثالی از برگهٔ تمرین متکد نشان خواهیم داد که در آن جوابی عددی برای معادلات دیفرانسیل مرتبهٔ اول بالا (۱.۵.۲ج، و ۲.۵.۲) به‌دست آوردیم. این برگهٔ تمرین مستقیماً از متکد به این کتاب وارد شده است. آنچه در آنجا نشان داده می‌شود، باید واضح و بی‌نیاز از توضیح باشد، اما، ممکن است دقیقاً چگونگی تحقق راه‌حل را ننماید. ما مشروح آنچه انجام می‌شود و چگونگی آن را در پیوست ط خواهیم آورد. موضوع مهمی که در اینجا باید به آن توجه شود، عبارت است از سادگی حل (همان‌طور که اختصار برگهٔ تمرین گواهی می‌دهد) و دقتش (همان‌طور که از مقایسهٔ جوابهای عددی نشان داده شده در شکل ۱.۵.۲ با جوابهای تحلیلی نشان داده شده در شکل

1. R. L. Burden and J. Douglas Faires, *Numerical Analysis*, 6th ed, Brooks/Cole, Pacific Grove, ITP, 1977.



شکل ۱.۵.۲ جواب عددی سرعت برحسب زمان برای جسمی که فرومی‌افتد. uL حالت خطی و uQ حالت درجهٔ دوم.



شکل ۲.۵.۲ اختلاف بین جوابهای تحلیلی و عددی برای سرعت جسمی که فرومی‌افتد. ΔuL حالت خطی، و ΔuQ حالت درجهٔ دوم.

۱.۴.۲ می‌تواند ملاحظه شود). دقت در شکل ۲.۵.۲ شامل جزئیات بیشتری است، زیرا در آنجا درصد اختلاف بین جوابهای تحلیلی و عددی را ترسیم کرده‌ایم. بدترین خطا، حدود ۵×۱۰^{-۸}، در جواب درجهٔ دوم پیش می‌آید. حتی با تقسیم‌کردن بازهٔ زمانی (۴ـ۰) حتی به نقاط دادهٔ بیشتر از ۱۰۰ که اینجا اختیار شده است، دقت بیشتری حاصل می‌شود.

حل متکد برای سرعت سقوط جسم: نیروی کندکنندهٔ خطی

مقدار اولیه را تعریف کنید (نماد [ ] را برای اندیس به‌کار ببرید) ⟵

$u_0 := 0$

تابعی برای مشتق اول u' تعریف کنید ⟵

$D(T, u) := 1 - u$

جواب را در ۱۰۰ نقطهٔ ارزیابی می‌کند؛ بین ۰ و ۴ با به‌کار بردن رونج-کوتای مرتبهٔ چهارم. ⟵

$Y := rkfixed(u, 0, 4, 100, D)$

i هر زوج عنصر در ماتریس Y (ماتریسی با ابعاد 2×101) را نشان می‌دهد. اولین ستون شامل نقاط داده‌ای (T، زمان) است که در آن جواب (سرعت u) ارزیابی می‌شود؛ ستون دوم شامل مقادیر u است. ⟵

$i := 0 .. \text{rows}(Y) - 1$

سرعت بهنجارشدهٔ حالت خطی، را مجدداً نام‌گذاری کنید. ⟵

$uL_i := (Y^{\langle 1 \rangle})_i$

حل متکد برای سرعت جسمی که فرومی‌افتد: نیروی کندکنندهٔ درجهٔ دوم

مقدار اولیه را تعریف کنید (نماد [ ] را برای اندیس به‌کار ببرید) ⟵

$u_0 := 0$

تابعی برای مشتق اول u' تعریف کنید. ⟵

$D(T, u) := 1 - u^2$

جواب را با به‌کار بردن رونج-کوتای مرتبهٔ چهارم در ۱۰۰ نقطه بین ۰ و ۱۴ ارزیابی کنید. ⟵

$Z := rkfixed(u, 0, 4, 100, D)$

زمان را برحسب جملات از روی عنصر شبکه تعریف کنید. ⟵

$T_i := 0.04i$

سرعت بهنجارشده در حالت درجهٔ دوم را مجدداً نام‌گذاری کنید. ⟵

$uQ_i := (Z^{\langle 1 \rangle})_i$

اختلاف بین راه‌حلهای تحلیلی و عددی

حل تحلیلی برای نیروی کندکنندهٔ خطی ⟵ $v_i := ۱ - e^{-T_i}$

حل تحلیلی برای نیروی کندکنندهٔ درجهٔ دوم ⟵ $u_i := \dfrac{(e^{۲T_i} - ۱)}{(e^{۲T_i} + ۱)}$

اختلاف، حالت خطی ⟵ $\Delta uL_i := \dfrac{v_i - uL_i)}{v_i}$

اختلاف، حالت درجهٔ دوم ⟵ $\Delta uQ_i := \dfrac{(u_i - uQ_i)}{u_i}$

مسائل

۱.۲ سرعت، $\dot{x}$، و مکان، x، را به‌صورت توابعی از زمان، t، برای ذره‌ای به‌جرم m را بیابید که از حالت سکون در $x = ۰$ و $t = ۰$ شروع به حرکت می‌کند. این ذره تحت تأثیر توابع نیرو به قرار زیر است:

(الف) $F_x = F_۰ + ct$

(ب) $F_x = F_۰ \sin ct$

(ج) $F_x = F_۰ e^{ct}$

$F_۰$ و c ثابتهای مثبت‌اند.

۲.۲ سرعت، $\dot{x}$، را به‌صورت تابعی از جابه‌جایی، x، ذره‌ای به جرم m که از حال سکون در $x = ۰$ شروع به حرکت می‌کند و توابع نیروی زیر بر آن وارد می‌آیند، بیابید.

(الف) $F_x = F_۰ + cx$

(ب) $F_x = F_۰ e^{-cx}$

(ج) $F_x = F_۰ \cos cx$

$F_۰$ و c ثابتهای مثبت‌اند.

۳.۲ تابع انرژی پتانسیل $V(x)$ را برای هر یک از نیروهای مشروح در مسئلهٔ ۲.۲ به‌دست آورید.

۴.۲ ذره‌ای به جرم m که مقید است روی صفحهٔ افقی بدون اصطکاکی قرار گیرد، در معرض نیرویی است که با عبارت $F(x) = -kx$ بیان شده است؛ این ذره از $x = ۰$ به طرف راست در جهت مثبت محور x با انرژی جنبشی اولیهٔ $T_۰ = (۱/۲)kA^۲$ پرتاب شده است. k و A ثابتهای مثبت‌اند. (الف) تابع انرژی پتانسیل، $V(x)$، را برای این نیرو بیابید. (ب) انرژی جنبشی؛ (ج) انرژی کل ذره را به‌صورت تابعی از مکان آن به‌دست آورید. (د) نقاط برگشت حرکت را بیابید. (ه) نمودار توابع انرژی پتانسیل جنبشی و انرژی کل را ترسیم کنید (اختیاری: از مت‌کد و متماتیکا برای ترسیم این توابع بهره بگیرید. k و A را مساوی ۱ قرار دهید.)

۵.۲ مانند مسئلهٔ قبل ذره‌ای با انرژی جنبشی اولیهٔ T_0 به سمت راست پرتاب می‌شود. اما نیروی $F(x) = -kx + kx^3/A^2$ بر آن وارد می‌آید که k و A ثابتهای مثبت‌اند. پیدا کنید: (الف) تابع انرژی پتانسیل را برای این نیرو؛ (ب) انرژی جنبشی؛ (ج) انرژی کل ذره به‌صورت تابعی از مکانش؛ (د) نقاط برگشت حرکت و شرطی که انرژی کل ذره باید داشته باشد تا حرکتش این نقاط برگشت را نمایش دهد. (ه) توابع انرژی پتانسیل، جنبشی و انرژی کل را به‌طور ساده ترسیم کنید (اختیاری: از متکد و متماتیکا برای ترسیم نمودار این توابع بهره گیرید. هر یک از کمیتهای k و A را یک قرار دهید).

۶.۲ ذره‌ای به جرم m روی صفحهٔ افقی بدون اصطکاکی با سرعتی حرکت می‌کند که به‌صورت $v(x) = \alpha/x$ بیان می‌شود؛ x فاصله‌اش از مبدأ و α ثابتی مثبت است. نیروی $F(x)$ وارد بر ذره را بیابید.

۷.۲ قطعه‌ای به جرم M به ریسمانی به جرم m بسته شده است. نیروی $\mathbf{F}$ به ریسمان وارد می‌آید و قطعه را در جهت سربالایی سطح بدون اصطکاک و شیبداری می‌کشد که با افق زاویهٔ θ می‌سازد. نیرویی را بیابید که ریسمان بر قطعه‌جسم وارد می‌آورد.

۸.۲ فرض کنید سرعت یک ذره در حرکت راستخط بنابر معادلهٔ

$$\dot{x} = bx^{-3}$$

نسبت به جابه‌جایی x تغییر می‌کند؛ b ثابتی است. نیروی وارد بر ذره را به‌صورت تابعی از x به‌دست آورید (راهنمایی: $F = m\ddot{x} = m\dot{x}d\dot{x}/dx$).

۹.۲ یک توپ بیسبال (۰٫۱۴۵kg =جرم و ۰٫۳۶۶m =شعاع) از حال سکون از بام ساختمان امپایر استیت (۱۲۵۰ft = ارتفاع) سقوط می‌کند. (الف) انرژی پتانسیل اولیهٔ توپ بیسبال؛ (ب) انرژی جنبشی نهایی آن؛ و (ج) انرژی کل اتلافی ناشی از سقوط توپ را از طریق محاسبهٔ انتگرال خطی نیروی مقاومت هوا در طول فاصلهٔ کلی سقوط آن توپ محاسبه کنید. نتیجهٔ اخیر را با اختلاف بین انرژی پتانسیل اولیهٔ توپ و انرژی جنبشی نهایی آن مقایسه کنید (راهنمایی: دربند (ج) وقتی توابع هذلولوی را که در حل انتگرال خطی به‌دست آمده‌اند محاسبه می‌کنید، تقریبهایی به‌کار برید.)

۱۰.۲ قطعه‌چوبی با سرعت اولیهٔ v_0 به بالای یک سطح شیبدار پرتاب می‌شود. اگر زاویهٔ شیب این سطح ۳۰° و ضریب اصطکاک لغزشی آن عبارت باشد از $\mu_K = 0.1$، زمان کل برای مراجعت این قطعه‌چوب به نقطهٔ پرتاب را بیابید.

۱۱.۲ یک قطعه فلز به جرم m روی سطحی افقی آغشته به روغن غلیظ می‌لغزد، به طریقی که

بر این قطعه در هنگام حرکت مقاومت چسبنده‌ای وارد می‌آید، که به‌صورت زیر با توان سه‌دوم سرعت تغییر می‌کند

$$F(v) = -cv^{3/2}$$

اگر سرعت اولیهٔ این قطعه فلز در $x = 0$ عبارت باشد از v_0، نشان دهید که این قطعه نمی‌تواند فاصله‌ای بیش از $2mv_0^{1/2}/c$ را طی کند.

۱۲.۲ تفنگی مستقیماً به سمت بالا شلیک می‌شود. با فرض اینکه مقاومت پس‌کشی هوا علیه گلوله به‌صورت توان دوم سرعت تغییر کند، نشان دهید که تغییرات سرعت با ارتفاع طبق معادلات زیر صورت می‌گیرد:

$$v^2 = Ae^{-2kx} - \frac{g}{k} \quad \text{(حرکت بالاسو)}$$

$$v^2 = \frac{g}{k} - Be^{2kx} \quad \text{(حرکت پایین‌سو)}$$

که در آن A و B ثابتهای انتگرال‌گیری، g شتاب گرانشی، و $k = c_2/m$ است که در آن c_2 ضریب مقاومت پس‌کشی، و m جرم گلوله است (گوشزد: x رو به بالا مثبت اندازه‌گیری می‌شود و نیروی گرانشی را ثابت می‌گیریم.)

۱۳.۲ با بهره‌گیری از نتایج بالا، نشان دهید که وقتی گلوله هنگام مراجعت با زمین برخورد می‌کند، سرعت آن عبارت است از

$$\frac{v_0 v_t}{(v_0^2 + v_t^2)^{1/2}}$$

که در آن v_0 سرعت اولیهٔ بالاسوست و

$$v_t = (mg/c_2)^{1/2} = \text{سرعت حدی} = (g/k)^{1/2}$$

(با این نتیجه، امکان پیدا می‌کنیم که کسری از انرژی جنبشی اولیه را که در هوا به‌صورت اصطکاک تلف می‌شود، بازیابی کنیم.)

۱۴.۲ ذره‌ای به جرم m در فاصلهٔ b از یک مبدأ ثابت نیرو از حالت سکون رها می‌شود، این نیرو ذره را مطابق قانون عکس مجذوری جذب می‌کند:

$$F(x) = -kx^{-2}$$

نشان دهید که زمان لازم برای آنکه ذره به مبدأ برسد، عبارت است از:

$$\pi \left(\frac{mb^3}{8k}\right)^{1/2}$$

۱۵.۲ نشان دهید که سرعت حدی جسم کروی در حال سقوط عبارت است از:

$$v_t = [mg/c_2) + (c_1/2c_2)^2]^{1/2} - (c_1/2c_2)$$

در صورتی که جمله‌های خطی و درجهٔ دوم هر دو در نیروی پس‌کشی منظور شده باشند.

۱۶.۲ با بهره‌گیری از نتیجهٔ بالا، سرعت حدی یک حباب صابون به جرم 10^{-7}kg و قطر 10^{-2}m را محاسبه کنید. این کمیت را با مقداری مقایسه کنید که از به‌کاربردن معادلهٔ (۱۰.۴.۲) به‌دست می‌آید.

۱۷.۲ فرض کنید نیروی وارد بر یک ذره عبارت است از حاصلضرب تابعی از مسافت و تابعی از سرعت: $F(x,v) = f(x)g(v)$. نشان دهید که معادلهٔ دیفرانسیل حرکت را می‌توان به‌کمک انتگرال‌گیری حل کرد. اگر نیرو عبارت باشد از حاصلضرب تابعی از مسافت و تابعی از زمان، آیا می‌توان معادلهٔ حرکت را از طریق انتگرال‌گیری ساده حل کرد؟ هرگاه نیرو حاصلضرب تابعی از زمان و تابعی از سرعت باشد، آیا می‌توان این معادله را حل کرد؟

۱۸.۲ نیروی وارد بر ذره‌ای به جرم m از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$F = kvx$$

که در آن k ثابت مثبتی است. این ذره با سرعت v_0 در زمان $t = 0$ از مبدأ می‌گذرد؛ x را به‌صورت تابعی از t به‌دست آورید.

۱۹.۲ پرتابه‌ای که در سطح حرکت می‌کند، به‌طور افقی روی اقیانوس از یک کشتی جنگی ساکن با سرعت اولیهٔ v_0 پرتاب می‌شود. فرض کنید سیستم پیشرانهٔ این کشتی نقص پیدا کرده و حرکت آن با نیروی کندکننده‌ای که با عبارت $F(v) = -Ae^{\alpha v}$ بیان می‌شود، کند شود؛ (الف) سرعتش را به‌صورت تابعی از زمان، $v(t)$، بیابید. (ب) زمان سپری‌شده، و (ج) مسافتی را که پرتابه طی می‌کند تا به حال سکون برسد بیابید. A و α ثابتهایی مثبت‌اند.

۲۰.۲ فرض کنید جرم قطره‌ای آب که در هوایی مرطوب سقوط می‌کند، با آهنگی متناسب باسطح مقطع آن، A، اضافه می‌شود. فرض کنید این قطره از حال سکون شروع به حرکت می‌کند و شعاع اولیه‌اش، R_0، چندان کوچک است که هیچ نیروی مقاومی را تحمل نمی‌کند. نشان دهید: (الف) شعاع آن و (ب) سرعتش را که به‌طور خطی با زمان افزایش می‌یابد.

مسائل کامپیوتری

ک۱.۲ چتربازی به جرم ۷۰kg از یک هواپیما در ارتفاع ۳۲km بالای سطح زمین به بیرون می‌جهد. متأسفانه، چتر باز نمی‌شود. (در قسمتهای بعدی از حرکت افقی چشم بپوشید و فرض کنید سرعت اولیه صفر است.)

(الف) زمان سقوط (تا دقت یک ثانیه) را تا هنگام برخورد به زمین محاسبه کنید. از مقاومت هوا چشم بپوشید و g را ثابت بگیرید.

(ب) زمان سقوط (تا دقت یک ثانیه) را تا هنگام برخورد به زمین محاسبه کنید. g را ثابت بگیرید و نیروی مقاومت هوا را به‌صورت زیر در نظر بگیرید:

$$F(v) = -c_۲ v|v|$$

$c_۲$ برحسب یکاهای SI برای شخص در حال سقوط ۰٫۵ و ثابت است.

(ج) زمان سقوط (تا دقت یک ثانیه) را تا هنگام برخورد به زمین محاسبه کنید؛ $c_۲$ با چگالی جوی به‌صورت زیر مقیاس‌بندی می‌شود:

$$c_۲ = ۰٫۵e^{-y/H}$$

که $H = ۸\text{km}$ مقیاس ارتفاع جو، و y ارتفاع بالای زمین است.

به‌علاوه، فرض کنید g دیگر ثابت نیست و با رابطهٔ زیر بیان می‌شود:

$$g = \frac{۹٫۸}{\left(۱ + \frac{y}{R_e}\right)^۲}\text{ms}^{-۲}$$

که R_e شعاع زمین و ۶۳۷۰km است.

(د) برای حالت (ج)، نمودار شتاب، سرعت، و ارتفاع چترباز را به‌صورت تابعی از زمان ترسیم کنید. توضیح دهید چرا وقتی چترباز در حال سقوط است، شتاب مثبت می‌شود.

۳

نوسانات

"اینها پدیده‌های مربوط به فنرها و اجسام فنری‌اند که تاکنون، تا آنجا که می‌دانم، کسی برایشان قانونی تدوین نکرده است. بدیهی است که قاعده یا قانون طبیعت در مورد هر جسم فنری از این قرار است که نیرو یا توانی که جسم را به مکان طبیعی خودش برمی‌گرداند همواره با فاصله یا فضایی که آن جسم از مکان خودش خارج شده، متناسب است"

رابرت هوک[1]

۱.۳ مقدمه

در داستانهای اولیه منظومهٔ شمسی جالبترین دستگاه مکانیکی به‌شمار می‌آمد که فشرده‌ترین و پردامنه‌ترین مطالعه و بررسی هم روی آن انجام شده است. این دستگاه نمونهٔ شگفت حرکت تناوبی است. معلوم نیست که اگر این حرکت تناوبی نبود یا سایر سیارات منظومهٔ شمسی مشاهده‌پذیر

1. *De Potentia Restitutiva*, 1678

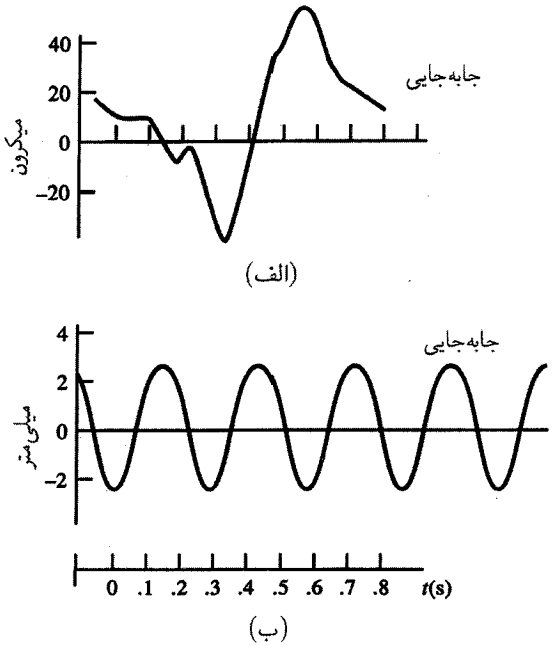
نبودند (یا اگر سیارهٔ ما تنها عضو مشاهده‌پذیر منظومهٔ شمسی بود)، آدمی تا چه مدت در رنج ناآگاهی نسبت به علم مکانیک باقی می‌ماند. همه‌جا اطراف خود سیستمهایی را می‌بینیم که به رقصی تناوبی مشغول‌اند: نوسانهای کم‌دامنهٔ آونگ ساعت، کودکی نشسته بر تاب، حرکت جزرومدی آب، تکان‌خوردن درخت در باد، ارتعاشهای تارهای ویولون. حتی چیزهایی که نمی‌توانیم ببینیم، با تپش تناوبی هماهنگ‌اند: ارتعاشات مولکولهای هوا در سازهای بادی یک سمفونی، همهٔ الکترونها در سیمهای ابزارِ ملازم تمدن امروزی، ارتعاشات اتمها و مولکولهای تشکیل‌دهندهٔ بدن ما. جالب است که حتی نمی‌توانیم کلمهٔ ارتعاش را به‌خوبی بیان کنیم بدون اینکه نوک زبانمان نوسان کند.

چهره‌ای اساسی که تمام این پدیده‌ها در آن مشترک‌اند، تناوبی‌بودن آنهاست، که نمونه‌ای از حرکت یا جابه‌جایی به‌شمار می‌آید که دوباره روی خودش تکرار می‌شود. این نمونهٔ حرکت ممکن است ساده یا پیچیده باشد. مثلاً، در شکل ۱.۱.۳ (الف) جابه‌جایی افقی ثبت‌شدهٔ بدن انسانی را مشاهده می‌کنید که به پشت روی سطح بدون اصطکاک، نظیر لایهٔ نازکی از هوا، خوابیده است. بدن به‌علت عمل مکانیکی قلب، تلمبه‌شدن خون در آن و اطراف کمان آئورتی، به‌طور افقی در مسیر عقب و جلو نوسان می‌کند. ثبت نوسان از این دست را قلب‌نگاشت بالیستیکی[1] می‌گویند. در شکل ۱.۱.۳ (ب) منحنی سینوسی تقریباً کاملی را مشاهده می‌کنید که نمایشگر جابه‌جایی افقی آونگ ساده‌ای است که نوسانات کم‌دامنه‌ای حول مکان تعادلش اجرا می‌کند. در هر دو حالت، محور افقی پیشرفت مداوم زمان را نشان می‌دهد. تناوب حرکت به‌صورت زمان لازم برای انجام یک چرخهٔ کامل حرکت، به‌آسانی تشخیص داده می‌شود.

با این امید که بتوان تمام شکلهای پیچیدهٔ حرکت تناوبی را توصیف کنیم که طبیعت، مطابق شکل ۱.۱.۳ (الف)، به نمایش می‌گذارد، ساده‌ترین شکل آن، حرکت هماهنگ ساده، (شکل ۱.۱.۳ (ب)) را تحلیل می‌کنیم.

حرکت هماهنگ ساده دو مشخصهٔ عمده را بروز می‌دهد (۱) معادلهٔ دیفرانسیل خطی مرتبهٔ دوم با ضرایب ثابت آن را توصیف می‌کند. بنابراین، اصل برهم‌نهی در آن صادق است؛ یعنی، اگر دو جواب خاص برای آن به‌دست آید، جمع آنها نیز یکی از جوابهای معادله است. شاهدی بر این مدعا را در مثالهایی خواهیم دید که آورده می‌شود. (۲) زمان تناوب حرکت، یا زمان لازم برای اینکه پیکربندی خاصی (نه تنها مکان، بلکه سرعت نیز) خودش را تکرار کند، از بیشینهٔ انحراف نسبت به حالت تعادل مستقل است. قبلاً ملاحظه کردیم که گالیله نخستین کسی بود که از این جنبهٔ بنیادی آونگ با بهره‌گیری از آن به‌صورت ساعت، استفاده کرد. این جنبه‌ها تنها وقتی صادق‌اند

1. George B. Benedek and Felix M. H. Villars, *Physics–with Illustrative Examples from Medicine and Biology*, Addison-Wesley, NewYork, 1974.

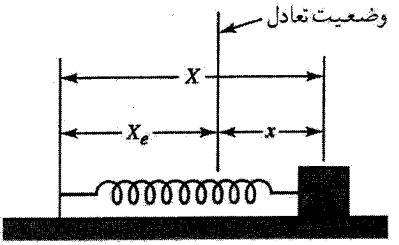


شکل ۱.۱.۳ (الف) ارتعاشات عقب‌زنی انسانی که روی سطح بدون اصطکاک خوابیده است (در پاسخ به عمل تلمبه‌زنی قلب. (ب) جابه‌جایی افقی آونگ ساده حول وضعیت تعادل.

که انحراف نسبت به حالت تعادل «کوچک» باشد. جابه‌جایی (یا انحراف)های «بزرگ» به ظهور جمله‌های غیرخطی در معادلات دیفرانسیل حرکت می‌انجامند، و جوابهای نوسانی حاصل دیگر از اصل برهم‌نهی پیروی نمی‌کنند یا زمانهای تناوب مستقل از دامنه را نشان نمی‌دهند. این وضعیت را در اواخر این فصل به‌اختصار ملاحظه خواهیم کرد.

۲.۳ نیروی بازگردانندهٔ خطی: حرکت هماهنگ

یکی از ساده‌ترین مدلهای سیستمی که حرکت هماهنگ ساده اجرا می‌کند، عبارت است از جرمی که روی سطحی بدون اصطکاک به‌وسیلهٔ فنر به دیوار متصل شده است. چنین سیستمی را در شکل ۱.۲.۳ مشاهده می‌کنید. اگر طول کشیده‌نشدهٔ فنر X_e باشد، بدون ایجاد اختلال، جرم در مکان خود باقی خواهد ماند، در صورتی‌که در ابتدا در همان مکان در حال سکون باشد. این امکان پیکربندی حالت تعادل آن جرم را نشان می‌دهد؛ یعنی، مکانی که در آن انرژی پتانسیل کمینه، یا معادل آن، جایی است که نیروی خالص وارد بر جرم صفر است. اگر جرم از این وضعیت تعادل



شکل ۱.۲.۳ یک مدل نوسانگر هماهنگ ساده.

با هل‌دادن یا کشیده‌شدن دور شود، فنر متراکم یا کشیده خواهد شد. در این صورت، بر جرم نیرو وارد خواهد آورد، و این نیرو همواره می‌کوشد جرم را به پیکربندی حالت تعادلش بازگرداند.

اگر بخواهیم حرکت جرم را محاسبه کنیم، به‌رابطه‌ای برای این نیروی بازگرداننده نیاز داریم. با توسل به استدلالهای مبتنی بر ماهیت فرض‌شدهٔ انرژی پتانسیل این سیستم، می‌توانیم شکل این نیرو را برآورد کنیم. با توجه به مثال۲.۳.۳ به یاد می‌آوریم که پتانسیل مورس ــ تابع انرژی پتانسیل مولکول دو اتمی هیدروژن، سیستم مقیدی متشکل از دو ذره ــ به شکل یک چاه یا فنجان است. این تابع، به زبان ریاضی، با رابطهٔ زیر بیان می‌شود:

$$V(x) = V_0(1 - \exp(-x/\delta))^2 - V_0 \qquad (۱.۲.۳)$$

نشان دادیم که این تابع در نزدیکی کمینه‌اش رفتاری درجهٔ دوم بروز می‌دهد و نیروی برایند بین دو اتم خطی است و همواره برای بازگرداندن آنها به پیکربندی تعادلشان وارد می‌آید. به‌طور کلی، هر تابع انرژی پتانسیل را می‌توان به‌طور تقریب به‌کمک تابع چندجمله‌ای جابه‌جایی x، به‌ازای جابه‌جاییهایی که از وضعیت تعادل خیلی دور باشند، توصیف کرد

$$V(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots \qquad (۲.۲.۳ \text{ الف})$$

به‌علاوه، چون فقط اختلاف انرژیهای پتانسیل با رفتار سیستمهای فیزیکی ارتباط پیدا می‌کند، در هرکدام از روابط بالا، جملهٔ ثابت را می‌توان صفر گرفت؛ این به‌معنای آن است که صرفاً مقدار جدیدی، به انرژی پتانسیل در نقطه‌ای مرجع نسبت می‌دهیم. این استدلال را نیز ابراز می‌کنیم که جملهٔ خطی در رابطهٔ بالا باید تقریباً صفر باشد. این شرط ناشی از این نکته است که مشتق اول هر تابع باید در کمینه‌اش صفر باشد، با این پیش فرض که این تابع و مشتقهای آن پیوسته باشند، گویی تابع باید رفتار سیستم فیزیکی واقعی را توصیف کند. از این‌رو، چندجمله‌ای تقریبی صورت

زیر را به‌خود می‌گیرد

$$V(x) = a_۲x^۲ + a_۳x^۳ + \cdots \qquad (۲.۲.۳\ \text{ب})$$

مثلاً، در شکل ۲.۲.۳ الف، طرحی نموداری از پتانسیل مورس با تقریب چندجمله‌ای مرتبهٔ هشتم "بهترین برازش" را مشاهده می‌کنید. پهنای پتانسیل، δ، و عمق آن (ضریب $v_۰$) هر دو برابر ۱ر۰ بودند (ثابت صرف $v_۰$ صفر قرار داده شده است.) برازش در دامنهٔ نسبتاً بزرگ $\Delta x = [-۱, ۴] = ۵\delta$ انجام گرفته است. نتایج از این قرارند:

$$V(x) = \sum_{i=۰}^{۸} a_i x^i \qquad (۲.۲.۳\ \text{ج})$$

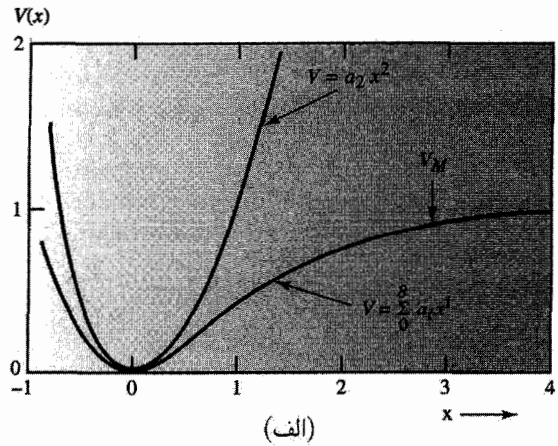
$$a_۰ = ۱ر۰۱۵ \times ۱۰^{-۴} \quad a_۱ = ۰ر۰۰۷ \quad a_۲ = ۰ر۹۹۵$$
$$a_۳ = -۱ر۰۲۵ \quad a_۴ = ۰ر۶۱۱ \quad a_۵ = -۰ر۲۴۳$$
$$a_۶ = ۰ر۰۶۱ \quad a_۷ = -۰ر۰۰۹ \quad a_۸ = ۵ر۲۴۹ \times ۱۰^{-۴}$$

تابع چندجمله‌ای در سراسر دامنهٔ جابه‌جایی نقل‌شده، پتانسیل مورس را به‌خوبی می‌برازد. اگر کسی ضرایب برازش مرتبهٔ هشتم را به‌دقت بررسی کند، می‌بیند که دو جملهٔ اول اساساً صفرند، به‌همان ترتیبی که مطابق استدلال باید باشند. بنابراین، ما نیز فقط نمودار نمایش تغییرات جملهٔ درجهٔ دوم $V(x) \approx a_۲ x^۲$ را نشان می‌دهیم. این نمودار چنان به‌نظر می‌رسد که گویی این با پتانسیل مورس به‌خوبی سازگار نیست. ولی اگر شاخهٔ نمودار را حول $x = ۰$ "بزرگ کنیم" (شکل ۲.۲.۳ (ب))، می‌بینیم که به‌ازای جابه‌جاییهای کوچک ــ یعنی $-۰ر۱۵\delta \le x \le +۰ر۱۵\delta$ ــ عملاً بین جملهٔ صرفاً درجهٔ دوم، برازش چندجمله‌ای مرتبهٔ هشتم، و پتانسیل مورس واقعی عملاً اختلافی وجود ندارد. در واقع، به‌ازای چنین جابه‌جاییهای کم‌دامنه‌ای تابع انرژی پتانسیل صرفاً درجهٔ دوم است. شاید استدلال شود که این مثال برای اینکه به این نتیجه برسد، سرهم شده است؛ اما، به‌طور نسبی نمایانگر بسیاری از سیستمهای فیزیکی است.

تابع انرژی پتانسیل برای سیستم فنر و جرم در مجاورت وضعیت تعادل در X_e باید رفتار مشابهی را بروز دهد که جملهٔ خالصاً درجهٔ دومی بر آن حاکم و مسلط است. بنابراین، نیروی بازگردانندهٔ فنر از طریق قانون آشنای هوک بیان می‌شود:

$$F(x) = -\frac{dV(x)}{dx} = -(۲a_۲)x = -kx \qquad (۳.۲.۳)$$

که $k = ۲a_۲$ ثابت فنر است. در واقع، به این دلیل است که جابه‌جاییهای کم‌دامنه از وضعیت تعادل را، یعنی آنها که قانون هوک در موردشان صادق یا نیروی بازگرداننده در آنها خطی است،



شکل ۲.۲.۳ (الف) پتانسیل مورس، چندجمله‌ای تقریبی مرتبهٔ هشتم و فقط جملهٔ درجهٔ دوم. (ب) مانند حالت (الف) اما مقیاس اطراف $x = 0$ بزرگنمایی شده است.

تعریف می‌کنیم. اینکه نیروی به‌دست‌آمده از طریق مشتق‌گیری باید نیروی بازگرداننده باشد، نتیجه‌ای از این واقعیت است که مشتق تابع انرژی پتانسیل باید به‌ازای جابه‌جاییهای مثبت از وضعیت تعادل منفی، و برعکس، به‌ازای جابه‌جاییهای منفی، مثبت باشد. اکنون قانون دوم حرکت نیوتون برای جرم را می‌توان از این قرار نوشت:

$$m\ddot{x} + kx = 0 \qquad \text{(الف ۴.۲.۳)}$$

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0 \qquad \text{(ب ۴.۲.۳)}$$

معادلهٔ (۴.۲.۳ ب) را می‌توان به چندین روش حل کرد. این معادله، یک معادلهٔ دیفرانسیل خطی مرتبهٔ دوم با ضرایب ثابت است. همان‌طور که قبلاً گفته شد، اصل برهم‌نهی برای جوابهای این معادله برقرار است. در اینجا، قبل از حل این معادله، به مشخصاتی اشاره می‌کنیم که انتظار داریم جوابها آنها را بروز دهند. اولاً، حرکت تناوبی و مقید است. جرم با جلو و عقب رفتن بین دو مکان حدی ارتعاش می‌کند. فرض کنید جرم را از وضعیت تعادل تا موضع x_{m1} بکشیم و آن را از حال سکون رها کنیم. در ابتدا، نیروی برگرداننده $-kx_{m1}$ است و جرم را به‌طرف چپ، در شکل ۱.۲.۳، می‌کشد. این نیرو در $x = 0$، یعنی وضعیت تعادل، صفر می‌شود. اکنون جرم را در طرف چپ با سرعت v می‌یابیم و به این ترتیب از وضعیت تعادل عبور می‌کند. سپس، با فشرده‌شدن فنر نیروی بازگرداننده به‌وجود می‌آید و قویتر می‌شود، ولی در این حالت به‌طرف راست متوجه است. این نیرو حرکت جرم را کند می‌کند تا سرانجام برای لحظه‌ای در مکانی، مانند $-x_{m2}$، متوقف می‌شود. اکنون، درحالی‌که فنر به‌طور کامل فشرده شده شروع به هل دادن جرم با برگشت به‌سوی راست می‌کند. اما دوباره تکانهٔ خطی آن را از وضعیت تعادل می‌گذراند تا اینکه در این حال فنر باز می‌شود و سرانجام، می‌توانیم حدس بزنیم در x_{m1}، در پیکربندی اولیهٔ سیستم، باعث توقف آن می‌شود. به‌این ترتیب، یک چرخهٔ حرکت کامل می‌شود؛ چرخه‌ای که، ظاهراً تا ابد، خودش را تکرار می‌کند! واضح است که، وابستگی تابعی حاصل به x و t باید با تابع تناوبی و مقید نمایش داده شود. در اینجا توابع سینوسی یا کسینوسی به ذهن متبادر می‌شوند، زیرا آنها نوعی رفتار را بروز می‌دهند که اینجا توصیف می‌کنیم. در واقع، سینوسها و کسینوسها جوابهای حقیقی معادلهٔ (۴.۲.۳ب) هستند. کمی بعد توابع دیگری، توابع نمایی موهومی، را نشان می‌دهیم که در واقع با سینوسها و کسینوسها معادل‌اند و به‌کار بردن آنها برای توصیف سیستمهای پیچیده‌تر که به‌زودی دربارهٔ آنها بحث می‌کنیم، آسانتر است.

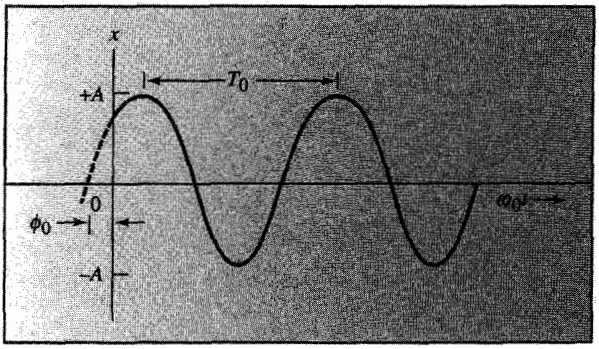
یکی از جوابها از این قرار بیان می‌شود:

$$x = A\sin(\omega_0 t + \phi_0) \qquad (۵.۲.۳)$$

با نشاندنش در معادلهٔ (۴.۲.۳ ب) می‌توانیم تحقیق کنیم که

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad (۶.۲.۳)$$

بسامد زاویه‌ای سیستم است. حرکتی که از طریق معادلهٔ (۵.۲.۳) نمایش داده می‌شود، نوسانی سینوسی حول وضعیت تعادل است. منحنی نمایش تغییرات جابه‌جایی x برحسب $\omega_0 t$ را در شکل ۳.۲.۳ مشاهده می‌کنید. این حرکت جنبه‌های مشروح در زیر را نشان می‌دهد. (۱) با یک



شکل ۳.۲.۳ جابه‌جایی برحسب $\omega_0 t$ برای نوسانگر هماهنگ ساده.

تک‌بسامد زاویه‌ای ω_0 مشخص می‌شود. بعد از اینکه شناسهٔ زاویه‌ای تابع سینوسی، $\omega_0 t + \phi_0$، به‌اندازهٔ 2π جلو رفت یا بعد از اینکه یک دور کامل زده شد، خود را تکرار می‌کند (به این دلیل است که ω_0 را بسامد زاویه‌ای نامیده‌اند.) زمان لازم برای اینکه تقدم فاز 2π باشد، به‌کمک عبارت زیر بیان می‌شود:

$$\omega_0(t + T_0) + \phi_0 = \omega_0 t + \phi_0 + 2\pi$$
$$\therefore T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} \qquad (۷.۲.۳)$$

T_0 را زمان تناوب حرکت می‌گویند. (۲) این حرکت مقید است، یعنی بین حدود $-A \le x \le +A$ محدود می‌شود. A جابه‌جایی بیشینه از حالت تعادل است و دامنهٔ حرکت نامیده می‌شود؛ این دامنه از بسامد زاویه‌ای ω_0 مستقل است. (۳) زاویهٔ فاز ϕ_0، مقدار اولیهٔ شناسهٔ زاویه‌ای تابع سینوس است. ϕ_0 مقدار جابه‌جایی، x، را در زمان $t = 0$ تعیین می‌کند. مثلاً به‌ازای $t = 0$

$$x(t = 0) = A\sin(\phi_0) \qquad (۸.۲.۳)$$

جابه‌جایی بیشینه از حالت تعادل در زمان t_m پیش می‌آید که شناسهٔ زاویه‌ای تابع سینوسی $\pi/2$ باشد، یا

$$\omega_0 t_m = \frac{\pi}{2} - \phi_0 \qquad (۹.۲.۳)$$

معمولاً اصطلاح بسامد برای اشاره کردن به عکس دورهٔ تناوب نوسان، به‌کار می‌رود:

$$f_0 = \frac{1}{T_0} \qquad (۱۰.۲.۳)$$

$f_\circ$ تعداد چرخه‌های ارتعاش در واحد زمان است. رابطهٔ آن با بسامد زاویه‌ای $\omega_\circ$ از این قرار است:

$$\text{۲}\pi f_\circ = \omega_\circ \qquad \text{(الف ۱۱.۲.۳)}$$

$$f_\circ = \frac{\text{۱}}{T_\circ} = \frac{\text{۱}}{\text{۲}\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} \qquad \text{(ب ۱۱.۲.۳)}$$

به افتخار هاینریش هرتز که امواج رادیویی را کشف کرده است یکای بسامد (سیکل (یا چرخه) بر ثانیه یا $\text{s}^{-\text{۱}}$) هرتز (Hz) نامیده می‌شود. توجه کنید که $\text{۱Hz} = \text{۱s}^{-\text{۱}}$. گاهی از کلمهٔ بسامد با تسامح به‌معنی سیکل بر ثانیه یا رادیان بر ثانیه (بسامد زاویه‌ای) بهره می‌گیرند. معمولاً، معنی آن از متن معلوم می‌شود.

ثابتهای حرکت و شرایط اولیه

معادلهٔ (۵.۲.۳)، جواب حرکت هماهنگ ساده، شامل دو ثابت دلخواه A و $\phi_\circ$ است. مقدار هر یک از این ثابتها را می‌توان از اطلاعات مربوط به شرایط اولیهٔ مسئلهٔ خاص موردنظر تعیین کرد. مثالی از ساده‌ترین و کلیترین شرایط اولیه، جابه‌جایی اولیهٔ جرم از وضعیت تعادل به‌مکان x_m است که از آنجا از حال سکون رها می‌شود. جابه‌جایی در $t = \circ$ بیشینه است؛ بنابراین $A = x_m$ و $\phi_\circ = \pi/\text{۲}$.

در مثالی از یک وضعیت سادهٔ دیگر، فرض کنیم نوسانگر در $x = \circ$ در حال سکون است و در $t = \circ$ و ضربه‌ای شدید بر آن وارد می‌آید تا سرعت اولیهٔ $v_\circ$ را در جهت مثبت x به آن بدهد. در چنین حالتی، فرض می‌شود فاز اولیه عبارت است از $\phi_\circ = \circ$. این فرض به‌طور خودبه‌خود اطمینان می‌دهد که در $t = \circ$ جواب عبارت است از $x = \circ$. با مشتق‌گیری از x برای به‌دست آوردن سرعت نوسان به‌صورت تابعی از زمان، و سپس بهره‌گیری از $t = \circ$، سرعت $v_\circ$ می‌شود و دامنه را می‌توان یافت. از این‌رو،

$$v(t) = \dot{x}(t) = \omega_\circ A\cos(\omega_\circ t + \phi_\circ) \qquad \text{(الف ۱۲.۲.۳)}$$

$$v(\circ) = v_\circ = \omega_\circ A \qquad \text{(ب ۱۲.۲.۳)}$$

$$\therefore A = \frac{v_\circ}{\omega_\circ} \qquad \text{(ج ۱۲.۲.۳)}$$

در طرحی کلیتر، جرمی را در نظر بگیرید که در ابتدا تا مکانی به‌اندازهٔ $x_\circ$ جابه‌جا شده و سرعت اولیهٔ $v_\circ$ به‌دست آمده است. در این صورت، ثابتها به‌صورت زیر تعیین می‌شوند:

$$x(\circ) = A\sin\phi_\circ = x_\circ \qquad \text{(الف ۱۳.۲.۳)}$$

$$\dot{x}(\circ) = \omega_\circ A\cos\phi_\circ = v_\circ \qquad \text{(ب ۱۳.۲.۳)}$$

$$\therefore \tan\phi_\circ = \frac{\omega_\circ x_\circ}{v_\circ} \qquad \text{(ج ۱۳.۲.۳)}$$

$$A^2 = x_\circ^2 + \frac{v_\circ^2}{\omega_\circ^2} \qquad \text{(د ۱۳.۲.۳)}$$

با صفر قرار دادن $v_\circ$ یا $x_\circ$، به‌آسانی می‌توان ملاحظه کرد که این حالت کلیتر به یکی از مواردی که در بالا تشریح شد، تبدیل می‌شود.

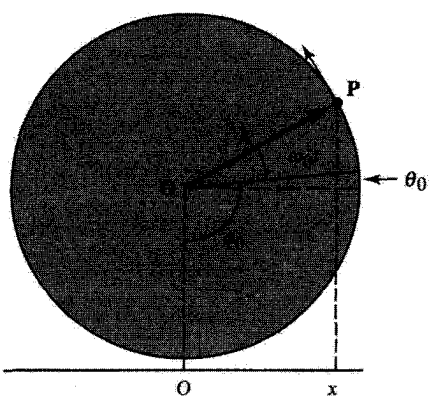
حرکت هماهنگ ساده به‌صورت تصویر بردار چرخان

بردار $\mathbf{A}$ را که با سرعت زاویه‌ای ثابت $\omega_\circ$ می‌چرخد در نظر بگیرید. اگر این بردار موضع یک نقطهٔ P در حرکت دایره‌ای یکنواخت را نشان دهد، تصویر این بردار روی یک خط (که آن را محور x می‌نامیم) در همان صفحه، دایره، حرکت هماهنگ ساده را ترسیم می‌کند. فرض کنید، مطابق شکل ۴.۲.۳، بردار $\mathbf{A}$ در لحظهٔ t با محور x زاویهٔ θ بسازد. چون $\dot{\theta} = \omega_\circ$، زاویهٔ θ طبق رابطهٔ زیر با زمان افزایش می‌یابد:

$$\theta = \omega_\circ t + \theta_\circ \qquad \text{(۱۴.۲.۳)}$$

که $\theta_\circ$ مقدار θ در زمان $t = \circ$ است. تصویر P روی محور x به این صورت بیان می‌شود:

$$x = A\cos\theta = A\cos(\omega_\circ t + \theta_\circ) \qquad \text{(۱۵.۲.۳)}$$



شکل ۴.۲.۳ حرکت هماهنگ ساده به‌صورت تصویر حرکت دایره‌ای یکنواخت.

هنگامی که P پیرامون دایره‌ای حرکت زاویه‌ای یکنواخت اجرا می‌کند، این نقطه در حرکت هماهنگ ساده نوسان می‌کند.

شکل ما، x را به‌صورت تابعی کسینوسی برحسب t بیان می‌کند. می‌توانیم معادل این رابطه را با تابع سینوسی به‌صورت معادلهٔ (۵.۲.۳)، با اندازه‌گیری زوایای بردار $\mathbf{A}$ نسبت به محور y، به‌جای محور x که در شکل ۴.۲.۳ نمایش داده شده است، نشان دهیم. اگر این کار را انجام دهیم، تصویر $\mathbf{A}$ روی محور x از این قرار بیان می‌شود:

$$x = A\sin(\omega_\circ t + \phi_\circ) \qquad (۱۶.۲.۳)$$

می‌توانیم این معادله را به‌روش دیگری ملاحظه کنیم. اختلاف فاز بین $\phi_\circ$ و $\theta_\circ$ را $\pi/۲$ قرار می‌دهیم و سپس آن را در معادلهٔ بالا می‌نشانیم؛ می‌رسیم به

$$\phi_\circ - \theta_\circ = \frac{\pi}{۲} \qquad (۱۷.۲.۳ \text{ الف})$$

$$\cos(\omega_\circ t + \theta_\circ) = \cos\left(\omega_\circ t + \phi_\circ - \frac{\pi}{۲}\right)$$

$$= \sin(\omega_\circ t + \phi_\circ) \qquad (۱۷.۲.۳ \text{ ب})$$

اکنون می‌بینیم که حرکت هماهنگ ساده را می‌توان هم با تابع سینوسی و هم با تابع کسینوسی توصیف کرد. تابعی که انتخاب می‌کنیم بیشتر سلیقه‌ای است؛ این تابع به انتخاب ما از زاویهٔ فاز اولیه به‌اندازهٔ ثابت دلخواه بستگی دارد.

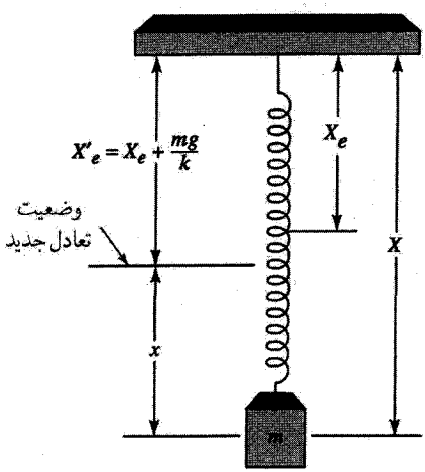
می‌توان به‌کمک تفسیر بالا حدس زد که می‌توانستیم مجموع توابع سینوسی وکسینوسی را به‌کار بریم تا جوابی عمومی برای حرکت هماهنگ ارائه کنیم. مثلاً، جواب سینوسی معادلهٔ (۵.۲.۳) را می‌توانیم مستقیماً به‌چنین شکلی، با به‌کار بردن اتحاد مثلثاتی برای سینوس مجموع زوایا، تبدیل کنیم:

$$x(t) = A\sin(\omega_\circ t + \phi_\circ) = A\sin\phi_\circ\cos\omega_\circ t + A\cos\phi_\circ\sin\omega_\circ t$$
$$= C\cos\omega_\circ t + D\sin\omega_\circ t \qquad (۱۸.۲.۳)$$

در این جواب A و $\phi_\circ$ هیچ‌کدام به‌طور صریح ظاهر نمی‌شوند. این کمیتها به‌طور ضمنی در این جواب وجود دارند؛ یعنی،

$$\tan\phi_\circ = \frac{C}{D} \qquad A^۲ = C^۲ + D^۲ \qquad (۱۹.۲.۳)$$

وضعیتهایی پیش می‌آید که طی آنها، این صورت جواب ممکن است بر جوابهای دیگر ترجیح داده شود.



شکل ۵.۲.۳ حالت قائم در نوسانگر هماهنگ.

اثر نیروی ثابت خارجی بر نوسانگر هماهنگ

فرض کنید فنری مشابه شکل ۱.۲.۳ به‌طور قائم قرارگیرد و همان جرم m را نگه دارد (شکل ۵.۲.۳). اکنون نیروی کل وارد آمده با افزودن وزن mg به نیروی بازگرداننده حاصل می‌شود

$$F = -k(X - X_e) + mg \qquad (۲۰.۲.۳)$$

جهت مثبت پایین‌سوست. این معادله را می‌توان، با این تعریف که مثل قبل به‌جای $X - X_e$ کمیت x قرارگیرد، به‌صورت $F = -kx + mg$ نوشت. اما، بهتر است متغیر x به نحو دیگری، یعنی به‌صورت جابه‌جایی از وضعیت تعادل جدید X'_e، که با قرار دادن $F = 0$ در معادلهٔ (۲۰.۲.۳) به‌دست می‌آید، تعریف شود: $0 = -k(X'_e - X_e) + mg$ که از اینجا خواهیم رسید به $X'_e = X_e + mg/k$. حال جابه‌جایی را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$x = X - X'_e = X - X_e - \frac{mg}{k} \qquad (۲۱.۲.۳)$$

با قرار دادن x در معادلهٔ (۲۰.۲.۳)، بعد از انجام کمی عملیات جبری می‌رسیم به

$$F = -kx \qquad (۲۲.۲.۳)$$

به این ترتیب، معادلهٔ دیفرانسیل حرکت در اینجا نیز از این قرار است:

$$m\ddot{x} + kx = 0 \qquad (۲۳.۲.۳)$$

و جواب آن برحسب x که اخیراً تعریف کردیم، با جواب به دست آمده در حالتی که فنر در وضعیت افقی بود، یکسان است. در اینجا ناگفته پیداست که هرگاه نیروی خارجی ثابتی بر نوسانگر هماهنگ وارد آید، فقط مکان تعادل را جابه‌جا می‌کند. هرگاه جابه‌جایی x از مکان تعادل جدید اندازه‌گیری شود، معادلهٔ حرکت بدون تغییر باقی می‌ماند.

مثال ۱.۲.۳

وقتی به فنر سبکی قطعه‌جسمی به جرم m به‌طور قائم آویخته شود، طول فنر به‌اندازهٔ D_1 افزایش می‌یابد. اگر قطعه‌جسم به‌اندازهٔ D_2 از وضعیت تعادل به پایین کشیده و در لحظهٔ $t = 0$ رها شود، پیدا کنید: (الف) حرکت حاصل، (ب) سرعت قطعه‌جسم وقتی به نقطهٔ تعادل بازگشته و در حال عبور از آن نقطه است، و (ج) شتاب قطعه‌جسم در بالای حرکت نوسانی آن را.

حل:

ابتدا برای وضعیت تعادل داریم:

$$F_x = 0 = -kD_1 + mg$$

که x مثبت پایین‌سو اختیار شده است. از اینجا ثابت سفتی (ثابت کشسانی) به‌دست می‌آید:

$$k = \frac{mg}{D_1}$$

می‌توانیم بسامد زاویه‌ای نوسان را از رابطهٔ زیر بیابیم:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{g}{D_1}}$$

معادلهٔ حرکت را به شکل $x(t) = A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t$ بیان خواهیم کرد. بنابراین:

$$\dot{x} = -A\omega_0 \sin\omega_0 t + B\omega_0 \cos\omega_0 t$$

با توجه به شرایط اولیه، داریم

$$x_0 = D_2 = A \qquad \dot{x}_0 = 0 = B\omega_0 \qquad B = 0$$

از این‌رو، معادلهٔ حرکت برحسب کمیتهای داده‌شده به‌کمک رابطهٔ زیر بیان می‌شود

$$x(t) = D_2 \cos\left(\sqrt{\frac{g}{D_1}}t\right) \qquad \text{(الف)}$$

توجه کنید که جرم m در این عبارت نهایی ظاهر نمی‌شود. پس سرعت عبارت است از

$$\dot{x}(t) = -D_2\sqrt{\frac{g}{D_1}}\sin\left(\sqrt{\frac{g}{D_1}}t\right)$$

و شتاب چنین خواهد بود

$$\ddot{x}(t) = -D_2\frac{g}{D_1}\cos\left(\sqrt{\frac{g}{D_1}}t\right)$$

وقتی قطعه‌جسم بالاسوی از مکان تعادل عبور می‌کند، آرگومان جملهٔ سینوسی $\frac{\pi}{2}$ (یک‌چهارم دوره تناوب) است. بنابراین

$$\dot{x} = -D_2\sqrt{\frac{g}{D_1}} \qquad \text{(مرکز)} \qquad \text{(ب)}$$

در بالاترین نقطهٔ جابه‌جایی، آرگومان جملهٔ کسینوسی عبارت است از π (یک‌دوم زمان تناوب)، که از اینجا به‌دست می‌آید

$$\ddot{x} = D_2\frac{g}{D_1} \qquad \text{(در بالا)} \qquad \text{(ج)}$$

توجه به این نکته ضروری است که در حالت $D_1 = D_2$، شتاب پایین‌سو در بالاترین نقطهٔ جابه‌جایی درست برابر g است. یعنی، این قطعه جسم در آن لحظهٔ خاص در حال سقوط آزاد است؛ یعنی، فلز، بر قطعه جسم نیرویی وارد نمی‌آورد.

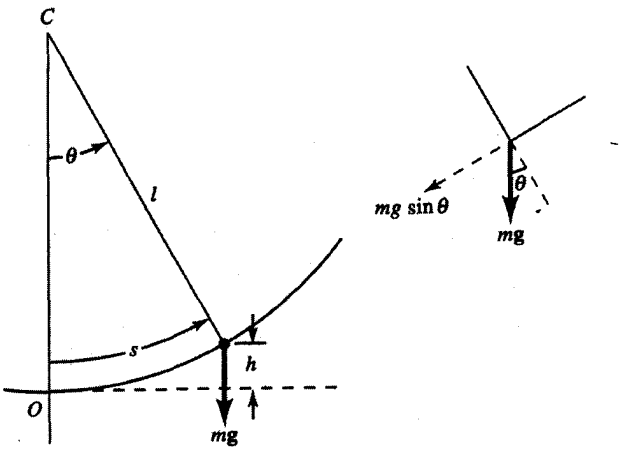
مثال ۲.۲.۳ آونگ ساده

آونگ به اصطلاح ساده، شامل گوی کوچکی است به جرم m که در انتهای نخ سبکی به طول l که کش نمی‌آید، تاب می‌خورد (شکل ۶.۲.۳). حرکت در امتداد کمانی از دایره صورت می‌گیرد که مطابق شکل، با زاویهٔ θ مشخص می‌شود. نیروی بازگرداننده عبارت است از مؤلفهٔ وزن mg که در راستای افزایش θ در امتداد مسیر حرکت وارد می‌آید: $F_s = -mg\sin\theta$. اگر گوی را یک ذره بگیریم، معادلهٔ دیفرانسیل حرکت عبارت است از

$$m\ddot{s} = -mg\sin\theta$$

حال $s = l\theta$، و به‌ازای مقادیر کوچک θ، با تقریب مناسب، $\sin\theta = \theta$. بنابراین، پس از حذف m از طرفین و بازآرایی جمله‌ها، می‌توانیم معادلهٔ دیفرانسیل حرکت را برحسب θ یا s به‌صورت زیر بنویسیم:

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0 \qquad \ddot{s} + \frac{g}{l}s = 0$$



شکل ۶.۲.۳ آونگ ساده.

اگرچه مسیر حرکت به‌جای اینکه در امتداد خط راستی واقع باشد، در مسیری منحنی صورت می‌گیرد، معادلهٔ دیفرانسیل از نظر ریاضی با معادلهٔ نوسانگر هماهنگ خطی، معادلهٔ (۴.۲.۳ ب)، با قرار دادن کمیت g/l به‌جای k/m، یکسان است. از این‌رو، تا آنجا که تقریب $\sin\theta = \theta$ برقرار باشد، می‌توانیم نتیجه بگیریم که بسامد زاویه‌ای حرکت هماهنگ ساده عبارت است از

$$\omega_\circ = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

زمان تناوب آن از این قرار خواهد بود:

$$T_\circ = \frac{2\pi}{\omega_\circ} = 2\pi\sqrt{\frac{1}{g}}$$

این فرمول زمان تناوبی خیلی نزدیک به ۲s، یا یک نیم‌زمان تناوب یک ثانیه‌ای را، به‌ازای $l = 1m$، به‌دست می‌دهد. به بیان دقیقتر، به‌ازای یک نیم‌دورهٔ تناوب یک ثانیه‌ای، به‌نام «آونگ ثانیه‌ای»، طول دقیق با قرار دادن $T_\circ = 2\text{s}$ در معادلهٔ بالا و حل آن برحسب l، به‌دست می‌آید. وقتی g برحسب m/s^2 بیان شود، مقدار عددی l برابر با g/π^2 به‌دست می‌آید. در سطح دریا و در عرض جغرافیایی 45°، مقدار شتاب گرانشی عبارت است از $g = 9{,}8062\text{m/s}^2$. به این ترتیب، طول آونگ ثانیه‌ای در آن محل می‌شود: $0{,}9936\text{m} = 9{,}8696/9{,}8062$.

۳.۳ ملاحظات مربوط به انرژی در حرکت هماهنگ

ذره‌ای را تحت تأثیر نیروی بازگردانندهٔ خطی $F_x = -kx$ در نظر بگیرید. کاری را که نیروی خارجی F_{ext} برای به‌حرکت درآوردن ذره از وضعیت تعادل ($x = ۰$) تا موضع x انجام می‌دهد، محاسبه می‌کنیم. فرض کنید ذره را خیلی آهسته حرکت دهیم، به‌طوری که انرژی جنبشی کسب نکند؛ یعنی، بزرگی نیروی خارجی وارد بر آن به‌زحمت از نیروی برگردانندهٔ $-kx$ بزرگتر شود؛ از این‌رو، $F_{\text{ext}} = -F_x = kx$، بنابراین،

$$W = \int_۰^x F_{\text{ext}} dx = \int_۰^x kx dx = \frac{k}{۲}x^۲ \qquad (۱.۳.۳)$$

در مورد فنری که از قانون هوک پیروی می‌کند، این کار به‌صورت انرژی پتانسیل، $W = V(x)$، در فنر ذخیره می‌شود، که در آن

$$V(x) = \frac{۱}{۲}kx^۲ \qquad (۲.۳.۳)$$

به این ترتیب، بنا بر تعریف V، داریم: $F_x = -dV/dx = -kx$. بنابراین، وقتی ذره‌ای حرکت هماهنگ اجرا می‌کند، انرژی کل آن از جمع‌کردن انرژی جنبشی و پتانسیل به‌دست می‌آید؛ یعنی،

$$E = \frac{۱}{۲}m\dot{x}^۲ + \frac{۱}{۲}kx^۲ \qquad (۳.۳.۳)$$

این معادله مظهر حرکت نوسانگر هماهنگ به‌طریقی نسبتاً بنیادی است: انرژی جنبشی برحسب متغیر سرعت از درجهٔ دوم و انرژی پتانسیل برحسب متغیر تغییر مکان از درجهٔ دوم است. اگر بجز نیروی بازگرداننده نیروهای دیگری بر ذره وارد نیایند، انرژی کل ثابت است.

هرگاه بخواهیم معادلهٔ حرکت ذره را بیابیم می‌توانیم کار خود را با معادلهٔ انرژی (۳.۳.۳) آغاز کنیم. با حل این معادله برحسب سرعت، می‌رسیم به:

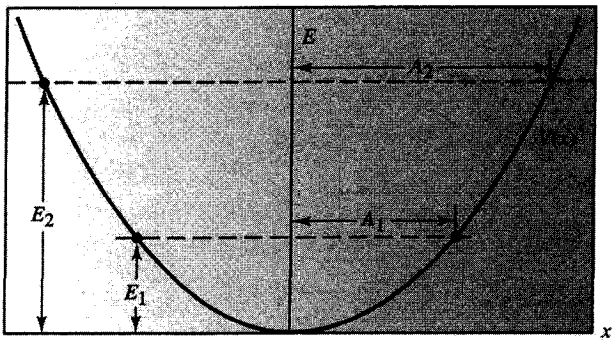
$$\dot{x} = \pm\left(\frac{۲E}{m} - \frac{kx^۲}{m}\right)^{۱/۲} \qquad (۴.۳.۳)$$

که می‌توان از آن انتگرال گرفت و t را به‌صورت تابعی از x به‌شکل زیر به‌دست آورد:

$$t = \int \frac{dx}{\pm[(۲E/m) - (k/m)x^۲]^{۱/۲}} = \mp(m/k)^{۱/۲}\cos^{-۱}(x/A) + C \qquad (۵.۳.۳)$$

در اینجا، C ثابت انتگرال‌گیری و A دامنه است که از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$A = \left(\frac{۲E}{k}\right)^{۱/۲} \qquad (۶.۳.۳)$$



شکل ۱.۳.۳ نمودار تابع انرژی پتانسیل سهموی نوسانگر هماهنگ. نقاط برگشت (عطف) که دامنه را مشخص می‌کنند برای دو مقدار مختلف انرژی کل نشان داده شده‌اند.

با حل معادلهٔ انتگرال‌گیری‌شده برحسب x به‌صورت تابعی از t، همان رابطه را می‌یابیم که در بخش پیش یافتیم، با این تفاوت که حالا مقدار صریحی برای دامنه در اختیار داریم. همچنین، می‌توانیم از طریق یافتن نقاط برگشت حرکت (عطف) در آنجا، $\dot{x} = ۰$، دامنه را مستقیماً از معادلهٔ انرژی (۳.۳.۳) به‌دست آوریم. مقدار x باید بین $\pm A$ باشد تا $\dot{x}$ حقیقی بماند. شکل ۱.۳.۳ نمایانگر این مطلب است.

همچنین از معادلهٔ انرژی پی‌می‌بریم که حداکثر مقدار سرعت، که آن را $v_{\max}$ می‌نامیم، در $x = ۰$ رخ می‌دهد. به‌این ترتیب، می‌توان نوشت

$$E = \frac{۱}{۲}mv_{\max}^{۲} = \frac{۱}{۲}kA^{۲} \qquad (۷.۳.۳)$$

همچنان که ذره نوسان می‌کند، انرژی جنبشی و پتانسیل به‌طور پیوسته تغییر می‌کنند. انرژی کل ثابت در مرکز $x = ۰$ و $\dot{x} = \pm v_{\max}$، تماماً به شکل انرژی جنبشی و در نقاط مرزی $\dot{x} = ۰$، $x = \pm A$ تماماً به‌صورت انرژی پتانسیل است.

مثال ۱.۳.۳ تابع انرژی آونگ ساده

انرژی پتانسیل آونگ ساده (شکل ۶.۲.۳) از عبارت زیر به‌دست می‌آید:

$$V = mgh$$

که h فاصله قائم از تراز مرجع (که آن را وضعیت تعادل اختیار می‌کنیم) است. به‌ازای تغییر مکانی

به‌اندازهٔ θ (شکل ۶.۲.۳)، می‌بینیم که $h = l - l\cos\theta$، از این‌رو

$$V(\theta) = mgl(1 - \cos\theta)$$

حال بسط سری کسینوسی را به‌صورت $\cos\theta = 1 - \theta^2/2! + \theta^4/4! - \cdots$ می‌نویسیم. از این‌رو، به‌ازای مقادیر کوچک، به‌طور تقریبی داریم: $\cos\theta = 1 - \theta^2/2$. پس از جانشانی

$$V(\theta) = \frac{1}{2}mgl\theta^2$$

یا به بیانی مشابه، چون $s = l\theta$،

$$V(s) = \frac{1}{2}\frac{mg}{l}s^2$$

بنابراین، با تقریب اول، تابع انرژی پتانسیل برحسب تغییر مکان، از درجهٔ دوم است. انرژی کل، برحسب s عبارت است از:

$$E = \frac{1}{2}m\dot{s}^2 + \frac{1}{2}\frac{mg}{l}s^2$$

که با گزارهٔ کلی مربوط به انرژی نوسانگر هماهنگ، که در این مثال دربارهٔ آن بحث کردیم، سازگار است.

مثال ۲.۳.۳

میانگین انرژیهای جنبشی، پتانسیل، و میانگین انرژی کل نوسانگر هماهنگ را محاسبه کنید. (در اینجا نماد k را برای انرژی جنبشی و T_0 را برای دورهٔ تناوب به‌کار می‌بریم.)

حل:

$$\langle K\rangle = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} K(t)dt = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0}\frac{1}{2}m\dot{x}^2 dt$$

اما

$$x = A\sin(\omega_0 t + \phi_0)$$
$$\dot{x} = \omega_0 A\cos(\omega_0 t + \phi_0)$$

با قراردادن $\phi_0 = 0$ و جایگذاری $u = \omega_0 t = (2\pi/T_0) \cdot t$، می‌رسیم به

$$\langle K \rangle = \frac{1}{T_0} \left[\frac{1}{2} m\omega_0^2 A^2 \int_0^{T_0} \cos^2(\omega_0 t) dt \right]$$
$$= \frac{1}{2\pi} \left[\frac{1}{2} m\omega_0^2 A^2 \int_0^{2\pi} \cos^2 u du \right]$$

از این نکته بهره می‌گیریم که

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\sin^2 u + \cos^2 u) du = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} du = 1$$

و می‌رسیم به

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos^2 u du = \frac{1}{2}$$

چون مساحتهای زیر منحنی مربوط به جملات حاوی $\cos^2$ و $\sin^2$ در طی یک دوره (سیکل) یکسان‌اند، در این صورت،

$$\langle K \rangle = \frac{1}{4} m\omega_0^2 A^2$$

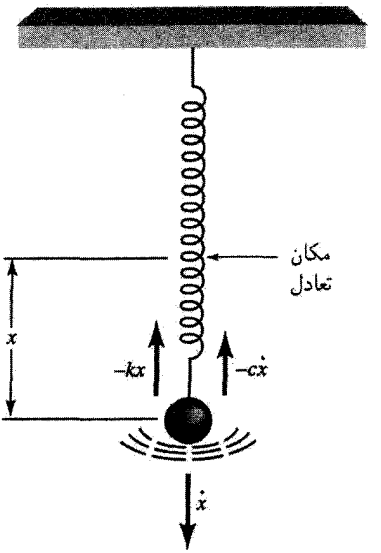
محاسبهٔ انرژی پتانسیل میانگین به‌طریق مشابه انجام می‌شود

$$V = \frac{1}{2} kx^2 = \frac{1}{2} kA^2 \sin^2 \omega_0 t$$
$$\langle V \rangle = \frac{1}{2} kA^2 \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} \sin^2 \omega_0 t dt$$
$$= \frac{1}{2} kA^2 \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin^2 u du$$
$$= \frac{1}{4} kA^2$$

حال، چون $k/m = \omega_0^2$ یا $k = m\omega_0^2$، می‌رسیم به

$$\langle V \rangle = \frac{1}{4} kA^2 = \frac{1}{4} m\omega_0^2 A^2 = \langle K \rangle$$
$$\langle E \rangle = \langle K \rangle + \langle V \rangle = \frac{1}{2} m\omega_0^2 A^2 = \frac{1}{2} kA^2 = E$$

میانگین انرژیهای جنبشی و پتانسیل برابرند: بنابراین، میانگین انرژی نوسانگر مساوی با انرژی کل لحظه‌ای آن است.



شکل ۱.۴.۳ مدل نوسانگر هماهنگ میرا.

۴.۳ حرکت هماهنگ میرا

چون در تحلیل قبلی خود از نوسانگر هماهنگ نیروی اصطکاک را به‌حساب نیاورده‌ایم، به‌نحوی به تحلیلی آرمانی و دور از واقعیت دست زده‌ایم. این نیروها همواره در سیستم مکانیکی به‌نحوی حضور دارند. به‌همین ترتیب، در مدار الکتریکی همیشه مقدار معینی مقاومت وجود دارد. برای ارائهٔ مدلی خاص، جسمی به جرم m را در نظر می‌گیریم که از فنری به سفتی k آویخته شده است. فرض خواهیم کرد که نیروی ترمزی چسبنده‌ای وارد می‌آید که تغییرات آن برحسب سرعت خطی است، مانند نیرویی که مقاومت پس‌کشی هوا در سرعتهای کم ایجاد می‌کند.[۱] این نیروها در شکل ۱.۴.۳ نشان داده شده‌اند.

اگر x جابه‌جایی نسبت به وضعیت تعادل باشد، در این صورت نیروی بازگرداننده عبارت خواهد بود از $-kx$، و نیروی ترمزی $-c\dot{x}$ که c ثابت است. به‌این ترتیب، معادلات دیفرانسیل حرکت به‌صورت $m\ddot{x} = -kx - c\dot{x}$ در می‌آید، یا

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0 \qquad (۱.۴.۳)$$

۱. در شرایط بسیاری مقاومت پس‌کشی ناخطی واقعیتر، ولی حل معادلات حرکت خیلی دشوارتر است و در اینجا به بررسی آنها نخواهیم پرداخت.

مانند حالت نامیرا، معادلهٔ (۱.۴.۳) را بر m تقسیم می‌کنیم؛ خواهیم داشت:

$$\ddot{x} + \frac{c}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = ۰ \qquad (۲.۴.۳)$$

اگر ضریب میرایی، γ، را بنا بر تعریف زیر، جایگزین کنیم:

$$\gamma \equiv \frac{c}{۲m} \qquad (۳.۴.۳)$$

و $\omega_۰^۲ (= k/m)$ را در معادلهٔ (۲.۴.۳) جایگذاری کنیم، معادله شکل ساده‌تری پیدا می‌کند:

$$\ddot{x} + ۲\gamma\dot{x} + \omega_۰^۲ x = ۰ \qquad (۴.۴.۳)$$

حضور جملهٔ وابسته به‌سرعت $۲\gamma\dot{x}$ مسئله را پیچیده می‌کند؛ جوابهای ساده، سینوس و کسینوس به‌کار نمی‌آیند، زیرا درستی آنها را می‌توان با آزمون تحقیق کرد. روش حلی را معرفی می‌کنیم که نسبتاً برای معادلات دیفرانسیل مرتبهٔ دوم با ضرایب ثابت به‌خوبی به‌کار می‌آید. عملگر دیفرانسیل، d/dt را با D نشان می‌دهیم و با استفاده از «عملگر درجهٔ دوم D» روی x، و انتخاب D به‌طریقی که معادلهٔ (۴.۴.۳) برقرار شود، خواهیم داشت:

$$[D^۲ + ۲\gamma D + \omega_۰^۲]x = ۰ \qquad (۵.۴.۳ \text{ الف})$$

این معادله را «عملی» به‌وسیلهٔ جملهٔ داخل کروشه روی x تعبیر می‌کنیم. عملی که $D^۲$ انجام می‌دهد به این معنی است که اولین بار عمل روی x به‌وسیلهٔ D انجام می‌شود؛ سپس روی نتیجه دوباره با D عمل می‌کنیم. با این روش، $\ddot{x}$ یعنی اولین جمله در معادلهٔ (۴.۴.۳)، را به‌دست می‌آوریم. بنابراین، معادلهٔ عملگری (معادلهٔ ۵.۴.۳ الف) با معادلهٔ دیفرانسیل (معادلهٔ ۴.۴.۳) معادل است. از این ساده‌سازی که با نوشتن معادله با روش بالا حاصل می‌شود، وقتی جملهٔ عملگری را با به‌کار بردن قضیهٔ دوجمله‌ای، فاکتورگیری می‌کنیم، می‌رسیم به:

$$\left[D + \gamma - \sqrt{\gamma^۲ - \omega_۰^۲}\right]\left[D + \gamma + \sqrt{\gamma^۲ - \omega_۰^۲}\right]x = ۰ \qquad (۵.۴.۳ \text{ ب})$$

این عملیات در معادلهٔ (۵.۴.۳ ب) با عملیات در معادلهٔ (۵.۴.۳ الف) یکسان است؛ ولی عملیات از مرتبهٔ دوم به حاصلضرب دو عمل مرتبهٔ اول کاهش یافته است، زیرا مرتبهٔ عملیات دلخواه است؛ جواب عمومی عبارت است از مجموع جوابهایی که با قرار دادن نتیجه عمل مرتبهٔ اول روی x مساوی صفر، به‌دست آمده باشد. داریم

$$x(t) = A_۱ e^{-(\gamma - q)t} + A_۲ e^{-(\gamma + q)t} \qquad (۶.۴.۳)$$

که

$$q = \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} \qquad (۷.۴.۳)$$

دانشجو می‌تواند این جواب را با نشاندن مستقیم در معادلهٔ (۴.۴.۳) بررسی کند؛ مسئله‌ای که به‌زودی به آن خواهیم رسید، این است که نماها در رابطهٔ فوق ممکن است حقیقی یا موهومی باشند؛ چون ضریب q می‌تواند موهومی باشد که معنی آن را به‌زودی ملاحظه خواهیم کرد.

سه حالت متمایز پیش می‌آید:

I. $q > 0$ حقیقی — تندمیرایی

II. $q = 0$ حقیقی — میرایی بحرانی

III. q موهومی — کندمیرایی

I. تندمیرایی: هر دو نماد در معادلهٔ (۶.۴.۳) حقیقی‌اند. ثابتهای A_1 و A_2، از روی شرایط اولیه تعیین می‌شوند. حرکت از نوع فروافت نهایی با دو ثابت فروافت متفاوت، $(\gamma - q)$ و $(\gamma + q)$، به‌شمار می‌آید. جرمی را که به آن جابه‌جایی اولیه می‌دهیم و از حال سکون رها می‌کنیم، نیروی میران قوی مانع انجام نوسانش می‌شود و به‌آهستگی به وضعیت تعادل باز می‌گردد. این وضعیت را در شکل ۲.۴.۳ مشاهده می‌کنید.

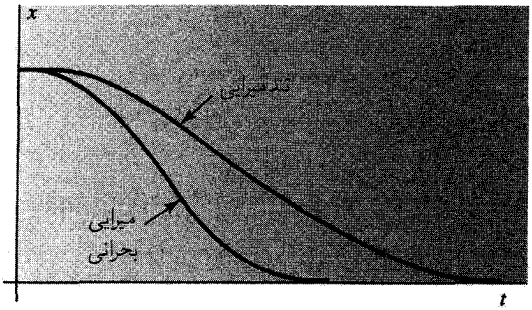
II. میرایی بحرانی: در اینجا، $q = 0$. دو نمای معادلهٔ (۶.۴.۳) هر یک مساوی γ هستند. دو ثابت A_1 و A_2 دیگر از هم مستقل نیستند؛ مجموع آنها تک‌ثابت A را تشکیل می‌دهد. جواب به تک‌تابع زوال نمایی تباهیده می‌شود. برای رسیدن به جوابی کاملاً عمومی به دو تابع مختلف با ثابتهای مستقل نیاز داریم که در خور شرایط مرزی مشخص‌شده با مکان و سرعت اولیه باشند. برای یافتن جوابی با دو ثابت مستقل، به معادلهٔ (۵.۴.۳ ب) برمی‌گردیم:

$$(D + \gamma)(D + \gamma)x = 0 \qquad (۸.۴.۳ \text{ الف})$$

چون عملگرها یکسان‌اند، تغییر موضع از طریق مرتبهٔ عملگر در اینجا مؤثر نیست. باید قبل از اینکه نتیجه را صفر قرار دهیم، عملیات کاملی روی x انجام دهیم. برای انجام این کار قرار می‌دهیم $u = (D + \gamma)x$، که می‌رسیم به:

$$(D + \gamma)u = 0$$

$$u = Ae^{-\gamma t} \qquad (۸.۴.۳ \text{ ب})$$



شکل ۲.۴.۳ جابه‌جایی برحسب زمان برای حالتهای میرایی بحرانی و تندمیرایی نوسانگر هماهنگ که بعد از جابه‌جایی اولیه از حال سکون رها شده‌اند.

آن را با $(D+\gamma)x$ مساوی قرار می‌دهیم، جواب نهایی به‌صورت زیر به‌دست می‌آید

$$\begin{aligned} Ae^{-\gamma t} &= (D+\gamma)x \\ A &= e^{\gamma t}(D+\gamma)x = D(xe^{\gamma t}) \\ \therefore\ xe^{\gamma t} &= At + B \\ x(t) &= Ate^{-\gamma t} + Be^{-\gamma t} \end{aligned} \qquad (۹.۴.۳)$$

جواب شامل دو تابع متفاوت $e^{-\gamma t}$ و $te^{-\gamma t}$ و دو ثابت انتگرال‌گیری A و B، مطابق نیاز، خواهد بود. مطابق حالت I، اگر جرمی بعد از جابه‌جایی اولیه از حال سکون رها شود، حرکت نانوسانی است و به‌طور مجانبی به وضعیت تعادل باز می‌گردد. این مورد نیز در شکل ۲.۴.۳ نشان داده شده است. میرایی بحرانی در سیستمهای بسیاری، نظیر سیستمهای تعلیق مکانیکی وسایل نقلیهٔ موتوری، خیلی مورد توجه است.

III. کندمیرایی. اگر ثابت γ چندان کوچک باشد که $\gamma^2 - \omega_0^2 < 0$، ضریب q در معادلهٔ (۷.۴.۳) موهومی است. اگر جرم در ابتدا جابه‌جا و سپس از حال سکون رها شود، نوسان می‌کند، ولی اصلاً مانند وضعیتی نیست که قبلاً برای نیروی نامیران توصیف شد. تنها اختلاف حضور ضریب حقیقی $\gamma-$ در نمای جواب است که باعث میرایی بعدی حرکت نوسانی می‌شود. حال ضرایب زیر رادیکال را در معادلهٔ (۷.۴.۳) تغییر علامت می‌دهیم، و q را به‌صورت $i\omega_d$ می‌نویسیم؛ بنابراین،

$$\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{c^2}{4m^2}} \qquad (۱۰.۴.۳)$$

که ω_0 و ω_d، به‌ترتیب، بسامدهای زاویه‌ای نوسانگرهای هماهنگ نامیرا و میرا هستند. اکنون جواب کلی ارائه‌شده به‌وسیلهٔ معادلهٔ (۶.۴.۳) را برحسب ضرایبی که در اینجا آمده‌اند، بازنویسی می‌کنیم:

$$\begin{aligned} x(t) &= C_+ e^{-(\gamma - i\omega_d)t} + C_- e^{-(\gamma + i\omega_d)t} \\ &= e^{-\gamma t}(C_+ e^{i\omega_d t} + C_- e^{-i\omega_d t}) \end{aligned} \qquad (۱۱.۴.۳)$$

C_+ و C_- ثابتهای انتگرال‌اند. جواب مجموعی از جملات نمایی با نمای موهومی را دربرمی‌گیرد. اما جواب باید حقیقی باشد ــ فرض می‌شود این جواب دنیایی حقیقی را توصیف می‌کند! این حقیقی‌بودن ایجاب می‌کند که C_+ و C_- مزدوج مختلط یکدیگر باشند؛ شرطی که بعداً به ما امکان می‌دهد که جواب را برحسب سینوس یا کسینوس بنویسیم. بنابراین، با گرفتن مزدوج مختلط معادلهٔ (۱۱.۴.۳)، می‌رسیم به

$$x^*(t) = e^{-\gamma t}(C_+^* e^{-i\omega_d t} + C_-^* e^{+i\omega_d t}) = x(t) \qquad (۱۲.۴.۳ \text{ الف})$$

چون $x(t)$ حقیقی است، $x^*(t) = x(t)$، و به این ترتیب

$$\begin{aligned} \therefore C_+^* &= C_- = C \\ C_-^* &= C_+ = C^* \\ \therefore x(t) &= e^{-\gamma t}(C^* e^{+i\omega_d t} + C e^{-i\omega_d t}) \end{aligned} \qquad (۱۲.۴.۳ \text{ ب})$$

به‌نظر می‌رسد که گویی جوابی داریم که اکنون فقط یک ثابت انتگرال‌گیری دارد. در حقیقت، C عددی مختلط است. این عدد موهومی از دو ثابت تشکیل شده است. می‌توانیم C و C^* را برحسب دو ثابت حقیقی A و θ_0 به طریق زیر بیان کنیم:

$$\begin{aligned} C_- = C &= \frac{A}{2} e^{-i\theta_0} \\ C_+ = C^* &= \frac{A}{2} e^{+i\theta_0} \end{aligned} \qquad (۱۳.۴.۳)$$

به‌زودی خواهیم دید که A جابه‌جایی بیشینه و θ_0 زاویهٔ فاز اولیه است. بنابراین، معادلهٔ (۱۲.۴.۳ ب) به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$x(t) = e^{-\gamma t}\left(\frac{A}{2} e^{+i(\omega_d t + \theta_0)} + \frac{A}{2} e^{-i(\omega_d t + \theta_0)}\right) \qquad (۱۴.۴.۳)$$

اکنون تساوی اویلر[۱] را در مورد رابطهٔ بالا به‌کار می‌بریم؛ بنابراین می‌رسیم به:

$$\frac{A}{۲}e^{+i(\omega_d t+\theta_۰)} = \frac{A}{۲}\cos(\omega_d t+\theta_۰) + i\frac{A}{۲}\sin(\omega_d t+\theta_۰)$$
$$\frac{A}{۲}e^{-i(\omega_d t+\theta_۰)} = \frac{A}{۲}\cos(\omega_d t+\theta_۰) - i\frac{A}{۲}\sin(\omega_d t+\theta_۰) \qquad (۱۵.۴.۳)$$
$$\therefore x(t) = e^{-\gamma t}(A\cos(\omega_d t+\theta_۰))$$

با پی‌گرفتن بحثمان در بخش ۲.۳، مربوط به ساختن بردار چرخان، می‌بینیم که می‌توانیم جواب را نیز به همان ترتیب به‌صورت تابعی سینوسی بیان کنیم:

$$x(t) = e^{-\gamma t}(A\sin(\omega_d t+\phi_۰)) \qquad (۱۶.۴.۳)$$

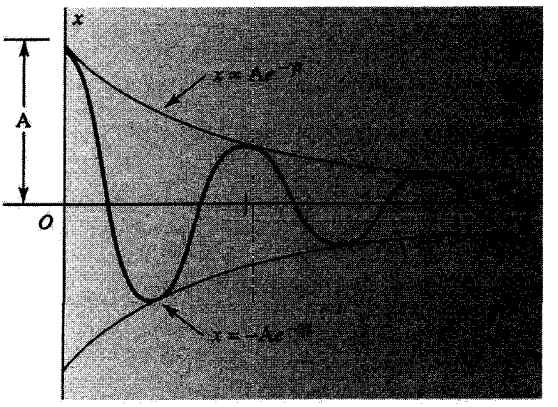
تعبیر و تفسیر ثابتهای A، $\theta_۰$، و $\phi_۰$ به‌همان طریقی است که در بخش ۲.۳ انجام دادیم. در واقع، می‌بینیم که جواب برای نوسانگر هماهنگ کندمیرا تقریباً با جواب مربوط به نوسانگر هماهنگ نامیرا یکسان است. دو تفاوت وجود دارد: (۱) حضور ضریب نمایی حقیقی $e^{-\gamma t}$ سبب میرایی تدریجی نوسانات می‌شود، و (۲) به‌علت حضور نیروی میران، بسامد زاویه‌ای نوسانگر هماهنگ کندمیرا ω_d است نه $\omega_۰$.

نوسانگر هماهنگ کندمیرا کمی آهسته‌تر از نوسانگر هماهنگ میرا نوسان می‌کند. دورهٔ تناوب نوسانگر هماهنگ کندمیرا به‌کمک رابطهٔ زیر بیان می‌شود:

$$T_d = \frac{۲\pi}{\omega_d} = \frac{۲\pi}{(\omega_۰^۲ - \gamma^۲)^{۱/۲}} \qquad (۱۷.۴.۳)$$

شکل ۳.۴.۳ نمودار این حرکت است. معادلهٔ (۱۵.۴.۳ الف) نشان می‌دهد که دو منحنی مشخص‌شده با $x = Ae^{-\gamma t}$ و $x = -Ae^{-\gamma t}$ پوش منحنی حرکت را تشکیل می‌دهند، زیرا ضریب کسینوس مقادیری بین ۱+ و ۱− و نیز ۱+ و ۱− را می‌پذیرد که در هر یک از این نقاط منحنی حرکت با پوش تماس پیدا می‌کند. به‌همین ترتیب، نقاط تماس با فاصلهٔ زمانی نصف دورهٔ تناوب، $T_d/۲$، از یکدیگر فاصله دارند. اما این نقاط دقیقاً همان بیشینه‌ها و کمینه‌های جابه‌جایی نیستند. دانشجو باید نشان دهد که فاصلهٔ زمانی بیشینه‌ها و کمینه‌های واقعی نیز همین مقدار است. در یک زمان تناوب کامل، دامنه با ضریب $e^{-\gamma T_d}$ کاهش می‌یابد؛ همچنین، در زمان $\gamma^{-۱} = ۲m/c$ دامنه با ضریب $e^{-۱} = ۰٫۳۶۷۹$ فرو می‌افتد.

۱. تساوی اویلر بین نماهای موهومی با سینوس و کسینوس رابطه برقرار می‌کند. این تساوی با رابطهٔ $e^{iu} = \cos u + i\sin u$ بیان می‌شود. این تساوی در پیوست د توصیف خواهد شد.



شکل ۳.۴.۳ نمودار جابه‌جایی برحسب زمان در نوسانگر هماهنگ کندمیرا.

به‌طور خلاصه، تحلیل ما از نوسانگر هماهنگی که آزادانه حرکت می‌کند، حاکی از آن است که حضور میرایی از نوع خطی باعث می‌شود این نوسانگر، که حرکت اولیه به آن داده شده است، سرانجام در وضعیت تعادل به سکون برگردد. برگشت به حالت تعادل چه نوسانی باشد چه نباشد، به‌مقدار میرایی بستگی دارد. شرط بحرانی، که با عبارت $\gamma = \omega_0$ تعیین می‌شود، حالتی حدی از وضعیت نانوسانی، بازگشت را مشخص می‌کند.

ملاحظات مربوط به انرژی

انرژی کل نوسانگر هماهنگ میرا از مجموع انرژیهای جنبشی و پتانسیل به‌دست می‌آید:

$$E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2 \qquad (۱۸.۴.۳)$$

به‌طوری که قبلاً گفتیم، این انرژی در مورد نوسانگر نامیرا ثابت است. از عبارت بالا نسبت به زمان مشتق می‌گیریم:

$$\frac{dE}{dt} = m\dot{x}\ddot{x} + kx\dot{x} = (m\ddot{x} + kx)\dot{x} \qquad (۱۹.۴.۳)$$

حال معادلهٔ دیفرانسیل حرکت عبارت است از $m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$ یا $m\ddot{x} + kx = -c\dot{x}$. بنابراین، در مورد آهنگ زمانی تغییر انرژی کل می‌توانیم بنویسیم:

$$\frac{dE}{dt} = -c\dot{x}^2 \qquad (۲۰.۴.۳)$$

می‌بینیم که مشتق زمانی انرژی کل عبارت است از حاصلضرب نیروی میران و سرعت. چون این کمیت همواره صفر یا منفی است، انرژی کل پیوسته کاهش می‌یابد و، مانند دامنه، سرانجام بسیار ناچیز می‌شود. انرژی به‌صورت گرمای اصطکاکی ناشی از مقاومت چسبنده در مقابل حرکت تلف می‌شود.

ضریب کیفیت

آهنگ اتلاف انرژی نوسانگر هماهنگ با میرایی ضعیف، با یک پارامتر Q، به‌نام ضریب کیفیت نوسانگر، به بهترین وجهی مشخص می‌شود. این کمیت، بنابر تعریف، عبارت است از 2π برابر انرژی ذخیره‌شده در نوسانگر تقسیم بر اتلاف انرژی در یک زمان تناوب نوسان، T_d. اگر میرایی نوسانگر ضعیف باشد، اتلاف انرژی در هر چرخه (سیکل) اندک و از این‌رو Q بزرگ است. Q را برحسب پارامترهایی که قبلاً به‌دست آمده‌اند محاسبه می‌کنیم و نشان می‌دهیم که موضوع مطرح‌شده صحیح است.

میانگین آهنگ اتلاف انرژی برای نوسانگر میرا به‌کمک معادلهٔ (۲۰.۴.۳)، یعنی $\dot{E} = -c\dot{x}^2$، تعیین می‌شود. بنابراین، لازم است $\dot{x}$ را محاسبه کنیم. معادلهٔ (۱۶.۴.۳)، $x(t)$ را می‌دهد:

$$x = Ae^{-\gamma t}\sin(\omega_d t + \phi_0) \qquad \text{(الف ۲۱.۴.۳)}$$

با مشتق‌گرفتن از آن، می‌رسیم به:

$$\dot{x} = -Ae^{-\gamma t}(\gamma \sin(\omega_d t + \phi_0) - \omega_d \cos(\omega_d t + \phi_0)) \qquad \text{(ب ۲۱.۴.۳)}$$

اتلاف انرژی در طی مدت یک دورهٔ کامل با زمان تناوب $T_d = 2\pi/\omega_d$ عبارت است از:

$$\Delta E = \int_0^{T_d} \dot{E}dt \qquad \text{(الف ۲۲.۴.۳)}$$

اگر متغیر انتگرال‌گیری را به $\theta = \omega_d t + \phi_0$ تبدیل کنیم، در این صورت $dt = d\theta/\omega_d$ و انتگرال روی دورهٔ تناوب T_d به انتگرال، از ϕ_0 تا $2\pi + \phi_0$، تبدیل می‌شود. مقدار انتگرال روی یک دورهٔ کامل به فاز اولیهٔ ϕ_0 حرکت بستگی ندارد؛ از این‌رو، برای سادگی، آن را از حدود انتگرال‌گیری حذف می‌کنیم:

$$\begin{aligned}\Delta E &= \frac{1}{\omega_d}\int_0^{2\pi} \dot{E}d\theta \\ &= \frac{cA^2}{\omega_d}\int_0^{2\pi} e^{-2\gamma t}[\gamma^2 \sin^2\theta - 2\gamma\omega_d \sin\theta\cos\theta + \omega_d^2\cos^2\theta]d\theta\end{aligned} \qquad \text{(ب ۲۲.۴.۳)}$$

حال می‌توانیم ضریب نمایی $e^{-۲\gamma t}$ را از داخل انتگرال خارج کنیم، زیرا در مورد میرایی ضعیف ($\gamma \ll \omega_d$) مقدارش در یک دور نوسان، تغییر زیادی نمی‌کند:

$$\Delta E = \frac{-cA^۲}{\omega_d} e^{-۲\gamma t} \int_۰^{۲\pi} (\gamma^۲ \sin^۲\theta - ۲\gamma\omega_d \sin\theta\cos\theta + \omega_d^۲ \cos^۲\theta) d\theta \qquad (۲۲.۴.۳ \text{ ج})$$

انتگرال $\sin^۲\theta$ و همچنین انتگرال $\cos^۲\theta$ روی یک چرخه عبارت است از π؛ ولی انتگرال حاصلضرب $\sin\theta\cos\theta$ صفر است. بنابراین، داریم

$$\Delta E = \frac{-cA^۲}{\omega_d} \pi e^{-۲\gamma t}(\gamma^۲ + \omega_d^۲) = cA^۲ e^{-۲\gamma t}\omega_۰^۲ \left(\frac{\pi}{\omega_d}\right) \qquad (۲۲.۴.۳ \text{ د})$$
$$= \gamma m \omega_۰^۲ A^۲ e^{-۲\gamma t} T_d$$

که روابط $\omega_۰^۲ = \omega_d^۲ + \gamma^۲$ و $\gamma = c/۲m$ را به‌کار برده‌ایم. اکنون، اگر ضریب میرایی را با ثابت زمانی τ مشخص کنیم، به‌طوری که $\gamma = (۲\tau)^{-۱}$، بزرگی اتلاف انرژی در یک چرخه را چنین به‌دست می‌آوریم:

$$\Delta E = \left(\frac{۱}{۲} m A^۲ \omega_۰^۲ e^{-t/\tau}\right) \frac{T_d}{\tau} \qquad (۲۲.۴.۳ \text{ ه})$$
$$\frac{\Delta E}{E} = \frac{T_d}{\tau}$$

انرژی ذخیره‌شده در نوسانگر (مثال ۲.۳.۳) در هر زمان t عبارت است از

$$E(t) = \frac{۱}{۲} m \omega_۰^۲ A^۲ e^{-t/\tau} \qquad (۲۳.۴.۳)$$

واضح است که، انرژی باقی‌مانده در نوسانگر، در خلال هر چرخه به‌طور نمایی با ثابت زمانی τ میرا می‌شود. به‌این جهت، می‌بینیم که ضریب کیفیت Q درست ۲π برابر عکس نسبتهایی است که در رابطهٔ بالا داده شده‌اند؛ یا اینکه

$$Q = \frac{۲\pi}{(T_d/\tau)} = \frac{۲\pi\tau}{(۲\pi/\omega_d)} = \omega_d \tau = \frac{\omega_d}{۲\gamma} \qquad (۲۴.۴.۳)$$

در حالت میرایی ضعیف، دورهٔ تناوب نوسان، T_d، خیلی کوتاهتر از ثابت زمانی، τ، است که آهنگ اتلاف انرژی نوسانگر را مشخص می‌کند. Q تحت چنین شرایطی بزرگ است. در جدول ۱.۴.۳ مقادیر Q را برای چند نوع نوسانگر مشاهده می‌کنید.

جدول ۱.۴.۳ مقادیر Q برای چند سیستم فیزیکی

زمین (در زمان زلزله)	۲۵۰ــ۱۴۰۰
سیم پیانو	۳۰۰۰
بلور در ساعت دیجیتالی	10^4
کاواک میکروموجی	10^4
اتم برانگیخته	10^7
ستارهٔ نوترونی	10^{12}
هستهٔ Fe^{57} برانگیخته	3×10^{12}

مثال ۱.۴.۳

سیستم تعلیق اتومبیلی به‌طور بحرانی میرا می‌شود و زمان تناوب نوسان آزاد آن بدون میرایی یک ثانیه است. اگر این سیستم در ابتدا به اندازهٔ x_0 جابه‌جا شده باشد و با سرعت اولیهٔ صفر رها شود، جابه‌جایی را در $t = 1\,s$ بیابید.

حل:

برای میرایی بحرانی داریم: $\gamma = c/2m = (k/m)^{1/2} = \omega_0 = 2\pi/T_0$. بنابراین، در این حالت $\gamma = 2\pi s^{-1}$. حال عبارت کلی مربوط به جابه‌جایی در مورد میرایی بحرانی (معادلهٔ ۹.۴.۳) عبارت است از: $x(t) = (At+B)e^{-\gamma t}$. از این‌رو، به‌ازای $t = 0$، داریم $x_0 = B$؛ با مشتق‌گیری می‌رسیم به $\dot{x}(t) = (A-\gamma B-\gamma At)e^{-\gamma t}$ که نتیجه می‌دهد $\dot{x}_0 = A-\gamma B = 0$. از این‌رو، در مسئلهٔ ما $A = \gamma B = \gamma x_0$. به‌همین ترتیب، عبارت زیر جابه‌جایی برحسب تابعی از زمان است:

$$x(t) = x_0(1+\gamma t)e^{-\gamma t} = x_0(1+2\pi t)e^{-2\pi t}$$

به‌ازای $t = 1\,s$، می‌رسیم به

$$x_0(1+2\pi)e^{-2\pi} = x_0(7{,}28)e^{-6{,}28} = 0{,}0136x_0$$

سیستم به وضعیت تعادل بازگشته است.

مثال ۲.۴.۳

بسامد نوسانگر هماهنگ میرا نصف بسامد همان نوسانگر بدون میرایی است. نسبت بیشینهٔ نوسانهای متوالی را بیابید.

حل:

داریم: $\omega_d = \frac{1}{4}\omega_0 = (\omega_0^2 - \gamma^2)^{1/2}$؛ که در اینجا $\omega_0^2/4 = \omega_0^2 - \gamma^2$. از این‌رو، $\gamma = \omega_0 (3/4)^{1/2}$، در نتیجه

$$\gamma T_d = \omega_0 (3/4)^{1/2} [2\pi/(\omega_0/2)] = ۱۰٫۸۸$$

بنابراین، نسبت دامنه عبارت است از:

$$e^{-\gamma T_d} = e^{-۱۰٫۸۸} = ۰٫۰۰۰۰۲$$

یعنی نوسانگر با میرایی زیاد است.

مثال ۳.۴.۳

با فرض خطی بودن مقاومت پس‌کشی هوا، سرعت حدی توپ بیسبالی هنگام سقوط آزاد عبارت است از $30\,\mathrm{m/s}$. اثر مقاومت هوا را بر آونگ ساده‌ای، که به‌جای «گلولهٔ» آن از توپ بیسبال استفاده شده است، محاسبه کنید.

حل:

در فصل ۲، سرعت حدی را در حالتی که مقاومت پس‌کشی هوا خطی بود، به‌صورت $v_t = mg/c_1$ به‌دست آوردیم، که c_1 ضریب مقاومت پس‌کشی خطی است. از اینجا ثابت میرایی نمایی به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\gamma = \frac{c_1}{2m} = \frac{(mg/v_t)}{2m} = \frac{g}{2v_t} = \frac{۹٫۸\,\mathrm{ms^{-2}}}{۶۰\,\mathrm{ms^{-1}}} = ۰٫۱۶۳\,\mathrm{s^{-1}}$$

در نتیجه، دامنهٔ آونگ بیسبال با ضریب e^{-1} در زمان $\gamma^{-1} = ۶٫۱۳\,\mathrm{s}$ افت می‌کند. توجه کنید که این زمان از طول آونگ مستقل است. قبلاً، در مثال ۲.۲.۳، نشان دادیم که بسامد زاویه‌ای نوسان آونگ ساده به‌طول l در نوسان کم‌دامنه، از عبارت $\omega_0 = (g/l)^{1/2}$ به‌دست می‌آید. بنابراین، به‌کمک معادلهٔ (۱۷.۴.۳)، زمان تناوب آونگ از این قرار است:

$$T_d = 2\pi(\omega_0^2 - \gamma^2)^{-1/2} = 2\pi \left(\frac{g}{l} - ۰٫۰۲۶۵\,\mathrm{s^{-2}}\right)^{-1/2}$$

در حالت خاص، برای «آونگ ثانیه‌ای» بیسبال، که در آن نصف زمان تناوب در غیاب میرایی یک ثانیه است، داریم: $g/l = \pi^2$. از این‌رو، نیم‌دورهٔ تناوب با وجود میرایی عبارت است از

$$\frac{T_d}{2} = \pi(\pi^2 - ۰٫۰۲۶۵)^{-1/2}\,\mathrm{s} = ۱٫۰۰۱۳۴\,\mathrm{s}$$

در جواب ما، اثر مقاومت هوا قدری با مبالغه به‌دست آمده است، زیرا تابع پس‌کشی برای توپ بیسبال، جز در سرعتهای خیلی کم، به‌جای اینکه خطی باشد، تقریباً درجهٔ دوم است. در بخش ۴.۲ نیز در این خصوص بحث کردیم.

مثال ۴.۴.۳

توپی کروی به شعاع $۰٫۰۰۲۶۵\text{m}$ و جرم $۵ \times ۱۰^{-۴}\text{kg}$ به فنری با ثابت نیروی (سفتی فنر) $k = ۰٫۰۵\text{N/m}$ زیر آب، متصل می‌شود، این جرم تحت عمل فنر به نوسان درمی‌آید. ضریب چسبندگی آب، η، عبارت است از $۱۰^{-۳}\text{Ns/m}^۲$. (الف) تعداد نوساناتی را بیابید که این توپ در مدت زمانی اجرا می‌کند که دامنهٔ نوسان آن به نصف مقدار اولیه‌اش افت می‌کند؛ (ب) Q نوسانگر را محاسبه کنید.

حل:

برای یافتن c، ثابت تناسب جملهٔ $\dot{x}$ در معادلهٔ حرکت (معادلهٔ ۱.۴.۳) برای نوسانگر میرا، در مورد اشیاء متحرک در محیطی چسبنده (وشکسان) می‌توان از قانون استوکس بهره گرفت. این رابطه عبارت است از

$$c = ۶\pi\eta r = ۵ \times ۱۰^{-۵}\text{Ns/m}$$

انرژی نوسانگر با ثابت زمانی τ به‌طور نمایی و دامنه به‌صورت $A = A_۰ e^{-t/۲\tau}$ میرا می‌شود. از این رو،

$$\frac{A}{A_۰} = \frac{۱}{۲} = e^{-t/۲\tau}$$

$$\therefore t = ۲\tau \ln ۲$$

در نتیجه، تعداد نوسانات در این مدت عبارت است از:

$$\begin{aligned} n &= \omega_d t/۲\pi \\ &= \omega_d \tau (\ln ۲)/\pi \\ &= Q(\ln ۲)/\pi \end{aligned}$$

چون $\omega_۰^۲ = k/m = ۱۰۰\text{s}^{-۲}$، $\tau = m/c = ۱۰\text{s}$، و $\gamma = ۱/۲\tau = ۰٫۰۵\text{s}^{-۱}$، می‌رسیم به:

$$Q = (\omega_۰^۲ - \gamma^۲)^{۱/۲}\tau = (۱۰۰ - ۰٫۰۰۲۵)^{۱/۲} \times ۱۰ = ۱۰۰$$

$$n = Q(\ln ۲)/\pi = ۲۲$$

اگر از ما خواسته شده بود در مدت زمانی که طول می‌کشد تا دامنه به $e^{-1/2}$ افت کند، یا حدود ۰٫۶۰۶ برابر مقدار اولیه‌اش برسد، تعداد نوسان را بیابیم، جواب می‌بایست $Q/2\pi$ باشد. به‌وضوح، Q معیار آهنگ اتلاف انرژی از طریق نوسانگر است.

*۵.۳ فضای فاز

هر سیستم فیزیکی در حال حرکت که انرژی اتلاف نکند، کماکان در حال حرکت باقی می‌ماند. سیستمی که انرژی تلف می‌کند سرانجام به سکون می‌رسد. هر سیستم نوسان‌کننده یا چرخان که انرژی تلف نمی‌کند پیکربندی خود را در هر چرخه تکرار می‌کند. سیستمی که انرژی تلف می‌کند هرگز چنین عمل نمی‌کند. تکوین چنین سیستمی فیزیکی را به‌طور نموداری با ملاحظهٔ حرکتش در فضای خاصی به‌نام فضای فاز، به‌جای فضای حقیقی، می‌توان نمایش داد. فضای فاز برای ذره‌ای که حرکتش در طول یک مختصهٔ فضایی صورت می‌گیرد، شامل تمام نقاط ممکن در «صفحه»‌ای است که مختصهٔ افقیش، مکان x ذره و مختصهٔ عمودیش سرعت $\dot{x}$ ذره است. بنابراین، «مکان» ذره روی صفحهٔ فضای فاز با «مختصاتش» $(x, \dot{x})$ تعیین می‌شود.[۱] حالت آتی حرکت چنین ذره‌ای به‌طور کامل مشخص می‌شود، هرگاه مکان و سرعتش به‌طور همزمان، مثلاً شرایط اولیه‌اش، $x(t_0)$ و $\dot{x}(t_0)$، معلوم باشد. بنابراین، می‌توانیم تکامل تدریجی حرکت یک ذره از آن نقطه را با ترسیم نقاطش در فضای فاز، به تصویر بکشیم. هر نقطه روی چنین نموداری را می‌توان پیشروی برای نقطهٔ بعدی تلقی کرد. مسیر این نقاط در فضای فاز، زمان کامل پیشینهٔ ذره را به‌دست می‌دهد.

نوسانگر هماهنگ ساده: نیروی نامیران

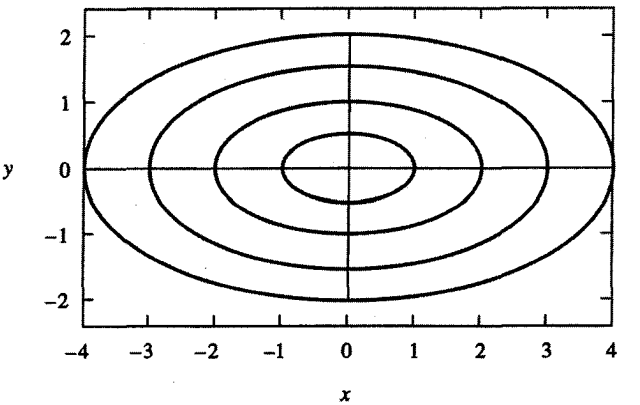
نوسانگر هماهنگ ساده که در این بخش دربارهٔ آن بحث می‌کنیم، مثالی از ذره‌ای است که حرکت آن به یک بعد محدود می‌شود. حرکت فضای فازی یک نوسانگر هماهنگ ساده را که تحت تأثیر نیروی میران قرار ندارد، بررسی می‌کنیم. جوابهای مکانی و سرعت آن به‌صورت تابعی از زمان که قبلاً با معادلات (۵.۲.۳) و (۱۲.۲.۳ الف) تعیین شده‌اند، عبارت‌اند از:

$$x(t) = A\sin(\omega_0 t + \phi_0) \qquad \text{(۱.۵.۳ الف)}$$

$$\dot{x}(t) = A\omega_0 \cos(\omega_0 t + \phi_0) \qquad \text{(۱.۵.۳ ب)}$$

* باز، همان‌طور که در فصل ۲ گفتیم، بخشهایی را که در متن با علامت ستاره مشخص می‌شود، می‌توان با تساهل حذف کرد.

۱. به‌بیان دقیقتر، فضای فاز، بنابر تعریف، عبارت است از مجموعه‌ای از نقاط (x, p) که x و p، به‌ترتیب، مکان و تکانهٔ ذره است. چون تکانه مستقیماً با سرعت متناسب است، فضایی که اینجا تعریف شده، اساساً فضای فاز است.



شکل ۱.۵.۳ نمودار فضای فاز برای نوسانگر هماهنگ ساده ($\omega_\circ = \circ/\Delta \mathrm{s}^{-1}$). نیرو نامیران است ($\gamma = \circ \mathrm{s}^{-1}$).

آنگاه، با قرار دادن $y = \dot{x}$ در دو معادلهٔ پارامتری، t را حذف می‌کنیم تا معادلهٔ مسیر نوسانگر را در فضای فاز بیابیم:

$$x^2(t) + \frac{y^2(t)}{\omega_\circ^2} = A^2(\sin^2(\omega_\circ t + \phi_\circ) + \cos^2(\omega_\circ t + \phi_\circ)) = A^2$$
$$\therefore \frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{A^2\omega_\circ^2} = 1 \qquad (۲.۵.۳)$$

معادلهٔ (۲.۵.۳)، معادلهٔ یک بیضی است که نیم‌قطر بزرگ آن A و نیم‌قطر کوچک آن $\omega_\circ A$ است. در شکل ۱.۵.۳، چند مسیر فضای فازی برای نوسانگر هماهنگ نشان داده شده است. فقط دامنهٔ نوسان A در این مسیرها متفاوت است.

توجه کنید که مسیرهای فضای فازی هرگز یکدیگر را قطع نمی‌کنند. وجود یک نقطهٔ مشترک در دو مسیر متفاوت صرفاً حاکی از آن است که دو حرکت آتی مختلف از یک تک مجموعهٔ شرایط، $(x(t_i),\ \dot{x}(t_i))$، در زمانی چون t_i، سر برمی‌آورد. این شرایط نمی‌تواند محقق شود زیرا، با مقادیر خاص $x(t_i)$ و $\dot{x}(t_i)$ شروع می‌شود. قوانین حرکت نیوتون به‌طور کامل حالت آیندهٔ منحصر به‌فردی را برای سیستم تعیین می‌کنند.

به این نکته هم توجه کنید که مسیرها در این حالت، مسیرهای بسته‌ای را تشکیل می‌دهند. به بیان دیگر، حرکت خودش را تکرار می‌کند که پیامد پایستاری انرژی کل نوسانگر هماهنگ است. در واقع، معادلهٔ مسیر در فضای فاز (معادلهٔ ۲.۵.۳) چیزی بیشتر از این معنا نیست که انرژی

کل پایستار است. این موضوع را می‌توانیم با نشاندن $E = \frac{1}{2}kA^2$ و $\omega_0^2 = k/m$ در معادلهٔ (۲.۵.۳) نشان دهیم و برسیم به:

$$\frac{x^2}{2E/k} + \frac{y^2}{2E/m} = 1 \qquad \text{(۳.۵.۳ الف)}$$

(با نشاندن $\dot{x}$ به‌جای y)، که معادل است با:

$$\frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}^2 = V + T = E \qquad \text{(۳.۵.۳ ب)}$$

که معادلهٔ انرژی برای نوسانگر هماهنگ (معادلهٔ ۳.۳.۳) است. بنابراین، هر مسیر فضای فاز بسته به مقداری انرژی کل معین و پایسته وابسته است.

مثال ۱.۵.۳

ذره‌ای را به جرم m در نظر بگیرید که تحت تأثیر نیروی $+kx$ است و x جابه‌جایی ذره از حال تعادل را بیان می‌کند. مسیرهای فضای فاز این ذره را محاسبه کنید.

حل:

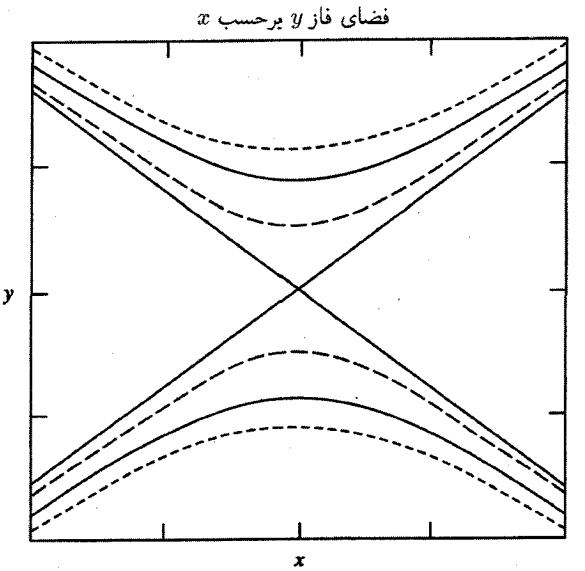
معادلهٔ حرکت ذره عبارت است از $m\ddot{x} = kx$، با قرار دادن $\omega^2 = k/m$، داریم: $\ddot{x} - \omega^2 x = 0$.
اگر قرار دهیم $y = \dot{x}$ و $y' = dy/dx$ می‌رسیم به $\dot{y} = \dot{x}y' = yy' = \omega^2 x$ یا $ydy = \omega^2 x dx$.
جواب عبارت است از $y^2 - \omega^2 x^2 = C$ که در آن C ثابت انتگرال‌گیری است. مسیرهای فضای فاز شاخه‌هایی از هذلولی‌اند که مجانبهای آنها عبارت باشند از $y = \pm\omega x$. این نمودار فضای فاز را در شکل ۲.۵.۳ مشاهده می‌کنید. انتهای مسیرها بازند که از مبدأ، نقطهٔ تعادل ناپایدار، منشعب می‌شوند.

نوسانگر هماهنگ کندمیرا

مسیرهای فضای فاز برای نوسانگر هماهنگ تحت تأثیر نیروی میران ضعیف را می‌توان به همان روش قبلی محاسبه کرد. هرچند پیش‌بینی می‌کنیم که مسیرها بسته نخواهند بود. حرکت خودش را تکرار نمی‌کند، زیرا انرژی دائماً تلف می‌شود. برای توصیف نموداری آن، فرض می‌کنیم نوسانگر از حال سکون در مکان x_0 شروع به اجرا کند. معادلات ۲۱.۴.۳ الف و ب جوابها را برای x و $\dot{x}$ می‌دهند:

$$x = Ae^{-\gamma t}\sin(\omega_d t + \phi_0) \qquad \text{(۴.۵.۳ الف)}$$

$$\dot{x} = -Ae^{-\gamma t}(\gamma\sin(\omega_d t + \phi_0) - \omega_d\cos(\omega_d t + \phi_0)) \qquad \text{(۴.۵.۳ ب)}$$



شکل ۲.۵.۳ منحنی نمایش تغییرات فضای فاز برای $\ddot{x} - \omega^2 x = 0$.

به یاد آورید که چون زاویهٔ فاز اولیه، ϕ_0، با شرط $\dot{x}_0 = 0$ به‌دست می‌آید، مقدار آن برای نوسانگر میرا $\pi/2$ نیست، بلکه عبارت است از $\phi_0 = \tan^{-1} \omega_d/\gamma$. حذف t در معادلات پارامتری بالا به‌طور مستقیم دشوار است. به‌جای آن، با جاگذاریهای متوالی و تبدیلات خطی مختصات فضای فاز که روابط بالا را ساده می‌کنند، به شکلی می‌رسیم که قبلاً برای نوسانگر هماهنگ دربارهٔ آن بحث کردیم، می‌توانیم حرکت را در فضای فاز توصیف کنیم. ابتدا، با جاگذاری $\rho = Ae^{-\gamma t}$ و

$$\theta = \omega_d t + \phi_0$$

در معادلات بالا، می‌رسیم به

$$x = \rho \sin\theta \qquad \text{(ج ۴.۵.۳)}$$

$$\dot{x} = -\rho(\gamma \sin\theta - \omega_d \cos\theta) \qquad \text{(د ۴.۵.۳)}$$

سپس، تبدیل خطی $y = \dot{x} + \gamma x$ را در معادلهٔ (د ۴.۵.۳) به‌کار می‌گیریم، و خواهیم داشت:

$$y = \omega_d \rho \cos\theta \qquad (۵.۵.۳)$$

سپس، این معادله را به توان دو می‌رسانیم و با انجام قدری عملیات جبری، می‌رسیم به:

$$\begin{aligned} y^2 &= \omega_d^2 \rho^2 (1 - \sin^2\theta) \\ y^2 &= \omega_d^2 (\rho^2 - x^2) \\ \frac{x^2}{\rho^2} &+ \frac{y^2}{\omega_d^2 \rho^2} = 1 \end{aligned} \qquad (۶.۵.۳)$$

اینک، معادلهٔ (۶.۵.۳) به شکل معادلهٔ (۲.۵.۳) است. اما در اینجا، y ترکیبی خطی از x و $\dot{x}$ است؛ از این‌رو، مجموعهٔ نقاط (x, y) فضای فاز اصلاح‌شده‌ای را نشان می‌دهند. مسیر نوسانگر در این فضا، یک بیضی است که قطرهای کوچک و بزرگ آن، به‌ترتیب، با ρ و $\omega_d \rho$ نموده می‌شوند، و به‌طور نمایی با زمان کاهش می‌یابند. این مسیر با مقدار بیشینهٔ $x_0 (= A \sin\phi_0)$ شروع می‌شود و بعد به‌طور مارپیچ به‌سمت داخل به‌سوی مبدأ می‌رود. نتیجه در شکل ۳.۵.۳ (الف) نشان داده می‌شود. رفتار مسیر در صفحهٔ $x - \dot{x}$ نیز به همان‌گونه است و در شکل ۳.۵.۳ (ب) نشان داده می‌شود. دو مسیر را در قالب منحنیهای نمایش تغییرات برای حالتهای میرایی قوی و ضعیف مشاهده می‌کنید. تمایز آنها از یکدیگر باید واضح و روشن باشد.

مانند قبل، معادلهٔ (۶.۵.۳) جز معادلهٔ انرژی برای نوسانگر هماهنگ میرا نیست. می‌توانیم آن را با نتایجی که در بحث بخش ۴.۳ برای آهنگ اتلاف انرژی در نوسانگر با میرایی ضعیف به‌دست آوردیم، مقایسه کنیم. در حالت میرایی ضعیف، ضریب میرایی γ در مقایسه با ω_0، بسامد زاویه‌ای نوسانگر نامیرا، کوچک است (معادلهٔ ۱۰.۴.۳)، و بنابراین

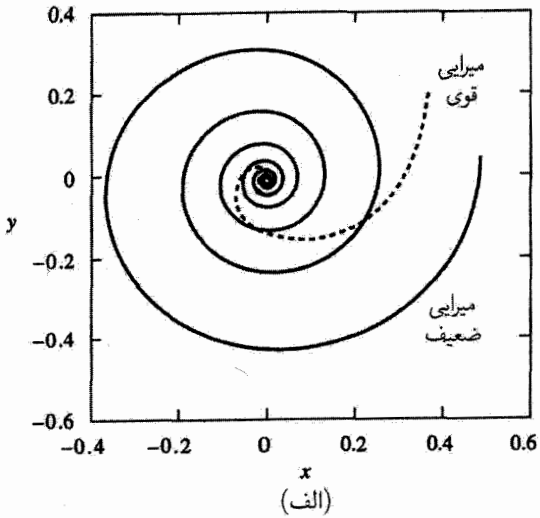
$$\omega_d \approx \omega_0 \qquad y \approx \dot{x} \qquad (۷.۵.۳)$$

از این‌رو، معادلهٔ ۶.۵.۳ به‌صورت زیر درمی‌آید

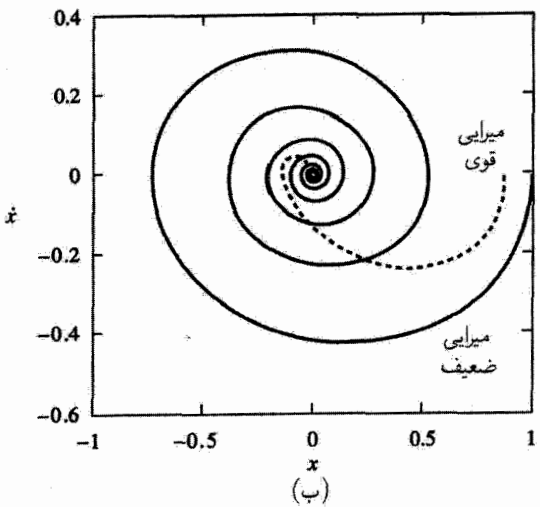
$$\frac{x^2}{\rho^2} + \frac{\dot{x}^2}{\rho^2 \omega_0^2} = 1 \qquad (۸.۵.۳)$$

توجه کنید که این معادله به شکل معادلهٔ (۶.۵.۳) است، و در نتیجه مسیر مشاهده‌شده در صفحهٔ $x - \dot{x}$ از شکل ۳.۵.۳ (ب) برای حالت کندمیرایی، در واقع با مسیر فضای فاز اصلاح‌شدهٔ نوسانگر کندمیرایی نموده‌شده در شکل ۳.۵.۳ (الف)، یکسان است. سرانجام، k/m را به‌جای ω_0^2 و $A^2 e^{-2\gamma t}$ را به‌جای ρ^2 قرار می‌دهیم و می‌رسیم به

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} k x^2 + \frac{1}{2} m \dot{x}^2 &= \frac{1}{2} k A^2 e^{-2\gamma t} \\ &= \frac{1}{2} m \omega_0^2 A^2 e^{-2\gamma t} \end{aligned} \qquad (۹.۵.۳)$$



(الف)



(ب)

شکل ۳.۵.۳ (الف) نمودار فضای فاز اصلاح‌شده (متن درس را ببینید) برای نوسانگر هماهنگ ساده. (ب) نمودار فضای فاز ($\omega_0 = 0.5\text{s}^{-1}$). حالت کندمیرایی: (۱) میرایی ضعیف ($\gamma = 0.05\text{s}^{-1}$) (۲) میرایی قوی ($\gamma = 0.25\text{s}^{-1}$).

اگر این نتیجه را با معادلهٔ (۲۳.۴.۳) مقایسه کنیم، مشاهده می‌کنیم که انرژی کل باقیمانده در نوسانگر در هر لحظهٔ بعدی t را نشان می‌دهد:

$$V(t) + T(t) = E(t) \qquad (۱۰.۵.۳)$$

انرژی نوسانگر هماهنگ با میرایی ضعیف زوال نمایی با ثابت زمانی $\tau = (2\gamma)^{-1}$ دارد. ماهیت مارپیچی مسیر فضای فاز آن، این واقعیت را منعکس می‌کند.

نوسانگر هماهنگ با میرایی بحرانی

جواب معادلهٔ (۹.۴.۳) برای نوسانگر با میرایی بحرانی به‌صورت زیر است:

$$x = (At + B)e^{-\gamma t} \qquad (۱۱.۵.۳)$$

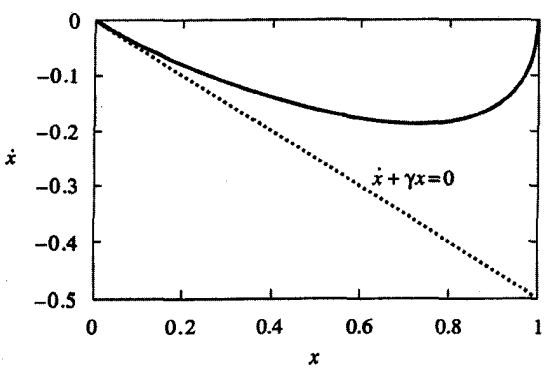
با مشتق‌گرفتن از این معادله، می‌رسیم به

$$\dot{x} = -\gamma(At + B)e^{-\gamma t} + Ae^{-\gamma t} \qquad (۱۲.۵.۳)$$

یا

$$\dot{x} + \gamma x \doteq Ae^{-\gamma t} \qquad (۱۳.۵.۳)$$

معادلهٔ اخیر نشان می‌دهد که مسیر فضای فاز باید به خطی مستقیم نزدیک شود که مکان قطع آن صفر و شیبش $-\gamma$ است. نمودار فضای فاز در شکل ۴.۵.۳ برای حرکتی نشان داده شده است که با شرایط اولیهٔ $(x_0, \dot{x}_0) = (1, 0)$ شروع می‌شود.



شکل ۴.۵.۳ نمودار فضای فاز برای نوسانگر هماهنگ ساده ($\omega_0 = 0.5\text{s}^{-1}$). میرایی بحرانی ($\gamma = 0.5\text{s}^{-1}$).

نوسانگر تندمیرا

تندمیرایی وقتی پیش می‌آید که پارامتر میرایی، γ، از بسامد زاویه‌ای، ω_0، بزرگتر باشد. در این صورت معادلهٔ (۶.۴.۳) برای حرکت به جواب زیر می‌انجامد

$$x(t) = A_1 e^{-(\gamma-q)t} + A_2 e^{-(\gamma+q)t} \qquad (۱۴.۵.۳)$$

که در آن تمام نماها حقیقی‌اند. با مشتق‌گرفتن از این معادله، می‌رسیم به

$$\dot{x}(t) = -\gamma x + \bar{q} e^{-\gamma t}(A_1 e^{qt} - A_2 e^{-qt}) \qquad (۱۵.۵.۳)$$

مانند حالت میرایی بحرانی، مسیر فاز در طول خط مستقیم به صفر نزدیک می‌شود. به‌هرحال، نزدیک‌شدن در طول دو خط مختلف امکان‌پذیر است. برای پی‌بردن به ماهیت آنها، بهتر است بگذاریم حرکت در جابه‌جایی x_0 از حال سکون شروع شود. با منظورکردن این شرایط و انجام کمی عملیات جبری، مقادیر زیر برای A_1 و A_2 به‌دست می‌آید:

$$A_1 = \frac{(\gamma+q)}{2q} x_0 \qquad A_2 = -\frac{(\gamma-q)}{2q} x_0 \qquad (۱۶.۵.۳)$$

با انجام عملیات جبری بیشتر برای دو ترکیب خطی متفاوت x و $\dot{x}$، می‌رسیم به:

$$\dot{x} + (\gamma-q)x = (\gamma-q)x_0 e^{-(\gamma+q)t} \qquad (۱۷.۵.۳ \text{ الف})$$

$$\dot{x} + (\gamma+q)x = (\gamma+q)x_0 e^{-(\gamma-q)t} \qquad (۱۷.۵.۳ \text{ ب})$$

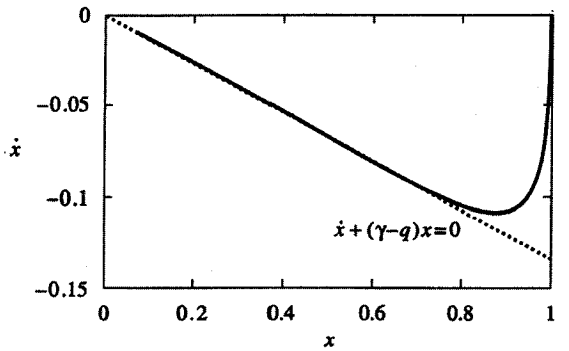
جملهٔ سمت راست هر یک از معادلات بالا با زمان، زوال نمایی دارد و بنابراین، مجانبهای فضای فاز با جفت خطوط مستقیم زیر داده می‌شوند:

$$\dot{x} = -(\gamma-q)x \qquad (۱۸.۵.۳ \text{ الف})$$

$$\dot{x} = -(\gamma+q)x \qquad (۱۸.۵.۳ \text{ ب})$$

جز در حالتهای خاص، مسیرهای فضای فاز حرکت، همیشه در طول مجانبی که شیب آن $-(\gamma-q)$ است به صفر نزدیک می‌شوند. آن مجانب همواره «ناگهانی و یکباره به وجود می‌آید» خیلی سریعتر از حالتهای دیگر، زیرا ضریب فروافت نمایی آن عبارت است از $(\gamma+q)$ (معادلهٔ ۱۷.۵.۳)، یعنی بزرگتر از دو.

در شکل ۵.۵.۳ نمودار فضای فاز را برای یک نوسانگر تندمیرا مشاهده می‌کنیم که حرکت آن با مقادیر $(x_0, \dot{x}_0) = (1, 0)$ شروع و در طول مجانبی که شیب آن $-(\gamma-q)$ است، ادامه



شکل ۵.۵.۳ نمودار فضای فاز برای نوسانگر هماهنگ ساده ($\omega_\circ = \circ/۵\mathrm{s}^{-۱}$). تندمیرایی ($\gamma = ۱\mathrm{s}^{-۱}$).

می‌یابد. توجه کنید که چگونه مسیر سریعاً روی مجانب قرار می‌گیرد که با میرایی بحرانی که فقط در انتهای حرکتش به مجانب می‌رسد، بی‌شباهت است. واضح است که، تندمیرایی مؤثرترین راه برای حذف کردن نوسان از حرکت نوسانی است!

مثال ۲.۵.۳

ذره‌ای به جرم واحد (یکه) دستخوش نیروی میران $-\dot{x}$ و نیرویی است که به جابه‌جایی x از مبدأ بستگی دارد و به‌صورت $+x - x^۳$ تغییر می‌کند. (الف) نقاط تعادل ذره را بیابید و مشخص کنید که آیا تعادل پایدارند یا ناپایدار. (ب) با بهره‌گیری از متکد مسیرهای فضای فاز را برای ذره در سه حالت با شرایط اولیهٔ: (i) $(x, y) = (-۱, ۱/۴\circ)$، (ii) $(x, y) = (-۱, ۱/۴۵)$، و (iii) $(x, y) = (\circ/۱\circ, \circ)$ ترسیم و حرکت حاصل را تشریح کنید.

حل:

(الف) معادلهٔ حرکت عبارت است از

$$\ddot{x} + \dot{x} - x + x^۳ = \circ$$

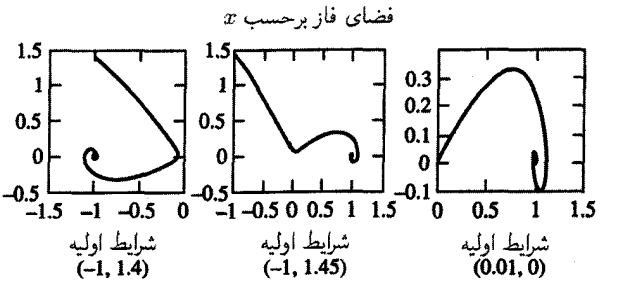
قرار می‌دهیم $y = \dot{x}$،

$$\dot{y} = -y + x - x^۳$$

در وضعیت تعادل، $y = \circ$ و $\dot{y} = \circ$. این شرایط برقرار است اگر

$$x - x^۳ = x(۱ - x^۲) = x(۱ - x)(۱ + x) = \circ$$

بنابراین، سه نقطهٔ تعادل $x = \circ$ و $x = \pm ۱$ وجود دارد.



شکل ۶.۵.۳ نمودارهای فضای فاز به‌ازای $\ddot{x} + \dot{x} - x + x^3 = 0$.

با خطی‌سازی معادلهٔ حرکت برای جابه‌جاییهای کوچک از آن نقاط، می‌توانیم تعیین کنیم که تعادل در آن نقاط پایدار است یا ناپایدار. اگر u جابه‌جایی کم‌دامنهٔ ذره از نقطهٔ تعادل باشد که آن را با x_0 نمایش می‌دهیم، داریم: $x = x_0 + u$ و معادلهٔ حرکت به‌صورت زیر درمی‌آید

$$y = \dot{u} \quad \text{و} \quad \dot{y} = -y + (x_0 + u) - (x_0 + u)^3$$

با اجرای بسط و حذف‌کردن تمام جملات ناخطی برحسب u، می‌رسیم به:

$$\dot{y} = -y + (1 - 3x_0^2)u + x_0(1 - x_0^2)$$

جملهٔ آخر صفر است، از این‌رو

$$\dot{y} = -y + (1 - 3x_0^2)u$$

اگر $(1 - 3x_0^2) > 0$، حرکت پایدار و نوسان میراست که سرانجام در $x = x_0$ باز می‌ایستد. اگر $(1 - 3x_0^2) < 0$، ذره از x_0 دور می‌شود و تعادل ناپایدار است. بنابراین، $x = \pm 1$ عبارت‌اند از نقاط تعادل پایدار و $x_0 = 0$ یک نقطهٔ ناپایدار است.

(ب) سه نمودار شکل ۶.۵.۳، با به‌کار بردن معادلهٔ حل‌کنِ *rkfixed* متکدکه معادلهٔ ناخطی کامل حرکت را به‌طور عددی حل می‌کند، ترسیم می‌شوند. در تمام موارد، مستقل از اینکه حرکت چگونه آغاز می‌شود، ذره از $x = 0$ دور می‌شود و سرانجام حرکت در $x = \pm 1$ خاتمه می‌یابد. حرکت برای سومین مجموعه از شرایط اولیه، به‌خصوص آشکارتر است. ذره از نزدیکی حالت سکون، ولی نه دقیقاً در $x = 0$، شروع به حرکت می‌کند. ذره از آن نقطه دفع می‌شود، به نوسان میرا حول $x = 1$ در می‌آید، و سرانجام در آنجا به حال سکون می‌رسد. نقاط $x = \pm 1$ نقاط ربایشی نامیده می‌شوند و نقطهٔ $x = 0$ را نقطهٔ رانشی می‌گویند.

۶.۳ حرکت هماهنگ واداشته: تشدید

در این بخش حرکت نوسانگر هماهنگ میرایی را مطالعه می‌کنیم که دستخوش نیروی محرک دوره‌ای (تناوبی) عاملی خارجی است. فرض کنید نیرویی به شکل $F_0 \cos \omega t$ بر چنین نوسانگری وارد می‌آید. معادلهٔ حرکت عبارت است از

$$m\ddot{x} = -kx - c\dot{x} + F_0 \cos \omega t \qquad (۱.۶.۳)$$

مهمترین جنبهٔ بارز چنین نوسانگری از این قرار است که جوابی به‌صورت تابعی از بسامد نیروی محرک می‌دهد. حتی وقتی دامنهٔ نیروی محرک ثابت باشد. هرگاه بسامد نیروی محرک نزدیک به بسامد طبیعی نوسانگر، ω_0، باشد پدیدهٔ قابل‌توجهی رخ می‌دهد. این پدیده تشدید نامیده می‌شود. هرکس کودکی را روی یک تاب هل داده باشد می‌داند که دامنهٔ نوسان می‌تواند خیلی زیاد شود، حتی اگر نیرویی که به آن وارد می‌آید بسیار کوچک اما در زمان مناسب باشد. نیروهای تناوبی کوچک که بر نوسانگرها با بسامدهایی بیشتر یا کمتر از بسامد طبیعی وارد آیند، خیلی کم‌اثرند و دامنه کوچک باقی می‌ماند. بحث خود را از حرکت هماهنگ واداشته با توصیف کیفی رفتاری آغاز می‌کنیم که می‌توان انتظارش را داشت. سپس معادلهٔ حرکت (معادلهٔ ۱.۶.۳) را، با انتظار ظاهرشدن پدیدهٔ تشدید، به‌تفصیل تجزیه و تحلیل می‌کنیم.

می‌دانیم که نوسانگر هماهنگ نامیرا، هنگامی که دستخوش نوعی اغتشاش قرار گیرد که آن را از مکان تعادلش جابه‌جا می‌کند، در بسامد طبیعیش، $\omega_0 = \sqrt{(k/m)}$، به نوسان درمی‌آید. نیروهای اتلافی به‌طور اجتناب‌ناپذیر در هر سیستم واقعی برقرارند و بسامد نوسان را به‌طور جزئی از ω_0 به ω_d تغییر می‌دهند و سبب می‌شوند که نوسان آزاد میرا شود. این حرکت با حل معادلهٔ دیفرانسیل همگن (معادلهٔ ۱.۴.۳)، یعنی معادلهٔ (۱.۶.۳)، بدون حضور نیروی محرک) نمایش داده می‌شود. هر نیروی تناوبی محرک دو کار روی نوسانگر انجام می‌دهد: (۱) نوسان «آزادی» را با بسامد طبیعی در نوسانگر راه می‌اندازد، و (۲) نوسانگر را وامی‌دارد که سرانجام در بسامد محرک ω نوسان کند. به‌مدت زمان کوتاهی حرکت واقعی برهم‌نهی خطی نوسانات در این دو بسامد است، اما یکی از بین می‌رود و دیگری باقی می‌ماند. حرکتی که از بین می‌رود گذرا نامیده می‌شود. حرکتی که نهایتاً باقی می‌ماند، نوسان با بسامد محرک است، که به آن حرکت حالت پایا می‌گویند. این نوسان جوابی از معادلهٔ ناهمگن (معادلهٔ ۱.۶.۳) به‌شمار می‌آید. در اینجا، فقط به حرکت حالت پایا می‌پردازیم، که جنبهٔ پیش‌بینی‌شدهٔ آن را در زیر توصیف می‌کنیم. برای کمک به فرایند توصیف، فرض می‌کنیم که لحظه‌ای جملهٔ میران $-c\dot{x}$ بسیار کوچک باشد. متأسفانه این فرض بدان معنا می‌انجامد که جملهٔ گذرا هرگز از بین نمی‌رود و معنای فیزیکی ندارد ــ موقعیتی نسبتاً

متناقص در مورد پدیده‌ای که با کلمهٔ گذرا توصیف شده است! این اشکال را نادیده می‌پنداریم و تماماً به توصیف حالت پایا متوجه می‌شویم، به این امید که سادگی به‌دست‌آمده با این تقریب به ما دیدی بدهد که نهایتاً در حل مسئلهٔ نوسانگر میرای واداشته به ما کمک کند.

در غیاب میرایی، معادلهٔ (۱.۶.۳) را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$m\ddot{x} + kx = F_0 \cos \omega t \qquad (۲.۶.۳)$$

بارزترین جنبهٔ حرکت حاصل از این نوسانگر نامیرای واداشته یک جواب بسیار بزرگ در $\omega = \omega_0$ است. به‌زودی به این موضوع خواهیم رسید، اما چه جوابی ممکن است در هر حالت بسامدهای خیلی کم‌دامنه ($\omega \ll \omega_0$) و خیلی پردامنه ($\omega \gg \omega_0$) پیش‌بینی کنیم؟ در بسامدهای کم‌دامنه می‌توان انتظار داشت که جملهٔ لختی $m\ddot{x}$ در مقایسه با نیروی فنری $-kx$ چشم‌پوشیدنی باشد. فنر کاملاً سفت به‌نظر خواهد آمد، خیلی آهسته متراکم یا منبسط می‌شود، با نوسانگری که در فازی خیلی نزدیک با نیروی محرک حرکت می‌کند. بنابراین، می‌توانیم حدس بزنیم که

$$x \approx A \cos \omega t$$
$$A = \frac{F_0}{k}$$

در بسامدهای بالا، شتاب باید زیاد باشد؛ از این‌رو، می‌توان حدس زد که $m\ddot{x}$ باید بر نیروی فنری $-kx$ غلبه یابد. در این حالت، جواب توسط جرم نوسانگر کنترل می‌شود. جابه‌جایی آن باید کوچک و 180° با نیروی محرک اختلاف فاز داشته باشد، زیرا شتاب نوسانگر هماهنگ با جابه‌جایی 180° اختلاف فاز دارد. صحت و درستی این ملاحظات مقدماتی در طی فرایند رسیدن به جوابی واقعی ظاهر می‌شود.

اولاً، معادلهٔ (۲.۶.۳) را حل می‌کنیم که بیانگر نوسانگر نامیرای واداشته است. با منظورکردن توصیفهای قبلیمان از نوسانگر هماهنگ، جوابی به‌صورت

$$x(t) = A \cos(\omega t - \phi)$$

را امتحان می‌کنیم. از این‌رو، فرض می‌کنیم حرکت حالت پایا هماهنگ است و در حالت پایا باید به بسامد محرک ω پاسخ دهد. اما، توجه می‌کنیم که پاسخ آن ممکن است در فاز متفاوت با نیروی محرک به مقدار ϕ باشد. ϕ از جمله نتایج شرط اولیه نیست! (منظور این نیست که برای حل حالت پایا دربارهٔ شرایط اولیه صحبت کنیم.) برای ملاحظهٔ اینکه این جواب فرض‌شده تا چه حد

کارآمد است، آن را در معادلهٔ (۲.۶.۳) می‌نشانیم و می‌رسیم به:

$$-m\omega^{۲}A\cos(\omega t-\phi)+kA\cos(\omega t-\phi)=F_{۰}\cos\omega t$$

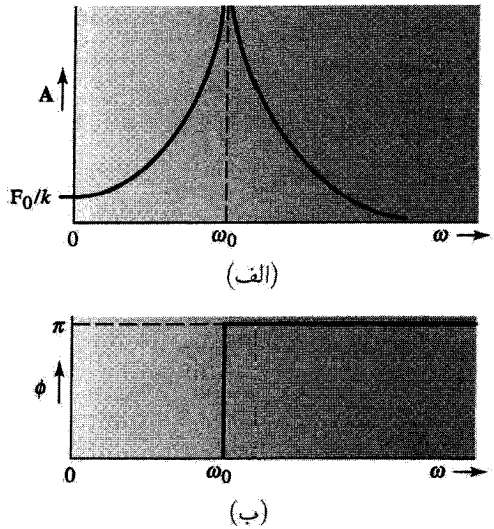
اگر ϕ بتواند فقط دو مقدار ۰ و π را بگیرد، این جواب به کار می‌آید. حال ببینیم این شرط به چه چیزی دلالت دارد. با حل کردن معادلهٔ بالا به‌ازای $\phi=۰$ و π، به ترتیب می‌رسیم به:

$$\begin{aligned} A&=\frac{F_{۰}/m}{(\omega_{۰}^{۲}-\omega^{۲})} && \phi=۰ \quad \omega<\omega_{۰}\\ &=\frac{F_{۰}/m}{(\omega^{۲}-\omega_{۰}^{۲})} && \phi=\pi \quad \omega>\omega_{۰} \end{aligned}$$

منحنی نمایش تغییرات دامنهٔ A و زاویهٔ فاز ϕ را به‌صورت تابعی از ω در شکل ۱.۶.۳ ترسیم می‌کنیم. البته همان‌طورکه از نمودارها می‌توان دید، هنگامی‌که ω از $\omega_{۰}$ عبور می‌کند، دامنه به‌نحوی فوق‌العاده بزرگ می‌شود، و حتی شاید شگفت‌انگیزتر این باشد که جابه‌جایی به‌طور ناپیوسته‌ای از همفازی با نیروی محرک به اختلاف فاز ۱۸۰° با آن هدایت می‌شود. در حقیقت، این نتایج از نظر فیزیکی محال است. اما، وضعیتهای آرمانی از موقعیتهای واقعی به‌شمار می‌آیند. همان‌طور که به‌زودی خواهیم دید، اگر سیستم فقط میرایی کمی در ω نزدیک به $\omega_{۰}$ داشته باشد، دامنه زیاد ولی معین و محدود می‌شود. تغییر فاز «از بین می‌رود» و دیگر ناپیوسته نیست، گرچه این تغییر هنوز هم خیلی ناگهانی است.

(توجه: رفتار سیستم مانند توصیف ما از حدود نوسان کم‌دامنه و پردامنه است.)

اختلافهای فاز ۰° و ۱۸۰° بین جابه‌جایی و نیروی محرک را می‌توان به‌سادگی و روشنی نمایش داد. سر سبکتر یک مداد، قیچی (بسته)، یا قاشق را با دقت بین انگشت اشاره و انگشت شست خود نگاه دارید، آن را فقط چندان فشار دهید که نیفتد. برای نشان‌دادن اختلاف فاز ۰° دست خود را آهسته به‌طور افقی در جهت موازی با خطی که بین انگشت اشاره و انگشت شست تشکیل شده است، به جلو و عقب حرکت دهید. انتهای این آونگ بدلی (آونگ‌گونه) همفاز با حرکت دست و با دامنهٔ بزرگتر از حرکت آن به جلو و عقب تاب می‌خورد. برای ملاحظهٔ تغییر فاز ۱۸۰°، دست خود را نسبتاً سریع (بسامد زیاد) جلو و عقب حرکت دهید. انتهای این آونگ کلاً به‌سختی حرکت می‌کند، اما حرکت کمی که انجام می‌دهد ۱۸۰° با حرکت دست اختلاف فاز دارد.



شکل ۱.۶.۳ (الف) دامنهٔ یک نوسانگر واداشته برحسب ω بدون میرایی. (ب) تأخیر فاز جابه‌جایی نسبت به نیروی محرک برحسب ω.

نوسانگر هماهنگ میرای واداشته

حال جواب حالت پایای معادلهٔ (۱.۶.۳) را جستجو می‌کنیم که مبین نوسانگر هماهنگ میرای واداشته است. حل مستقیم این معادله خیلی آسان است، اما هرگاه به‌جای سینوسها یا کسینوسها از نماهای مختلط بهره گیریم، از لحاظ جبری آسانتر خواهد بود. اولاً نیروی محرک را چنین نمایش می‌دهیم:

$$F = F_0 e^{i\omega t} \qquad (۳.۶.۳)$$

از این‌رو، معادلهٔ (۱.۶.۳) به‌صورت زیر در می‌آید:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_0 e^{i\omega t} \qquad (۴.۶.۳)$$

اکنون متغیر مختلط x، مانند نیروی واردآمدهٔ F، است. بنابر اتحاد اویلر به یادمان می‌آید که جزء حقیقی F عبارت است از $F_0 \cos \omega t$.[۱] اگر از حل معادلهٔ (۴.۶.۳) x را به‌دست آوردیم، جزء حقیقی آن جواب معادلهٔ (۱.۶.۳) خواهد بود. در واقع، وقتی جوابی برای معادلهٔ مختلط بالا (معادلهٔ ۴.۶.۳) پیدا می‌کنیم، می‌توانیم مطمئن شویم که اجزاء حقیقی دو طرف با هم مساوی‌اند

۱. برای اثبات اتحاد اویلر، پیوست د را ملاحظه کنید.

(همان‌طور که اجزاء موهومی برابرند). اجزاء حقیقی با معادلهٔ (۱.۶.۳) معادل‌اند و از این‌رو، این جزء حقیقی است که وضعیت فیزیکی را مشخص می‌کند.

بنابراین، برای رسیدن به جواب حالت پایا، نمای مختلط زیر را امتحان می‌کنیم:

$$x(t) = Ae^{i(\omega t - \phi)} \qquad (۵.۶.۳)$$

در اینجا، دامنهٔ A و اختلاف فاز ϕ ثابتهایی‌اند که باید آنها را تعیین کرد. اگر این «حدس» درست باشد، باید رابطهٔ زیر به‌ازای همهٔ مقادیر t برقرار باشد:

$$m\frac{d^2}{dt^2}Ae^{i(\omega t-\phi)} + c\frac{d}{dt}Ae^{i(\omega t-\phi)} + kAe^{i(\omega t-\phi)} = F_0 e^{i\omega t} \qquad (۶.۶.۳ \text{ الف})$$

با اجرای عملیات نشان‌داده‌شده و حذف ضریب مشترک $e^{i\omega t}$، خواهیم داشت:

$$-m\omega^2 A + i\omega cA + kA = F_0 e^{i\phi} = F_0(\cos\phi + i\sin\phi) \qquad (۶.۶.۳ \text{ ب})$$

با مساوی قراردادن اجزاء حقیقی و موهومی، دو معادله حاصل می‌شود:

$$A(k - m\omega^2) = F_0 \cos\phi$$
$$c\omega A = F_0 \sin\phi \qquad (۷.۶.۳ \text{ الف})$$

با استفاده از اتحاد $\tan\phi = \sin\phi/\cos\phi$، عبارت دوم در بالا را بر اولی تقسیم می‌کنیم و رابطهٔ زیر را به‌ازای زاویهٔ فاز به‌دست می‌آوریم:

$$\tan\phi = \frac{c\omega}{k - m\omega^2} \qquad (۷.۶.۳ \text{ ب})$$

طرفین معادلهٔ (۷.۶.۳ الف) را به توان دو می‌رسانیم و آنها را با هم جمع می‌کنیم، آنگاه با بهره‌گیری از اتحاد $\sin^2\phi + \cos^2\phi = 1$، خواهیم یافت

$$A^2(k - m\omega^2)^2 + c^2\omega^2 A^2 = F_0^2 \qquad (۷.۶.۳ \text{ ج})$$

سپس این معادله را برحسب A، دامنهٔ نوسان حالت پایا، به‌صورت تابعی از بسامد محرک حل کنیم:

$$A(\omega) = \frac{F_0}{[(k - m\omega^2)^2 + c^2\omega^2]^{1/2}} \qquad (۷.۶.۳ \text{ د})$$

به‌کمک کوتاه‌نویسیهای قبلی خود، $\omega_0^2 = k/m$ و $\gamma = c/2m$، می‌توانیم این عبارتها را به شکل دیگر بنویسیم:

$$\tan\phi = \frac{2\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \qquad (۸.۶.۳)$$

$$A(\omega) = \frac{F_0/m}{[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2]^{1/2}} \qquad (۹.۶.۳)$$

منحنی نمایش تغییرات دامنهٔ A و اختلاف فاز ϕ در بالا برحسب بسامد محرک ω (شکل ۲.۶.۳) شباهت جالب آنها را با نمودارهای شکل ۱.۶.۳ برای حالت نوسانگر نامیرا آشکار می‌کند. مطابق این نمودارها، هنگامی‌که جملهٔ میرا به صفر می‌رسد، قلهٔ تشدید بزرگتر و باریکتر خواهد شد، و شدت تغییر فاز تیز افزایش می‌یابد؛ سرانجام در ω_0 به‌ترتیب به بینهایت و ناپیوستگی نزدیک می‌شوند. آنچه از این منحنیها خیلی واضح نیست، از این قرار است که بسامد تشدید دامنه در حضور میرایی (گرچه تغییر فاز همیشه در ω_0 از $\pi/2$ عبور می‌کند)، ω_0 نیست! تشدید دامنه در مقدار دیگری، ω_r، پیش می‌آید که با مشتق‌گیری از $A(\omega)$ و مساوی صفر قراردادن آن می‌تواند محاسبه شود. با حل‌کردن معادلهٔ حاصل برحسب ω، می‌رسیم به:

$$\omega_r^2 = \omega_0^2 - 2\gamma^2 \qquad (۱۰.۶.۳)$$

وقتی γ، جملهٔ میرایی، به صفر میل کند، ω_r به ω_0 نزدیک می‌شود. چون بسامد زاویه‌ای نوسانگر میرایی که، با حرکت آزاد، از رابطهٔ $\omega_d = (\omega_0^2 - \gamma^2)^{1/2}$ به‌دست می‌آید، داریم:

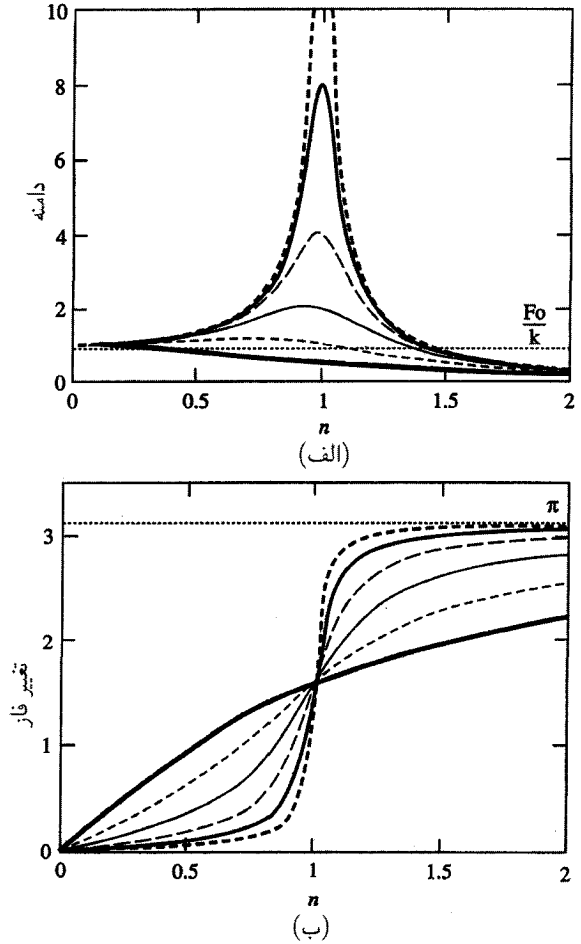
$$\omega_r^2 = \omega_d^2 - \gamma^2 \qquad (۱۱.۶.۳)$$

وقتی میرایی ضعیف است، و فقط با این شرط، بسامد تشدید ω_r، بسامد نوسانگر میرا با حرکت آزادانهٔ ω_d، و ω_0 بسامد طبیعی نوسانگر نامیرا اساساً یکسان‌اند.

هرگاه $\gamma > \omega_0/\sqrt{2}$ در بیشترین میزان میرایی قوی، هیچ تشدید دامنه‌ای رخ نمی‌دهد، زیرا در این صورت دامنه به تابع یکنوای نزولی از ω تبدیل می‌شود. برای ملاحظهٔ این امر، حالت حدی $\gamma^2 = \omega_0^2/2$ را در نظر بگیرید. به این ترتیب، معادلهٔ (۹.۶.۳) چنین می‌شود:

$$A(\omega) = \frac{F_0/m}{[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 2\omega_0^2\omega^2]^{1/2}} = \frac{F_0/m}{(\omega_0^4 + \omega^4)^{1/2}} \qquad (۱۲.۶.۳)$$

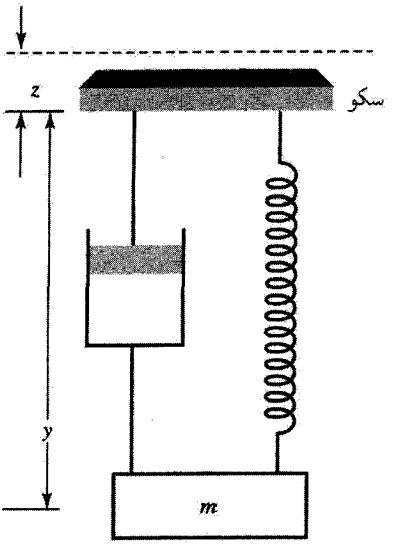
که به‌ازای مقادیر فزایندهٔ ω، با شروع از $\omega = 0$، آشکارا کاهش می‌یابد.



شکل ۲.۶.۳ (الف) دامنهٔ $A/(F_0/k)$ و (ب) تغییر فاز ϕ برحسب بسامد محرک $(n = \omega/\omega_0)$ به‌ازای مقادیر ثابت میرایی γ که با $(i = 0, 1, \cdots, 5)$ $\gamma = 2^{-i}\omega_0$ داده می‌شود. کاهش مقادیر γ با مقادیر بزرگتر A و تغییرات فاز شدیدتر همراه است.

مثال ۱.۶.۳

می‌توان زلزله‌نگار را به‌صورت جرمی آویخته از فنرهایی و یک کمک‌فنر لوله‌ای آویخته از یک سکوی متصل به زمین ساخت (شکل ۳.۶.۳). نوسانهای زمین از سکو به جرم آویخته منتقل می‌شوند، که آن جرم دارای «عقربه‌ای» است که جابه‌جایی جرم را نسبت به سکو ثبت می‌کند. کمک فنر لوله‌ای نیروی میران را تأمین می‌کند. در حالت آرمانی، جابه‌جایی A مربوط به جرم



شکل ۳.۶.۳ الگوی لرزه‌نگار.

نسبت به سکو باید دقیقاً شبیه به جابه‌جایی زمین، D، باشد. معادلهٔ حرکت جرم m را بیابید و پارامترهای ω_0 و γ را چنان برگزینید که مطمئن شوید A در محدودهٔ ده درصدی D واقع می‌شود. فرض کنید در خلال زمین‌لرزه، زمین با حرکت هماهنگ ساده و $f = 10\,\mathrm{Hz}$ نوسان می‌کند.

حل:

ابتدا معادلهٔ حرکت جرم m را می‌نویسیم و حل می‌کنیم. فرض کنید سکو به اندازهٔ z نسبت به مکان اولش پایین برود و m نیز به پایین رفته نسبت به سکو به مکان y برسد. شناور در داخل میران (کمک‌فنر لوله‌ای) به سمت پایین و با سرعت $\dot{z}$ حرکت می‌کند. مادام که ظرف حاوی سیال میران با سرعت $\dot{z} + \dot{y}$ به پایین حرکت می‌کند، نیروی میران تأخیردهنده با $c\dot{y}$ بیان می‌شود. اگر l طول طبیعی فنر باشد، پس

$$F = mg - c\dot{y} - k(y - l) = m(\ddot{y} + \ddot{z})$$

اگر قرار دهیم $y = x + mg/k + l$، در این صورت x جابه‌جایی جرم از مکان تعادلش (شکل ۵.۲.۳) است و برحسب x معادلهٔ حرکت به‌شکل زیر درمی‌آید

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = -m\ddot{z}$$

در مدت لرزش، چون سکو با حرکت هماهنگ ساده با دامنهٔ D و بسامد زاویه‌ای $\omega = ۲\pi f$ نوسان می‌کند، داریم $z = De^{i\omega t}$. بنابراین:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = mD\omega^۲ e^{i\omega t}$$

اگر این معادله را با معادلهٔ (۴.۶.۳) مقایسه کنیم و $F_۰/m$ را $D\omega^۲$ بگیریم؛ جواب دامنهٔ نوسان را که با معادلهٔ (۹.۶.۳) بیان می‌شود می‌توان در اینجا به‌صورت زیر بیان کرد:

$$A = D\omega^۲[(\omega_۰^۲ - \omega^۲)^۲ + ۴\gamma^۲\omega^۲]^{-۱/۲}$$

با تقسیم‌کردن صورت و مخرج رابطهٔ بالا بر $\omega^۲$، می‌رسیم به

$$A = D\left[\left(\frac{\omega_۰^۲}{\omega^۲} - ۱\right)^۲ + ۴\frac{\gamma^۲}{\omega^۲}\right]^{-۱/۲}$$

با بسط‌دادن جمله در مخرج، خواهیم داشت:

$$A = D\left[۱ + \frac{\omega_۰^۴}{\omega^۴} + \frac{۲}{\omega^۲}(۲\gamma^۲ - \omega_۰^۲)\right]^{-۱/۲}$$

می‌توانیم اطمینان یابیم که به‌ازای مقادیر مناسب ω، با قراردادن $۲\gamma^۲ - \omega_۰^۲ = ۰$ و $\omega_۰/\omega < ۰$، داریم $A \approx D$. مثلاً، برای اختلاف کسری بین A و D به اندازهٔ ۱۰٪، باید

$$\frac{D-A}{D} = ۱ - \left(۱ + \frac{\omega_۰^۴}{\omega^۴}\right)^{-۱/۲} \approx \frac{۱}{۲}\frac{\omega_۰^۴}{\omega^۴} < \frac{۱}{۱۰} \quad \text{یا} \quad \omega_۰ < ۰٫۸۴\omega$$

منظور این است که بسامد حرکت آزاد نوسانگر عبارت است از

$$f_۰ = \omega_۰/۲\pi \leq ۸\text{Hz}$$

پارامتر میرایی باید به این قرار باشد:

$$\gamma = \omega_۰/\sqrt{۲} = ۳۶$$

نوعاً، برای تأمین این مقدار، باید از فنرهای «نرم» و جرمی سنگین بهره گرفت.

دامنهٔ نوسان در قلهٔ تشدید

دامنهٔ حالت پایا در بسامد تشدید، که آن را $A_{\max}$ خواهیم نامید، از معادلات (۹.۶.۳) و (۱۰.۶.۳) به‌دست می‌آیند. نتیجه عبارت است از

$$A_{\max} = \frac{F_\circ/m}{۲\gamma\sqrt{\omega_\circ^۲ - \gamma^۲}} \qquad \text{(الف ۱۳.۶.۳)}$$

در حالت میرایی ضعیف، می‌توانیم از $\gamma^۲$ چشم بپوشیم و بنویسیم

$$A_{\max} \simeq \frac{F_\circ}{۲\gamma m\omega_\circ} \qquad \text{(ب ۱۳.۶.۳)}$$

به این ترتیب، هرگاه ضریب میرایی γ خیلی کوچک باشد، دامنهٔ نوسان واداشته در حالت تشدید خیلی بزرگ می‌شود، و برعکس. در سیستمهای مکانیکی ممکن است دامنه‌های تشدیدی بزرگ مطلوب باشد، شاید هم به این نوع دامنه‌ها نیازی نباشد. مثلاً، در مورد موتورهای الکتریکی پایه‌های لاستیکی یا فنری را برای به‌حداقل رساندن انتقال ارتعاش به کار می‌برند. سفتی این پایه‌ها را چنان اختیار می‌کنند که اطمینان حاصل شود بسامد تشدید حاصل در آنها بسامد کار موتور خیلی تفاوت دارد.

تیزی تشدید: ضریب کیفیت

تیزی قلهٔ تشدید در موارد زیادی مورد توجه است. حالت میرایی ضعیف، $\gamma \ll \omega_\circ$، را درنظر می‌گیریم، در این صورت، در عبارت مربوط به دامنهٔ حالت پایا (معادلهٔ ۹.۶.۳)، می‌توانیم جایگذاریهای زیر را انجام دهیم:

$$\omega_\circ^۲ - \omega^۲ = (\omega_\circ + \omega)(\omega_\circ - \omega)$$

$$\simeq ۲\omega_\circ(\omega_\circ - \omega) \qquad \text{(الف ۱۴.۶.۳)}$$

$$۴\gamma^۲\omega^۲ \simeq ۴\gamma^۲\omega_\circ^۲ \qquad \text{(ب ۱۴.۶.۳)}$$

این عبارتها، همراه با عبارتی مربوط به $A_{\max}$، این امکان را برای ما فراهم می‌آورند که معادلهٔ دامنه را به شکل تقریبی زیر بنویسیم:

$$A(\omega) \simeq \frac{A_{\max}\gamma}{\sqrt{(\omega_\circ - \omega)^۲ + \gamma^۲}} \qquad \text{(۱۵.۶.۳)}$$

معادلهٔ بالا نشان می‌دهد که به‌ازای $|\omega_\circ - \omega| = \gamma$، یا معادل آن، هرگاه

$$\omega = \omega_\circ \pm \gamma \qquad (۱۶.۶.۳)$$

در این صورت،

$$A^۲ = \frac{۱}{۲} A^۲_{\max} \qquad (۱۷.۶.۳)$$

منظور این است که γ معیار پهنای منحنی تشدید است. به این ترتیب، ۲γ عبارت است از اختلاف بسامد بین نقاطی که در آن نقاط انرژی با ضریب $\frac{۱}{۲}$ کمتر از انرژی تشدید است، زیرا انرژی با $A^۲$ متناسب است.

ضریب کیفیت، Q، بنا بر تعریفش در معادلهٔ (۲۴.۴.۳)، که آهنگ کاهش انرژی در نوسانگر هماهنگ میرای ناواداشته شاخص آن است، تیزی قلهٔ تشدید نوسانگر واداشته را نیز مشخص می‌کند. در حالت میرایی ضعیف، Q را می‌توان چنین بیان کرد:

$$Q = \frac{\omega d}{۲\gamma} \approx \frac{\omega_\circ}{۲\gamma} \qquad (۱۸.۶.۳)$$

به‌این ترتیب، پهنای کل $\Delta\omega$ در نقاط نیم‌انرژی، تقریباً عبارت است از

$$\Delta\omega = ۲\gamma \simeq \frac{\omega_\circ}{Q} \qquad (۱۹.۶.۳ \text{ الف})$$

یا، چون $\omega = ۲\pi f$، عبارت زیر، پهنای قلهٔ تشدید را به‌صورت کسری به ما می‌دهد:

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_\circ} = \frac{\Delta f}{f_\circ} \simeq \frac{۱}{Q} \qquad (۱۹.۶.۳ \text{ ب})$$

هرگاه به این رابطهٔ آخری که برحسب Q است سهل‌انگارانه بنگریم، خصوصیتی مهم از پس‌خور (فیدبک) و کنترل در سیستمهای الکتریکی را در آن می‌بینیم. در بسیاری از سیستمهای الکتریکی لازم است که بسامد به‌خوبی تعیین و به‌دقت ثابت نگاه داشته شود. نوسانگرهای کوارتز با Q بالا (از مرتبهٔ $۱۰^۵$)، که در بسامد تشدیدشان ارتعاش می‌کنند، معمولاً به‌صورت عنصر کنترل در مدارهای فیدبک برای تأمین پایانی بسامد به‌کار برده می‌شوند. Q بالا به تشدید تیز می‌انجامد. اگر بسامد مدار تحت کنترل توسط نوسانگر کوارتز شروع به انحراف یا تغییر، به میزان δf از قلهٔ تشدید، کند، مقدار فیدبکی که از تیزی تشدید بهره می‌گیرد، مدار را به‌طور دقیق به سوی بسامد تشدید برمی‌گرداند. هرچه Q نوسانگر بالاتر، و بنابراین δf باریکتر، باشد، خروجی پایاتری به بسامد مدار می‌دهد.

اختلاف فاز ϕ

معادلهٔ (۸.۶.۳) اختلاف فاز، ϕ، بین نیروی محرک واردآمده و جواب حالت پایا را به‌دست می‌دهد:

$$\phi = \tan^{-1}\left[\frac{2\gamma\omega}{(\omega_0^2 + \omega^2)}\right] \qquad (۲۰.۶.۳)$$

در شکل ۲.۶.۳ (ب)، منحنی نمایش تغییرات این اختلاف فاز را مشاهده می‌کنید. دیدیم که برای نوسانگر نامیرای واداشته، به‌ازای $\omega < \omega_0$ مقدار ϕ صفر و به‌ازای $\omega > \omega_0$ مقدار ϕ برابر 180° بود. این مقادیر حدود بسامد بالا و پایین بسامد حرکت واقعی‌اند. با همهٔ این احوال، ϕ به‌طور ناپیوسته در $\omega = \omega_0$ تغییر کرد. همچنین، این آرمانی‌سازی حرکت واقعی است که در آن انتقال بین دو حد هموار است، اما برای میرایی خیلی کوچک هنگامی که ω در میان ناحیه‌ای در محدودهٔ $\pm\gamma$ حول ω_0 از یک حد به حد دیگر عبور می‌کند، اساساً تغییر خیلی ناگهان (زیاد) است.

در بسامدهای محرک پایین ω_0، $\omega \ll \omega_0$، می‌بینیم که $\phi \to 0^\circ$ و پاسخ تقریباً با نیروی محرک همفاز است. با بررسی دامنهٔ نوسان (معادلهٔ ۹.۶.۳) می‌توان دید که بیان بالا معقول است. دامنه در حد بسامد پایین، به‌صورت زیر در می‌آید:

$$A(\omega \to 0) \approx \frac{F_0/m}{\omega_0^2} = \frac{F_0/m}{k/m} = \frac{F_0}{k} \qquad (۲۱.۶.۳)$$

به بیان دیگر، درست همان‌طور که هنگام بحث مقدماتیمان راجع به نوسانگر واداشته گفتیم، فنر، و نه جرم یا اصطکاک، جواب را کنترل می‌کند؛ جرم را نیرویی که برخلاف نیروی تأخیری فنر وارد می‌آید، به‌طور آهسته به جلو و عقب هل می‌دهد.

در حالت تشدید پاسخ می‌تواند بسیار بزرگ باشد. چنین چیزی، از دیدگاه فیزیکی، چگونه امکان‌پذیر است؟ با فکرکردن به هل‌دادن کودکی که روی تاب نشسته، شاید بتوان در این خصوص به اطلاعی دست یافت. این اتفاق چگونه می‌افتد؟ واضح است که، هرکس تابی را هل می‌دهد دیگر خودش در پشت سر کودک نمی‌ایستد، و وقتی تاب برگشت آن را دوباره هل می‌دهد. آن شخص در همان جهت که تاب حرکت می‌کند لزوماً همفاز با سرعت آن، مستقل از مکانش، آن را هل می‌دهد. برای هل‌دادن یک کودک، معمولاً در کنار می‌ایستد و هنگامی تاب از مکان تعادلش می‌گذرد، به آن هل کوچکی به طرف جلو می‌دهد، و این هنگامی است که سرعت آن بیشینه و جابه‌جاییش صفر است! در واقع، این روش بهینه برای ایجاد شرط تشدید است؛ نیرویی نسبتاً جزئی، که از روی تعقل وارد آید، می‌تواند نوسان پردامنه‌ای ایجاد کند. دامنهٔ بیشینه در حالت تشدید با معادلهٔ (۱۳.۶.۳ الف) و در حالت میرایی ضعیف، به‌کمک معادلهٔ (۱۳.۶.۳ ب)، یعنی

$A_{\max} \approx F_\circ/۲\gamma m\omega_\circ$، بیان می‌شود اما از عبارت بالا برای دامنه، به‌ازای $\omega \to \circ$، داریم $A(\omega \to \circ) \approx F_\circ/m\omega_\circ^۲$. از این‌رو، نسبت آنها عبارت است از

$$\frac{A_{\max}}{A(\omega \to \circ)} = \frac{F_\circ/(۲\gamma m\omega_\circ)}{F_\circ/(m\omega_\circ^۲)} = \frac{\omega_\circ}{۲\gamma} = \omega_\circ \tau = Q \qquad (۲۲.۶.۳)$$

نتیجه صرفاً Q نوسانگر را به‌دست می‌دهد. فرض کنید برای کودک سوار بر تاب باید چه اتفاقی بیفتد، در صورتی‌که هیچ اتلاف اصطکاکی وجود نداشته باشد! ما باید به دادن مقادیر کوچکی انرژی به تاب در هر چرخهٔ حرکت ادامه دهیم، بدون اینکه در هر چرخهٔ حرکتی انرژی تلف شود، در این صورت دامنه در مدت کوتاهی تا ابعادی فاجعه‌آمیز زیاد می‌شود.

حال به اختلاف فاز، در $\phi = \pi/۲$ و $\omega = \omega_\circ$، می‌پردازیم. به‌این ترتیب، جابه‌جایی به اندازهٔ ۹۰° نسبت به نیروی محرک «تأخیر دارد» یا از آن عقبتر است. نظر به بحث پیشین، این موضوع باید معنای فیزیکی داشته باشد. زمان بهینه برای تخلیه‌کردن انرژی به نوسانگر وقتی است که از وضعیت تعادل (صفر) با سرعت بیشینه می‌گذرد، یعنی وقتی توان ورودی $\mathbf{F} \cdot \mathbf{v}$ بیشینه باشد. مثلاً، جزء حقیقی معادلهٔ (۵.۶.۳) دامنهٔ نوسانگر را به‌دست می‌دهد:

$$x(t) = A(\omega) Re(e^{i(\omega t - \phi)}) = A(\omega)\cos(\omega t - \phi) \qquad (۲۳.۶.۳)$$

و در حالت تشدید، برای میرایی کم‌دامنه، از این قرار می‌شود:

$$\begin{aligned} x(t) &= A(\omega_\circ)\cos(\omega_\circ t - \pi/۲) \\ &= A(\omega_\circ)\sin\omega_\circ t \end{aligned} \qquad (۲۴.۶.۳)$$

به‌طور کلی، سرعت عبارت است از

$$\dot{x}(t) = -\omega A(\omega)\sin(\omega t - \phi) \qquad (۲۵.۶.۳)$$

که در حالت تشدید، خواهیم داشت

$$\dot{x}(t) = \omega_\circ A(\omega_\circ)\cos\omega_\circ t \qquad (۲۶.۶.۳)$$

چون نیروی محرک در حالت تشدید با این رابطه بیان می‌شود

$$F = F_\circ Re(e^{i\omega_\circ t}) = F_\circ \cos\omega_\circ t \qquad (۲۷.۶.۳)$$

می‌بینیم که نیروی محرک با سرعت نوسانگر همفاز، یا ۹۰° از جابه‌جایی پیش، است (نسبت به آن تقدم دارد).

سرانجام، به‌ازای مقادیر بزرگ ω، $\omega \gg \omega_0$ و $\phi \to \pi$، و جابه‌جایی با نیروی محرک ۱۸۰°C اختلاف فاز دارد. دامنهٔ جابه‌جایی از این قرار خواهد شد

$$A(\omega \gg \omega_0) \approx \frac{F_0}{m\omega^2} \qquad (۲۸.۶.۳)$$

در این حالت، دامنه به‌صورت $1/\omega^2$ کاهش می‌یابد. جرم اساساً مانند شیئی آزاد پاسخ می‌دهد که به‌سرعت توسط نیروی واردآمده به جلو و عقب حرکت نوسانی اجرا می‌کند. تأثیر عمدهٔ فنر از این قرار است که باعث می‌شود جابه‌جایی از نیروی محرک به اندازهٔ ۱۸۰° عقب افتد.

شباهتهای مکانیکی-الکتریکی

بین مداری الکتریکی متشکل از عناصر القاگر، خازن، و مقاومت که در آن جریان الکتریکی برقرار می‌شود، با سیستم مکانیکی متحرک شامل بر جرمها و فنرها با نیروهای اصطکاک از نوعی که قبلاً مورد مطالعه قرارگرفت، تشابه دقیقی برقرار است. بنابراین، اگر جریان $i = dq/dt$ (q بار الکتریکی) از یک القاگر، L، عبورکند، اختلاف پتانسیل دو سر القاگر $L\ddot{q}$ خواهد بود. انرژی ذخیره‌شده در آن $\frac{1}{2}L\dot{q}^2$ می‌شود. از این‌رو، القاگر و بار، به‌ترتیب، با جرم و جابه‌جایی مشابه‌اند، و اختلاف پتانسیل به نیرو شباهت دارد. به‌همین‌ترتیب، اگر خازن C حامل بار q باشد، اختلاف پتانسیل دو سر آن $C^{-1}q$، و انرژی ذخیره‌شدهٔ آن $\frac{1}{2}C^{-1}q^2$ است. در نتیجه، می‌بینیم که معکوس C مشابه ثابت سفتی فنر است. سرانجام، به‌ازای جریان الکتریکی i که از مقاومت R عبور می‌کند، اختلاف پتانسیل عبارت است از $iR = \dot{q}R$، و آهنگ اتلاف انرژی $i^2R = \dot{q}^2R$ خواهد بود که مشابه کمیت $c\dot{x}^2$ در سیستم مکانیکی است. در جدول ۱.۶.۳ جمع‌بندی این وضعیت را مشاهده می‌کنید.

مثال ۲.۶.۳

ضریب میرایی نهایی، γ، در یک سیستم تعلیق فنری یک‌دهم مقدار بحرانی است. اگر بسامد نامیرا ω_0 باشد، پیدا کنید: (الف) بسامد تشدید؛ (ب) ضریب کیفیت؛ (ج) زاویهٔ فاز ϕ وقتی سیستم با بسامد $\omega = \omega_0/2$ واداشته می‌شود؛ و (د) دامنهٔ حالت پایا در این بسامد.

حل:

(الف) داریم: $\gamma = \gamma_{\text{بحرانی}}/10 = \omega_0/10$. از معادلهٔ (۷.۴.۳)، و همچنین معادلهٔ (۱۰.۶.۳)،

جدول ۱.۶.۳ تشابه‌های مکانیکی-الکتریکی

مکانیکی		الکتریکی	
جابه‌جایی	x	بار	q
سرعت	$\dot{x}$	جریان	$\dot{q}=i$
جرم	m	القاییدگی	L
سفتی	k	عکس ظرفیت	C^{-1}
مقاومت میران	c	مقاومت	R
نیرو	F	اختلاف پتانسیل	V

$$\omega_r=\left[\omega_\circ^2-2(\omega_\circ/10)^2\right]^{1/2}=\omega_\circ(0{,}98)^{1/2}=0{,}99\omega_\circ$$

(ب) این سیستم را می‌توان ضعیف‌میرا دانست؛ بنابراین، از معادلهٔ (۱۸.۶.۳)،

$$Q\simeq\frac{\omega_\circ}{2\gamma}=\frac{\omega_\circ}{2(\omega_\circ/10)}=5$$

(ج) از معادلهٔ (۸.۶.۳) داریم،

$$\phi=\tan^{-1}\left(\frac{2\gamma\omega}{\omega_\circ^2-\omega^2}\right)=\tan^{-1}\left[\frac{2(\omega_\circ/10)(\omega_\circ/2)}{\omega_\circ^2-(\omega_\circ/2)^2}\right]$$
$$=\tan^{-1}0{,}133=7{,}6^\circ$$

(د) از معادلهٔ (۹.۶.۳) ابتدا مقدار مخرج تشدید را محاسبه می‌کنیم:

$$D(\omega=\omega_\circ/2)=\left[(\omega_\circ^2-\omega_\circ^2/4)^4+4(\omega_\circ/10)^2(\omega_\circ/2)^2\right]^{1/2}$$
$$=\left[(0{,}16)+(1/100)\right]^{1/2}\omega_\circ^2=0{,}7566\omega_\circ^2$$

در اینجا، دامنه به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$A(\omega=\omega_\circ/2)=\frac{F_\circ/m}{0{,}7566\omega_\circ^2}=1{,}322\frac{F_\circ}{m\omega_\circ^2}$$

توجه کنید که ضریب $(F_\circ/m\omega_\circ^2)=F_\circ/k$ دامنهٔ حالت پایا به‌ازای بسامد تحریک صفر است.

*۷.۳ نوسانگر ناخطی: روش تقریبهای متوالی

وقتی سیستمی از وضعیت تعادل خود جابه‌جا می‌شود، ممکن است نیروی بازگردان به شیوه‌ای غیر از تناسب مستقیم با جابه‌جایی تغییر کند. مثلاً، ممکن است فنری دقیقاً از قانون هوک پیروی نکند؛ همچنین، در حالتهای فیزیکی متعدد، تابع نیروی بازگردان ذاتاً غیرخطی است، این حالت در مثال ساده‌ای که بعداً در خصوص آونگ ساده می‌آوریم، مورد بحث قرار خواهد گرفت.

در حالت ناخطی نیروی بازگردان را می‌توان از این قرار بیان کرد:

$$F(x) = -kx + \epsilon(x) \qquad (۱.۷.۳)$$

که در آن، تابع $\epsilon(x)$ عزیمت از وضعیت خطی را نشان می‌دهد. این تابع لزوماً برحسب متغیر جابه‌جایی x از مرتبهٔ درجهٔ دوم یا بالاتر است. معادلهٔ دیفرانسیل حرکت تحت تأثیر چنین نیرویی را، به فرض آنکه هیچ نیروی خارجی دیگری به سیستم وارد نیاید، می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$m\ddot{x} + kx = \epsilon(x) = e_۲x^۲ + \varepsilon_۳x^۳ + \cdots \qquad (۲.۷.۳)$$

در اینجا، $\epsilon(x)$ را به‌صورت توانی بسط داده‌ایم.

معمولاً برای رسیدن به جواب معادله‌ای از نوع بالا به بهره‌گیری از روشهای تقریبی نیاز داریم. برای تشریح یکی از این روشها، حالت خاصی را که در آن فقط جملهٔ مکعبی $\epsilon(x)$ حائز اهمیت باشد، اختیار می‌کنیم. در این صورت خواهیم داشت:

$$m\ddot{x} + kx = \epsilon_۳x^۳ \qquad (۳.۷.۳)$$

بعد از تقسیم طرفین بر m مجهول‌معاونگیری به‌صورت $\omega_۰^۲ = k/m$ و $\epsilon_۳/m = \lambda$، می‌توانیم بنویسیم:

$$\ddot{x} + \omega_۰^۲x = \lambda x^۳ \qquad (۴.۷.۳)$$

جواب را با روش تقریبهای متوالی به‌دست می‌آوریم.

حال ما می‌دانیم که به‌ازای $\lambda = ۰$، جواب عبارت است از $x = A\cos\omega_۰t$. فرض کنید تقریب نخست را به‌همین شکل محاسبه کنیم:

$$x = A\cos\omega t \qquad (۵.۷.۳)$$

همان‌طورکه خواهیم دید، ω کاملاً هم با ω_0 مساوی نیست. جواب آزمونی خودمان را در معادلهٔ دیفرانسیل وارد می‌کنیم، می‌رسیم به:

$$-A\omega^2\cos\omega t + A\omega_0^2\cos\omega t = \lambda A^3\cos^3\omega t = \lambda A^3\left(\frac{3}{4}\cos\omega t + \frac{1}{4}\cos 3\omega t\right) \qquad (۶.۷.۳ \text{ الف})$$

در مرحلهٔ آخر، از اتحاد مثلثاتی $\cos^3 u = \frac{3}{4}\cos u + \frac{1}{4}\cos 3u$ بهره برده‌ایم، که این اتحاد با بهره‌گیری از رابطهٔ $\cos^3 u = [(e^{iu} + e^{-iu})/2]^3$ به‌آسانی حاصل می‌شود. پس از جابه‌جایی و دسته‌بندی جمله‌ها، می‌رسیم به:

$$\left(-\omega^2 + \omega_0^2 - \frac{3}{4}\lambda A^2\right) A\cos\omega t - \frac{1}{4}\lambda A^3\cos 3\omega t = 0 \qquad (۶.۷.۳ \text{ ب})$$

با کنارنهادن جواب بدیهی $A = 0$، می‌بینیم که جواب آزمونی ما دقیقاً در معادلهٔ دیفرانسیل صدق نمی‌کند. اما، با صفر قراردادن کمیت داخل پرانتز، تقریبی به مقدار ω به‌دست می‌آید که به‌ازای مقادیر کوچک λ صادق است. با این عمل، بسامد نوسانگر آزاد ناخطی متحرک به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\omega^2 = \omega_0^2 - \frac{3}{4}\lambda A^2 \qquad (۷.۷.۳ \text{ الف})$$

$$\omega = \omega_0\left(1 - \frac{3\lambda A^2}{4\omega_0^2}\right)^{1/2} \qquad (۷.۷.۳ \text{ ب})$$

به‌طوری که ملاحظه می‌کنیم، ω تابعی از دامنهٔ A است.

برای دستیابی به جوابی بهتر، باید جملهٔ نوسانی معادلهٔ (۶.۷.۳ ب) شامل هماهنگ سوم $\cos 3\omega t$، را در محاسبه وارد کنیم. بنابراین، جواب آزمونی دوم از این قرار خواهد بود:

$$x = A\cos\omega t + B\cos 3\omega t \qquad (۸.۷.۳)$$

این عبارت را در معادلهٔ دیفرانسیل قرار می‌دهیم، بعد از دسته‌بندی جملات، می‌رسیم به:

$$(-\omega^2 + \omega_0^2 - \frac{3}{4}\lambda A^2)A\cos\omega t + (-9B\omega^2 + \omega_0^2 B - \frac{1}{4}\lambda A^3)\cos 3\omega t \qquad (۹.۷.۳ \text{ الف})$$

$$+(\omega t \text{ جملات شامل } B\lambda \text{ و مضربهای بالاتر}) = 0$$

اگر کمیت داخل پرانتز اول را صفر بگیریم، همان مقدار ω را که در معادلهٔ (۷.۷.۳) یافتیم، به‌دست می‌دهد. اگر کمیت داخل پرانتز دوم را صفر بگیریم، مقداری برای ثابت B به‌دست می‌آوریم، یعنی

$$B = \frac{\frac{1}{4}\lambda A^3}{-9\omega^2 + \omega_0^2} = \frac{\lambda A^3}{-36\omega_0^2 + 27\lambda A^2} \simeq -\frac{\lambda A^3}{36\omega_0^2} \qquad (۹.۷.۳ \text{ ب})$$

که در اینجا فرض کرده‌ایم جملهٔ شامل λA^2 در مخرج چندان کوچک است که می‌توان از آن چشم پوشید. تقریب دوم را می‌توان به‌صورت زیر بیان کرد:

$$x = A\cos\omega t - \frac{\lambda A^3}{36\omega_0^2}\cos 3\omega t \qquad (۱۰.۷.۳)$$

در همین‌جا توقف می‌کنیم. اما این عمل می‌تواند تا به‌دست‌آمدن تقریب سوم تکرار شود، و به‌همین‌ترتیب الی آخر.

تحلیل بالا، قطعاً خیلی نارساست، ولی دو جنبهٔ اساسی نوسان آزاد تحت تأثیر نیروی بازگردان ناخطی را بروز می‌دهد: یعنی می‌توان فهمید که زمان تناوب نوسان تابعی از دامنهٔ ارتعاش است، و نوسان دقیقاً سینوسی نیست بلکه می‌توان آن را برهم‌نهی آمیخته هماهنگها تلقی کرد. می‌توان نشان داد که ارتعاش سیستم ناخطی که به‌وسیلهٔ نیروی محرک سینوسی خالص واداشته‌شده نیز واپیچیده خواهد بود؛ یعنی هماهنگها را در برخواهد گرفت. مثلاً، بلندگوی دستگاه استریو ممکن است رو و بالای آنچه سیستم تقویت‌کنندهٔ الکترونیکی وارد کرده است، واپیچش (هماهنگ) ایجاد کند.

مثال ۱.۷.۳ آونگ ساده به‌عنوان نوسانگر ناخطی

در مثال ۲.۲.۳ با بهره‌گیری از تقریب $\sin\theta \simeq \theta$ آونگ ساده را به‌عنوان نوسانگر هماهنگ خطی بررسی کردیم. در واقع سینوس را می‌توان به‌صورت یک سری توانی بسط داد

$$\sin\theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \cdots$$

بنابراین معادلهٔ دیفرانسیل آونگ ساده، $\ddot{\theta} + (g/l)\sin\theta = 0$، را می‌توان به‌شکل معادلهٔ (۲.۷.۳) نوشت، و فقط با نگه‌داشتن جملات خطی و درجهٔ سوم در بسط سینوس، معادلهٔ دیفرانسیل به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2\theta = \frac{\omega_0^2}{3!}\theta^3$$

که در آن $\omega_0^2 = g/l$. این معادله از نظر ریاضی با معادلهٔ (۴.۷.۳) با ثابت $\lambda = \omega_0^2/3! = \omega_0^2/6$ یکسان است. در این صورت، از عبارت تغییریافتهٔ مربوط به بسامد زاویه‌ای، معادلهٔ (۷.۷.۳ ب)،

خواهیم داشت:

$$\omega = \omega_0 \left[1 - \frac{3(\omega_0^2/6)A^2}{4\omega_0^2} \right]^{1/2} = \omega_0 \left(1 - \frac{A^2}{8} \right)^{1/2}$$

و زمان تناوب آونگ ساده به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \left(1 - \frac{A^2}{8} \right)^{-1/2} = T_0 \left(1 - \frac{A^2}{8} \right)^{-1/2}$$

در اینجا، A دامنهٔ نوسان برحسب رادیان است. روش تقریبی ما نشان می‌دهد که زمان تناوب مربوط به دامنهٔ غیرصفر به اندازهٔ ضریب $(1 - A^2/8)^{-1/2}$ نسبت به زمان تناوبی که قبلاً با فرض $\sin\theta = \theta$ محاسبه کرده بودیم طولانیتر است. مثلاً، اگر آونگ با دامنهٔ $\pi/2 = 90^\circ$ نوسان کند (دامنهٔ نسبتاً بزرگ)، این ضریب عبارت است از $(1 - \pi^2/32)^{-1/2} = 1.2025$. از این‌رو، دورهٔ تناوب حدود ۲۰ درصد طولانیتر از دورهٔ تناوب مربوط به دامنهٔ کوچک است. این زمان تناوب نسبت به افزایش مربوط به میرایی آونگ بیسبال، مثال ۳.۴.۳، به نحو چشمگیری بزرگتر است.

* نوسانگر خودمحدودساز: حل عددی

بعضی نوسانگرهای ناخطی آثاری از خود بروز می‌دهند که نوسانگری خطی نمی‌تواند آنها را پدید آورد؛ از جملهٔ این آثار چرخهٔ محدود است، یعنی اینکه نوسانهای آن خودمحدودسازند. مثالهایی از جمله نوسانگرهای ناخطی که رفتار خودمحدودساز بروز می‌دهند، نوسانگر وان‌در پل[1] است که به‌وسیلهٔ وان‌در پل در طی پژوهشهایش در زمینهٔ مدارهای لامپی خلأ به‌طور گسترده بررسی شده است؛ و دیگری نوسانگر مکانیکی سادهٔ دستخوش اصطکاک خشک (مسئلهٔ کامپیوتری ۵.۳) است که به‌وسیلهٔ لُرد ریلی طی تحقیقاتش راجع به ارتعاشات تارهای ویولن واداشته توسط تارهای آرشه (کمان)، مطالعه شده است.[2] در اینجا، در خصوص نمونه‌ای از معادلهٔ حرکت وان‌در پل گفتگو می‌کنیم که نوسانگری ناخطی را توصیف می‌کند که رفتار خودمحدودساز بروز می‌دهد و چرخهٔ حدیش را می‌توانیم به‌جای محاسبهٔ عددی به‌دقت محاسبه کنیم. نوسانگری را در نظر بگیرید که

1. B. van der Pol, *Phil Mag.* 2, 978 (1926), T. L. Chow, *Classical Mechanics,* New York, NY Wiley, 1995.

2. P. Smith and R. Smith, *Mechanics*, Chichester, England Wiley, 1990.

دستخوش نیروی میرانی ناخطی باشد، که معادلهٔ کلی حرکتش عبارت است از

$$\ddot{x} - \gamma \left(A^2 - x^2 - \frac{\dot{x}^2}{\beta^2} \right) \dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \qquad (۱۱.۷.۳)$$

معادلهٔ وان در پل با معادلهٔ (۱۱.۷.۳) بدون جملهٔ سوم در داخل پرانتز، ضریب میرایی وابسته به سرعت، $\dot{x}^2/\beta^2$ (مسئلهٔ ۳.۳ کامپیوتری)، یکسان است. با اندکی بازآرایی جمله‌های عبارت بالا و نشاندن متغیر فضای‌ـفاز، y، جای $\dot{x}$ چرخهٔ حدی ظاهر می‌شود:

$$\dot{y} - \gamma A^2 \left[1 - \left(\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{A^2 \beta^2} \right) \right] y + \omega_0^2 x = 0 \qquad (۱۲.۷.۳)$$

جملهٔ میرای ناخطی برای تمام نقاط (x, y) داخل بیضی که رابطهٔ زیر آن را می‌دهد، منفی است:

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{A^2 \beta^2} = 1 \qquad (۱۳.۷.۳)$$

این رابطه برای نقاط روی بیضی صفر و برای نقاط خارج آن مثبت است. به این جهت، حالت نوسانگر هرچه باشد (که از طریق مکان جاریش در فضای فاز توصیف می‌شود)، به‌طرف حالتهایی رانده می‌شود که نقاط فضای فازی آنها روی بیضی قرار می‌گیرد. به‌بیان دیگر، هرگونه حرکت آغاز شود، نوسانگر سرانجام با حرکت هماهنگ ساده با دامنهٔ A ارتعاش می‌کند وگفته می‌شود رفتارش «خودمحدودساز» است و این بیضی در فضای فاز چرخهٔ حدّی آن نامیده می‌شود. نوسانگر وان‌در پل به این طریق رفتار می‌کند، اما چرخهٔ حدیش را به‌طور خیلی شفاف نمی‌توان دید.

حل کامل فقط می‌تواند به‌طور عددی اجرا شود. ما برای انجام این کار از برنامهٔ مَتکد استفاده کرده‌ایم. برای آسانی محاسبه، ضرایب A، β، و ω_0 را یک قرار داده‌ایم. این مقادیر بیضی چرخهٔ حدی را به دایره‌ای به شعاع یکه تبدیل می‌کند و بسامدهای زاویه‌ای ارتعاش مقیاس ω_0 را می‌دهند. بنابراین، معادلهٔ (۱۲.۷.۳) به شکل ساده زیر در می‌آید:

$$\dot{y} - \gamma(1 - x^2 - y^2)y + x = 0 \qquad (۱۴.۷.۳)$$

یکی از روشهای کلاسیکی برای حل یک تک معادلهٔ دیفرانسیل مرتبهٔ دوم از این قرار است که آن را به سیستم معادلی از معادلات مرتبهٔ اول تبدیل و بعد روش رونج‌ـکوتا یا روشی معادل را برای آنها به‌کارگیریم (پیوست ط). با نشاندن y به‌جای $\dot{x}$، دو معادلهٔ دیفرانسیل مرتبهٔ اول را به‌صورت زیر به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -x + \gamma(1 - x^2 - y^2)y \end{aligned} \qquad (۱۵.۷.۳)$$

در واقع، لازم نیست این معادلات به‌طور عددی حل شوند؛ به‌آسانی می‌توان بررسی کرد که $x = \cos t$ و $y = -\sin t$، جوابهایی تحلیلی‌اند که حرکت محدودکنندهٔ نهایی روی دایره‌ای به شعاع واحد، $x^۲ + y^۲ = ۱$، را نشان می‌دهند. اما، اگر اجازه دهید حرکت از مقادیری دلخواه آغاز شود که در داخل و خارج چرخهٔ حدی قرار دارند، جذابتر خواهد بود؛ آنگاه ببینید که سیستم به سوی چرخهٔ حدیش بازگردانده می‌شود. این رفتار فقط با حل‌کردن معادلات عددی، مثلاً با بهره‌گیری از مت‌کد، می‌تواند مشاهده شود.

مانند فصل قبل، از معادلهٔ حل‌کن مت‌کد *rkfixed*، که از روش مرتبهٔ چهارم رونج‌ـکوتا برای حل معادلات دیفرانسیل مرتبهٔ اول استفاده می‌کند، بهره می‌گیریم. متغیرهای x و y را در مت‌کد به‌صورت $x_۱$ و $x_۲$ که مؤلفه‌های بردار دو بعدی $\mathbf{x} = (x_۱, x_۲)$ هستند، نمایش می‌دهیم.

روش مَت‌کد

- بردار دو بعدی $\mathbf{x} = (x_۱, x_۲)$ شامل مقادیر اولیهٔ $(x_۰, y_۰)$ را تعریف کنید، یعنی

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -۰٫۵ \\ ۰ \end{pmatrix}$$

(این کار حرکت را در $(x_۰, y_۰) = (-۰٫۵, ۰)$ شروع می‌کند.)

- تابع مقداری برداری $D(t, \mathbf{x})$ را تعریف کنید، که شامل مشتقات اول توابع مجهول $x(t)$ و $y(t)$ (معادلهٔ ۱۵.۷.۳) باشد:

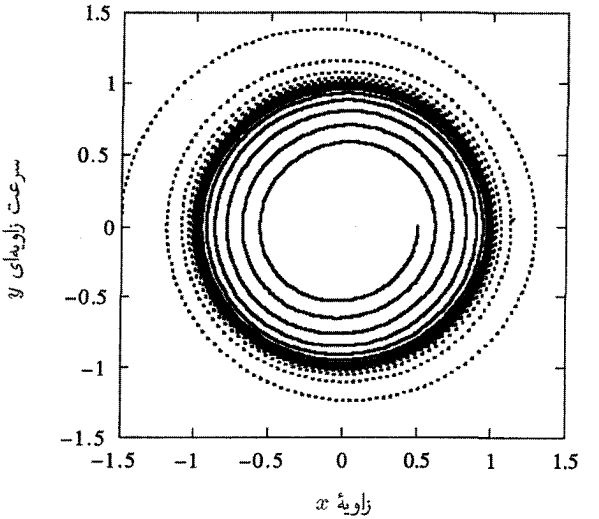
$$D(t, \mathbf{x}) = \begin{pmatrix} x_۲ \\ -x_۱ + \gamma(۱ - x_۱^۲ - x_۲^۲)x_۲ \end{pmatrix}$$

- روی بازهٔ زمانی $[۰, \mathrm{T}]$ و تعداد نقاط، *npts*، داخل بازه که جوابها باید ارزیابی شوند، تصمیم بگیرید.
- این اطلاعات را به تابع *rkfixed* (یا *Rkadapt*، اگر حرکت به‌طور خیلی سریع در فواصل زمانی کوچک، جایی داخل فاصلهٔ زمانی $[۰, \mathrm{T}]$ که انتخاب کرده‌اید تغییر می‌کند)، منتقل کنید، یعنی

$$Z = rkfixed(\mathbf{x}, ۰, T, npts, D)$$

یا

$$Z = Rkadapt(\mathbf{x}, ۰, T, npts, D)$$



شکل ۱.۷.۳ منحنی نمایش تغییرات فضای فاز برای نوسانگر خودمحدودساز، با ضریب میرایی $\gamma = ۰٫۱$ و مقادیر آغازین $(x_۰, y_۰)$: (الف) $(۰٫۵, ۰)$، منحنی پُر، و (ب) $(۱٫۵, ۰-)$، منحنی خط‌چین.

تابع $rkfixed$ (یا $Rkadapt$) به ماتریسی از Z مراجعت می‌کند (در این حالت، دو سطر و سه ستون) که ستون اول آن شامل زمانهای t_i است که در آنها جواب ارزیابی شده است و دو ستون باقی‌مانده شامل مقادیر $x(t_i)$ و $y(t_i)$ هستند. وجه نموداری متکد در این صورت می‌تواند برای تولید ترسیم فضای فاز حاصل، نموداری، پخش دو بعدی $y(t_i)$ برحسب $x(t_i)$ و به‌کار برده شود.

در شکل ۱.۷.۳ نتیجهٔ حل عددی معادلهٔ حرکت در بالا را مشاهده می‌کنید. در واقع، همان‌طوری که نشان داده شد، سیستم یا در مسیری مارپیچ به داخل می‌رود یا به‌طور مارپیچی خارج می‌شود، و سرانجام روی چرخهٔ حدی که در آن نیروی میران ناپدید می‌شود، استقرار می‌یابد. همین که نوسانگر روی چرخهٔ حدی «قفل می‌شود»، حرکت آن صرفاً همان حرکت نوسانگر هماهنگ ساده، تکرارشونده و کاملاً قابل پیش‌بینی خواهد شد.

*۸.۳ نوسانگر ناخطی: حرکت آشوبناک

چه موقع نوسانات ناخطی در طبیعت رخ می‌دهند؟ به این سؤال با توضیح واضحات پاسخ می‌دهیم. این نوسانات وقتی رخ می‌دهند که معادلات حرکت ناخطی‌اند. یعنی، اگر دو (یا چند) جواب $x_۱(t)$ و $x_۲(t)$ برای معادلهٔ حرکت ناخطی وجود داشته باشد، هر ترکیب دلخواه خطی از آنها،

$\alpha x_1(t) + \beta x_2(t)$، عموماً خطی نیست. این موضوع را می‌توانیم به‌کمک مثالی ساده نشان دهیم. نوسانگر ناخطی اول که در بخش ۷.۳ دربارهٔ آن بحث کردیم با معادلهٔ (۴.۷.۳) توصیف شد:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \lambda x^3 \qquad (۱.۸.۳)$$

فرض کنید x_1 و x_2 هریک در معادلهٔ بالا صدق کنند. ابتدا ترکیب خطی آنها را در طرف چپ می‌نشانیم:

$$\begin{aligned}\alpha\ddot{x}_1 + \beta\ddot{x}_2 + \omega_0^2(\alpha x_1 + \beta x_2) &= \alpha(\ddot{x}_1 + \omega_0^2 x_1) + \beta(\ddot{x}_2 + \omega_0^2 x_2) \\ &= \alpha(\lambda x_1^3) + \beta(\lambda x_2^3) \qquad (۲.۸.۳)\end{aligned}$$

که در معادلهٔ آخر از این حقیقت بهره برده‌ایم که فرض می‌شود x_1 و x_2 جوابهای معادلهٔ (۱.۸.۳) باشند. حال، ترکیب خطی را در سمت راست معادلهٔ (۱.۸.۳) می‌نشانیم و آن را مساوی نتیجهٔ معادلهٔ (۲.۸.۳) قرار می‌دهیم:

$$(\alpha x_1 + \beta x_2)^3 = (\alpha x_1^3 + \beta x_2^3) \qquad (۳.۸.۳ \text{ الف})$$

با کمی عملیات جبری، معادلهٔ (۳.۸.۳ الف) می‌تواند به‌صورت زیر نوشته شود:

$$\alpha(\alpha^2 - 1)x_1^3 + 3\alpha^2\beta x_1^2 x_2 + 3\alpha\beta^2 x_1 x_2^2 + \beta(\beta^2 - 1)x_2^3 = 0 \qquad (۳.۸.۳ \text{ ب})$$

x_1 و x_2 جوابهای معادلهٔ حرکت‌اند که با زمان t تغییر می‌کنند. بنابراین، تنها راهی که معادلهٔ (۳.۸.۳ ب) همواره می‌تواند برقرار باشد، آن است که α و β عیناً صفر باشند که در این صورت از اصل دلخواه بدون ضرایب تخطی می‌کنند. واضح است که اگر x_1 و x_2 جوابهای معادلهٔ ناخطی حرکت باشند، هر ترکیب خطی از آنها جواب نیست. این ناخطی‌بودن است که به رفتار جالب حرکت آشوبناک می‌انجامد.

اساس حرکت آشوبناک هر سیستم ناخطی، رفتار متغیر و غیرقابل پیش‌بینی آن است. این نوع حرکت در نوسانگرهای مکانیکی ساده، نظیر آونگها یا اشیاء مرتعشی رخ می‌دهد که به فراتر از وضعیت معمول خطیشان تحریک شده باشند که در آنجا تابع انرژی پتانسیل تابعی درجهٔ دوم از فاصله تا وضعیت تعادل است (بخش ۲.۳). در هوا، در حرکت همرفتی سیالات گرم، در حرکت اشیاء مقید به منظومهٔ شمسی ما، درکاواکهای لیزر، در مدارهای الکترونی و حتی در برخی واکنشهای شیمیایی رخ می‌دهد. نوسان آشوبناک در چنین سیستمهایی به‌صورت رفتار غیرتکراری بروز می‌کند. نوسان مقید است، اما هر «چرخهٔ» نوسان شبیه هیچ‌کدام از چرخه‌های گذشته یا آینده نخواهد بود. به‌نظر می‌رسد نوسان، تمام حالتهای صرفاً اتفاقی حرکت را بروز می‌دهد. از این گزاره دستخوش سردرگمی

نشوید. رفتار «آشوبناک» سیستمهای کلاسیکی به این معنی نیست که آنها از قوانین مشخص طبیعت پیروی نمی‌کنند. آنها از قوانین یادشده پیروی می‌کنند. با معلوم‌بودن شرایط اولیه و نیروهایی که دستخوش آن‌اند، سیستمهای کلاسیکی با گذشت زمان به‌طریقی متحول می‌شوند که به‌طور کامل مشخص می‌شوند. شاید نتوانیم آن تحول را به‌طور دقیق و با هر درجهٔ قطعیتی محاسبه و برآورد کنیم.

در خصوص جزئیات حرکت آشوبناک در اینجا بحثی نمی‌کنیم. بحث و بررسی از این دست فراتر از برنامهٔ این کتاب درسی است. خواننده‌ای که می‌خواهد در این حوزه بیشتر بداند به بررسیهای دقیق حرکت آشوبناک در منابع دیگر رجوع کند.[۱] در اینجا با پدیدهٔ آشوب از طریق تجزیه و تحلیل آونگ سادهٔ میرا که می‌تواند به حالت آشوبناک تحریک شود، آشنا می‌شویم. نشان می‌دهیم که تغییرات جزئی در پارامتر محرک می‌تواند به واگراییهای گسترده در حرکت حاصل بینجامد؛ بنابراین، ارائهٔ پیش‌بینی تحول طولانی واقعاً ناممکن است.

نوسانگر هماهنگ میرای واداشته

معادلهٔ حرکت برای آونگ ساده در مثال ۲.۲.۳ را می‌نویسیم. با اضافه‌کردن جملهٔ میرا و جملهٔ واداشته، معادله به‌صورت زیر در می‌آید:

$$m\ddot{s} = -c\dot{s} - mg\sin\theta + F\cos\omega_f t \qquad (۴.۸.۳)$$

در اینجا، فرض کرده‌ایم که نیروی محرک، $F\cos\omega_f t$، به‌طور مماس بر مسیر آونگ وارد می‌آید که فاصلهٔ کمانیش در حال تعادل s است (شکل ۱.۸.۳).[۲]

قرار می‌دهیم $s = l\theta$، $\gamma = c/m$، $\omega_\circ^2 = g/l$، و $a = F/m$، و با انجام کمی عملیات جبری می‌رسیم به:

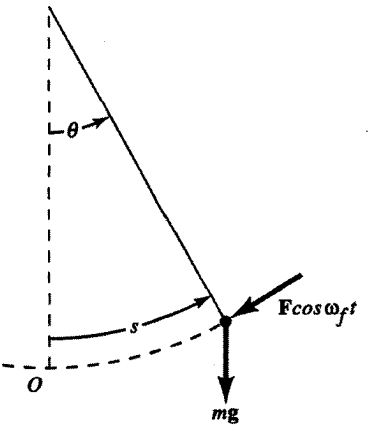
$$\ddot{\theta} + \gamma\dot{\theta} + \omega_\circ^2\sin\theta = \alpha\cos\omega_f t \qquad (۵.۸.۳)$$

در بحث قبلی خود راجع به آونگ ساده، بررسی را به تجزیه و تحلیل حرکتش در وضعیت نوسانهای کم‌دامنه محدود کردیم که در آن می‌شد از تقریب $\sin\theta \approx \theta$ بهره گرفت. در اینجا آن مسیر را نمی‌رویم. این حالت دقیقاً وضعیتی است که آونگ به وضعیت فراتر از نوسان کم‌دامنه‌ای رانده می‌شود که اثر ناخطی $\sin\theta$، گاهی به‌صورت حرکت آشوبناک بروز می‌کند.

تجزیه و تحلیل خود را با مقیاس‌بندی بسامدهای زاویه‌ای به یکای $\omega_\circ$ ساده می‌کنیم (علی‌الاصول، قرار می‌دهیم $\omega_\circ = ۱$) و نمادگذاری را با قرار دادن $x = \theta$ و $\omega = \omega_f$ ساده

۱. ماریون، جری [و] استیفن تورنتون، دینامیک کلاسیک ذرات و سیستمها، ترجمهٔ جلال‌الدین پاشایی راد و بهرام معلمی، مرکز نشر دانشگاهی، تهران، چ۳، ۱۳۸۵.

۲. معادلهٔ حرکت آونگ ساده برحسب متغیر زاویه‌ای می‌تواند به‌طور مستقیم با به‌کاربردن گشتاورهای واردآمده و آهنگهای تغییر تکانهٔ زاویه‌ای حاصل، به‌دست آید. این مفاهیم تا فصل ۷ به‌طور کامل مطرح نخواهند شد.



شکل ۱.۸.۳ آونگ سادهٔ وادارشده در محیطی مقاوم توسط نیروی متغیر سینوسیِ $F\cos\omega_f t$ نیرو به‌طور مماسی بر کمان مسیر آونگ وارد می‌آید.

می‌کنیم. معادلهٔ بالا به‌صورت زیر درمی‌آید

$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \sin x = \alpha\cos\omega t \qquad (۶.۸.۳)$$

دقیقاً مانند قبل، این معادلهٔ دیفرانسیل مرتبهٔ دوم را، با قراردادن $y = \dot{x}$ و $z = \omega t$، به سه معادلهٔ مرتبهٔ اول تبدیل می‌کنیم:

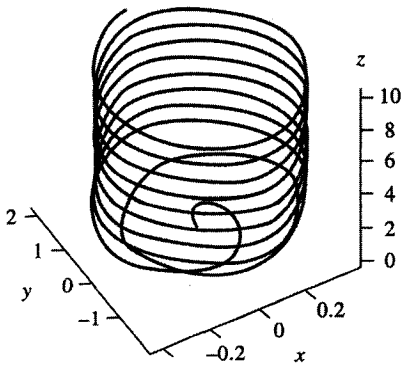
$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -\sin x - \gamma y + \alpha\cos z \\ \dot{z} &= \omega \end{aligned} \qquad (۷.۸.۳)$$

یادآور می‌شویم که این معادلات بدون بعدند و بسامد زاویه‌ای محرک ω مضربی از ω_0 است.

مانند مثال قبل، متکد را برای حل این معادلات تحت شرایط گوناگون به‌کار می‌بریم. برای توصیفهای آتی، هم «نیروی» محرک α را تغییر می‌دهیم و هم بسامد محرک ω را، و نیز پارامتر میرایی γ را به‌ترتیب در $\frac{2}{3}$ و $\frac{1}{4}$ ثابت می‌گیریم. مختصات (x_0, y_0, z_0) شروع حرکت عبارت‌اند از $(0, 0, 0)$؛ در غیر این‌صورت، ذکر خواهد شد.

• پارامتر محرک: $\alpha = 0.9$

این شرایط به حرکت تناوبی منجر می‌شوند. رفتار آیندهٔ آونگ قابل پیش‌بینی است. این امکان

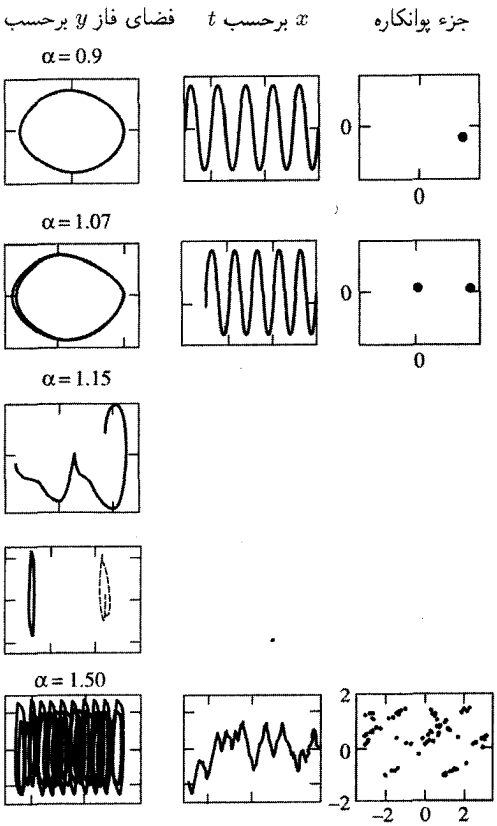


شکل ۲.۸.۳ نمودار سه‌بعدی فضای فازی یک آونگ ساده میرای واداشته، پارامتر محرک عبارت است از $\alpha = ۰٫۹$. بسامد زاویه‌ای محرک ω و پارامتر میرایی γ، به‌ترتیب، عبارت‌اند از $\frac{۲}{۳}$ و $\frac{۱}{۴}$. مختصات ترسیم‌شده عبارت‌اند از $x = \theta/۲\pi,\ y = \dot{\theta},\ z = \omega t/۲\pi$.

را فراهم آورده‌ایم که حرکت برای یک مدت دوام T معادل با ده چرخهٔ محرک تغییر کند و تکوین یابد. در شکل ۲.۸.۳ یک مسیر فضای فاز سه‌بعدی حرکت را مشاهده می‌کنید. محور عمودی، مختصهٔ z، یا گذشت زمان، را نمایش می‌دهد، درحالی‌که محورهای افقی دو مختصهٔ فضای فاز x و y را نمایش می‌دهند. مسیر در مختصات $(۰, ۰, ۰)$ شروع می‌شود و مسیر مارپیچی به‌طرف خارج به‌سمت بالا به‌روش پیچ سربطری با گذشت زمان پیش می‌رود. ده مارپیچ متناظر با تکوین و پیشروی حرکت در دورهٔ زمانی ده چرخهٔ محرک است. رفتارگذرا بعد از چند چرخهٔ نخست، هنگامی که آونگ به حالت پایا، نوسان حالت پایا، می‌رسد، رنگ می‌بازد و زایل می‌شود. با وارسی اولین ردیف نمودارها در شکل ۳.۸.۳ این وضعیت آشکار است که تصویری دو بعدی از نمودار فضای فاز سه‌بعدی طی پنج چرخهٔ محرک آخر از ده چرخهٔ محرک کل است. در واقع، منحنی بستهٔ حاصل شامل پنج منحنی تصویرشده روی هم قرارگرفته است. برهم‌نهی کامل و بسته‌بودن، پایایی و تکرارپذیری دقیق نوسان را نشان می‌دهد.

نمودار دوم در اولین ردیف شکل ۳.۸.۳، منحنی نمایش تغییرات مکان زاویه‌ای آونگ، x، به‌صورت تابعی از تعداد دورهای محرک سپری شده، $n(= \frac{\omega t}{۲\pi})$، به‌شمار می‌آید. تکرارپذیری نوسان، چرخه‌ای بعد از چرخهٔ دیگر، در اینجا به‌خوبی بارز است.

سومین نمودار در ردیف بالا نمودار جزء پوانکارهٔ حرکت را نشان می‌دهد. آن را در حکم عکس فوری استروبوسکوپی مسیر فضای فاز سه‌بعدی در نظر بگیرید که در هر دورهٔ تناوب، چرخهٔ محرک گرفته شده است. مدت‌زمانهایی را که در آنها عکسهای فوری گرفته می‌شوند،



شکل ۳.۸.۳ آونگ واداشتهٔ میرا به‌ازای پارامترهای نیروی محرک مختلف α. (i) منحنی نمایش تغییرات فضای فاز در سمت چپ؛ (ii) زاویه برحسب زمان در وسط؛ (iii) اجزاء پوانکاره در سمت راست. فقط نمودارهای فضای فاز دو چرخهٔ نخست و دو چرخهٔ آخر به‌ازای $\alpha = ۱٫۱۵$ نشان داده شده‌اند. هر منحنی دو مجموعه از شرایط آغاز را نشان می‌دهند که در آن سرعتهای زاویه‌ای اولیه فقط به‌اندازهٔ یک قسمت در $۱۰^۵$ با هم تفاوت دارند.

می‌توان به‌عنوان یک رشته صفحات دوبعدی موازی با صفحهٔ xy که به‌وسیلهٔ یک دورهٔ تناوب چرخهٔ محرک از هم جدا شده‌اند، در نظر گرفت. برخوردگاه مسیر با هر یک از این صفحات افقی یا «برشها» یک تک‌نقطه است که مختصات فضای فاز (x, y) آن حالت جریان حرکت را نشان می‌دهد. تک‌نقطهٔ نشان‌داده‌شده در نمودار برای این پارامتر چرخهٔ محرک، در واقع پنج برهم‌نهی متفاوت اجزاء پوانکاره‌اند که در طول زمان پنج چرخهٔ آخر حرکت گرفته شده‌اند. یعنی، بعد از زایل‌شدن آثار گذرای اولیه، مختصات فضای فاز (x, y) دقیقاً هر دوره تناوب چرخهٔ

محرک بعدی تکرار می‌شوند. به بیان دیگر، آونگ در تک بسامد، بسامد چرخهٔ محرک، مطابق انتظار، نوسان می‌کند.

- پارامتر محرک: $\alpha = ۱٫۰۷$

این کمیت به اثر جالب نموده‌شده در ردیف دوم نمودارهای شکل ۳.۸.۳، به‌نام دو برابرشدن زمان تناوب، می‌انجامد که در آن حرکت دقیقاً در هر چرخهٔ محرک دیگر خودش را تکرار می‌کند. بررسی دقیق نمودار فضای فاز دو حلقهٔ بسته، هرکدام برای یک چرخهٔ محرک، را آشکار می‌کند. شاید برای مشاهدهٔ این اثر در نمودار دوم (زاویه برحسب زمان) به عینک نیاز پیدا کنید؛ اما با بررسی دقیق آشکار می‌شود که یک جابه‌جایی عمودی جزئی بین چرخه‌های مجاور وجود دارد و هر چرخه یکسان است. جزء پوانکاره این اثر را به بهترین وجه نشان می‌دهد: دو نقطهٔ مجزایی که مشاهده می‌شوند، نشان می‌دهند که حرکت شامل دو نوسان متفاوت ولی تکرارشونده است.

- پارامتر محرک: $\alpha = ۱٫۱۵$

مختصات آغاز: $(۰٫۵۴۶۶۰, -۰٫۹)$ و $(۰٫۵۴۶۶۱, -۰٫۹)$

این کمیت خاص پارامتر محرک به حرکت آشوبناک می‌انجامد و برای ما امکان نمایش نموداری یکی از مشخصات تعریف‌کنندهٔ آن، رفتار غیرقابل پیش‌بینی، را فراهم می‌آورد. به دو نمودار فضای فاز که با $\alpha = ۱٫۱۵$ تعریف‌شده، در ردیف سوم و چهارم شکل ۳.۸.۳ نگاهی بیندازید. اولی، نمودار فضای فاز دو چرخهٔ نخست حرکت، برای دو آزمایش متفاوت، هر کدام با دو مجموعه از مختصات شروع جزئی متفاوت که در بالا داده‌شده، به‌شمار می‌آید. در هر رشتهٔ آزمایش، آونگ از موضع $x = -۰٫۹$ در زمان $t = ۰$ ولی با سرعت زاویه‌ای جزئی متفاوت y که اختلافشان فقط یک قسمت در $۱۰^۵$ است، شروع به نوسان کرده است. بنابراین، مسیر نشان‌داده‌شده در نمودار اولی دو مسیر است: برای هر آزمایش یکی. دو مسیری که یکسان‌اند نشان می‌دهند که حرکت برای دو آزمایش در مدت‌زمان دو چرخهٔ نخست واقعاً غیرقابل تشخیص است. توجه کنید که در هر حالت، آونگ وقتی به‌سرعت بیشینه، y، در جهت منفی می‌رسد، در مختصهٔ فضا فاز، x، یک چرخه به چپ رفته است. از این امر نتیجه می‌گیریم که آونگ در جهت ساعتگرد یک چرخش کامل اجرا کرده است.

اما، نمودار دوم، که دو مسیر فضای فاز را برای چرخه‌های نودونهم و صدم ترسیم کرده‌ایم نشان می‌دهد که حرکت آونگ بین دو آزمایش اختلاف فاحشی پیدا کرده است. مسیر برای اولین آزمایش روی $x = -۲$ در طرف چپ نمودار متمرکز شده و نشان می‌دهد که بعد از ۹۸ زمان تناوب چرخهٔ محرک سپری شده و آونگ در چرخش کامل ساعتگرد ۲π بیشتر از چرخش

پاد ساعتگرد انجام داده است. مرکز مسیر آزمایش دوم حول $x = ۶$ در طرف راست نمودار است و نشان می‌دهد که سرعت زاویه‌ای اندکی متفاوتش در آونگ به این نتیجه منجر می‌شود که شش چرخش پاد ساعتگرد بیشتر از ساعتگرد انجام شود. به‌علاوه، مسیرهای فضای فاز برای دو آزمایش اکنون تفاوت بارزی دارند و نشانهٔ آن است که نوسان آونگ در این نقطه در طی دو آزمایش، خیلی متفاوت است. اثری از این دست، اگر پارامترهای α، γ، و ω مناسب برای حرکت آشوبناک اختیار شده باشند، همواره به‌وجود می‌آید. در موردی که اینجا داریم، اگر سعی کنیم حرکت آیندهٔ آونگ را با انتگرال‌گیری معادلهٔ حرکت به‌طور عددی با دقت کمتر از $۱۰^{-۵}$ پیش‌بینی کنیم، متأسفانه در این کار ناکام خواهیم ماند. چون هر جواب عددیی مقداری محدودیت دقتی دارد، حتی سیستمی کاملاً قطعی، مثل دینامیک نیوتونی، نهایتاً به شیوه‌ای پیش‌بینی‌ناپذیر، به‌بیان دیگر آشوبناک، رفتار می‌کند.

- پارامتر محرک: $\alpha = ۱٫۵$

این کمیت برای پارامتر محرک نیز به حرکت آشوبناک منجر می‌شود. سه نمودار در آخرین ردیف شکل ۳.۸.۳ دومین مشخصهٔ تعریف‌کنندهٔ حرکت آشوبناک، یعنی پیش‌بینی‌ناپذیری، را نشان می‌دهند. دویست چرخهٔ محرک ترسیم شده‌اند و حرکت در خلال هیچ تک‌چرخه‌ای با چرخهٔ دیگر یکسان نیست. اگر y را برحسب x با مدول ۲π ترسیم کنیم، همان‌طور که در بررسیهای بسیاری در مورد حرکت آشوبناک انجام شده است (به این‌ترتیب، با نادیده‌گرفتن تمام چرخشهای کامل از طریق محدودکردن متغیر زاویه‌ای دربازهٔ $[-\pi, \pi[$)، تمام سطح مجاز روی نمودار فضای فاز باید پر شود، که علامت مشخصهٔ حرکت آشوبناک است. این علامت مشخصه باز هم در جزء پوانکاره آشکار است. این نمودار در واقع شامل ۲۰۰ نقطهٔ مجزاست، که نشان می‌دهد حرکت هرگز خودش را در هیچ چرخه‌ای تکرار نمی‌کند.

سرانجام، تنوع حرکت آونگ میرای واداشته که در اینجا دربارهٔ آن بحث کردیم، با تغییردادن سادهٔ پارامتر محرک در بازهٔ [۱٫۵ ,۹٫۰] بیان شد. دیدیم که یکی از این مقادیر به رفتار تناوبی، یکی به دورهٔ تناوب دوگانه، و دوتا به حرکت آشوبناک منجر شد. ظاهراً، وقتی دربارهٔ نوسانگرهای ناخطی واداشته بحث می‌شود، حرکت آشوبناک خیلی بیشتر مورد توجه است تا رفتار دوره‌ای (تناوبی) معمولی که ما و متقدمین ما درکتابهای درسی در طول چند صد سال گذشته آن را مورد بحث قرار داده‌ایم. ما از هر دانشجو می‌خواهیم با بهره‌گیری ازکامپیوتر، نزد خودش دربارهٔ این حرکات تحقیق کند. جالب است که چگونه جزئیترین تغییر در پارامترهای حاکم به معادلهٔ حرکت یا به رفتار آشوبناک می‌انجامد یا اینکه به این رفتار آشوبناک پایان می‌دهد؛ البته مطالب بیان‌شده تمام چیزهای موجود دربارهٔ آشوب است.

*۹.۳ نیروی محرک غیرسینوسی: سری فوریه

برای تعیین حرکت نوسانگر هماهنگی که نیروی خارجی متناوب غیرسینوسی «خاصی» بر آن وارد می‌آید، لازم است روشی را به‌کار گیریم که قدری مفصلتر از روش بخشهای قبلی باشد. در این حالت کلیتر، بهتر است از اصل برهم‌نهی بهره گیریم. این اصل در مورد هر سیستم که معادلهٔ دیفرانسیل خطی بر آن حاکم باشد، اعمال‌پذیر است. در حالت مورد بحث ما، مطابق این اصل اگر نیروی محرک خارجی وارد بر نوسانگر هماهنگ با یک برهم‌نهی از توابع نیرو به‌صورت زیر بیان شود

$$F_{ext} = \sum_n F_n(t) \qquad (۱.۹.۳)$$

به‌نحوی که توابع $x_n(t)$ در هر یک از معادلات دیفرانسیل، به‌قرار زیر، صدق کنند

$$m\ddot{x}_n + c\dot{x}_n + kx_n = F_n(t) \qquad (۲.۹.۳)$$

در این صورت، جواب معادلهٔ دیفرانسیل حرکت

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_{ext} \qquad (۳.۹.۳)$$

با برهم‌نهی زیر بیان می‌شود

$$x(t) = \sum_n x_n(t) \qquad (۴.۹.۳)$$

اعتبار این اصل به‌کمک جانشانی زیر به‌آسانی تأیید می‌شود:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = \sum_n (m\ddot{x}_n + c\dot{x}_n + kx_n) = \sum_n F_n(t) = F_{ext} \qquad (۵.۹.۳)$$

در حالت خاص، وقتی نیروی محرک متناوب باشد، یعنی، اگر به‌ازای هر مقدار زمان t داشته باشیم:

$$F_{ext}(t) = F_{ext}(t+T) \qquad (۶.۹.۳)$$

که T دورهٔ تناوب است، در این صورت می‌توان تابع نیرو را، بنابر قضیهٔ فوریه، به‌صورت یک برهم‌نهی از جملات هماهنگ بیان کرد. برطبق این قضیه، هر تابع دوره‌ای $f(t)$ را می‌توان به‌صورت مجموعی، به‌قرار زیر بسط داد:

$$f(t) = \frac{۱}{۲}a_۰ + \sum_{n=۱}^{\infty}[a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)] \qquad (۷.۹.۳)$$

ضریبها از فرمولهای زیر (که آنها را در پیوست ز به‌دست می‌آوریم) حاصل می‌شوند

$$a_n = \frac{۲}{T}\int_{-T/۲}^{T/۲} f(t)\cos(n\omega t)dt \qquad n = ۰, ۱, ۲, \cdots \qquad (۸.۹.۳ \text{ الف})$$

$$b_n = \frac{۲}{T}\int_{-T/۲}^{T/۲} f(t)\sin(n\omega t)dt \qquad n = ۱, ۲, \cdots \qquad (۸.۹.۳ \text{ ب})$$

در اینجا، T دورهٔ تناوب و $\omega = ۲\pi/T$ بسامد پایه است. اگر تابع $f(t)$ تابعی زوج باشد، یعنی اگر $f(t) = f(-t)$، آنگاه به‌ازای تمام مقادیر n ضرایب عبارت‌اند از $b_n = ۰$. این بسط سری را سری کسینوسی فوریه می‌گویند. به‌همین ترتیب، اگر تابعی فرد داشته باشیم به‌طوری که $f(t) = -f(-t)$، در این صورت تمام a_nها صفر می‌شوند و این سری را سری سینوسی فوریه می‌نامند. با بهره‌گیری از رابطهٔ $e^{iu} = \cos u + i\sin u$، تحقیق در این خصوص آسان می‌شود که معادلات (۷.۹.۳) و (۸.۹.۳ الف و ب) را نیز می‌توان به شکل نمایی مختلط، به‌صورت زیر بیان کرد:

$$f(t) = \sum_n c_n e^{in\omega t} \qquad n = ۰, \pm ۱, \pm ۲, \cdots \qquad (۹.۹.۳)$$

$$c_n = \frac{۱}{T}\int_{-T/۲}^{T/۲} f(t)e^{-in\omega t}dt \qquad (۱۰.۹.۳)$$

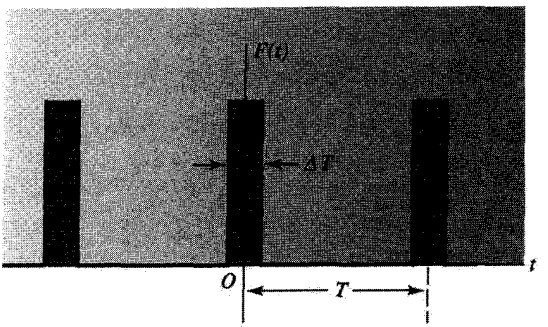
به این ترتیب، برای یافتن حرکت پایای نوسانگر هماهنگ که نیروی محرک دوره‌ای معینی بر آن وارد می‌آید، نیرو را به‌صورت سری فوریه به‌شکل معادلهٔ (۷.۹.۳) یا (۹.۹.۳) بیان می‌کنیم. ضمناً از معادلات (۸.۹.۳ الف و ب) یا (۱۰.۹.۳) برای تعیین ضرایب a_n و b_n یا c_n بهره می‌گیریم. به‌ازای هر مقدار n، متناظر با هماهنگ معین $n\omega$ از بسامد محرک پایه، ω، یک تابع پاسخ $x_n(t)$ وجود دارد. این تابع عبارت است از جواب حالت پایهٔ نوسانگر واداشته که در بخش ۶.۳ آن را بررسی کردیم. از برهم‌نهی همهٔ مقادیر $x_n(t)$ به حرکت واقعی می‌رسیم. در این صورت، در رویدادی که یکی از هماهنگهای بسامد محرک بر بسامد تشدید ω_r منطبق، یا تقریباً منطبق، شود، پاسخ در آن هماهنگ، حرکت غالب خواهد بود. در نتیجه، اگر ثابت میرایی γ خیلی کوچک باشد، نوسان حاصل ممکن است به نوسان سینوسی خیلی نزدیک شود. حتی اگر نیروی محرک کاملاً غیرسینوسی وارد آید.

مثال ۱.۹.۳ پالس دوره‌ای

برای توضیح نظریهٔ بالا، حرکت نوسانگر هماهنگی را که نیروی خارجی متشکل از یک رشته پالسهای متوالی راستگوشه آنها را تحریک می‌کند، تحلیل می‌کنیم:

$$F_{ext}(t) = F_۰ \qquad NT - \frac{۱}{۲}\Delta T \le t \le NT + \frac{۱}{۲}\Delta T$$

$$F_{ext}(t) = ۰ \qquad \text{به‌ازای سایر مقادیر}$$



شکل ۱.۹.۳ نیروی محرک به‌صورت پالسهای مستطیلی (راستگوشه).

که در آن $N = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$ و T بازهٔ زمانی یک پالس تا پالس بعدی، و ΔT پهنای هر پالس است (شکل ۱.۹.۳). در این حالت $F_{ext}(t)$ تابع زوجی از t است، از این‌رو می‌توان آن را به‌صورت یک سری کسینوسی فوریه بیان کرد. ضرایب a_n از معادلهٔ (۸.۹.۳ الف) به‌دست می‌آیند

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{T}\int_{-\Delta T/2}^{+\Delta T/2} F_0 \cos(n\omega t)dt \\ &= \frac{2}{T}F_0\left[\frac{\sin(n\omega t)}{n\omega}\right]_{-\Delta T/2}^{+\Delta T/2} \\ &= F_0\frac{2\sin(n\pi\Delta T/T)}{n\pi} \end{aligned} \qquad (۱۱.۹.۳ \text{ الف})$$

که در آخرین مرحله از این نکته بهره برده‌ایم که $\omega = 2\pi/T$. همچنین، می‌بینیم که

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_{-\Delta T/2}^{+\Delta T/2} F_0\, dt = F_0\frac{2\Delta T}{T} \qquad (۱۱.۹.۳ \text{ ب})$$

بنابراین، در مورد نیرویی به‌شکل پالس دوره‌ای (تناوبی) می‌توانیم بنویسیم:

$$\begin{aligned} F_{ext}(t) = F_0\Bigg[&\frac{\Delta T}{T} + \frac{2}{\pi}\sin\left(\pi\frac{\Delta T}{T}\right)\cos(\omega t) + \frac{2}{2\pi}\sin\left(2\pi\frac{\Delta T}{T}\right)\cos(2\omega t) \\ &+ \frac{2}{3\pi}\sin\left(3\pi\frac{\Delta T}{T}\right)\cos(3\omega t) + \cdots\Bigg] \end{aligned} \qquad (۱۲.۹.۳)$$

جملهٔ اول در بسط سری بالا درست همان مقدار متوسط نیروی خارجی، $F_{avg} = F_0\,(\Delta T/T)$، است. جملهٔ دوم مؤلفهٔ فوریه در بسامد پایه، ω است؛ بقیهٔ جمله‌ها عبارت‌اند از هماهنگهای بسامد پایه 2ω، 3ω، و غیره.

به معادلات (۵.۶.۳) و (۴.۹.۳)، برمی‌گردیم. در اینجا می‌توانیم رابطهٔ نهایی را برای حرکت نوسانگر واداشتهٔ پالسی خود بنویسیم. این رابطه به‌کمک اصل برهم‌نهی به‌دست می‌آید:

$$x(t) = \sum_n x_n(t) = \sum_n A_n \cos(n\omega t - \phi_n) \qquad (۱۳.۹.۳)$$

که در آن دامنه‌های مربوط عبارت‌اند از (معادلهٔ ۹.۶.۳)

$$A_n = \frac{a_{n/m}}{D_n(\omega)} = \frac{(F_0/m)(2/n\pi)\sin(n\pi\Delta T/T)}{[(\omega_0^2 - n^2\omega^2)^2 + 4\gamma^2 n^2\omega^2]^{1/2}} \qquad (۱۴.۹.۳)$$

و زاویه‌های فاز از این قرارند (معادلهٔ ۸.۶.۳):

$$\phi_n = \tan^{-1}\left(\frac{2\gamma n\omega}{\omega_0^2 - n^2\omega^2}\right) \qquad (۱۵.۹.۳)$$

در اینجا، m جرم، γ ثابت فروافت، و ω_0 بسامد نوسانگر متحرک آزاد بدون هیچ‌گونه میرایی است.

به‌عنوان یک مثال عددی خاص، سیستم تعلیق فنری مثال ۱.۶.۳ تحت عمل یک پالس دوره‌ای را در نظر می‌گیریم، که در آن پهنای پالس یک دهم دورهٔ تناوب پالس، $\Delta T/T = 0.1$، است؛ مانند قبل، ثابت میرایی را به یک دهم مقدار بحرانی، $\gamma = 0.1\omega_0$، و بسامد پالس را نصف بسامد نامیرایی سیستم، $\omega = \omega_0/2$، می‌گیریم. سری فوریه برای نیروی محرک، (معادلهٔ ۱۲.۹.۳)، به‌صورت زیر است:

$$\begin{aligned} F_{\text{ext}}(t) &= F_0\left[0.1 + \frac{2}{\pi}\sin(0.1\pi)\cos(\omega t) + \frac{2}{2\pi}\sin(0.2\pi)\cos(2\omega t)\right. \\ &\qquad \left. + \frac{2}{3\pi}\sin(0.3\pi)\cos(3\omega t) + \cdots\right] \\ &= F_0[0.1 + 0.197\cos(\omega t) + 0.187\cos(2\omega t) + 0.172\cos(3\omega t) + \cdots] \end{aligned}$$

مخرجهای تشدید در معادلهٔ (۱۴.۹.۳) از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آیند:

$$D_n = \left[\left(\omega_0^2 - n^2\frac{\omega_0^2}{4}\right)^2 + 4(0.1)^2\omega_0^2 n^2\frac{\omega_0^2}{4}\right]^{1/2} = \left[\left(1 - \frac{n^2}{4}\right)^2 + 0.01n^2\right]^{1/2}\omega_0^2$$

بنابراین،

$$D_0 = \omega_0^2 \quad D_1 = 0.757\omega_0^2 \quad D_2 = 0.2\omega_0^2 \quad D_3 = 1.285\omega_0^2$$

زاویه‌های فاز (معادلهٔ ۱۵.۹.۳)، عبارت‌اند از

$$\phi_n = \tan^{-1}\left[\frac{0.2n\omega_0^2/2}{\omega_0^2 - n^2\omega_0^2/4}\right] = \tan^{-1}\left[\frac{0.4n}{4 - n^2}\right]$$

که منجر می‌شود به

$$\phi_0 = 0 \quad \phi_1 = \tan^{-1}(0.133) = 0.132$$
$$\phi_2 = \tan^{-1}\infty = \pi/2 \quad \phi_3 = \tan^{-1}(-0.24) = -0.236$$

بنابراین، حرکت حالت پایای سیستم به‌صورت سری زیر، (معادلهٔ ۱۳.۹.۳)، بیان می‌شود:

$$x(t) = \frac{F_0}{n\omega_0^2}\left[0.1 + 0.26\cos(\omega t - 0.132) + 0.935\sin(2\omega t)\right.$$
$$\left. + 0.134\cos(3\omega t + 0.236) + \cdots\right]$$

جملهٔ غالب، شامل هماهنگ دوم، $2\omega = \omega_0$، است؛ زیرا ω_0 نزدیک به بسامد تشدید است، همچنین به فاز این جمله توجه کنید:

$$\cos(2\omega t - \pi/2 = \sin(2\omega t)$$

مسائل

۱.۳ سیم گیتاری با بسامد 512Hz (یک گام هشت‌تایی بالای C وسط در ردیف موسیقی) ارتعاش هماهنگ اجرا می‌کند. اگر دامنهٔ نوسان نقطهٔ مرکز سیم 2m 0.002(2mm) باشد، سرعت و شتاب بیشینه در آن نقطه چیست؟

۲.۳ پیستونی با دامنهٔ 0.1m حرکت هماهنگ ساده اجرا می‌کند. اگر با سرعت 0.5m/s از مرکز حرکتش عبورکند، دورهٔ تناوب نوسان چیست؟

۳.۳ ذره‌ای با بسامد 10Hz حرکت هماهنگ ساده اجرا کند. جابه‌جایی x در هر لحظهٔ t را برای شرایط اولیهٔ زیر بیابید:

$$t = 0 \quad x = 0.25\text{m} \quad x^{\cdot} = 0.1\text{m/s}$$

۴.۳ صحت روابط بین چهارکمیت C، D، ϕ_0، و A را، که معادلهٔ (۱۹.۲.۳) آنها را بیان می‌کند، تحقیق کنید.

۵.۳ سرعت ذره‌ای که حرکت هماهنگ ساده اجرا می‌کند، به‌ازای جابه‌جایی x_1، $\dot{x}_1$ و به‌ازای جابه‌جایی x_2 عبارت است از $\dot{x}_2$. بسامد زاویه‌ای و دامنهٔ حرکت را برحسب کمیتهای داده‌شده به‌دست آورید.

۶.۳ شتاب گرانش در سطح ماه در حدود یک‌ششم شتاب گرانش بر سطح زمین است. نصف زمان تناوب یک آونگ ساده به‌طول یک متر بر سطح ماه چقدر است؟

۷.۳ دو فنر، به ضریب سفتی k_1 و k_2، در وضعیت قائم قرار داده شده‌اند، تا یک تک‌شیء به‌جرم m را نگه دارند. نشان دهید که هرگاه این فنرها به یکدیگر موازی بسته شده باشند، بسامد زاویه‌ای نوسان عبارت است از $[(k_1 + k_2)/m]^{1/2}$، و هرگاه متوالی بسته شده باشند، عبارت خواهد بود از: $[k_1 k_2/(k_1 + k_2)m]^{1/2}$.

۸.۳ فنری به ضریب سفتی k جعبه‌ای به‌جرم M را نگه می‌دارد. در داخل جعبه جسمی به جرم m قرار دارد. اگر سیستم را به اندازهٔ d از وضعیت تعادل به پایین بکشیم و آنگاه رهایش کنیم، نیروی واکنش بین آن جسم و کف جعبه را به‌صورت تابعی از زمان بیابید. به‌ازای چه مقدار d این جسم دقیقاً شروع به ترک کف جعبه در بالاترین وضعیت نوسانهای عمودی می‌کند؟ از مقاومت هوا چشم بپوشید.

۹.۳ نشان دهید که نسبت دو بیشینهٔ متوالی در جابه‌جایی نوسانگر هماهنگ میرا مقداری است ثابت. [گوشزد: بیشینه‌ها در نقاط تماس منحنی جابه‌جایی با منحنی $Ae^{-\gamma t}$ تشکیل نمی‌شوند].

۱۰.۳ یک نوسانگر هماهنگ میرا با $m = 10\,\mathrm{kg}$، $k = 250\,\mathrm{N/m}$، و $c = 60\,\mathrm{kg/s}$ دستخوش تأثیر نیروی محرکی است که با رابطهٔ $F_0 \cos \omega t$ داده می‌شود، به طوری که $F_0 = 48\,\mathrm{N}$:

(الف) چه مقدار ω به نوسانهای حالت پایا با حداکثر دامنه می‌انجامد؟ تحت این شرایط:

(ب) دامنهٔ بیشینه چقدر است؟

(ج) تغییر فاز چه اندازه است؟

۱۱.۳ یک جرم m در طول محور x در معرض یک نیروی جاذب که با $17\beta^2 m\, x/2$ بیان می‌شود، و یک نیروی تأخیری به‌صورت $3\beta m\dot{x}$، قرار دارد؛ x فاصلهٔ آن از مبدأ و β ثابت است. یک نیروی محرک به‌صورت $mA \cos \omega t$، که در آن A ثابت است، به این ذره در طول محور x وارد می‌آید.

(الف) ω چه‌مقدار باشد تا به نوسانهای حالت پایا حول مبدأ با دامنهٔ بیشینه منجر شود؟

(ب) دامنهٔ بیشینه چه اندازه است؟

۱۲.۳ بسامد یک نوسانگر هماهنگ میرا، f_d، برابر ۱۰۰ Hz، و نسبت دامنهٔ دو بیشینهٔ متوالی یک دوم است.

(الف) بسامد نامیرای این نوسانگر چقدر است؟

(ب) بسامد تشدید، F_r، چقدر است؟

۱۳.۳ فرض کنید: دامنهٔ یک نوسانگر هماهنگ میرا بعد از n نوسان کامل به $1/e$ مقدار اولیه‌اش افت کند. نشان دهید که نسبت دورهٔ تناوب این نوسان به دورهٔ تناوب همان نوسانگر بدون میرایی از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$\frac{T_d}{T_0} = \left(1 + \frac{1}{4\pi^2 n^2}\right)^{1/2} \simeq 1 + \frac{1}{8\pi^2 n^2}$$

که در رابطهٔ آخر n بزرگ باشد، تقریب صادق است (فرمولهای تقریبی را در پیوست د ببینید).

۱۴.۳ تمام بخشهای مثال ۲.۶.۳ را برای حالتی که در آن ضریب میرایی نمایی γ نصف مقدار بحرانی و بسامد محرک مساوی $2\omega_0$ باشد، انجام دهید.

۱۵.۳ برای نوسانگر هماهنگی با میرایی جزئی داریم: $\gamma \ll \omega_0$. نشان دهید که بسامد محرکی که به‌ازای آن دامنهٔ حالت پایا نصف دامنهٔ حالت پایا در بسامد تشدید است، عبارت خواهد بود از $\omega \simeq \omega_0 \pm \gamma\sqrt{3}$.

۱۶.۳ اگر مدار متوالی LCR به دو سر یک مولد الکتریکی وصل شود که ولتاژ $V = V_0 e^{i\omega t}$ را برقرار می‌کند، عبور بار الکتریکی q از مدار با معادلهٔ دیفرانسیل مرتبهٔ دوم زیر داده می‌شود:

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q = V_0 e^{i\omega t}$$

(الف) ارتباط نشان‌داده‌شده در جدول ۱.۶.۳ بین پارامترهای یک نوسانگر مکانیکی واداشته و نوسانگر الکتریکی واداشتهٔ بالا را بررسی کنید.

(ب) Qی مدار الکتریکی را برحسب ضرایب معادلهٔ دیفرانسیل بالا محاسبه کنید.

(ج) نشان دهید که در حالت میرایی کم‌دامنه، Q را می‌توان به‌صورت $Q = R_0/R$ نوشت که $R_0 = \sqrt{L/C}$ امپدانس مشخصهٔ مدار است.

۱۷.۳ نوسانگر هماهنگ میرایی را نیرویی خارجی به‌شکل

$$F_{ext} = F_0 \sin\omega t$$

تحریک (واداشته) می‌کند. نشان دهید که جواب حالت پایا از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید

$$x(t) = A(\omega)\sin(\omega t - \phi)$$

که $A(\omega)$ و ϕ در عبارتهایی که در معادلات (۹.۶.۳) و (۸.۶.۳) به‌دست آمده‌اند، همسان‌اند.

۱۸.۳ معادلهٔ دیفرانسیل حرکت نوسانگر هماهنگ میرای واداشته توسط یک نیروی هماهنگ میرا، به‌شکل زیر، را حل کنید:

$$F_{ext}(t) = F_{\circ} e^{-\alpha t} \cos \omega t$$

(راهنمایی: $e^{-\alpha t} \cos \omega t = Re(e^{-\alpha t + i\omega t}) = Re(e^{\beta t})$، که فرض می‌شود $\beta = -\alpha + i\omega$. جوابی به‌شکل $Ae^{\beta t - i\phi}$ در نظر بگیرید.)

۱۹.۳ آونگ ساده‌ای به طول l با دامنهٔ 45° نوسان می‌کند.

(الف) دورهٔ تناوب آن چقدر است؟

(ب) اگر این آونگ به‌صورت وسیلهٔ آزمایشی برای تعیین مقدار g در آزمایشگاه به‌کار رود، خطای حاصل را در استفاده از فرمول مقدماتی $T_{\circ} = 2\pi(l/g)^{1/2}$ پیدا کنید.

(ج) مقدار تقریبی هماهنگ سوم موجود در نوسان آونگ را بیابید.

۲۰.۳ صحت معادلات (۹.۹.۳) و (۱۰.۹.۳) در متن درس را تحقیق کنید.

۲۱.۳ نشان دهید که سری فوریه برای «موج مربعی» دوره‌ای به‌صورت زیر است

$$f(t) = \frac{4}{\pi}\left[\sin(\omega t) + \frac{1}{3}\sin(3\omega t) + \frac{1}{5}\sin(5\omega t) + \cdots\right]$$

که

$$f(t) = +1 \quad \text{به‌ازای} \quad 0 < \omega t < \pi,\ 2\pi < \omega t < 3\pi, \text{ و غیره}$$

$$f(t) = -1 \quad \text{به‌ازای} \quad \pi < \omega t < 2\pi,\ 3\pi < \omega t < 4\pi, \text{ و غیره}$$

۲۲.۳ با استفاده از نتیجهٔ بالا، حرکت حالت پایای نوسانگر هماهنگ میرایی به‌دست آورید که به‌وسیلهٔ نیروی موج مربعی دوره‌ای به دامنهٔ $F_{\circ}$ واداشته می‌شود. در حالت خاص، دامنه‌های نسبی سه جملهٔ اول A_1، A_3، و A_5 از تابع پاسخ $x(t)$ را در حالتی به‌دست آورید که سومین هماهنگ بسامد تحریک، 3ω، با بسامد $\omega_{\circ}$ نوسانگر نامیرا منطبق باشد. ضریب کیفیت را $Q = 100$ بگیرید.

۲۳.۳ (الف) معادلهٔ دیفرانسیل مرتبهٔ اولی، dy/dx، را به‌دست آورید که مسیر فضای فاز نوسانگر هماهنگ ساده را توصیف کند.

(ب) این معادله را حل کنید، ثابت کنید که مسیر بیضی است.

۲۴.۳ ذره‌ای به جرم واحد را دستخوش تأثیر نیروی $x - x^3$ در نظر بگیرید. x جابه‌جایی آن از مبدأ مختصات است.

(الف) نقاط تعادل را پیدا کنید، و بگویید پایدارند یا ناپایدار.

(ب) انرژی کل ذره را محاسبه کنید، و نشان دهید که کمیتی پایستار است.

(ج) مسیرهای ذره را در فضای فاز محاسبه کنید.

۲۵.۳ آونگ ساده‌ای به‌طول $l = ۹٫۸\text{m}$ در معادلهٔ زیر صدق می‌کند:

$$\ddot{\theta} + \sin\theta = ۰$$

(الف) اگر دامنهٔ نوسان باشد، نشان دهید که دورهٔ تناوب آن، T، از رابطه زیر به‌دست می‌آید:

$$T = ۴\int_{۰}^{\pi/۲} \frac{d\phi}{(۱ - a\sin^۲\phi)^{۱/۲}} \quad \text{که} \quad \alpha = \sin^۲\frac{۱}{۲}\Theta_{۰}$$

(ب) انتگرالده را به‌صورت توانهای α بسط دهید، جمله به جمله انتگرال بگیرید، و دورهٔ تناوب T را به‌صورت سری توانی برحسب α بیابید. جملات تا $O(\alpha^۲)$ و خود آن را نیز نگه دارید.

(ج) α را به‌صورت سری توانی $\Theta_{۰}$ بسط دهید؛ نتیجه را در سری توانی که در (ب) پیدا کردید وارد کنید، و دورهٔ تناوب T را به‌صورت سری توانی برحسب $\Theta_{۰}$ بیابید؛ جملات تا $O(\Theta_{۰}^۲)$ و خود آن را نیز نگه دارید.

مسائل کامپیوتری

ک۱.۳ معادلهٔ حرکت دقیق یک آونگ به‌طول L (مثال ۲.۲.۳) به‌صورت زیر بیان می‌شود:

$$\ddot{\theta} + \omega_{۰}^۲ \sin\theta = ۰$$

که $\omega_{۰}^۲ = g/L$. $\theta(t)$ را با انتگرال‌گیری عددی این معادلهٔ حرکت پیدا کنید. فرض کنید $L = ۱٫۰۰\text{m}$. شرایط اولیه را $\theta_{۰} = \pi/۲$ رادیان و $\dot{\theta}_{۰} = ۰$ رادیان بر ثانیه فرض کنید.

(الف) منحنی نمایش تغییرات $\theta(t)$ را از $t = ۰$ تا $t = ۴\text{s}$ ترسیم کنید. همچنین، جواب به‌دست‌آمده را با به‌کاربردن تقریب زاویهٔ کوچک ($\sin\theta \approx \theta$) روی همان نمودار ترسیم کنید.

(ب) حالت (الف) را به‌ازای $\theta_{۰} = ۳٫۱۰\,\text{rad}$ تکرار کنید.

(ج) دورهٔ تناوب آونگ را به‌صورت تابعی از دامنهٔ $\theta_{۰}$ از ۰ تا ۳٫۱۰ رادیان رسم کنید. در چه دامنه‌ای دورهٔ تناوب بیشتر از $۲\pi\sqrt{L/g}$ منحرف می‌شود؟

ک۲.۳ فرض کنید نیروی میران برای نوسانگر هماهنگ میرا متناسب با مجذور سرعتش باشد؛ یعنی به‌صورت $-c_۲\dot{x}|\dot{x}|$ داده شده باشد. بنابراین معادلهٔ حرکت چنین نوسانگری از این قرار است:

$$\ddot{x} + ۲\gamma\dot{x}|\dot{x}| + \omega_{۰}^۲ x = ۰$$

که $\gamma = c_۲/۲m$ و $\omega_۰^۲ = k/m$. $x(t)$ را با انتگرال‌گیری عددی معادلهٔ حرکت بالا بیابید. بگیرید: $\gamma = ۰٫۲۰\,\mathrm{m}^{-۱}$ و $\omega_۰ = ۲٫۰۰\,\mathrm{rad/s}$. شرایط اولیه را به‌صورت $x(۰) = ۱٫۰۰\,\mathrm{m}$ و $\dot{x}(۰) = ۰ m/s$ اختیار کنید.

(الف) منحنی نمایش تغییرات $x(t)$ را از $t = ۰$ تا $t = ۲۰\,\mathrm{s}$ ترسیم کنید؛ همچنین روی همان نمودار، جواب نوسانگر هماهنگ میرا را که نیروی میران آن به‌طور خطی با سرعت متناسب باشد، یعنی، با $-c_۱\dot{x}$ داده شده باشد، ترسیم کنید. در اینجا نیز قرار دهید: $\gamma = c_۱/۲m = ۰٫۲۰\,\mathrm{s}^{-۱}$ و $\omega_۰ = ۲٫۰۰\,\mathrm{rad/s}$.

(ب) برای حالت میرایی خطی، منحنی نمایش تغییرات لگاریتم قدرمطلق فرینهای متوالی را برحسب زمان وقوع آنها ترسیم کنید. شیب این نمودار را بیابید، و از آن برای تخمین γ بهره گیرید (این روش برای حالت میرایی ضعیف به‌خوبی عمل می‌کند).

(ج) مقدار γ را به‌صورتی بیابید که برای حالتی خطی سبب میرایی بحرانی شود. منحنی نمایش تغییرات این جواب را از $t = ۰$ تا $t = ۵\,\mathrm{s}$ رسم کنید. آیا می‌توانید مقدار خوش‌تعریفی از γ را که منجر به میرایی بحرانی برای حالت درجه دوم می‌شود، بیابید؟ اگر نمی‌توانید، چه‌مقدار γ لازم است تا اولین حرکت منفی نوسانگر را تا کمتر از ۲٪ مقدار دامنهٔ اولیه‌اش محدود کند؟

ک۳.۳ معادلهٔ حرکت برای نوسانگر وان‌در پل عبارت است از

$$\ddot{x} - \gamma(A^۲ - x^۲)\dot{x} + \omega_۰^۲ x = ۰$$

قرار دهید: $A = ۱$ و $\omega_۰ = ۱$. این معادله را به‌طور عددی حل، و نمودار فضای فاز حرکت آن را ترسیم کنید. بگذارید حرکت برای ۱۰ دورهٔ تناوب ($۲\pi/\omega_۰ = ۱$ دورهٔ تناوب) تکوین یابد. فرض کنید شرایط زیر برقرار باشند:

(الف) $\gamma = ۰٫۰۵,\ (x_۰, \dot{x}_۰) = (-۱٫۵, ۰)$.

(ب) $\gamma = ۰٫۰۵,\ (x_۰, \dot{x}_۰) = (۰٫۵, ۰)$.

(ج) و (د) حالت (الف) و (ب) را با $\gamma = ۰٫۵$ تکرار کنید، آیا این حرکت چرخهٔ حدی را نمایش می‌دهد؟ آن را تشریح کنید.

ک۴.۳ نوسانگر وان‌در پل واداشته با معادلهٔ حرکت $\ddot{x} - \gamma(۱ - x^۲)\dot{x} + x = \alpha\cos\omega t$ توصیف می‌شود، که α دامنهٔ نیروی محرک و ω بسامد محرک است. قرار دهید: $x = x$، $y = \dot{x}$، و $z = \omega t$. این معادله را به‌طور عددی برحسب این متغیرها حل کنید؛ بگذارید نوسانگر در $(x_۰, y_۰, z_۰) = (۰, ۰, ۰)$ شروع به نوسان کند. اجازه دهید حرکت برای یک‌صد چرخهٔ محرک ($۲\pi/\omega$ = دورهٔ تناوب تحریک) تکوین یابد. (۱) نمودار فضای فازی حرکت آن را ترسیم کنید؛

(۲) نمودار مکان آن را برحسب تعداد چرخه‌های محرک ترسیم کنید؛ (۳) نمودار فضای فاز سه‌بعدی اولین چرخهٔ محرک را ترسیم کنید. شرایط زیر را فرض کنید.

(الف) $\omega = ۱, \ \gamma = ۰٫۵, \ \alpha = ۰٫۱$.

(ب) $\omega = ۲٫۴۶۶, \ \gamma = ۵, \ \alpha = ۵$. کدام حالت تناوبی و کدام حالت آشوبناک است؟

ک۵.۳ نوسانگر هماهنگ ساده‌ای را در نظر بگیرید که روی یک تسمه نقاله قرار دارد (شکل ک ۵.۳). فرض کنید نیروی اصطکاک وارد بر هر قطعه جسم نوسانگر به‌وسیلهٔ تسمه‌نقاله وارد می‌آید که به‌سرعت لغزش، $\dot{x} - u$، بستگی دارد، که u سرعت تسمه است، و از رابطهٔ زیر بیان می‌شود:

$$\begin{aligned} \beta v \qquad & \dot{x} - u > v \\ \beta(\dot{x} - u) \qquad & |\dot{x} - u| \leq v \\ -\beta v \qquad & \dot{x} - u < v \end{aligned}$$

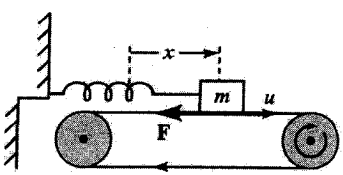
به بیان دیگر، نیرو وقتی ثابت است که سرعت لغزش از حدودی خارج باشد که به‌وسیلهٔ ثابت v داده می‌شود و وقتی در داخل آن حدود قرار دارد با سرعت لغزش مناسب است.

(الف) معادلهٔ حرکت این نوسانگر را بنویسید. آن را به‌طور عددی حل کنید و نمودار فضای فاز آن را برای شرایط $k = ۱$، $m = ۱$، $\beta = ۵$، $v = ۰٫۲$، و $u = ۰٫۱$ ترسیم کنید.

شرایط آغازی زیر را فرض کنید.

(ب) $(x_۰, \dot{x}_۰) = (۰, ۰)$.

(ج) $(x_۰, \dot{x}_۰) = (۲, ۰)$.



شکل ک۵.۳

۴

حرکت کلی ذره در سه بعد

سِر آیزاک نیوتون و پیروانش، نسبت به حکمت کارهای خداوند نیز آرای عجیب‌وغریبی دارند. طبق بینش آنها، لازم است خداوند قادر مطلق، ساعتش را گاهی کوک کند. در غیر این صورت، آن ساعت از حرکت باز می‌ایستد. به‌نظر می‌رسد او دوراندیشی کافی نداشته است تا به آن حرکت دائمی بدهد.

بنا بر نظر این افراد، ماشین ساخت خداوند حتی آنقدر ناقص است که وی مجبور است حالا و در آینده آن را با همراهی خارق‌العاده‌ای تمیز و حتی تعمیر کند. آن‌طور که ساعت‌سازها ساعت ساخت خود را تعمیر می‌کنند؛ در نتیجه، او باید صنعتگر بسیار غیرماهری باشد، چرا که اغلب مجبور می‌شود کارش را تعمیر و آن را درست کند. به نظر من، نیرو و قدرت /انرژی/ همیشه به‌طور یکسان در دنیا باقی می‌ماند، و فقط از یک قسمت به قسمت دیگر، سازگار با قوانین طبیعت، و با زیبایی و نظم از پیش‌تعیین‌شده عبور می‌کند.[1]

1. Gottfried Wilhelm Leibniz–*Letter to Caroline, Princess of Wales*, 1715; The Leibniz-Clarke Correspondence, Manchester Univ. Press, 1956.

۱.۴ مقدمه: اصول کلی

اینک حالت کلی حرکت ذره را در سه بعد بررسی می‌کنیم. شکل برداری معادلهٔ حرکت چنین ذره‌ای عبارت است از

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \qquad (۱.۱.۴)$$

که در آن $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ تکانهٔ خطی ذره است. این معادلهٔ برداری معادل سه معادلهٔ اسکالر در مختصات دکارتی است

$$\begin{aligned} F_x &= m\ddot{x} \\ F_y &= m\ddot{y} \\ F_z &= m\ddot{z} \end{aligned} \qquad (۲.۱.۴)$$

این سه مؤلفهٔ نیرو ممکن است توابع صریح یا ضمنی مختصات، مشتقات زمانی و مکانی آنها، و شاید خود زمان باشند. هیچ روشی کلی برای به‌دست‌آوردن جوابهای تحلیلی معادلات حرکت بالا وجود ندارد. حتی در مسائل کمتر پیچیده، باید به بهره‌گیری از روشهای عددی عملی متوسل شویم؛ ولی به مسائل بسیاری برمی‌خوریم که می‌توان آنها را با روشهای تحلیلی نسبتاً ساده حل کرد. شاید درست باشد که گاهی چنین مسائلی در روند نمایاندن واقعیت خیلی ساده شده‌اند. اما، نهایتاً به‌عنوان الگوهای سیستمهای فیزیکی واقعی به‌کار می‌آیند، و از این‌رو اقدامی که ما در اینجا برای به‌کارگیری مهارتهای تحلیلی لازم به‌منظور حل چنین مسائلی آرمانی به‌عمل می‌آوریم، خیلی باارزش است. حتی این مهارتها ممکن است قابلیت ما را در پرداختن به کار شاق توانایی تحلیلی‌مان جا بیندازند.

به‌ندرت اتفاق می‌افتد کسی روشی واضح برای حالتی بشناسد که $\mathbf{F}$ به‌زمان بستگی دارد؛ بنابراین نباید در این خصوص نگران باشیم، در عوض توجه خود را بر وضعیت متعارفتری متمرکز می‌کنیم که در آن $\mathbf{F}$ به‌صورت تابعی صریح از مختصات فضایی و مشتقات آنها، معلوم است. ساده‌ترین حالت آن است که $\mathbf{F}$ تابعی فقط از مختصات فضایی باشد. قسمت اعظم تلاش خود را صرف حل چنین مسائلی می‌کنیم. تنها وضعیتهای زیادی با اندکی پیچیدگی یافت می‌شوند که در آنها $\mathbf{F}$ تابع معلومی از مشتقات مختصاتی هم باشد. چنین حالتهایی حرکت پرتابی با مقاومت هوا و حرکت ذرات باردار در میدان الکترومغناطیسی ساکن را دربر می‌گیرند. چنین مسائلی را نیز حل خواهیم کرد. سرانجام، $\mathbf{F}$ ممکن است تابعی ضمنی از زمان باشد، مانند وضعیتهایی که مختصه و وابستگی مشتق مختصه غیراستاتیکی باشد. مثال بارزی از این وضعیت متضمن حرکت ذرهٔ باردار در میدانی الکترومغناطیسی است که با زمان تغییر می‌کند. چنین مسائلی را حل نخواهیم کرد.

اکنون مطالعهٔ خود را از حرکت سه‌بعدی با به‌میان‌آوردن چند روش تحلیلی توانمند آغاز می‌کنیم که وقتی می‌توانند اعمال شوند که $\mathbf{F}$ تابع معلومی از $\mathbf{r}$ یا $\dot{\mathbf{r}}$ باشد.

اصل کار

کاری که روی ذره انجام می‌شود به کسب‌کردن یا از دست‌دادن انرژی آن ذره می‌انجامد. با مفهوم کار در فصل ۲ در حالت حرکت ذره در یک بعد آشنا شدیم. می‌خواهیم نتایج به‌دست‌آمده در آنجا را، به‌حالت حرکت سه‌بعدی تعمیم دهیم؛ برای انجام این کار، ابتدا طرفین معادلهٔ (۱.۱.۴) را در سرعت، $\mathbf{r}$، ضرب داخلی می‌کنیم:

$$\mathbf{F}\cdot\mathbf{v}=\frac{d\mathbf{p}}{dt}\cdot\mathbf{v}=\frac{d(m\mathbf{v})}{dt}\cdot\mathbf{v} \qquad (۳.۱.۴)$$

چون $d(\mathbf{v}\cdot\mathbf{v})/dt=2\mathbf{v}\cdot\dot{\mathbf{v}}$، و با فرض آنکه جرم ثابت و مستقل از سرعت ذره است، می‌توانیم معادلهٔ (۳.۱.۴) را به‌صورت زیر بنویسیم:

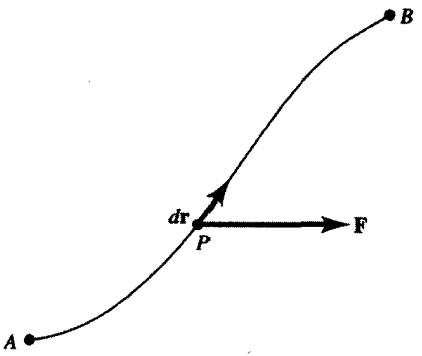
$$\mathbf{F}\cdot\mathbf{v}=\frac{d}{dt}(\frac{1}{2}m\mathbf{v}\cdot\mathbf{v})=\frac{d\mathbf{T}}{dt} \qquad (۴.۱.۴)$$

که در آن $\mathbf{T}$ انرژی جنبشی، $mv^2/2$، است. چون $\mathbf{v}=d\mathbf{r}/dt$، می‌توانیم معادلهٔ (۴.۱.۴) را بازنویسی کنیم و بعد انتگرال بگیریم تا برسیم به:

$$\mathbf{F}\cdot\frac{d\mathbf{r}}{dt}=\frac{d\mathbf{T}}{dt} \qquad (۵.۱.۴ \text{ الف})$$

$$\therefore\int\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}=\int dT=T_f-T_i=\Delta T \qquad (۵.۱.۴ \text{ ب})$$

سمت چپ این معادله انتگرال خطی یا انتگرال $F_r dr$، یعنی مؤلفهٔ $\mathbf{F}$ موازی با بردار جابه‌جایی ذره، $d\mathbf{r}$، است. این انتگرال در طول مسیر ذره از نقطه‌ای ابتدایی در فضا، A، تا نقطه‌ای انتهایی، B، انجام می‌شود. تصویر این وضعیت را در شکل ۱.۱.۴ مشاهده می‌کنید. این انتگرال خطی نمایانگر کاری است که نیروی $\mathbf{F}$ وقتی روی ذره انجام می‌دهد که در طول مسیرش از A به B می‌رود. سمت راست این معادله تغییر خالص انرژی جنبشی ذره است. $\mathbf{F}$ جمع خالص تمام نیروهای برداری وارد بر ذره است. از این رو، بنابر این معادله کار انجام‌شده روی ذره توسط نیروی خالص وارد بر آن، در حرکت از یک مکان در فضا به مکان دیگر، با اختلاف انرژی جنبشی ذره در آن دو مکان برابر است.

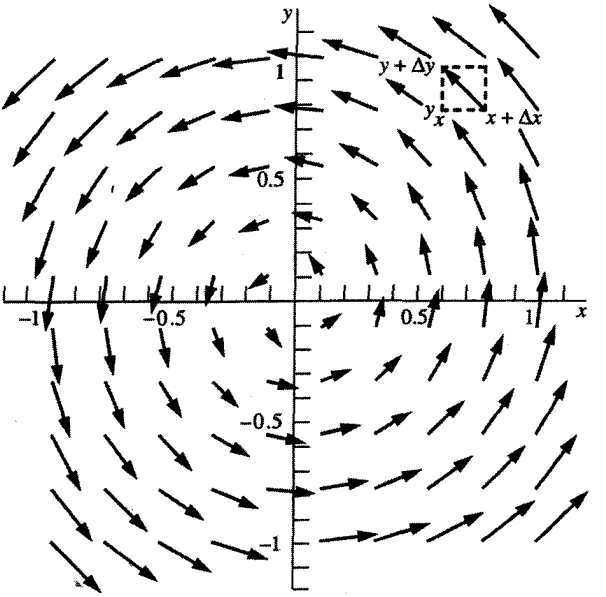


شکل ۱.۱.۴ کار انجام‌شده به‌وسیلهٔ نیروی $\mathbf{F}$ عبارت است از انتگرال خطی $\int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$.

نیروهای پایستار و میدانهای نیرو

در فصل ۲ با مفهوم انرژی پتانسیل آشنا شدیم. در آنجا گفتیم که اگر نیروی وارد بر ذره پایستار باشد، آن را می‌توان در حکم مشتق تابع انرژی پتانسیل اسکالر، $F_x = -dV(x)/dx$، استنتاج کرد. این شرط ما را به این تصور هدایت می‌کند که کار انجام‌شده توسط چنین نیرویی در حین حرکت ذره از نقطهٔ A به نقطهٔ B در امتداد محور x عبارت است از $\int F_x dx = -\Delta V = V(A) - V(B)$، یا منهای تغییر انرژی پتانسیل ذره. بنابراین، ما دیگر اطلاعات مشروح حرکت ذره از نقطهٔ A به B را برای محاسبهٔ کار انجام‌شده روی آن توسط نیروی پایستار، لازم نداریم. فقط باید بدانیم که نقطهٔ آغاز آن A و نقطهٔ پایانیش B است. کار انجام‌شده فقط به تابع انرژی پتانسیلی بستگی دارد که در نقاط ابتدایی و انتهایی حرکت محاسبه می‌شود. افزون بر اینها، چون کار انجام‌شده با تغییر در انرژی جنبشی ذره، $\Delta T = T(B) - T(A)$، نیز مساوی است، می‌توانیم اصل کلی پایستگی انرژی کل را اثبات کنیم، یعنی: مقدار ثابت در سراسر حرکت ذره $E_{tot} = V(A) + T(A) = V(B) + T(B) =$.

این اصل بر پایهٔ شرطی استوار شد که بنا بر آن نیروی وارد بر ذره پایستار بود. در واقع، همین نام حاکی از آن است که در حالی که ذره تحت تأثیر و کنش چنین نیرویی حرکت می‌کند، چیزی پایسته می‌شود. می‌خواهیم این مفهوم را برای ذرهٔ متحرک در سه بعد تعمیم دهیم، و مهمتر از آن، می‌خواهیم به‌دقت تعیین کنیم که منظور از واژهٔ پایستار چیست. واضح است که می‌خواهیم رهنمودی در اختیار داشته باشیم که به ما بگوید آیا یک نیروی خاص پایستار است یا خیر، و به‌این ترتیب، آیا تابع انرژی پتانسیل برای این ذره وجود دارد یا خیر. در این صورت برای حل مسئلهٔ حرکت ذره توانستیم به اصل مؤثر پایستگی انرژی متوسل شویم.



شکل ۲.۱.۴ میدان نیروی ناپایستار که مؤلفه‌های نیروی آن عبارت‌اند از $F_x = -by$ و $F_y = +bx$.

در بررسی چنین رهنمودی، نخست مثالی از نیروی ناپایستار را شرح می‌دهیم که درحقیقت تابع خوش‌تعریفی از مکان است اما نمی‌توان آن را از تابع انرژی پتانسیل به‌دست آورد. از اینجا به سرنخی از یک مشخصهٔ بسیار مهم می‌رسیم که اگر قرار است نیرویی پایستار باشد، باید از این مشخصه برخوردار باشد. میدان نیروی دوبعدی شکل ۲.۱.۴ را در نظر بگیرید. اصطلاح میدان نیرو به بیان ساده به این معناست که اگر ذرهٔ آزمون کوچک[1] در نقطه‌ای چون (x_1, y_1) روی صفحهٔ xy قرار داده شود، باید نیروی $\mathbf{F}$ بر آن وارد آید. بنابراین، می‌توانیم صفحهٔ xy را صفحه‌ای با امکان بالقوه (پتانسیل) مورد نفوذ قرارگرفته یا «طراحی‌شده» برای تولید نیرو، تلقی کنیم.

این وضعیت را از لحاظ ریاضی می‌توان با نسبت‌دادن بردار $\mathbf{F}$ به هر نقطه در صفحهٔ xy، توصیف کرد. از این رو، این میدان، یک میدان برداری است که تابع $\mathbf{F}(x, y)$ آن را نمایش داده است. مؤلفه‌هایش عبارت‌اند از $F_x = -by$ و $F_y = +bx$، که b مقداری ثابت است. پیکانها

۱. ذرهٔ آزمون عبارت است از ذره‌ای که جرم آن چندان کم است که حضورش محیط پیرامون را تغییر نمی‌دهد. از نظر مفهومی باید فرض کنیم که ذرهٔ آزمون در نقطه‌ای در فضا قرار داده شده است تا به‌عنوان «کاوشگر آزمونی» برای تشخیص حضور مظنون نیروها از آن بهره گرفته شود. وجود این نیروها با مشاهدهٔ شتاب حاصل برای ذرهٔ آزمون «حس» می‌شود؛ به‌علاوه، فرض می‌کنیم حضور ذرهٔ آزمون منابع آن نیروها را آشفته نمی‌کند.

در این شکل بردار $\mathbf{F} = -\mathbf{i}by + \mathbf{j}bx$ را نشان می‌دهند که در هر نقطه که در آن مرکز پیکان قرار گرفته، محاسبه شده است. این موضوع را می‌توانید با نگاه‌کردن به شکل مشاهده کنید که در آنجا ظاهراً یک «گردش» عمومی پادساعتگرد بردارهای نیرو حول مبدأ است. بزرگی این بردارها با افزایش فاصله‌شان از مبدأ افزایش می‌یابد. اگر یک ذرهٔ آزمون کوچک را در چنین «میدانی» بدون قید به چرخش درآوریم، این ذره در جهت پادساعتگرد به گردش در می‌آید و در تمام لحظات انرژی جنبشی کسب کند.

در بادی امر به‌نظر نمی‌رسد این وضعیت چندان نامتعارف و نامعمول باشد. سرانجام، وقتی توپی را در میدان نیروی گرانشی به پایین می‌اندازید، سقوط می‌کند و انرژی جنبشی به‌دست می‌آورد، همزمان به همان مقدار هم انرژی پتانسیل از دست می‌دهد. در اینجا این پرسش مطرح می‌شود که حتی برای این ذرهٔ گردنده آیا می‌توانیم تابع انرژی پتانسیل را چنان تعریف کنیم که مقدار انرژی پتانسیل ازدست‌رفته با انرژی جنبشی کسب‌شده مساوی باشد و انرژی کل ذره در حین رفتن از یک نقطه به نقطه دیگر پایسته بماند؟ در اینجا این وضعیت برقرار نیست. اگر کاری را محاسبه کنیم که روی این ذره، هنگام پیمودن مسیری انجام می‌شود که روی خودش برگردد (نظیر مسیر مستطیلی که با خط‌چین در شکل ۲.۱.۴ مشاهده می‌کنید)، نتیجهٔ غیرصفر به‌دست می‌آوریم! در پیمودن چندبارهٔ چنین حلقه‌ای، ذره کماکان انرژیی جنبشی مساوی با مقدار ناصفر کار انجام‌شده در پیمودن هر بار حلقه کسب می‌کند. اما اگر می‌توانستیم به ذره انرژی پتانسیلی نسبت دهیم که فقط به مکانش (x, y) بستگی می‌داشت، در این صورت تغییر در انرژی پتانسیلش هنگام پیمودن حلقه‌ای بسته می‌بایست صفر باشد. واضح است که هیچ راهی وجود ندارد که بتوانیم مقداری منحصربه‌فرد به انرژی پتانسیل این ذره در هر نقطهٔ خاص روی صفحهٔ xy نسبت دهیم. هر مقدار به آن نسبت داده شود باید به تاریخچهٔ قبلی ذره بستگی داشته باشد. مثلاً، ذره قبل از آنکه در مکان جاریش وارد شود، چند حلقه را طی کرده است؟

با بررسی کار انجام‌شده روی ذره‌ای که بین دو نقطهٔ A و B، اما در امتداد مسیرهای مختلف، حرکت می‌کند، می‌توانیم منحصربه‌فرد نبودن هر انرژی پتانسیل پیش کشیده‌شده را بیشتر به‌کار بریم. ابتدا فرض می‌کنیم ذره از (x, y) به $(x + \Delta x, y + \Delta y)$ با حرکت در جهت $+x$ به $(x + \Delta x, y)$ و بعد در جهت $+y$ به $(x + \Delta x, y + \Delta y)$ برود. سپس می‌گذاریم ذره ابتدا در امتداد جهت $+y$ از (x, y) به $(x, y + \Delta y)$ و بعد در امتداد جهت $+x$ به $(x + \Delta x, y + \Delta y)$ برود. می‌بینیم که مقدار کار انجام‌شده، بسته به اینکه ذره کدام مسیر را می‌پیماید، فرق می‌کند. اگر چنین باشد، در این صورت کار انجام‌شده نمی‌تواند با اختلاف بین مقادیر تابع انرژی پتانسیل اسکالری که در نقاط انتهایی حرکت محاسبه شده‌اند، برابر قرار داده شود، زیرا چنین اختلافی باید نتیجه‌ای منحصربه‌فرد، مستقل از مسیر، به‌دست می‌دهد. اختلاف کار انجام‌شده در طول این دو

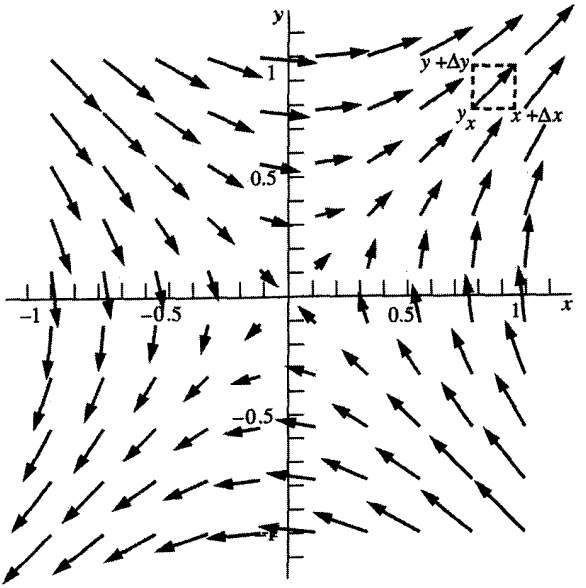
مسیر عبارت است از $2b\Delta x\Delta y$ (معادلهٔ ۶.۱.۴). این اختلاف درست با مقدار انتگرال کار روی حلقهٔ بسته مساوی است؛ از این رو، بیان اینکه کار انجام‌شده در رفتن از یک نقطه به نقطهٔ دیگر در این میدان نیرو به مسیر وابسته است، معادل با بیان انتگرال کار روی حلقهٔ بستهٔ ناصفر است. میدان نیروی خاصی که در شکل ۲.۱.۴ مشاهده می‌کنید، ایجاب می‌کند که با تاریخچهٔ کامل ذره برای محاسبهٔ کار انجام‌شده و، بنابراین با انرژی جنبشی کسب‌شدهٔ آن، آشنا باشیم. مفهوم انرژی پتانسیل، که ممکن است از آن نیرو به‌دست آید در این حالت خاص بی‌معنی می‌شود.

تنها راهی که بتوانیم مقدار منحصربه‌فردی به تابع انرژی پتانسیل نسبت بدهیم این خواهد بود که انتگرال کار روی مسیر بسته صفر شود. در چنین حالتهایی، کار انجام‌شده در طول یک مسیر از A به B باید مستقل از مسیر و با ائتلاف انرژی پتانسیل و کسب انرژی جنبشی برابر باشد. انرژی کل ذره در چنین میدان نیرویی باید ثابت و مستقل از مکانش باشد! به این جهت، باید قیدی بیابیم که نیروی خاصی از آن پیروی کند، در صورتی که انتگرال کارش روی مسیر بسته صفر شود.

برای یافتن قید مطلوب، کار انجام‌شده را در حرکت‌دادن ذرهٔ آزمون در جهت پادساعتگرد، در اطراف حلقه مستطیلی به مساحت $\Delta x\Delta y$ از نقطهٔ (x, y) و برگشت دوبارهٔ آن به همین نقطه، مطابق شکل ۲.۱.۴، محاسبه می‌کنیم. می‌رسیم به:

$$
\begin{aligned}
W &= \oint \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} \\
&= \int_x^{x+\Delta x} F_x(y)dx + \int_y^{y+\Delta y} F_y(x+\Delta x)dy \\
&\quad + \int_{x+\Delta x}^{x} F_x(y+\Delta y)dx + \int_{y+\Delta y}^{y} F_y(x)dy \\
&= \int_y^{y+\Delta y} (F_y(x+\Delta x) - F_y(x))dy \\
&\quad + \int_x^{x+\Delta x} (F_x(y) - F_x(y+\Delta y))dx \\
&= (b(x+\Delta x) - bx)\Delta y + (b(y+\Delta y) - by)\Delta x \\
&= 2b\Delta x\Delta y
\end{aligned}
\qquad (۶.۱.۴)
$$

کار انجام‌شده ناصفر و متناسب با مساحت حلقه، $\Delta A = \Delta x\cdot\Delta y$، است که آن را به‌دلخواه اختیار کرده‌ایم. اگر کار انجام‌شده را بر مساحت حلقه تقسیم کنیم و حدش را به‌ازای $\Delta A \to 0$ به‌دست آوریم، مقدار $2b$ را می‌یابیم. این نتیجه به ماهیت دقیق این میدان نیروی ناپایستار خاص بستگی دارد.



شکل ۳.۱.۴ میدان نیروی پایستاری که مؤلفه‌های آن عبارت‌اند از $F_x = by$ و $F_y = bx$.

اگر جهت یکی از مؤلفه‌های نیرو را معکوس کنیم، مثلاً قرار دهیم $F_x = +by$ (و به‌این ترتیب، «با انهدام» گردش میدان نیرو ولی حفظ‌کردن بزرگی آن در هر مکان)، در این صورت کار انجام‌شده بر واحد سطح در ضمن پیمودن حلقهٔ بسته، صفر می‌شود. میدان نیروی حاصل پایسته می‌شود (شکل ۳.۱.۴). واضح است که، مقدار انتگرال روی حلقهٔ بسته به دقتی بستگی دارد که با آن بردار $\mathbf{F}$ جهت و بزرگیش را حین حرکت در اطراف، روی صفحهٔ xy تغییر می‌دهد.

آشکار است که بردار نیروی $\mathbf{F}$ باید چند نوع قید داشته باشد، تا انتگرال کار روی حلقهٔ بسته صفر شود. می‌توانیم این شرط قیدی را با محاسبهٔ نیروها در $x + \Delta x$ و $y + \Delta y$ و با بهره‌گیری از بسط تیلور و سپس واردکردن بسط حاصل در انتگرال کار روی مسیر معادلهٔ ۶.۱.۴، به‌دست آوریم. خواهیم رسید به:

$$F_x(y + \Delta y) = F_x(y) + \frac{\partial F_x}{\partial y}\Delta y$$

$$F_y(x + \Delta x) = F_y(x) + \frac{\partial F_y}{\partial x}\Delta x \qquad (۷.۱.۴)$$

$$\oint \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_{y}^{y+\Delta y}\left(\frac{\partial F_y}{\partial x}\Delta x\right)dy - \int_{x}^{x+\Delta x}\left(\frac{\partial F_x}{\partial y}\Delta y\right)dx$$
$$= \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right)\Delta x\Delta y = 2b\Delta x\Delta y \qquad (۸.۱.۴)$$

معادلهٔ آخری شامل جملهٔ $(\partial_y/\partial x - \partial F_x/\partial y)$ است، که مقدار صفر یا ناصفر آن، آزمونی شرطی را نشان می‌دهد که در پی آن می‌گردیم. اگر این جمله به‌جای $2b$ مساوی صفر بود، در این صورت انتگرال کار روی حلقهٔ بسته صفر می‌شد و اطمینان حاصل می‌کردیم که تابع انرژی پتانسیل وجود دارد و از آن نیرو می‌توانست به‌دست آید.

این شرط یک روایت نسبتاً ساده‌شده‌ای از یک قضیهٔ خیلی کلی ریاضی به‌نام قضیهٔ استوکس است.[۱] این قضیه از این قرار نوشته می‌شود:

$$\oint \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_{s} \operatorname{curl}\mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{n}}da$$
$$\operatorname{curl}\mathbf{F} = \mathbf{i}\left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}\right) + \mathbf{j}\left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}\right) + \mathbf{k}\left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right) \qquad (۹.۱.۴)$$

بنا بر این قضیه، انتگرال خطی روی حلقهٔ بستهٔ هر تابع برداری $\mathbf{F}$، با انتگرال $\operatorname{curl}\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}da$ روی سطح S برابر است که حلقهٔ بسته آن را محصور کرده است. بردار $\mathbf{n}$ عبارت است از بردار یکهٔ عمود بر عنصر سطحی که روی آن انتگرال‌گیری می‌شود و مساحت این عنصر سطح da است. جهت آن، جهت پیش‌روی پیچ راستگرد است که در همان جهت چرخشی پیچیده می‌شود که حلقهٔ بسته را دور می‌زند. در شکل ۲.۱.۴، $\mathbf{n}$ باید به سمت خارج از صفحهٔ کاغذ متوجه باشد؛ سطح مساحت مستطیلی است که به‌وسیلهٔ حلقهٔ مستطیلی خط‌چین‌شده محصور شده باشد. بنابراین، صفرشدن $\operatorname{curl}\mathbf{F}$ تضمین می‌کند که انتگرال خطی $\mathbf{F}$ روی مسیر بسته صفر و از این‌رو، $\mathbf{F}$ نیروی پایستار باشد.

---

۱. می‌توانید به هر کتاب درسی پیشرفتهٔ حساب دیفرانسیل و انتگرال، مثلاً:
(S. I. Grossman and W. R. Derrick, *Advanced Engineering Mathematics*, Harper Collins, New York, 1988)

یا هر کتاب الکترومغناطیس، مثلاً:
ریتس، میلفورد، کریستی، مبانی نظریهٔ الکترومغناطیس، ویراست چهارم، ترجمهٔ جلال صمیمی، ناصر علیزاده قمصری، مجتبی آقامیر، ۱۳۸۴، تهران، مرکز نشر دانشگاهی.
مراجعه کنید.

۲.۴ تابع انرژی پتانسیل در حرکت سه‌بعدی: عملگر دِل

فرض کنید بر ذرهٔ آزمون نیرویی وارد می‌آید که تاو آن صفر است. در این صورت، تمام مؤلفه‌های curl $\mathbf{F}$ در معادلهٔ ۹.۱.۴ صفر می‌شوند. می‌توانیم اطمینان یابیم که تاو صفر می‌شود، اگر $\mathbf{F}$ را از تابع انرژی پتانسیل، $V(x,y,z)$، طبق رابطهٔ زیر به‌دست آوریم

$$F_x = -\frac{\partial V}{\partial x} \qquad F_y = -\frac{\partial V}{\partial y} \qquad F_z = -\frac{\partial V}{\partial z} \tag{۱.۲.۴}$$

مثلاً، مؤلفهٔ z تاو $\mathbf{F}$ از این قرار می‌شود:

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = -\frac{\partial^2 V}{\partial y \partial x} \qquad \frac{\partial F_y}{\partial x} = -\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial^2 V}{\partial y \partial x} \qquad \therefore \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} = 0 \tag{۲.۲.۴}$$

جزء آخر در صورتی برقرار است که فرض کنیم V در هر جا پیوسته و مشتق‌پذیر باشد. برای سایر مؤلفه‌های curl $\mathbf{F}$ نیز به همین نتیجه می‌رسیم. شاید تعجب کنید که علاوه بر اینکه $\mathbf{F}$ را می‌توان از تابع انرژی پتانسیل به‌دست آورد، دلایل دیگری نیز وجود دارد که ممکن است curl $\mathbf{F}$ صفر شود. اما، curl $\mathbf{F} = 0$ شرط لازم و کافی برای وجود $V(x,y,z)$ است، به‌طوری که معادلهٔ ۱.۲.۴ برقرار شود.[۱]

اکنون می‌توانیم پایستگی نیروی $\mathbf{F}$ را در عبارات برداری به این صورت بیان کنیم:

$$\mathbf{F} = -\mathbf{i}\frac{\partial V}{\partial x} - \mathbf{j}\frac{\partial V}{\partial y} - \mathbf{k}\frac{\partial V}{\partial z} \tag{۳.۲.۴}$$

این معادله را می‌توان به‌اختصار چنین نوشت:

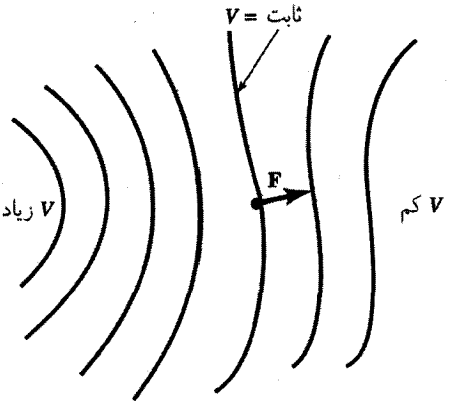
$$\mathbf{F} = -\boldsymbol{\nabla} V \tag{۴.۲.۴}$$

که عملگرِ برداری دِل (∇) را به‌صورت زیر معرفی کرده‌ایم:

$$\boldsymbol{\nabla} = \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z} \tag{۵.۲.۴}$$

عبارت $\boldsymbol{\nabla} V$ گرادیان V نیز نام دارد و گاهی هم به‌صورت grad V نوشته می‌شود. به تعبیر ریاضی، گرادیان هر تابع، برداری است که جهت و بزرگی بیشینهٔ مشتق فضایی تابع را نشان می‌دهد. به تعبیر فیزیکی، گرادیان منفی تابع انرژی پتانسیل جهت و بزرگی نیروی وارد بر ذره‌ای را مشخص

۱. مثلاً ر.ک. S. I. Grossman, op cit. همچنین Feng، بحثی جالب راجع به شرایط پایستگی وقتی میدان نیرو شامل تکینها باشد در *Amer. J. Phys.* 37, 616 (1969) ارائه می‌دهد.



شکل ۱.۲.۴ میدان نیرو با منحنیهای پربند هم‌پتانسیل نشان داده شده است.

می‌کند که در میدان حاصل از سایر ذرات قرار گرفته است. معنای علامت منفی آن است که ذره ناگزیر در جهت کاهش انرژی پتانسیل حرکت می‌کند تا در جهت مخالف آن. نمودار گرادیان را در شکل ۱.۲.۴ مشاهده می‌کنید. در این شکل تابع انرژی پتانسیل به شکل خطوط پربند نمایشگر منحنیهای انرژی پتانسیل ثابت، ترسیم شده است. نیرو در هر نقطه همواره بر منحنی هم‌پتانسیل یا سطحی که از نقطهٔ یادشده می‌گذرد، عمود است.

می‌توانیم curl $\mathbf{F}$ را با بهره‌گیری از عملگرِ دِل بیان کنیم. به مؤلفه‌های curl $\mathbf{F}$ در معادلهٔ ۹.۱.۴ نگاه کنید. اینها مؤلفه‌های بردار $\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{F}$ هستند. از این‌رو، $\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{F} = \text{curl } \mathbf{F}$. شرط پایسته‌بودن نیرو را می‌توان به‌اختصار از این قرار نوشت:

$$\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{F} = \mathbf{i}\left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}\right) + \mathbf{j}\left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}\right) + \mathbf{k}\left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right) = 0 \tag{۶.۲.۴}$$

به‌علاوه، اگر $\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{F} = 0$، در این صورت $\mathbf{F}$ می‌تواند از تابع اسکالر V با عملیات $\mathbf{F} = -\boldsymbol{\nabla} V$ به‌دست آید، زیرا $\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{\nabla} V \equiv 0$ یا کرل هر گرادیان صفر است.

اکنون می‌توانیم اصل پایستگی انرژی را به سه بعد تعمیم دهیم. کار انجام‌شده به‌وسیلهٔ نیروی پایسته را در حرکت ذره از نقطهٔ A به نقطهٔ B می‌توان چنین نوشت:

$$\int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = -\int_A^B \boldsymbol{\nabla} V(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = -\int_{A_x}^{B_x} \frac{\partial V}{\partial x} dx - \int_{A_y}^{B_y} \frac{\partial V}{\partial y} dy - \int_{A_z}^{B_z} \frac{\partial V}{\partial z} dz \tag{۷.۲.۴}$$

$$= -\int_A^B dV(\mathbf{r}) = -\Delta V = V(A) - V(B)$$

آخرین جملهٔ این عبارت بیانگر این واقعیت است که $\nabla V \cdot d\mathbf{r}$ دیفرانسیل کامل و برابر با dV است. کار انجام‌شده به‌وسیلهٔ هر نیروی خالص، همواره با تغییر انرژی جنبشی برابر است؛ از این رو،

$$\begin{aligned} \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \Delta T = -\Delta V \\ \therefore \Delta(T+V) &= 0 \\ \therefore T(A)+V(A) &= T(B)+V(B) = E = \text{ثابت} \end{aligned} \tag{۸.۲.۴}$$

و ما به قانون مطلوبمان که قانون پایستگی انرژی کل باشد، رسیدیم.

اگر $\mathbf{F}'$ نیرویی ناپایستار باشد، نمی‌توان آن را مساوی $-\nabla V$ قرار داد. افزایش کار $\mathbf{F}' \cdot d\mathbf{r}$ دیفرانسیل کامل نیست و نمی‌تواند با $-dV$ مساوی قرار داده شود. در آن حالتی که هم نیروهای پایستار $\mathbf{F}$ و هم نیروهای ناپایستار $\mathbf{F}'$ حضور دارند، افزایش کار کل عبارت است از

$$(\mathbf{F}+\mathbf{F}') \cdot d\mathbf{r} = -dV + \mathbf{F}' \cdot d\mathbf{r} = dT$$

و شکل تعمیم‌یافتهٔ قضیهٔ کار و انرژی به این صورت درمی‌آید:

$$\int_A^B \mathbf{F}' \cdot d\mathbf{r} = \Delta(T+V) = \Delta E \tag{۹.۲.۴}$$

انرژی کل، E، در طی حرکت ذره ثابت نمی‌ماند، بلکه بسته به ماهیت نیروی ناپایستار $\mathbf{F}'$ افزایش یا کاهش می‌یابد. در مورد نیروهای اتلاف‌گری چون اصطکاک و مقاومت هوا، جهت $\mathbf{F}'$ همیشه برخلاف حرکت است؛ از این‌رو، $\mathbf{F}' \cdot d\mathbf{r}$ منفی است. و هنگامی که ذره در فضا حرکت می‌کند، انرژی کل ذره کاهش می‌یابد.

مثال ۱.۲.۴

تابع انرژی پتانسیل دوبعدی زیر مفروض است:

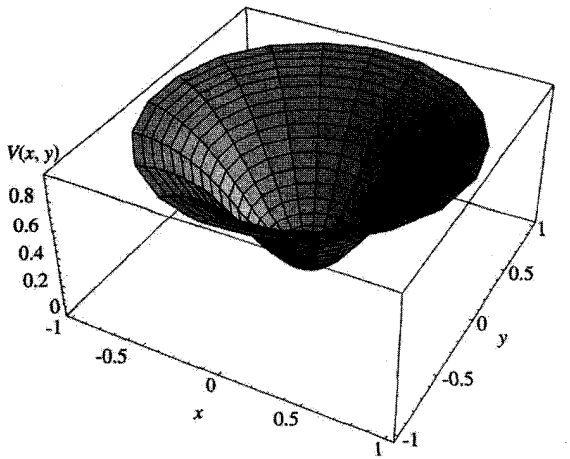
$$V(\mathbf{r}) = V_0 - \frac{1}{2}k\delta^2 e^{-r^2/\delta^2}$$

که $\mathbf{r} = \mathbf{i}x + \mathbf{j}y$، و V_0، k، و δ ثابت‌اند. تابع نیرو را پیدا کنید.

حل:

ابتدا تابع انرژی پتانسیل را به‌صورت تابعی از x و y می‌نویسیم:

$$V(x,y) = V_0 - \frac{1}{2}k\delta^2 e^{-(x^2+y^2)/\delta^2}$$



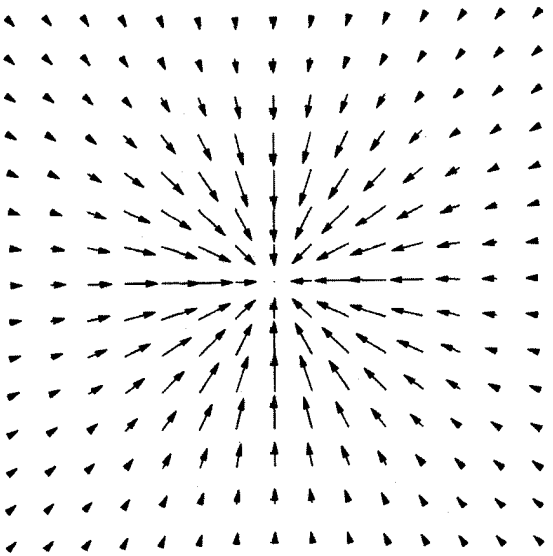
شکل ۲.۲.۴ الف تابع انرژی پتانسیل $V(x,y) = V_\circ - \frac{1}{2}k\delta^2 e^{-(x^2+y^2)/\delta^2}$.

و بعد عملگر گرادیان را به‌کار می‌بریم:

$$\begin{aligned}\mathbf{F} = -\boldsymbol{\nabla}V &= -\left(\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y}\right)V(x,y)\\ &= -k(\mathbf{i}x + \mathbf{j}y)e^{-(x^2+y^2)/\delta^2}\\ &= -k\mathbf{r}e^{-r^2/\delta^2}\end{aligned}$$

توجه کنید که ثابت $V_\circ$ در تابع نیرو ظاهر نمی‌شود؛ مقدار آن دلخواه است. این ثابت صرفاً مقدار تابع انرژی پتانسیل را با بزرگی ثابتی در همه جای صفحهٔ xy افزایش یا کاهش می‌دهد، و بنابراین بر تابع نیروی حاصل تأثیری ندارد.

تابع انرژی پتانسیل را در شکل ۲.۲.۴ (الف) و تابع نیروی حاصل از آن را در شکل ۲.۲.۴ (ب)، ترسیم کرده‌ایم. ثابتهای $V_\circ = ۱$، $\delta^2 = ۱/۳$، و $k = ۶$ را در نظر گرفته‌ایم. «حفره» در سطح انرژی پتانسیل به بزرگترین عمق خود در مبدأ می‌رسد که آشکارا مکان یک چشمهٔ ربایش است. دایره‌های هم‌مرکز اطراف مرکز حفره هم‌پتانسیل، خطوطی با انرژی پتانسیل ثابت، هستند. خطوط شعاعی، خطوطی با تندترین شیب‌اند که گرادیان سطح انرژی پتانسیل را ترسیم می‌کنند. شیب هر خط شعاعی در هر نقطه روی سطح متناسب با نیرویی است که در آنجا بر ذره وارد می‌آید. میدان نیرو در شکل ۲.۲.۴ (ب) نشان می‌دهد که بردارهای نیرو به‌سمت مبدأ متوجه‌اند. این بردارها هم دور از مبدأ و هم نزدیک جایی که شیب تابع انرژی پتانسیل به صفر میل می‌کند، ضعیف می‌شوند.



۲.۲.۴ ب گرادیان میدان نیروی تابع انرژی پتانسیل در شکل ۲.۲.۴ (الف)؛

$$\mathbf{F} = -\Delta V - k(\mathbf{i}x + \mathbf{j}y)e^{-(x^2+y^2)/\delta^2}$$

مثال ۲.۲.۴

فرض کنید ذره‌ای به جرم m در میدان نیروی مشروح در بالا حرکت می‌کند و در لحظهٔ $t = 0$ ذره با سرعت v_0 از مبدأ می‌گذرد. سرعت ذره در فاصلهٔ کمی دور از مبدأ که با $\mathbf{r} = \mathbf{e}_r\Delta$ و $\Delta \ll \delta$ مشخص می‌شود، چقدر خواهد بود؟

حل:

نیرو پایستار است، زیرا تابع انرژی پتانسیل وجود دارد. بنابراین، انرژی کل ثابت $E = T+V =$ عبارت است از:

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + V(\mathbf{r}) = \frac{1}{2}mv_0^2 + V(0)$$

پس از حل این معادله برحسب v، داریم:

$$\begin{aligned} v^2 &= v_0^2 + \frac{2}{m}[V(0) - V(\mathbf{r})] \\ &= v_0^2 + \frac{2}{m}\left[\left(V_0 - \frac{1}{2}k\delta^2\right) - \left(V_0 - \frac{1}{2}k\delta^2 e^{-\Delta^2/\delta^2}\right)\right] \\ &= v_0^2 - \frac{k\delta^2}{m}[1 - e^{-\Delta^2/\delta^2}] \end{aligned}$$

$$\approx v_0^2 - \frac{k\delta^2}{m}[1 - (1 - \Delta^2/\delta^2)]$$
$$= v_0^2 - \frac{k}{m}\Delta^2$$

انرژی پتانسیل تابع درجهٔ دومی از جابه‌جایی Δ از مبدأ، برای جابه‌جاییهای کوچک است؛ از این رو این جواب به پایستگی انرژی برای نوسانگر هماهنگ ساده تبدیل می‌شود.

مثال ۳.۲.۴

آیا میدان نیروی $\mathbf{F} = \mathbf{i}xy + \mathbf{i}xz + \mathbf{k}yz$ پایستار است؟ curl $\mathbf{F}$ عبارت است از

$$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ xy & xz & yz \end{vmatrix} = \mathbf{i}(z - x) + \mathbf{j}\cdot 0 + \mathbf{k}(z - x)$$

رابطهٔ آخری به‌ازای تمام مقادیر مختصات صفر نیست. از این رو میدان پایستار نیست.

مثال ۴.۲.۴

به‌ازای چه مقادیری از ثابتهای a، b، و c نیروی $\mathbf{F} = \mathbf{i}(ax + by^2) + \mathbf{j}cxy$ پایستار است؟ تاو می‌گیریم و می‌رسیم به:

$$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ ax + by^2 & cxy & 0 \end{vmatrix} = \mathbf{k}(c - 2b)y$$

این رابطه نشان می‌دهد که نیرو پایستار است به‌شرطی که $c = 2b$. مقدار a بی‌تأثیر است.

مثال ۵.۲.۴

با بهره‌گیری از تاو نشان دهید که قانون نیروی عکس مجذوری در سه بعد، $\mathbf{F} = (-k/r^2)\mathbf{e}_r$، پایستار است. از مختصات کروی بهره گیرید. تاو در پیوست و به‌صورت زیر آمده است:

$$\nabla \times \mathbf{F} = \frac{1}{r^2 \sin\theta} \begin{vmatrix} \mathbf{e}_r & \mathbf{e}_\theta r & \mathbf{e}_\phi r \sin\theta \\ \dfrac{\partial}{\partial r} & \dfrac{\partial}{\partial \theta} & \dfrac{\partial}{\partial \phi} \\ F_r & rF_\theta & rF_\phi \sin\theta \end{vmatrix}$$

که داریم $F_r = -\frac{k}{r^2}$، $F_\theta = 0$، و $F_\phi = 0$. بنابراین، تاو تبدیل می‌شود به

$$\nabla \times \mathbf{F} = \frac{\mathbf{e}_\theta}{r \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \phi}\left(\frac{-k}{r^2}\right) - \frac{\mathbf{e}_\phi}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{-k}{r^2}\right) = 0$$

که البته صفر می‌شود؛ زیرا هر دو مشتق جزئی صفر است. بنابراین، نیروی مورد بحث پایستار است.

۳.۴ نیروهایی از نوع جداپذیر: حرکت پرتابی

غالباً حالتی پیش می‌آید که بتوان دستگاه مختصات دکارتی را چنان اختیار کرد که مؤلفه‌های میدان نیرو فقط شامل همان مختصات مربوط به خود باشند، یعنی

$$\mathbf{F} = \mathbf{i}F_x(x) + \mathbf{j}F_y(y) + \mathbf{k}F_z(z) \qquad (۱.۳.۴)$$

این نوع نیروها را جداپذیر گویند. تاو چنین نیرویی عیناً صفر است:

$$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ F_x(x) & F_y(y) & F_z(z) \end{vmatrix} = 0 \qquad (۲.۳.۴)$$

مؤلفهٔ x عبارت است از $\partial F_z(z)/\partial y - \partial F_y(y)/\partial z$، و در مورد سایر مؤلفه‌ها نیز به همین ترتیب است. از این رو، میدان پایستار است زیرا هر مشتق جزئی از نوع آمیخته است و به این جهت عیناً صفر می‌شود، زیرا مختصات x، y، و z متغیرهای مستقل‌اند. بنابراین، انتگرال‌گیری معادلات دیفرانسیل حرکت خیلی ساده است، زیرا هر معادله مؤلفه‌ای از نوع $m\ddot{x} = F_x(x)$ است. در این حالت، معادلات را می‌توان با روشهایی حل کرد که در مورد حرکت راستخط در فصل ۲ حل کردیم.

وقتی مؤلفه‌های نیرو شامل زمان و مشتقات زمانی مختصات مربوط به خودشان باشند، دیگر این حکم صادق نیست که نیرو باید ضرورتاً پایستار باشد. با این همه، اگر نیرو جداپذیر باشد، معادلات مؤلفه‌ای حرکت به شکل $m\ddot{x} = F_x(x, \dot{x}, t)$ درمی‌آیند و می‌توان آنها را با روشهایی حل کرد که در فصل ۲ از آن بهره گرفتیم. چند مثال در خصوص نیروهای جداپذیر پایستار، و نیز ناپایستار، در اینجا و در بخشهای بعدی مورد بحث قرار خواهند گرفت.

حرکت پرتابه در میدان گرانشی یکنواخت

در حالی‌که استادی به‌نام گالیله در پادوا، ایتالیا، در خلال سالهای ۱۶۰۸ـ۱۶۰۲، برای پرتاب‌کردن افقی گلوله‌ها در فضا با غلتاندن آنها روی سطح شیبداری به پایین که در انتهای آن یک منحرف‌کنندهٔ

انحنادار متصل کرده بود، بیشتر وقت خود را صرف می‌کرد، امیدوار بود که نشان دهد حرکت افقی اشیاء در غیاب نیروهای اصطکاکی برای همیشه تداوم خواهد یافت. اگر چنین می‌شد، در این صورت حرکت افقی پرتابه‌های سنگین نمی‌بایست از مقاومت هوا تأثیر زیادی بپذیرند و با سرعت ثابتی به حرکت درآیند. گالیله قبلاً نشان داده بود که گلوله‌های غلتان به‌سوی پایین سطحهای شیبدار سرعت می‌گیرند که با زمان غلتش آنها متناسب است و از این رو توانست سرعت گلوله‌های پرتاب‌شده را در امتداد افقی به روش کنترل‌شده تغییر دهد. وی مشاهده کرد که فاصلهٔ افقی پیموده‌شده توسط پرتابه متناسب با سرعت پرتاب آن از سطح، افزایش یافته است؛ بنابراین، به‌طور آزمایشی نظریه‌اش در معرض نمایش قرار داد. در خلال این تحقیقات، از اینکه پی برد مسیرهای تمام پرتابه‌ها سهمی است، شگفت‌زده شد! در سال ۱۶۰۹ که به جواب پی برد (همان‌طور که هر دانشجوی فیزیک امروزی که دست به حل مسائل فیزیک می‌زند، بنا بر تجربه آن را وحی مُنزل تلقی می‌کند) توانست به‌کمک عملیات ریاضی اثبات کند که مسیر سهمی‌گون پرتابه‌ها نتیجهٔ طبیعی حرکت افقی بدون شتاب، و یک حرکت قائم مستقل است. البته، وی قبل از انتشار نهایی کار خود در سال ۱۶۳۸[1]، نتایج این حرکت را نیز به‌خوبی درک کرده بود. وی مطلب زیر را در نامه‌ای به یکی از دانشمندان آن روز، به‌نام جیووانی بالیانی نوشت:

> ...من حرکت پرتابه‌ها را نیز بررسی کردم که خواص گوناگونی نشان می‌دهند؛ در بین آنها اثبات اینکه پرتاب پرتابه به‌وسیلهٔ پرتاب‌کننده، همین‌طور پرتاب گلوله با شلیک توپخانه وقتی به بیشینهٔ ارتفاع پرواز و سقوط در دورترین فاصله می‌رسد که زاویهٔ بلندی لولهٔ توپ به‌اندازهٔ نصف زاویهٔ قائمه، یعنی ۴۵°، باشد؛ و علاوه بر این، پرتابهای دیگری که در زوایای بلندی بزرگتر یا کوچکتر صورت گیرد، وقتی نتیجهٔ برابر دارند که بلندی لولهٔ توپخانه به تعداد درجات مساوی کمتر یا بیشتر از ۴۵° باشد.[2]

برخلاف امروز که علوم و فناوری از پشتیبانی مالی برخوردار می‌شوند، مسائل اساسی در علوم جدید دوران گالیله که تنها توجه تعداد خیلی کمی افراد علاقه‌مند را جلب می‌کرد، اگر به طریقی به مسائل نظامی مربوط می‌شد این اقبال را می‌داشت که مورد توجه واقع شود. البته، حل حرکت پرتابه یکی از مشهورترین مسائل در مکانیک کلاسیک است و این کشف گالیله اتفاقی نبود؛ کشف او تا اندازه‌ای به‌خاطر حمایتهای مالی بود که از سوی اربابان ثروتمند صورت می‌گرفت که برای کسب امتیاز نظامی بر دشمنانشان تلاش و تکاپو می‌کردند.

---

1. *Discourse of Two New Sciences*

۲. مثلاً ر.ک.

S. Drake and J. MacLachlan, Galileo's Discovery of the Parabolic Trajectory, *Scienti. Amer.* 232, 102-110, (March, 1975).

و نیز

S. Drake, *Galileo at Work,* Mineola, NY, Dover, 1978.

در سال ۱۵۹۷، گالیله وارد دهمین سال همکاری با ابزارسازی به اسم مارک آنتونیو مازولنی شد. در روزگار گالیله، بهره‌گیری از توپخانه برای کوبیدن دیوارهای قلعه‌ها از علم پرارزشتر بود. مارکی دل‌مونت در فلورانس و ژنرال دل‌مونت در پادووا، که گالیله قبلاً با آنها کار کرده بود، می‌خواستند بدانند که آیا امکان ساخت یک «قطب‌نمای» نظامی سبک وجود دارد که بتواند برای اندازه‌گیری فاصله و ارتفاع یک هدف به‌کار رود، بلندی لولهٔ توپخانه را اندازه‌گیری و مسیر پرتابه را ردگیری کند یا خیر. گالیله این مسئله را حل و قطب‌نمای نظامی را ابداع کرد، که سازنده آن را به‌صورت انبوه در کارگاهش تولید کرد. این دستگاهها بازار پررونقی داشتند و فروش خوبی هم کردند. با وجود این، بیشترین امکانات مالی که گالیله کسب کرد و به او امکان داد تا تحقیقاتش را دربارهٔ حرکت پیش برد، از طریق آموزش استفاده از قطب‌نما و مطالبهٔ ۱۲۰ لیر از دانشجویان برای این امتیاز بود. گرچه، مانند بسیاری از اساتید امروزی که بیشتر خوانندگان این کتاب احتمالاً با آنها آشنایند، گالیله هر نوع ناملایماتی را که مانع از پیشرفت او در تحقیقات می‌شد، تحمل می‌کرد. «من همیشه در خدمت این و آن هستم، بسیاری از اوقات روز را ــ اغلب بهترین ساعات را ــ در خدمت دیگران صرف می‌کنم.» خوشبختانه او وقت کافی برای اجرای آزمایشهایش با گلوله‌های غلتان به‌دست آورد، که به کشف مسیر سهموی پرتابه و سرانجام به هدایت نیوتون در کشف قوانین کلاسیک حرکت منجر شد.

در سال ۱۶۱۱، گالیله خبر کاوش خویش در زمینهٔ پرتابه را به اطلاع آنتونیو دومدیسی رسانید، که بدون شک خانواده قدرتمند دومدیسی در فلورانس به‌خوبی از آن بهره جست . . . و بدون تردید راه زیادی پیموده شد تا به آنجا رسید که این خانواده گالیله را بس محترم شمردند و به حامیان همیشگی وی تبدیل شدند.

از این‌رو ما با سپاسگزاری همیشگی از گالیله و جانشین او، نیوتون، در اینجا فقط چند دقیقه، و نه سالها، وقت صرف می‌کنیم تا مسئلهٔ پرتابه را حل کنیم.

بدون مقاومت هوا

ابتدا برای سهولت، حالتی را در نظر می‌گیریم که پرتابه بدون مقاومت هوا حرکت کند. در این وضعیت فقط یک نیرو، گرانش، بر پرتابه وارد می‌آید و مطابق با مشاهدات گالیله، آن‌طور که خواهیم دید، فقط بر حرکت قائمش تأثیر می‌گذارد. محور z را قائم می‌گیریم؛ معادلهٔ حرکت عبارت می‌شود از

$$m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -\mathbf{k}mg \qquad (۳.۳.۴)$$

در مورد پرتابه‌هایی که خیلی بالا نمی‌روند یا مسافت خیلی دوری را طی نمی‌کنند، می‌توانیم شتاب گرانشی g را ثابت بگیریم. در این صورت تابع نیرو پایستار و از نوع جداپذیر است، زیرا حالت

خاصی از معادلهٔ ۱.۳.۴ است. v_0 سرعت اولیهٔ پرتابه و مبدأ دستگاه مختصات مکان اولیهٔ آن است. به‌علاوه، اگر جهت دستگاه مختصات را چنان اختیار کنیم که محور x در طول تصویر سرعت اولیه روی صفحه افقی xy قرار گیرد، از کلیت مسئله نمی‌کاهد. چون هیچ نیرویی وجود ندارد که در جهت افقی بر پرتابه اثر کند، و حرکت منحصراً در صفحهٔ قائم اتفاق می‌افتد. بنابراین، مکان پرتابه در هر زمان (معادلهٔ ۱.۳.۴) عبارت است از

$$\mathbf{r} = \mathbf{i}x + \mathbf{k}z \qquad (۴.۳.۴)$$

سرعت پرتابه را می‌توان به‌صورت تابعی از ارتفاعش، z، با به‌کار بردن معادلهٔ انرژی (معادلهٔ ۱.۳.۴) محاسبه کرد:

$$\frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{z}^2) + mgz = \frac{1}{2}mv_0^2 \qquad (۵.۳.۴ \text{ الف})$$

یا به‌طور معادل

$$v^2 = v_0^2 - 2gz \qquad (۵.۳.۴ \text{ ب})$$

می‌توانیم سرعت پرتابه را در هر لحظه از زمان با انتگرال‌گیری از معادلهٔ ۳.۳.۴ محاسبه کنیم:

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = -\mathbf{k}gt + \mathbf{v}_0 \qquad (۶.۳.۴ \text{ الف})$$

ثابت انتگرال‌گیری عبارت است از $\mathbf{v}_0$، سرعت اولیه. این سرعت، برحسب بردارهای یکه، عبارت است از

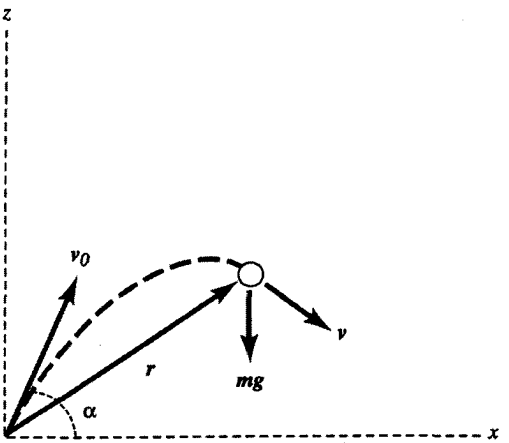
$$\mathbf{v} = \mathbf{i}v_0 \cos\alpha + \mathbf{k}(v_0 \sin\alpha - gt) \qquad (۶.۳.۴ \text{ ب})$$

اگر یک‌بار دیگر انتگرال بگیریم، بردار مکان را از قرار زیر به‌دست می‌آوریم

$$\mathbf{r} = -\mathbf{k}\frac{1}{2}gt^2 + \mathbf{v}_0 t + \mathbf{r}_0 \qquad (۷.۳.۴ \text{ الف})$$

ثابت انتگرال‌گیری عبارت است از مکان اولیهٔ پرتابه، $\mathbf{r}_0$، که مساوی صفر است؛ بنابراین، برحسب بردارهای یکه، معادلهٔ ۷.۳.۴ الف به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$\mathbf{r} = \mathbf{i}(v_0 \cos\alpha)t + \mathbf{k}\left((v_0 \sin\alpha)t - \frac{1}{2}gt^2\right) \qquad (۷.۳.۴ \text{ ب})$$



شکل ۱.۳.۴ مسیر سهموی پرتابه.

برحسب مؤلفه‌ها، مکان پرتابه در هر لحظه از زمان عبارت است از

$$\begin{aligned} x &= \dot{x}_\circ t = (v_\circ \cos\alpha)t \\ y &= \dot{y}_\circ t \equiv \circ \\ z &= \dot{z}_\circ t - \frac{1}{2}gt^2 = (v_\circ \sin\alpha)t - \frac{1}{2}gt^2 \end{aligned} \qquad (ج\ ۷.۳.۴)$$

$\dot{x}_\circ = v_\circ \cos\alpha$، $\dot{y}_\circ = \circ$، و $\dot{z}_\circ = v_\circ \sin\alpha$ مؤلفه‌های سرعت اولیهٔ $v_\circ$اند.

اکنون می‌توانیم، مانند گالیله در سال ۱۶۰۹، نشان دهیم که مسیر پرتابه سهمی است. اگر با بهره‌گیری از نخستین معادله از رشته معادلات (۷.۳.۴ج)، t را به‌صورت تابعی از x به‌دست آوریم، و بعد رابطهٔ حاصل را در سومین معادله از معادلات (۷.۳.۴ج) بنشانیم، $z(x)$ را به‌صورت زیر پیدا می‌کنیم:

$$t = \frac{x}{v_\circ \cos\alpha} \qquad (۸.۳.۴)$$

$$z = (\tan\alpha)x - \left(\frac{g}{2v_\circ^2 \cos^2\alpha}\right)x^2 \qquad (۹.۳.۴)$$

معادلهٔ ۹.۳.۴، عبارت است از معادلهٔ سهمی که در شکل ۱.۳.۴ نشان داده شده است.

مانند گالیله، خواص متعدد حرکت پرتابه را محاسبه می‌کنیم: (۱) ارتفاع بیشینهٔ، $z_{\max}$، پرتابه؛

(۲) زمانی، $t_{\max}$، که طول می‌کشد تا به ارتفاع بیشینه برسد؛ (۳) زمان پرواز، T، پرتابه؛ (۴) برد، R، و برد بیشینهٔ، $R_{\max}$، پرتابه.

- اوّلاً، ارتفاع بیشینه‌ای را که پرتابه به آن می‌رسد با بهره‌گیری از معادلهٔ (۵.۳.۴ب) و توجه به اینکه در ارتفاع بیشینه مؤلفهٔ قائم سرعت پرتابه صفر است و این امر که سرعتش در جهت افقی و برابر با مؤلفه افقی ثابت $v_\circ \cos\alpha$ است، محاسبه می‌کنیم. بنابراین

$$v_\circ^2 \cos^2\alpha = v_\circ^2 - 2gz_{\max} \qquad (۱۰.۳.۴)$$

این معادله را حل می‌کنیم و می‌رسیم به

$$z_{\max} = \frac{v_\circ^2 \sin^2\alpha}{2g} \qquad (۱۱.۳.۴)$$

- می‌توان زمانی را که طول می‌کشد تا به ارتفاع بیشینه برسد، از معادلهٔ (۶.۳.۴ب) به‌دست آورد؛ در اینجا دوباره از این واقعیت بهره می‌گیریم که در ارتفاع بیشینه، مؤلفهٔ قائم سرعت صفر می‌شود؛ از این رو

$$v_\circ \sin\alpha - gt_{\max} = 0$$

یا

$$t_{\max} = \frac{v_\circ \sin\alpha}{g} \qquad (۱۲.۳.۴)$$

- می‌توانیم زمان کل پرواز، T، پرتابه را با قراردادن $z = 0$ در آخرین معادله از معادلات (۷.۳.۴ج) به‌دست آوریم، می‌دهد:

$$T = \frac{2v_\circ \sin\alpha}{g} \qquad (۱۳.۳.۴)$$

این مدت‌زمان دو برابر زمانی است که طول می‌کشد تا پرتابه به ارتفاع بیشینه برسد و نشان می‌دهد که پرواز پرتابه به بالا تا نقطهٔ اوج مسیرش، با پرواز آن به پایین و در جهت مخالف آن اول، متقارن است.

- سرانجام، برد پرتابه را با نشاندن زمان کل پرواز، T، در اولین معادله از معادلات (۷.۳.۴ج)، محاسبه می‌کنیم. می‌رسیم به:

$$R = x = \frac{v_\circ^2 \sin^2 2\alpha}{g} \qquad (۱۴.۳.۴)$$

R بیشینهٔ مقدارش، $R_{\max} = v_\circ^2/g$، را به‌ازای $\alpha = 45^\circ$ پیدا می‌کند.

مقاومت خطی هوا

حال حرکت پرتابهٔ در معرض نیروی مقاومت هوا را در نظر می‌گیریم. در این حالت، انرژی کل در حین حرکت پایسته نمی‌ماند، و در خلال پرواز پرتابه پیوسته کاهش می‌یابد. برای حل تحلیلی این مسئله، فرض می‌کنیم نیروی مقاوم به‌طور خطی با سرعت تغییر می‌کند. برای ساده‌کردن معادلهٔ حرکت حاصل، ثابت تناسب را $m\gamma$ می‌گیریم که m جرم پرتابه است. در این صورت معادلهٔ حرکت عبارت است از

$$m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -m\gamma\mathbf{v} - \mathbf{k}mg \qquad (۱۵.۳.۴)$$

که با حذف m از طرفین معادله به عبارت سادهٔ زیر می‌رسیم:

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -\gamma\mathbf{v} - \mathbf{k}g \qquad (۱۶.۳.۴)$$

قبل از انتگرال‌گیری، معادلهٔ ۱۶.۳.۴ را به‌صورت مؤلفه‌ای می‌نویسیم:

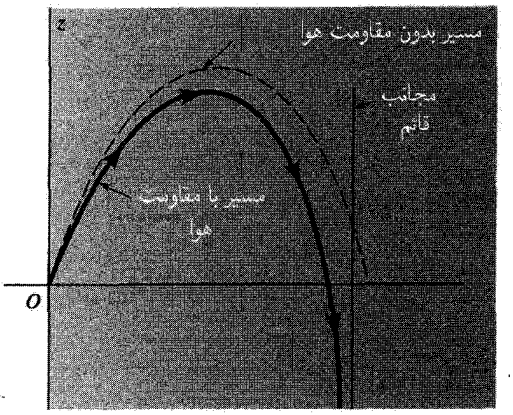
$$\begin{aligned} \ddot{x} &= -\gamma\dot{x} \\ \ddot{y} &= -\gamma\dot{y} \\ \ddot{z} &= -\gamma\dot{z} - g \end{aligned} \qquad (۱۷.۳.۴)$$

حال ملاحظه می‌کنیم که معادلات از هم جدا شده‌اند؛ از این رو می‌توانیم به‌کمک روشهای مطرح‌شده در فصل ۲، هر معادله را به‌طور جداگانه حل کنیم. با استفاده از نتایج مثال ۱.۴.۲، می‌توانیم با قراردادن $\gamma = c_1/m$ که c_1 ضریب کشش خطی است، بلافاصله جوابها را بنویسیم. این نتایج برای مؤلفه‌های سرعت عبارت‌اند از

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \dot{x}_0 e^{-\gamma t} \\ \dot{y} &= \dot{y}_0 e^{-\gamma t} \\ \dot{z} &= \dot{z}_0 e^{-\gamma t} - \frac{g}{\gamma}(1 - e^{-\gamma t}) \end{aligned} \qquad (۱۸.۳.۴)$$

مانند قبل، جهت دستگاه مختصات را چنان اختیار می‌کنیم که محور x در امتداد تصویر سرعت اولیه روی صفحهٔ افقی xy قرار گیرد. در این صورت، $\dot{y} = \dot{y}_0 = 0$ و حرکت به صفحهٔ قائم xz محدود می‌شود. با یک‌بار دیگر انتگرال‌گرفتن، مختصات مکانی را به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} x &= \frac{\dot{x}_0}{\gamma}(1 - e^{-\gamma t}) \\ z &= \left(\frac{\dot{z}_0}{\gamma} + \frac{g}{\gamma^2}\right)(1 - e^{-\gamma t}) - \frac{g}{\gamma}t \end{aligned} \qquad (۱۹.۳.۴)$$



شکل ۲.۳.۴ مقایسهٔ مسیرهای پرتابه با و بدون مقاومت هوا.

مکان اولیهٔ پرتابه را مبدأ دستگاه مختصات، صفر، گرفته‌ایم. این جواب را می‌توان به‌صورت برداری به طریق زیر نوشت

$$\mathbf{r} = \left(\frac{\mathbf{v}_0}{\gamma} + \frac{\mathbf{k}g}{\gamma^2}\right)(1 - e^{-\gamma t}) - \mathbf{k}\frac{gt}{\gamma} \qquad (۲۰.۳.۴)$$

که به کمک مشتق‌گیری می‌توان درستی آن را تحقیق کرد.

برخلاف حالت مقاومت هوای صفر، مسیر پرتابه نه سهمی بلکه منحنی است که در زیر مسیر سهموی متناظر قرار می‌گیرد. این منحنی را در شکل ۲.۳.۴ مشاهده می‌کنید. بررسی معادلهٔ x نشان می‌دهد که به‌ازای مقادیر بزرگ t، مقدار x به‌سوی مقدار حدی زیر میل می‌کند:

$$x \to \frac{\dot{x}_0}{\gamma} \qquad (۲۱.۳.۴)$$

به این معنی که مسیر کامل پرتابه، اگر به چیزی اصابت نکند، مطابق شکل ۲.۳.۴، باید مجانب قائم داشته باشد.

در حرکت واقعی پرتابه در داخل جو، قانون مقاومت به هیچ‌وجه خطی نیست بلکه تابع بسیار پیچیده‌ای از سرعت است. محاسبهٔ دقیق مسیر را می‌توان از طریق روشهای انتگرال‌گیری عددی انجام داد. (ر. ک. مرجع ذکرشده در مثال ۳.۴.۲.)

برد افقی

برد افقی پرتابه با وجود مقاومت پس‌کشی خطی هوا از قراردادن $z = 0$ در معادلهٔ دوم از معادلات (۱۹.۳.۴)، و سپس حذف t بین دو معادله به‌دست می‌آید. از معادلهٔ اول از معادلات (۱۹.۳.۴)

داریم: $1 - \gamma x/\dot{x}_0 = e^{-\gamma t}$؛ بنابراین، $t = -\gamma^{-1}\ln(1 - \gamma x/\dot{x}_0)$. از این رو برد افقی، $x_{\max}$، از عبارت ضمنی زیر به‌دست می‌آید:

$$\left(\frac{\dot{z}_0}{\gamma} + \frac{g}{\gamma^2}\right)\frac{\gamma x_{\max}}{\dot{x}_0} = \frac{g}{\gamma^2}\ln\left(1 - \frac{\gamma x_{\max}}{\dot{x}_0}\right) = 0 \qquad (۲۲.۳.۴)$$

این عبارت یک معادلهٔ غیرجبری است و باید با روش تقریبی حل شود تا $x_{\max}$ به‌دست آید. می‌توانیم جملهٔ لگاریتمی را با استفاده از سری

$$\ln(1-u) = -u - \frac{u^2}{2} - \frac{u^3}{3} - \cdots \qquad (۲۳.۳.۴)$$

که به‌ازای $|u| < 1$ برقرار است، بسط دهیم. به‌ازای $u = \gamma x_{max}/\dot{x}_0$، به‌عنوان مسئله نشان دهید که این عمل ما را برای یافتن برد افقی به رابطهٔ زیر هدایت می‌کند:

$$x_{\max} = \frac{2\dot{x}_0\dot{z}_0}{g} - \frac{8\dot{x}_0\dot{z}_0^2}{3g^2}\gamma + \cdots \qquad (۲۴.۳.۴ \text{ الف})$$

اگر پرتابه با زاویهٔ بلندی α و با سرعت اولیهٔ v_0 شلیک شود، در این صورت $\dot{x}_0 = v_0\cos\alpha$، $\dot{z}_0 = v_0\sin\alpha$ و $2\dot{x}_0\dot{z}_0 = 2v_0^2\sin\alpha\cos\alpha = v_0^2\sin 2\alpha$. از این‌رو عبارت معادل عبارت است از:

$$x_{\max} = \frac{v_0^2\sin 2\alpha}{g} - \frac{4v_0^3\sin 2\alpha\sin\alpha}{3g^2}\gamma + \cdots \qquad (۲۴.۳.۴ \text{ ب})$$

جملهٔ اول سمت راست عبارت است از برد در غیاب مقاومت هوا، جمله‌های بعدی عبارت‌اند از کاهش برد ناشی از مقاومت هوا.

مثال ۱.۳.۴ برد افقی توپ گلف

در مورد اجسامی به ابعاد توپ بیسبال یا توپ گلف، که با سرعت معمولی و متعارف حرکت می‌کنند، مقاومت پس‌کشی هوا برحسب v، مطابق مطالب بخش ۴.۲ به‌جای خطی‌بودن به درجهٔ دوم نزدیکتر است. اما، عبارت تقریبی را که در بالا به‌دست آمد می‌توان برای یافتن برد مسیرهای مسطح به‌کار گرفت. این کار با «خطی‌سازی» تابع نیرو که با معادلهٔ (۳.۴.۲) داده شد و می‌توان آن را در سه بعد به‌صورت زیر نوشت، انجام می‌پذیرد:

$$\mathbf{F}(\mathbf{v}) = -\mathbf{v}(c_1 + c_2|\mathbf{v}|)$$

برای خطی‌سازی این عبارت $|\mathbf{v}|$ را با سرعت اولیه، v_0، مساوی قرار می‌دهیم؛ از این‌رو ثابت γ از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$\gamma = \frac{c_1 + c_2 v_0}{m}$$

(تقریبی بهتر از آن قرار است که از سرعت میانگین‌گیری شود، اما در آن صورت به کمیت معلومی نمی‌رسیم.) هرچند در این روش در مورد اثر مقاومت پس‌کشی هوا مبالغه می‌شود، در عوض این امکان را پدید می‌آورد که به‌آسانی از محلی که توپ در زمین فرود می‌آید، به برآورد سریعی دست یابیم.

برای توپ گلف به قطر $D = 0.042\text{m}$ و جرم $m = 0.046\text{kg}$، پی می‌بریم که می‌توان از c_1 چشم پوشید و بنابراین از لحاظ عددی داریم

$$\gamma = \frac{c_2 v_0}{m} = \frac{0.22 D^2 v_0}{m}$$
$$= \frac{0.22(0.042)^2 v_0}{0.046} = 0.0084 v_0$$

که v_0 برحسب m/s است. در یک پاس کوتاه در فوتبال با مثلاً $v_0 = 20\text{m/s}$، می‌رسیم به $\gamma = 0.0084 \times 20 = 0.17\text{s}^{-1}$؛ در این صورت برد افقی، به‌ازای $\alpha = 30^\circ$، عبارت است از:

$$x_{\max} = \frac{(20)^2 \sin 60^\circ}{9.8}\text{m} - \frac{4(20)^3 \sin 60^\circ \sin 30^\circ \times 0.17}{3(9.8)^2}\text{m}$$
$$= 35.3\text{m} - 8.2\text{m} = 27.1\text{m}$$

بنابراین، به‌علت مقاومت پس‌کشی هوا روی توپ، تخمین ما کاهشی حدود یک‌چهارم را به‌دست می‌دهد.

مثال ۲.۳.۴ ضربهٔ یک‌امتیازی در پایگاه آخر (بیسبال)

در این مثال محاسبه‌ای را انجام می‌دهیم که هر بازیکن بیسبالی لازم دارد تا یک ضربه یک امتیازی تا پایگاه آخر (مسافت طولانی) را بنوازد؛ این مسافت طولانی بیشتر از ۵۰۰ پاست. در بخش ۴.۲، گفتیم که نیروی مقاومت پس‌کشی هوای وارد بر توپ بیسبال اساساً با مجذور سرعت توپ متناسب است، یعنی، $\mathbf{F}_D(v) = -c_2|v|\mathbf{v}$. نیروی مقاومت پس‌کشی هوای وارد بر توپ بیسبال در عمل پیچیده‌تر از این است. مثلاً، ثابت تناسب c_2 با سرعت توپ بیسبال تاحدودی تغییر می‌کند و مقاومت پس‌کشی هوا، در میان چیزهای دیگر، به چرخش توپ به دور خود و شیوهٔ

دوخته‌شدن پوشش توپ، بستگی دارد. با همهٔ این احوال (برای این هدف مورد نظرمان) فرض می‌کنیم که معادلهٔ بالا با مقدار $c_2 = ۰٫۱۵$ که به‌جای مقدار $c_2 = ۰٫۲۲$ اختیار می‌کنیم و قبلاً به‌کار برده‌ایم، موقعیت را به‌اندازهٔ کافی مناسب توصیف می‌کند. این مقدار ضریب مقاومت پس‌کشی هوای توپ بیسبالی را که با سرعتی نزدیک به ۱۰۰ mph حرکت می‌کند، به مقداری که رُبرت آدِیر در کتاب فیزیک بیسبال[1] به‌کار برده است، بهنجار می‌کند.

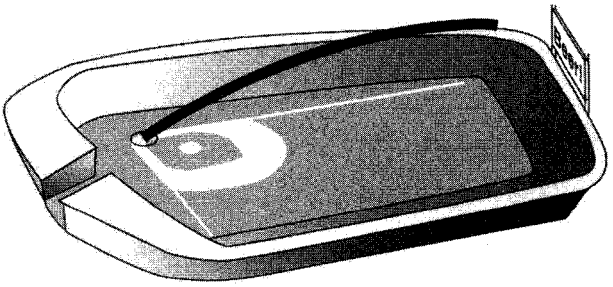
مسیرهای اجسام دستخوش نیروی مقاومت پس‌کشی هوا را که به مجذور سرعت بستگی دارد، نمی‌توان به‌طور تحلیلی محاسبه کرد؛ به این علت نرم‌افزار کامپیوتری متماتیکا (پیوست ط) را به‌کار برده‌ایم تا جوابی عددی برای مسیر پرواز توپ بیسبال به‌دست آوریم. هدف این است که سرعت کمینه و زاویهٔ بهینهٔ پرتاب را به‌دست آوریم تا بازیکن بیسبال برای رسیدن به حداکثر برد توپ بیسبال آنها را به‌کار گیرد. وضعیت مورد تحلیل ما به طولانیترین پرتابی که تاکنون در یک فصل معمول زده شده مربوط می‌شود. بلندترین پرتاب در بازی بیسبال، بر طبق کتاب رکوردهای ورزشی مؤسسهٔ گینس*، توپی است که میکی مانتل در سال ۱۹۵۳ زد و ادعا می‌شود مسافت ۵۶۵پایی را بر فراز آخرین صندلیهای مقرّ تماشاچیان در سمت چپ میدان در استادیوم گریفیت واشنگتن دی‌سی، طی کرده است. مطلب زیر بیانی از توپ‌زدن تاریخی است که یکی از مؤلفان این کتاب (جی‌ال‌سی) هنگامی‌که پسر جوانی با بینایی خوب بود به‌عنوان یکی از تماشاگران این بازی در صندلیهای ردیفهای آخر در منتهی‌الیه سمت چپ میدان، بیسبال را مشاهده می‌کرد که برای بلیط ورودی مبلغ ۲۵ سنت پرداخته بود (چقدر زمانه فرق کرده است).

یانکیها با سناتورها در استادیوم گریفیت در واشنگتن دی‌سی بازی می‌کردند. (باشگاه بیسبال سناتورهای واشنگتن و استادیوم گریفیت، دیگر وجود ندارد.) استادیوم مانند یک محوطهٔ کوچک ماسه‌بازی در زمین بیسبال بود، اما آن‌طور که میکی مانتل گفت: «در آنجا ضربه‌زدن به توپ و انجام یک پرتاب آسان نبود. دیواری با ارتفاع ۹۰پایی در مرکز میدان وجود داشت و همیشه به‌نظر می‌رسید که نسیمی در آنجا می‌وزد»

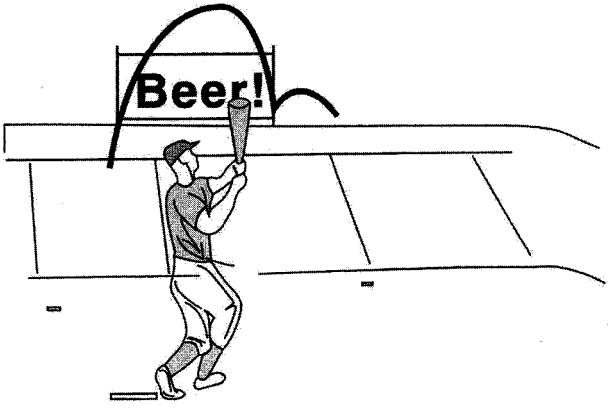
توپ پرتاب‌کن سمت چپ آماده پرتاب بود. آن روز باد ملایمی از گوشهٔ چوب‌زن می‌وزید تا تغییری ایجاد کند. دو سال از اولین بازی میکی در لیگ بزرگ می‌گذشت. میکی قدم‌زنان به‌سوی گوشهٔ چوب‌زن رفت؛ توپ‌پرتاب‌کن یک توپ سریع درست زیر حروف، درست آنجا که میک می‌خواست، پرتاب کرد. و او به‌طور کامل به توپ مرتبط شد و ضربه زد. توپ به‌طرف علامت ۳۹۱پایی در قسمت چپ مرکز میدان پرواز کرد. بعد از عبور از روی حصار زمین بیسبال بر فراز صندلیهای ردیف آخر پرواز کرد و وقتی از علامت *beer* کمانه کرد، به خارج از پارک روی صفحهٔ

1. R. K. Adair, *The Physics of Baseball*, 2nd ed., New York, Harper Collins.

* *Guinness Book of Sports Records*



شکل ۳.۳.۴ الف مسیر توپ بلندپرواز میکی‌مانتل در ۱۷ آوریل سال ۱۹۵۳ در استادیوم گریفیت در واشنگتن دی‌سی.



شکل ۳.۳.۴ ب مسیر توپ بلندپرواز میکی مانتل از دید زنندهٔ توپ (مانتل، زنندهٔ توپ، در واقع از طرف راست در مقابل توپ پرتاب‌کن سمت چپ چوگان می‌زد. این تصویر که او را در حال چوگان‌زدن از سمت چپ نشان می‌دهد، تنها برای واضح نشان‌دادن وضعیت است.)

فرعی نشان‌دهندهٔ امتیازات فوتبال به پیش رفت (شکلهای ۳.۳.۴الف و ب) وگرچه حرکت آن اندکی کند شد، پروازش روی خیابان پنجم مجاور ادامه یافت و در محوطهٔ پشتی خیابان اُکدال ۴۳۴، چند خانه بالاتر فرود آمد.

وقتی توپ به میکی رسید بیلی مارتین سومین نفر بود. برای شوخی، وانمود کرد که توپ بلندپرواز بوده است. میکی به حقّهٔ بیلی توجهی نکرد («من هنگامی‌که بعد از پرتاب پایه‌ها را دور می‌زدم سرم را پایین انداختم، می‌خواستم توپ‌انداز را نشان دهم. تصور کردم قبلاً توپ‌انداز به‌قدر کافی احساس بد داشته است») و تقریباً به‌طرف بیلی دوید! اگر به‌خاطر مربی سوم فرانک کروستی نبود، میکی به بیلی برخورد کرده بود و فقط دو امتیاز می‌گرفت و خودبه‌خود حذف می‌شد.

در همین حال، بالا در جایگاه خبرنگاران ورزشی، مدیر پی آر یانکیز، رِد پاترسن، فریاد زد «اندازه‌گیری باید صورت گیرد!» او از پارک بیرون دوید و به اطراف تا حاشیه‌های دوردست پارک رفت. در آنجا دونالد دوناوی ده‌ساله را با توپ یافت. دونالد دوناوی محل برخورد توپ به محوطهٔ پشت پارک را به رِد نشان داد و رِد با قدم شماری فاصلهٔ برخورد تا دیوار خارجی استادیوم گریفیت را اندازه گرفت. برخلاف افسانهٔ متداول، رِد یک متر نواری را به‌کار نگرفت، گرچه عکس او و میکی را با متر اندازه‌گیری بزرگ اندکی بعد از این ضربه‌زدن تاریخی به توپ نشان دادند. پاترسن با به‌کار بردن ابعاد پارک، دیوارهای آن و فاصله‌ای که او با قدم‌شماری اندازه گرفت، مسافتی را که توپ طی کرده بود ۵۶۵ پا محاسبه کرد. ولی نویسندهٔ ورزشی جو تریمبل وقتی فاصله‌ها را با هم جمع کرد، سه پا پهنای دیوار را به حساب نیاورد و ۵۶۲ پا را، که اغلب ذکر می‌شود، به‌دست آورد. ولی عدد صحیح ۵۶۵ پاست.

این مورد، تاکنون نخستین توپی است که بر بالای آخرین ردیف صندلیهای سمت چپ استادیوم گریفیت پرواز کرد. باور عمومی این بود که توپ حتی بیشتر از این جلو رفته و با صفحهٔ ثبت امتیازات برخورد نداشته است (شکل ۳.۳.۴ب) در هر صورت، این پرتاب یکی از مشهورترین پرتابهای توپ است که تاکنون رخ داده است. این ماجرا، به تیتر نخست خبرها در تعدادی از روزنامه‌ها تبدیل و شایعترین افسانه در سراسر کشور شد. از آن تاریخ به بعد، پرتابهای طولانی به‌نام «ضربهٔ یک‌امتیازی در پایگاه آخر» نامیده شدند.

بنابراین، آیا میکی مانتل واقعاً یک پرتاب ۵۶۵پایی زد، و در این صورت در چه زاویه‌ای به توپ ضربه زد و چه سرعت اولیه‌ای به آن داد؟ معادلهٔ حرکت توپ بیسبال در معرض مقاومت پس‌کشی هوا عبارت است از

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -c_2|v|\mathbf{v} - mg\mathbf{k}$$

این عبارت به‌صورت دو معادلهٔ مجزا درمی‌آید:

$$m\ddot{x} = -c_2|v|\dot{x}$$
$$m\ddot{z} = -c_2|v|\dot{z} - mg$$

با قراردادن $\gamma = c_2/m$، می‌رسیم به

$$\ddot{x} = -\gamma(\dot{x}^2 + \dot{z}^2)^{1/2}\dot{x}$$
$$\ddot{z} = -\gamma(\dot{x}^2 + \dot{z}^2)^{1/2}\dot{z} - g$$

دور از انتظار نیست که بازی بیسبال سرگرمی و تفریح بزرگ امریکایی باشد؛ وزن (۵٫۱۲۵ اونس) و قطر (۲٫۸۶ اینچ) توپ بیسبال که به یکای انگلیسی داده می‌شوند، در یکاهای متریک عبارت‌اند

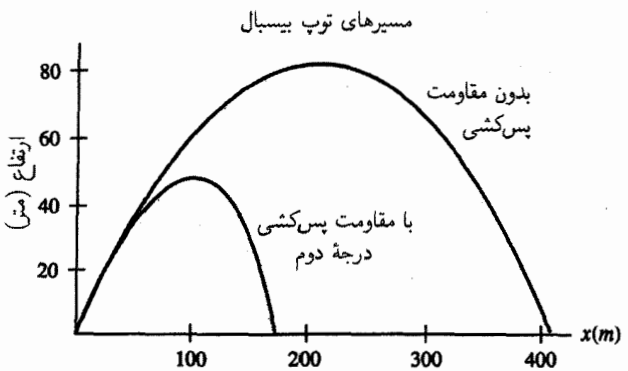
از $m = ۰ر۱۴۵\text{kg}$ و $D = ۰ر۰۷۲۸\text{m}$. از این رو،

$$\gamma = \frac{c_۲}{m} = \frac{۰ر۱۵D^۲}{m} = \frac{۰ر۱۵(۰ر۰۷۲۸)^۲}{۰ر۱۴۵}\text{m}^{-۱} = ۰ر۰۰۵۵\text{m}^{-۱}$$

با بهره‌گیری از بحث ریاضی که در پیوست ط آورده شده، می‌توان جواب عددی این دستگاه معادلات دیفرانسیل ناخطی مرتبهٔ دوم را به‌دست آورد. در اینجا صرفاً فرایند حل را که متضمن روش عمل تکراری است، شرح می‌دهیم.

- ابتدا، برای مقادیر سرعت اولیه ($v_۰$) و زاویهٔ ($\theta_۰$) توپ بیسبال حدسهای معقولی می‌زنیم و بعد با به‌کاربردن این مقادیر دستگاه معادلات دیفرانسیل را حل می‌کنیم.
- نمودار مسیر را ترسیم کنید و نقطهٔ برخورد آن را با محور x (بُرد) بیابید.
- $v_۰$ را ثابت بگیرید و عمل بالا را با به‌کاربردن مقادیر مختلف تکرارکنید تا مقدار $\theta_۰$ که برد بیشینه را می‌دهد، به‌دست آورید.
- $\theta_۰$ را با مقداری که در بالا به‌دست آورده‌اید (مقداری که برد بیشینه را می‌دهد) ثابت اختیار و روش عمل را دوباره تکرارکنید ولی $v_۰$ را تغییر دهید تا بُرد به‌اندازهٔ برد ضربهٔ یک‌امتیازی در پایگاه آخر میکی، ۵۶۵ پا (۱۷۲ر۲m)، برسد.

مسیر حاصل را همراه با پارامترهای لازم برای ترسیم آن، در شکل ۴.۳.۴ مشاهده می‌کنید. برای مقایسه، مسیر مشابهی را برای توپی که در غیاب مقاومت هوا پرتاب شده است، نشان می‌دهیم.



شکل ۴.۳.۴ برد محاسبه‌شدهٔ توپ بیسبال با مقاومت پس‌کشی هوای درجهٔ دوم و بدون مقاومت پس‌کشی هوا. این برد توپ بیسبال ۱۷۲ر۲m (۵۶۵ft) برای سرعت اولیهٔ ۱۴۳ر۲mph و زاویهٔ بلندی ۳۹ درجه است.

پی می‌بریم که میکی با زاویهٔ بلندی $\theta_0 = ۳۹^\circ$ و سرعت اولیهٔ $v_0 = ۱۴۳٫۲\,\mathrm{m}$ به توپ ضربه زده بود. آیا این مقادیر معقول‌اند؟ باید حدس زده باشیم، که زاویهٔ اولیه می‌بایستی از ۴۵° که، برای حالت بدون مقاومت هوا به‌دست می‌آید، اندکی کمتر باشد. با وجود مقاومت، یک زاویهٔ پرتاب کوچکتر (به‌جای آنکه زاویه بزرگتر از ۴۵° باشد) با زمان کمتری انطباق دارد، که مقاومت هوا در طی پرواز به‌طور مؤثری عمل می‌کند. دربارهٔ سرعت اولیه چه می‌توان گفت؟ توپ‌انداز، توپ بیسبال را سریعتر از $۹۰\,\mathrm{m/h}$ پرتاب نکرده است. مانتل می‌توانست چوگان را تاب بدهد، به‌طوری که وقتی به توپ اصابت می‌کند سرعتش تقریباً $۹۰\,\mathrm{m/h}$ باشد. ضریب بازگشت (فصل ۷) توپهای بیسبال چنان است که سرعت برایند اصابت به توپ، باید حدود $۱۳۰\,\mathrm{m/h}$ باشد؛ از این رو، مقداری که ما حدس زده‌ایم قدری بیشتر است، اما نه چندان که اختلاف زیاد داشته باشد. اگر باد ملایم و دائمی به توپی که مانتل در استادیوم گریفیت زد کمک می‌کرد، ضربهٔ هرکول‌وار او ممکن به نظر می‌رسید. آیا دیدن ضربه‌ای مانند آن ضربهٔ مانتل در خلأ تماشایی نخواهد بود؟

۴.۴ نوسانگر هماهنگ در دو و سه بعد

حرکت ذره‌ای تحت تأثیر نیروی بازگردانندهٔ خطی را در نظر بگیرید که همواره به‌سوی نقطهٔ ثابت، مبدأ دستگاه مختصات، متوجه است. چنین نیرویی را می‌توان با رابطهٔ زیر بیان کرد:

$$\mathbf{F} = -k\mathbf{r} \qquad (۱.۴.۴)$$

بنابراین، معادلهٔ دیفرانسیل حرکت به‌صورت معادلهٔ زیر بیان می‌شود:

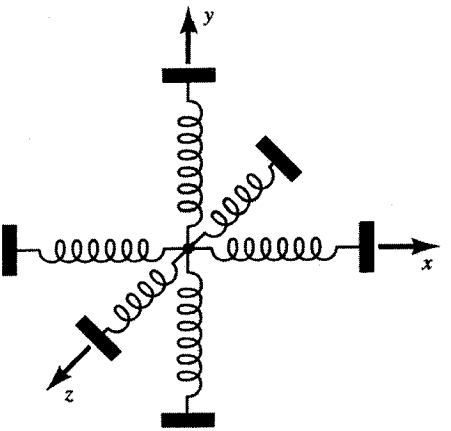
$$m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -k\mathbf{r} \qquad (۲.۴.۴)$$

این وضعیت را می‌توان مانند شکل ۱.۴.۴ به‌کمک ذره‌ای متصل به مجموعه‌ای از فنرهای کشسان به‌طور تقریبی نشان داد. به این ترتیب نوسانگر خطی به سه بعد تعمیم می‌یابد که قبلاً آن را بررسی کردیم. معادلهٔ (۲.۴.۴)، معادلهٔ دیفرانسیل نوسانگر همسانگرد خطی است.

نوسانگر همسانگرد دوبعدی

در حالت حرکت در یک تک‌صفحه، معادلهٔ ۲.۴.۴ معادل دو معادلهٔ مؤلفه‌ای زیر است:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= -kx \\ m\ddot{y} &= -ky \end{aligned} \qquad (۳.۴.۴)$$



شکل ۱.۴.۴ مدل نوسانگر هماهنگ سه‌بعدی.

این معادلات از یکدیگر جدایند و می‌توانیم بلافاصله جوابها را به‌صورت زیر بنویسیم:

$$x = A\cos(\omega t + \alpha) \qquad y = B\cos(\omega t + \beta) \tag{۴.۴.۴}$$

که در آنها

$$\omega = \left(\frac{k}{m}\right)^{۱/۲} \tag{۵.۴.۴}$$

A، B، α، و β ثابتهای انتگرال‌گیری‌اند که در هر حالت از روی شرایط اولیه تعیین می‌شوند.

برای به‌دست آوردن معادلهٔ مسیر، زمان t را بین دو معادله حذف می‌کنیم. برای انجام این کار معادلهٔ درجهٔ دوم را از این قرار می‌نویسیم:

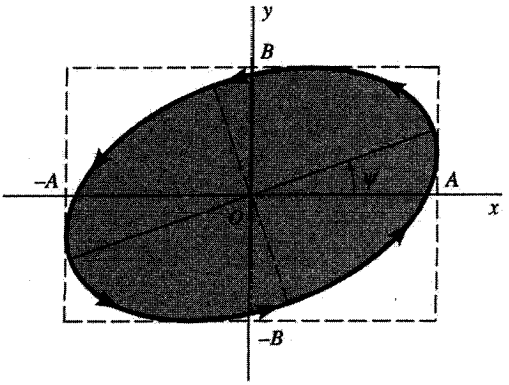
$$y = B\cos(\omega t + \alpha + \Delta) \tag{۶.۴.۴}$$

که

$$\Delta = \beta - \alpha \tag{۷.۴.۴}$$

در این صورت

$$y = B[\cos(\omega t + \alpha)\cos\Delta - \sin(\omega t + \alpha)\sin\Delta] \tag{۸.۴.۴}$$



شکل ۲.۴.۴ مسیر بیضوی نوسانگر همسانگرد دوبعدی.

با ترکیب‌کردن معادلهٔ بالا و معادلهٔ اول از معادلات (۴.۴.۴)، داریم

$$\frac{y}{B} = \frac{x}{A}\cos\Delta - \left(1 - \frac{x^2}{A^2}\right)^{1/2}\sin\Delta \qquad (۹.۴.۴)$$

بعد از جابه‌جایی و مجذورکردن جملات، می‌رسیم به

$$\frac{x^2}{A^2} - xy\frac{2\cos\Delta}{AB} + \frac{y^2}{B^2} = \sin^2\Delta \qquad (۱۰.۴.۴)$$

که معادلهٔ درجهٔ دومی برحسب x و y است. حال معادلهٔ درجهٔ دوم کلی

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey = f \qquad (۱۱.۴.۴)$$

نمایانگر بیضی، سهمی، یا هذلولی است؛ بسته به اینکه مبین

$$b^2 - 4ac \qquad (۱۲.۴.۴)$$

به‌ترتیب، منفی، صفر، یا مثبت باشد. در حالت مورد بحث ما، مبین عبارت است از $(2\sin\Delta/AB)^2$−؛ از این رو، مطابق شکل ۲.۴.۴، مسیر بیضی است.

در حالت خاص، اگر اختلاف فاز Δ عبارت باشد از $\pi/2$، معادلهٔ مسیر به‌صورت زیر در می‌آید

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1 \qquad (۱۳.۴.۴)$$

که معادلهٔ بیضی با محورهایی منطبق بر محورهای مختصات است. از سوی دیگر، اگر اختلاف فاز صفر یا π باشد، معادلهٔ مسیر به معادلهٔ خط راست تبدیل می‌شود:

$$y = \pm\frac{B}{A}x \qquad (۱۴.۴.۴)$$

علامت مثبت در حالت $\Delta = ۰$ و علامت منفی در حالت $\Delta = \pi$ پیش می‌آید. در حالت کلی، می‌توان نشان داد که محور مسیر بیضوی با محور x زاویهٔ ψ را می‌سازد، به‌طوری که

$$\tan ۲\psi = \frac{۲AB\cos\Delta}{A^۲ - B^۲} \qquad (۱۵.۴.۴)$$

برای تمرین این معادله را به‌دست آورید.

نوسانگر هماهنگ همسانگرد سه‌بعدی

معادلهٔ دیفرانسیل حرکت، در حالت حرکت سه‌بعدی، با این سه معادلهٔ مجزا معادل است:

$$m\ddot{x} = -kx \qquad m\ddot{y} = -ky \qquad m\ddot{z} = -kz \qquad (۱۶.۴.۴)$$

از این‌رو، جوابها را می‌توان به‌صورت معادلهٔ (۴.۴.۴) نوشت و در حالتی دیگر می‌توانیم بنویسیم:

$$\begin{aligned} x &= A_۱\sin\omega t + B_۱\cos\omega t \\ y &= A_۲\sin\omega t + B_۲\cos\omega t \\ z &= A_۳\sin\omega t + B_۳\cos\omega t \end{aligned} \qquad (۱۷.۴.۴ \text{ الف})$$

شش ثابت انتگرال‌گیری با استفاده از مکان و سرعت اولیهٔ ذره تعیین می‌شوند. حال معادلهٔ (۱۶.۴.۴) را می‌توان به‌صورت برداری به شرح زیر بیان کرد:

$$\mathbf{r} = \mathbf{A}\sin\omega t + \mathbf{B}\cos\omega t \qquad (۱۷.۴.۴ \text{ ب})$$

که در آن $A_۱$، $A_۲$، و $A_۳$ مؤلفه‌های $\mathbf{A}$ هستند، و به‌همین ترتیب برای $\mathbf{B}$. روشن است که حرکت کاملاً در یک صفحه، صفحهٔ مشترک دو بردار ثابت $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$، صورت می‌گیرد، و مسیر ذره در این صفحه مانند حالت دوبعدی، بیضی است. از این رو، تحلیل مربوط به شکل مسیر بیضی در حالت دوبعدی، در حالت سه‌بعدی نیز صادق است.

نوسانگر ناهمسانگرد

در بحث بالا، به حرکت نوسانگر همسانگرد پرداختیم، که در آن نیروی بازگرداننده مستقل از راستای جابه‌جایی است. اگر بزرگی مؤلفه‌های نیروی بازگرداننده به راستای جابه‌جایی بستگی داشته باشد، حالت نوسانگر ناهمسانگرد پیش می‌آید. با انتخاب محورها، معادلات دیفرانسیل را برای حالت ناهمسانگرد می‌توان چنین نوشت:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= -k_1 x \\ m\ddot{y} &= -k_2 y \\ m\ddot{z} &= -k_3 z \end{aligned} \qquad (۱۸.۴.۴)$$

در اینجا، حالتی از سه بسامد مختلف نوسان داریم: $\omega_1 = \sqrt{k_1/m}$، $\omega_2 = \sqrt{k_2/m}$، و $\omega_3 = \sqrt{k_3/m}$؛ و حرکت به‌کمک جوابهای زیر بیان می‌شود

$$\begin{aligned} x &= A\cos(\omega_1 t + \alpha) \\ y &= B\cos(\omega_2 t + \beta) \\ z &= C\cos(\omega_3 t + \gamma) \end{aligned} \qquad (۱۹.۴.۴)$$

در اینجا نیز، شش ثابت انتگرال‌گیری در معادلات بالا به‌کمک شرایط اولیه تعیین می‌شوند. نوسان کل ذره کاملاً در داخل جعبهٔ مکعب‌مستطیل‌شکل (به ابعاد $2A$، $2B$، و $2C$) به مرکز مبدأ انجام می‌شود. در حالتی که ω_1، ω_2، و ω_3 متناسب باشند، یعنی اگر:

$$\frac{\omega_1}{n_1} = \frac{\omega_2}{n_2} = \frac{\omega_3}{n_3} \qquad (۲۰.۴.۴)$$

که n_1، n_2، و n_3 اعداد صحیح‌اند؛ مسیر، به‌نام شکل لیساژو، بسته خواهد بود، زیرا بعد از گذشت زمان $2\pi n_1/\omega_1 = 2\pi n_2/\omega_2 = 2\pi n_3/\omega_3$ ذره به موضع اولیه‌اش مراجعت خواهد کرد و حرکت تکرار می‌شود. (در معادلهٔ (۲۰.۴.۴)، فرض می‌شود که هر ضریب مشترک حذف شده باشد.) از سوی دیگر، اگر ωها متناسب نباشند، مسیر بسته نیست. در این حالت می‌توان گفت که مسیر، جعبهٔ مکعب‌مستطیل یادشده را به‌طور کامل پر می‌کند؛ دست‌کم به این معنی که اگر مدت‌زمان درازی صبر کنیم، بالاخره ذره خودبه‌خود به هر نقطهٔ معین جعبه نزدیک خواهد شد.

در اکثر موارد، نیروی بازگردانندهٔ خالص وارد بر یک اتم معین در مادهٔ بلورین جامد برحسب جابه‌جایی تقریباً خطی است. بسامدهای نوسان برقرارشده معمولاً در ناحیهٔ فروسرخ طیف، یعنی 10^{12} تا 10^{14} ارتعاش در ثانیه، قرار می‌گیرند.

ملاحظات مربوط به انرژی

در فصل قبل نشان دادیم که تابع انرژی پتانسیل نوسانگر هماهنگ یک‌بعدی برحسب جابه‌جایی از درجهٔ دوم، $V(x)=\frac{1}{2}kx^2$، است. در حالت کلی سه‌بعدی به‌آسانی می‌توان تحقیق کرد که

$$V(x,y,z)=\frac{1}{2}k_1x^2+\frac{1}{2}k_2y^2+\frac{1}{2}k_3z^2 \qquad (۲۱.۴.۴)$$

زیرا $F_x=-\partial V/\partial x=-k_1x$، و به همین ترتیب برای F_y و F_z. اگر $k_1=k_2=k_3=k$، حالت همسانگرد را داریم، و

$$V(x,y,z)=\frac{1}{2}k(x^2+y^2+z^2)=\frac{1}{2}kr^2 \qquad (۲۲.۴.۴)$$

از این رو، در حالت همسانگرد، انرژی کل با رابطهٔ ساده زیر بیان می‌شود:

$$\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}kr^2=E \qquad (۲۳.۴.۴)$$

که این رابطه شبیه حالت یک‌بعدی است که در فصل قبل درخصوص آن بحث کردیم.

مثال ۱.۴.۴

ذره‌ای به جرم m در دو بعد تحت تأثیر تابع انرژی پتانسیل، به‌صورت زیر، حرکت می‌کند:

$$V(\mathbf{r})=\frac{1}{2}k(x^2+4y^2)$$

با معلوم‌بودن شرایط اولیه در $t=0$: $x=a$، $y=0$، $\dot{x}=0$، و $\dot{y}=v_0$، حرکت حاصل را بیابید.

حل:

این پتانسیل، یک پتانسیل نوسانگر ناهمسانگرد است. تابع نیرو عبارت است از

$$\mathbf{F}=-\boldsymbol{\nabla}V=-\mathbf{i}kx-\mathbf{j}4ky=m\ddot{\mathbf{r}}$$

در این صورت، معادلات دیفرانسیل مؤلفه‌ای حرکت عبارت‌اند از

$$m\ddot{x}+kx=0 \qquad m\ddot{y}+4ky=0$$

بسامد زاویه‌ای حرکت در امتداد x عبارت است از $\omega = (k/m)^{1/2}$؛ در صورتی که بسامد زاویه‌ای حرکت در امتداد y درست دوبرابر آن، یعنی، عبارت است از $\omega_y = (4k/m)^{1/2}$. جواب کلی را به‌شکل زیر می‌نویسیم

$$x = A_1 \cos \omega t + B_1 \sin \omega t$$
$$y = A_2 \cos 2\omega t + B_2 \sin 2\omega$$

برای بهره‌گیری از شرایط اولیه، ابتدا باید نسبت به زمان t مشتق بگیریم تا رابطهٔ کلی مربوط به مؤلفه‌های سرعت را به‌دست آوریم:

$$\dot{x} = -A_1 \omega \sin \omega t + B_1 \omega \cos \omega t$$
$$\dot{y} = -2A_2 \omega \sin 2\omega t + 2B_2 \omega \cos 2\omega t$$

بنابراین، در $t = 0$، می‌بینیم که چهار معادلهٔ بالا تبدیل می‌شوند به

$$a = A_1 \qquad 0 = A_2 \qquad 0 = B_1 \omega \qquad v_0 = 2B_2 \omega$$

از این معادلات مقادیر ضرایب دامنه، $A_1 = a$، $A_2 = B_1 = 0$، و $B_2 = v_0/2\omega$، را مستقیماً به‌دست می‌آوریم، از این رو، معادلات نهایی حرکت عبارت‌اند از

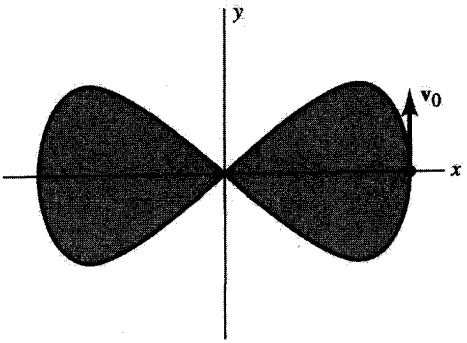
$$x = a \cos \omega t$$
$$y = \frac{v_0}{2\omega} \sin 2\omega t$$

مسیر، شکل لیساژو (به شکل «هشت انگلیسی افقی») است که در شکل ۳.۴.۴ آن را مشاهده می‌کنید.

۵.۴ حرکت ذرات باردار در میدانهای الکتریکی و مغناطیسی

وقتی ذرهٔ باردار الکتریکی در مجاورت بارهای الکتریکی دیگر قرار گیرد، نیرویی بر آن وارد می‌آید. می‌گویند این نیروی $\mathbf{F}$ ناشی از میدان الکتریکی $\mathbf{E}$ است که از بارهای دیگر پدید آمده است. می‌نویسیم:

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} \qquad (۱.۵.۴)$$



شکل ۳.۴.۴ شکل لیسازو.

که q باری الکتریکی است که ذرهٔ مورد نظر حمل می‌کند،[۱] بنابراین، معادلهٔ حرکت ذره عبارت است از

$$m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = q\mathbf{E} \qquad \text{(۲.۵.۴ الف)}$$

یا به بیان مؤلفه‌ای:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= qE_x \\ m\ddot{y} &= qE_y \\ m\ddot{z} &= qE_z \end{aligned} \qquad \text{(۲.۵.۴ ب)}$$

به‌طور کلی، مؤلفه‌های میدان توابعی از مختصات مکانی x، y، و z هستند. در مورد میدانهای متغیر با زمان (یعنی، در صورتی که بارهای مولد میدان $\mathbf{E}$ متحرک باشند)، مؤلفه‌های میدان نیز شامل t هستند.

یک حالت ساده، یعنی میدان الکتریکی ثابت یکنواخت، را در نظر می‌گیریم. یکی از محورها، مثلاً محور z را در جهت میدان اختیار می‌کنیم. به این ترتیب، $E_x = E_y = 0$ و $E = E_z$. بنابراین، معادلات دیفرانسیل حرکت ذره‌ای به بار q که در این میدان حرکت می‌کند، عبارت‌اند از

$$\ddot{x} = 0 \qquad \ddot{y} = 0 \qquad \ddot{z} = \frac{qE}{m} = \text{ثابت} \qquad (۳.۵.۴)$$

این معادلات دقیقاً با معادلات پرتابه در میدان گرانشی یکنواخت همسان‌اند. بنابراین، اگر $\dot{x}$ و $\dot{y}$

۱. در سیستم یکاهای SI، F به نیوتون، q به کولن و E به ولت بر متر است.

هر دو در ابتدا صفر نباشند، مسیر سهمی است. در غیر این صورت، مانند مسیر جسمی است که به‌طور قائم سقوط می‌کند.

درکتابهای درسی مربوط به نظریهٔ الکترومغناطیس[۱] آمده است که

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0 \qquad (۴.۵.۴)$$

$\mathbf{E}$ ناشی از بارهای ساکن است. معنی این معادله آن است که حرکت در چنین میدانی پایسته است و تابع پتانسیل Φ چنان وجود دارد که $\mathbf{E} = -\nabla\Phi$. بنابراین، انرژی پتانسیل ذره‌ای به بار q در چنین میدانی $q\Phi$ و انرژی کل ثابت، و عبارت است از $\frac{1}{2}mv^2 + q\Phi$.

در حضور میدان مغناطیسی ساکن $\mathbf{B}$ (به‌نام القای مغناطیسی) نیروی وارد بر ذرهٔ متحرک به‌آسانی به‌صورت حاصلضرب برداری بیان می‌شود. یعنی،

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \qquad (۵.۵.۴)$$

که $\mathbf{v}$ سرعت و q بار ذره است.[۲] بنابراین، معادلهٔ دیفرانسیل ذرهٔ متحرک در میدان مغناطیسی خالص عبارت است از:

$$m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = q(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \qquad (۶.۵.۴)$$

بنا بر معادلهٔ (۶.۵.۴)، شتاب ذره همواره بر جهت حرکت عمود است. یعنی، مؤلفهٔ مماسی شتاب ($\dot{v}$) صفر است، و از این رو ذره با سرعت ثابت حرکت می‌کند، حتی اگر $\mathbf{B}$ تابع متغیری از مکان $\mathbf{r}$ باشد، تا هنگامی که با زمان تغییر نکند، باز هم این موضوع صادق است.

مثال ۱.۵.۴

حرکت ذرهٔ بارداری را در میدان مغناطیسی ثابت یکنواخت بررسی می‌کنیم. فرض کنید محور z را در جهت میدان اختیارکنیم؛ یعنی خواهیم نوشت:

$$\mathbf{B} = \mathbf{k}B$$

۱. مثلاً، ر. ک. مبانی نظریهٔ الکترومغناطیس، ترجمهٔ دکتر صمیمی و دیگران، مرکز نشر دانشگاهی.

۲. معادلهٔ (۵.۵.۴) در دستگاه یکاهای SI برقرار است. F به نیوتون، q به کولن، v متر بر ثانیه و B به وبر بر متر مربع.

معادلهٔ دیفرانسیل حرکت از این قرار است:

$$m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = q(\mathbf{v}\times \mathbf{k}B) = qB\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ \dot{x} & \dot{y} & \dot{z}\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}$$

$$m(\mathbf{i}\ddot{x}+\mathbf{j}\ddot{y}+\mathbf{k}\ddot{z}) = qB(\mathbf{i}\dot{y}-\mathbf{j}\dot{x})$$

مؤلفه‌ها را با هم مساوی قرار می‌دهیم؛ داریم

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= qB\dot{y}\\ m\ddot{y} &= -qB\dot{x}\\ \ddot{z} &= 0 \end{aligned} \qquad (۷.۵.۴)$$

در اینجا، برای اولین بار، به مجموعه‌ای از معادلات دیفرانسیل حرکت برمی‌خوریم که از آن نوع معادلاتی نیستند که از هم مجزا باشند؛ اما حل آن نسبتاً ساده است، زیرا فوراً می‌توانیم نسبت به زمان انتگرال بگیریم و برسیم به:

$$\begin{aligned} m\dot{x} &= qBy + c_1\\ m\dot{y} &= -qBx + c_2\\ \dot{z} &= \text{ثابت} = \dot{z}_0 \end{aligned}$$

یا

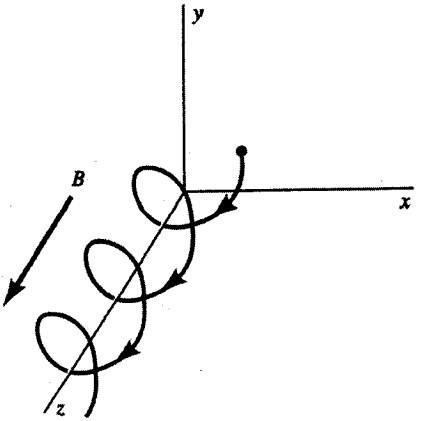
$$\dot{x} = \omega y + C_1 \qquad \dot{y} = -\omega x + C_2 \qquad \dot{z} = \dot{z}_0 \qquad (۸.۵.۴)$$

که در آنها از کوتاه‌نویسی $\omega = qB/m$ بهره برده‌ایم. مقادیر c ثابتهای انتگرال‌گیری‌اند، و $C_1 = c_1/m$ و $C_2 = c_2/m$. با واردکردن عبارت مربوط به $\dot{y}$ از جزء دوم معادلهٔ (۸.۵.۴) به جزء اول معادلهٔ (۷.۵.۴)، به معادلهٔ مجزای برحسب x به‌صورت زیر می‌رسیم:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \omega^2 a \qquad (۹.۵.۴)$$

که $a = C_2/\omega$. جواب عبارت است از

$$x = a + A\cos(\omega t + \theta_0) \qquad (۱۰.۵.۴)$$



شکل ۱.۵.۴ مسیر مارپیچی ذرهٔ باردار متحرک در میدان مغناطیسی.

که A و θ_0 ثابت انتگرال‌گیری‌اند. اکنون اگر نسبت به زمان t مشتق بگیریم، می‌رسیم به

$$\dot{x} = -A\omega \sin(\omega t + \theta_0) \qquad (۱۱.۵.۴)$$

عبارت بالا را به‌ازای $\dot{x}$ می‌توان در سمت چپ معادلهٔ اول از معادلات (۸.۵.۴) نشانید و از معادلهٔ حاصل y را به‌دست آورد. نتیجه عبارت است از

$$y = b - A \sin(\omega t + \theta_0) \qquad (۱۲.۵.۴)$$

که $b = -C_1/\omega$. برای یافتن شکل مسیر حرکت، t را بین معادلهٔ (۱۰.۵.۴) و معادلهٔ (۱۲.۵.۴) حذف می‌کنیم. می‌رسیم به

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = A^2 \qquad (۱۳.۵.۴)$$

بنابراین، تصویر مسیر حرکت بر صفحهٔ xy دایره‌ای است به شعاع A و به مرکز (a, b). با توجه به معادلهٔ سوم از دسته معادلات (۸.۵.۴)، پی می‌بریم که سرعت در جهت z ثابت و از اینجا نتیجه می‌گیریم که مسیر مارپیچ است. به‌طوری که از شکل ۱.۵.۴ برمی‌آید، محور مارپیچی در امتداد میدان مغناطیسی واقع است. از معادلهٔ (۱۲.۵.۴) داریم:

$$\dot{y} = -A\omega \cos(\omega t + \theta_0) \qquad (۱۴.۵.۴)$$

t را بین معادلهٔ (۱۱.۵.۴) و (۱۴.۵.۴) حذف می‌کنیم؛ می‌رسیم به

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = A^2\omega^2 = A^2\left(\frac{qB}{m}\right)^2 \qquad (۱۵.۵.۴)$$

با قراردادن $v_1 = (\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{1/2}$، می‌بینیم که شعاع مارپیچ A از این رابطه تعیین می‌شود:

$$A = \frac{v_1}{\omega} = v_1\frac{m}{qB} \qquad (۱۶.۵.۴)$$

اگر مؤلفهٔ سرعتی در جهت محور z نداشته باشد، مسیر عبارت خواهد بود از دایره‌ای به شعاع A. واضح است که A با سرعت v_1 تناسب مستقیم دارد، و بسامد زاویه‌ای حرکت در مسیر دایره‌ای از سرعت مستقل است. بسامد زاویه‌ای ω را بسامد سیکلوترونی می‌گویند. کارکرد سیکلوترونی که ارنست لاورنس آن را اختراع کرد، بر شالودهٔ استقلال ω از سرعت ذرهٔ باردار مبتنی است.

۶.۴ حرکت مقید ذره

وقتی ذرهٔ متحرک از لحاظ هندسی محدود می‌شود، به این معنی که باید روی سطح یا منحنی تعریف‌شدهٔ معینی باقی بماند، می‌گویند حرکت مقید است. قطعهٔ یخی که داخل ظرف نیمکره‌ای یا دانهٔ تسبیحی که روی سیمی می‌لغزد، نمونه‌هایی از حرکت مقیدند. این قید ممکن است مانند مورد دانهٔ تسبیح کامل، یا مثل حرکت قطعهٔ یخ داخل ظرف یک‌طرفه باشد. قیدها ممکن است ثابت باشند یا متحرک. در این فصل، قیدهای ثابت را بررسی می‌کنیم.

معادلهٔ انرژی در مورد قیدهای هموار

نیروی کل وارد بر ذرهٔ متحرک تحت تأثیر قید را می‌توان به‌صورت جمع برداری نیروی خارجی خالص $\mathbf{F}$ و نیروی قیدی $\mathbf{R}$ بیان کرد. نیروی اخیر واکنش عامل مقیدکننده روی ذره به‌شمار می‌آید. بنابراین، می‌توان معادلهٔ حرکت را از این قرار نوشت:

$$m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F} + \mathbf{R} \qquad (۱.۶.۴)$$

با ضرب اسکالر طرفین این معادله در $\mathbf{v}$، می‌رسیم به

$$m\frac{d\mathbf{v}}{dt}\cdot\mathbf{v} = \mathbf{F}\cdot\mathbf{v} + \mathbf{R}\cdot\mathbf{v} \qquad (۲.۶.۴)$$

اکنون در مورد قید هموار، مثلاً سطح بدون اصطکاک، واکنش $\mathbf{R}$ بر سطح یا بر منحنی عمود است، در حالی که $\mathbf{v}$ بر سطح مماس است. از این رو، $\mathbf{R}$ بر $\mathbf{v}$ عمود است و حاصلضرب اسکالر

$\mathbf{R} \cdot \mathbf{v}$ صفر می‌شود. به این ترتیب، معادلهٔ (۲.۶.۴) به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}\right) = \mathbf{F}\cdot\mathbf{v} \qquad (۳.۶.۴)$$

در نتیجه، اگر $\mathbf{F}$ پایسته باشد، مانند مورد بخش ۲.۴ می‌توانیم از آن انتگرال بگیریم و پی ببریم که حتی اگر ذره مقید باشد که روی سطح یا منحنی حرکت کند، انرژی کل آن ثابت باقی می‌ماند؛ یعنی

$$\frac{1}{2}mv^2 + V(x,y,z) = \text{ ثابت } = E \qquad (۴.۶.۴)$$

البته باید انتظار داشته باشیم که این حالت برای قیدهای بدون اصطکاک برقرار باشد.

مثال ۱.۶.۴

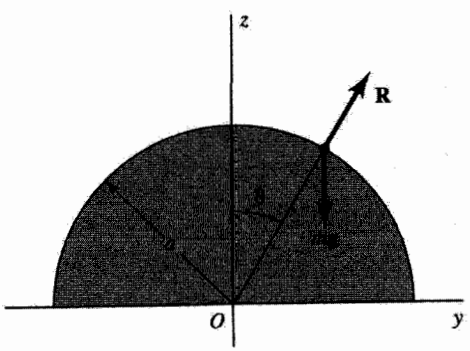
ذره‌ای بر بالاترین نقطهٔ کرهٔ هموار به شعاع a قرار داده شده است. اگر وضعیت آن اندکی به‌هم بخورد، در چه نقطه‌ای از کره جدا می‌شود؟

حل:

نیروهای وارد بر ذره عبارت‌اند از نیروی پایین‌سوی گرانشی و واکنش سطح کروی $\mathbf{R}$. معادلهٔ حرکت از این قرار است:

$$m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = m\mathbf{g} + \mathbf{R}$$

محورهای مختصات را، مطابق شکل ۱.۶.۴، اختیار می‌کنیم. در این صورت، انرژی پتانسیل عبارت



شکل ۱.۶.۴ ذرهٔ لغزان روی کرهٔ هموار و صاف.

است از mgz و معادلهٔ انرژی چنین خواهد بود

$$\frac{1}{2}mv^2 + mgz = E$$

به اعتبار شرایط اولیه (به‌ازای $z = a$، $v = 0$) داریم $E = mga$؛ بنابراین، وقتی ذره به پایین می‌لغزد، سرعتش از معادلهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$v^2 = 2g(a - z)$$

حال اگر مؤلفه‌های شعاعی معادلهٔ حرکت را در نظر بگیریم، می‌توانیم معادلهٔ نیرو را به‌صورت زیر بنویسیم

$$-\frac{mv^2}{a} = -mg\cos\theta + R = -mg\frac{z}{a} + R$$

به این ترتیب،

$$\begin{aligned} R &= mg\frac{z}{a} - \frac{mv^2}{a} = mg\frac{z}{a} - \frac{m}{a}2g(a - z) \\ &= \frac{mg}{a}(3z - 2a) \end{aligned}$$

بنابراین، به‌ازای $z = \frac{2}{3}a$ کمیت R، صفر و در این نقطه ذره از کره جدا می‌شود. استدلال مربوط به این مطلب را می‌توان با توجه به این نکته ارائه کرد که در آنجا علامت R از مثبت به منفی تغییر می‌کند.

مثال ۲.۶.۴ حرکت مقید روی چرخزاد (سیکلوئید)

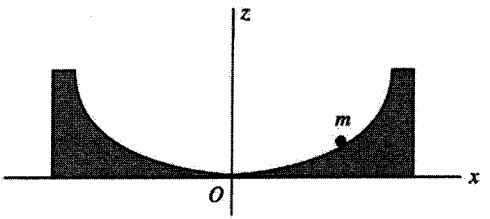
ذره‌ای لغزان را تحت تأثیر نیروی گرانش در داخل یک تشت هموار چرخزادی در نظر بگیرید. شکل ۲.۶.۴، به‌وسیلهٔ معادلات پارامتری زیر نشان داده شده است:

$$x = A(2\phi + \sin 2\phi)$$

$$z = A(1 - \cos 2\phi)$$

که ϕ پارامتر است. اکنون معادلهٔ انرژی حرکت، به فرض آنکه حرکتی در امتداد y وجود نداشته باشد، عبارت است از

$$E = \frac{m}{2}v^2 + V(z) = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{z}^2) + mgz$$



شکل ۲.۶.۴ ذرهٔ لغزان در داخل یک تشت صاف چرخزادی.

چون $\dot{x} = ۲A\dot{\phi}(۱ + \cos ۲\phi)$ و $\dot{z} = ۲A\dot{\phi}\sin ۲\phi$، رابطهٔ زیر را برای انرژی برحسب ϕ به‌دست می‌آوریم:

$$E = ۴mA^۲\dot{\phi}^۲(۱ + \cos ۲\phi) + mgA(۱ - \cos ۲\phi)$$

یا با بهره‌گیری از اتحادهای $۱ + \cos ۲\phi = ۲\cos^۲\phi$ و $۱ - \cos ۲\phi = ۲\sin^۲\phi$ داریم:

$$E = ۸mA^۲\dot{\phi}^۲\cos^۲\phi + ۲mgA\sin^۲\phi$$

متغیر s را که بنا بر تعریف عبارت است از $s = ۴A\sin\phi$، معرفی می‌کنیم. در این صورت، معادلهٔ انرژی را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$E = \frac{m}{۲}\dot{s}^۲ + \frac{۱}{۲}\left(\frac{mg}{۴A}\right)s^۲$$

این معادله دقیقاً همان معادلهٔ انرژی حرکت هماهنگ برحسب تک‌متغیر s است. بنابراین، ذره برخلاف آونگ ساده که بسامدش به دامنه بستگی دارد، حرکتی دوره‌ای اجرا می‌کند که بسامدش، از دامنهٔ نوسان مستقل است. حرکت دوره‌ای مورد بحث کنونی را همفام می‌گویند (البته، نوسانگر هماهنگ خطی، تابع قانون هوک، همفام است.)

کریستین هویگنس، فیزیکدان و ریاضیدان هلندی، در ارتباط با تلاشهایی که در جهت بهبود دقت ساعتهای آونگی به‌عمل آورد، این نکته را کشف کرد. او نظریهٔ تکوین خمهای مرکزی را کشف کرد و پی‌برد که تکوین خم مرکزی به چرخزاد نیز خود یک چرخزاد است. به این ترتیب، با فراهم‌آمدن «عوارض» چرخزادی برای آونگ، حرکت گوی آونگ باید روی مسیر چرخزادی انجام گیرد؛ به این ترتیب، زمان تناوب نسبت به دامنه مستقل است. این اختراع هرچند نبوغ‌آمیز بود، هرگز کاربرد عملی وسیعی نیافت.

مسائل

۱.۴ برای هر یک از توابع انرژی پتانسیل زیر، نیرو را بیابید:

(الف) $V = cxyz + C$

(ب) $V = \alpha x^۲ + \beta y^۲ + \gamma z^۲ + C$

(ج) $V = ce^{-(\alpha x + \beta y + \gamma z)}$

(د) در مختصات کروی $V = cr^n$

۲.۴ از طریق یافتن تاو، تعیین کنید که کدام‌یک از نیروهای زیر پایسته‌اند:

(الف) $\mathbf{F} = \mathbf{i}x + \mathbf{j}y + \mathbf{k}z$

(ب) $\mathbf{F} = \mathbf{i}y + \mathbf{j}x + \mathbf{k}z^۲$

(ج) $\mathbf{F} = \mathbf{i}y + \mathbf{j}x + \mathbf{k}z^۳$

(د) در مختصات کروی $\mathbf{F} = -kr^{-n}\mathbf{e}_r$

۳.۴ مقدار ثابت c را چنان بیابید که هر یک از نیروهای زیر پایسته باشند:

(الف) $\mathbf{F} = \mathbf{i}xy + \mathbf{j}cx^۲ + \mathbf{k}z^۳$

(ب) $\mathbf{F} = \mathbf{i}(z/y) + c\mathbf{j}(xz/y^۲) + \mathbf{k}(x/y)$

۴.۴ ذره‌ای به جرم m تحت‌تأثیر تابع انرژی پتانسیل $V(x, y, z) = ax + \beta y^۲ + \gamma z^۳$ در سه بعد حرکت می‌کند. سرعت در هنگام عبور از مبدأ، $v_۰$ است.

(الف) وقتی از نقطهٔ (۱, ۱, ۱) می‌گذرد، سرعتش چقدر است؟

(ب) اگر نقطهٔ (۱, ۱, ۱) نقطهٔ برگشت حرکت ($v = ۰$) باشد، $v_۰$ چقدر است؟

(ج) معادلات دیفرانسیل مؤلفه‌ای حرکت ذره چگونه‌اند؟

(گوشزد: لازم نیست در این مسئله معادلهٔ دیفرانسیل را حل کنید.)

۵.۴ دو تابع نیروی زیر را در نظر بگیرید:

(الف) $\mathbf{F} = \mathbf{i}x + \mathbf{j}y$

(ب) $\mathbf{F} = \mathbf{i}y - \mathbf{j}x$

با نشان‌دادن این مطلب که انتگرال $\int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ برای (الف) مستقل از مسیر انتگرال‌گیری است، ولی برای (ب) چنین نیست، تحقیق کنید که (الف) پایسته و (ب) ناپایسته است. دو مسیر انتگرال‌گیری اختیار کنید که نقطهٔ شروع آنها مبدأ (۰, ۰) و نقطهٔ پایانشان (۱, ۱) باشد. برای یکی از مسیرها، خط $x = y$ را اختیار کنید. برای مسیر دیگر از مبدأ روی محور x تا نقطهٔ (۱, ۰)، و بعد خط $x = ۱$ تا نقطهٔ (۱, ۱) را اختیار کنید.

۶.۴ نشان دهید تغییرات گرانی با ارتفاع را می‌توان به‌طور تقریبی از تابع انرژی پتانسیل زیر محاسبه کرد:

$$V = mgz\left(1 - \frac{z}{r_e}\right)$$

که در آن r_e شعاع زمین است. نیرویی را که از پتانسیل بالا ناشی می‌شود، بیابید. از این‌رو، معادلات دیفرانسیل حرکت پرتابه‌ای را که تحت تأثیر آن قرار دارد، پیدا کنید. اگر مؤلفهٔ قائم سرعت اولیه عبارت باشد از v_{0z}، پرتابه تا چه ارتفاعی بالا می‌رود؟ (با مثال ۲.۳.۲ مقایسه کنید.)

۷.۴ ذرات گِل از محیط چرخ غلتانی به بیرون پرتاب می‌شوند. اگر سرعت رو به جلوی چرخ v_0، و شعاع چرخ b باشد، نشان دهید که بالاترین ارتفاع از سطح زمین که ذرهٔ گِل می‌تواند تا آنجا برود، عبارت است از

$$b + \frac{v_0^2}{2g} + \frac{gb^2}{2v_0^2}$$

در چه نقطه‌ای روی چرخ این ذرهٔ گِل از چرخ غلتان جدا می‌شود؟ (گوشزد: لازم است فرض کنید $v_0^2 \geq bg$.)

۸.۴ تفنگی در پایین تپه‌ای به زاویهٔ شیب ثابت ϕ قرار داده می‌شود. نشان دهید که برد گلولهٔ آن، که روی شیب تپه از پایین به بالا اندازه‌گیری می‌شود، عبارت است از

$$\frac{2v_0^2 \cos\alpha \sin(\alpha - \phi)}{g\cos^2\phi}$$

که α زاویهٔ بلندی تفنگ است. همچنین نشان دهید که مقدار بیشینهٔ برد روی شیب تپه عبارت است از

$$\frac{v_0^2}{g(1 + \sin\phi)}$$

۹.۴ توپی که می‌تواند گلوله‌ای با سرعت v_0 شلیک کند، روی برج قائمی به ارتفاع h که مشرف بر دشت مسطح زیر آن است، سوار شده است.

(الف) نشان دهید که زاویهٔ بلندی α که توپ باید داشته باشد تا بُردی بیشینه را طی کند، از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$\csc^2\alpha = 2\left(1 + \frac{gh}{V_0^2}\right)$$

(ب) برد بیشینهٔ توپ چقدر است؟

۱۰.۴ یک توپ متحرک جایی در روی دشت مسطح زیر توپی که روی برج مسئلهٔ ۹.۴ سوار شده، قرار داده شده است. موضع آن باید چه اندازه نزدیک برج باشد تا گلوله‌ای را که شلیک می‌کند، توپ بالای آن برج را بزند؟ فرض کنید دو توپ سرعت پرتاب یکسان V_0 دارند.

۱۱.۴ در استادیوم یانکی، میکی مانتل در حین بازی ضربه‌ای به توپ بیسبال نواخت که توپ به ارتفاع ۶۹ پا رسید و ۳۲۸ پا دورتر از مکان پرتاب به زمین اصابت کرد؛ ولی آن توپ توسط شخصی که در فاصلهٔ دوری از او قرار داشت، گرفته شد. فرض کنید آن شخص بتواند کمی قبل از آنکه توپ به زمین بخورد آن را بگیرد؛ و در این حالت، توپ در ارتفاع کمتر از ۹٫۸ پا بالای زمین باشد. فرض کنید مانتل وقتی به توپ ضربه نواخت که در ارتفاع ۳٫۲۸ پا بالای زمین بود و فرض کنید مقاومت هوا هم وجود نداشته باشد. در چه فاصلهٔ افقی‌ای آن شخص ممکن است توپ را گرفته باشد؟

۱۲.۴ توپ پرتاب‌کن بیسبال می‌تواند توپ را در جهت افقی آسانتر پرتاب کند تا در جهت قائم. فرض کنید سرعت پرتاب توپ توسط پرتاب‌کن با زاویهٔ بلندی تقریباً به‌صورت $v_0 \cos \frac{1}{4}\theta_0$ تغییر کند که θ_0 زاویهٔ بلندی اولیه و v_0 سرعت اولیه است وقتی توپ به‌طور افقی پرتاب می‌شود؛ زاویهٔ θ_0 را بیابید که در آن زاویهٔ توپ به بیشینهٔ (**الف**) ارتفاع و (**ب**) بُرد برسد.
مقادیر بیشینهٔ (**ج**)، ارتفاع و (**د**) برد را پیدا کنید. فرض کنید مقاومت هوا وجود ندارد و $v_0 = 25\text{m/s}$.

۱۳.۴ تفنگی می‌تواند گلوله‌ای با سرعت V_0 در هر جهت شلیک کند. نشان دهید که گلوله می‌تواند به هر هدفی اصابت کند که داخل سطحی با رابطهٔ زیر قرار دارد:

$$g^2 r^2 = V_0^4 - 2gV_0^2 z$$

z ارتفاع هدف و r فاصله افقی آن از تفنگ است. فرض کنید مقاومت هوا وجود ندارد.

۱۴.۴ صورت مؤلفه‌ای معادلات دیفرانسیل حرکت پرتابه را در صورتی بنویسید که مقاومت هوا با مجذور سرعت متناسب باشد. آیا این معادلات مجزا می‌شوند؟ نشان دهید که مؤلفه‌های x سرعت به‌صورت زیر بیان می‌شوند:

$$\dot{x} = \dot{x}_0 e^{-\gamma s}$$

که s فاصله‌ای است که پرتابه در طول مسیر حرکت می‌پیماید و $\gamma = c_2/m$.

۱۵.۴ مراحل عملیاتی را که به معادلات (۲.۳.۴ الف و ب)، مربوط به برد افقی یک پرتابه در معرض مقاومت پس‌کشی خطی منجر می‌شوند، انجام دهید.

۱۶.۴ شرایط اولیهٔ نوسانگر هماهنگ دوبعدی از این قرارند: $t = 0$، $x = A$، $y = 4A$، $\dot{x} = 0$، $\dot{y} = 3\omega A$؛ که ω بسامد زاویه‌ای است. x و y را به‌صورت تابعی از t بیابید. نشان دهید که

حرکت کاملاً در داخل مستطیلی به ابعاد $2A$ و A انجام می‌گیرد. زاویهٔ میل، ψ، مسیر بیضوی را نسبت به محور x پیدا کنید. شکل این مسیر را ترسیم کنید.

۱۷.۴ گوی سربی کوچکی به جرم m توسط شش فنر سبک آویخته نگه داشته شده است (شکل ۱.۴.۴). نسبت ثابت سفتی فنرها عبارت است از ۱:۴:۹، به‌طوری که تابع انرژی پتانسیل را می‌توان به‌صورت زیر بیان کرد:

$$V = \frac{k}{2}(x^2 + 4y^2 + 9z^2)$$

در زمان $t = 0$، گلوله را در جهت $(1, 1, 1)$ هل و در مبدأ به آن سرعت v_0 می‌دهند. اگر $k = \pi^2 m$، مقدار عددی x، y، و z را به‌صورت توابعی از زمان t پیدا کنید. آیا گوی همواره مسیرش را مجدداً می‌پیماید؟ در این صورت، به‌ازای چه مقدار t ذره برای بار اول به مبدئی با همان سرعت که در $t = 0$ داشت، مراجعت می‌کند؟

۱۸.۴ مشتق معادلهٔ (۱۵.۴.۴) را کامل کنید.

۱۹.۴ اتمی در شبکهٔ بلوری مکعبی ساده قرارگرفته است. اگر انرژی پتانسیل برهم‌کنش بین هر دو اتم به شکل $cr^{-\alpha}$ باشد که c و α ثابت‌اند و r فاصلهٔ بین دو اتم است، نشان دهید که انرژی کل برهم‌کنش یک اتم معین با شش اتم مجاورش تقریباً برابر است با انرژی پتانسیل نوسانگر هماهنگ در سه بعد

$$V \simeq A + B(x^2 + y^2 + z^2)$$

که A و B ثابت‌اند.

[گوشزد: فرض کنید شش اتم مجاور تثبیت شده و در نقاط $(\pm d, 0, 0)$، $(0, \pm d, 0)$، و $(0, 0, \pm d)$ قرارگرفته‌اند، و جابه‌جایی (x, y, z) یک اتم معین از حال تعادل $(0, 0, 0)$ در مقایسه با d کوچک است. در این صورت $V = \sum cr_i^{-\alpha}$، که

$$r_1 = [(d - x)^2 + y^2 + z^2]^{1/2}$$

و روابط مشابه برحسب r_2، r_3، ... ، r_6. فرمول تقریبی در پیوست د را ملاحظه کنید].

۲۰.۴ الکترونی در میدان نیرویی متشکل از میدان الکتریکی یکنواخت $\mathbf{E}$ و میدان مغناطیسی $\mathbf{B}$ عمود بر $\mathbf{E}$ حرکت می‌کند. در نظر بگیرید $\mathbf{E} = \mathbf{j}E$ و $\mathbf{B} = \mathbf{k}B$. مکان اولیهٔ الکترون را در مبدأ با سرعت اولیهٔ $\mathbf{v}_0 = \mathbf{i}v_0$ در جهت x اختیار کنید. حرکت حاصل الکترون را بیابید و نشان

دهید که مسیر چرخزادی به معادلهٔ زیر است:

$$x = a\sin\omega t + bt$$
$$y = a(1 - \cos\omega t)$$
$$z = 0$$

از حرکت چرخزادی الکترونها در لامپ الکترونی که مگنترون نامیده شده است، بهره می‌گیرند تا امواج میکروموج در کورهٔ میکروموجی، ایجاد کنند.

۲۱.۴ ذره‌ای روی کرهٔ صافی به شعاع b در فاصلهٔ $b/2$ بالای صفحهٔ مرکزی قرار داده شده است. هنگامی که ذره به پایین کره می‌لغزد، در چه نقطه‌ای از آن جدا می‌شود؟

۲۲.۴ دانهٔ تسبیحی روی سیم سخت صافی که به شکل حلقهٔ دایره‌ای به شعاع b خم شده است، می‌لغزد. اگر صفحهٔ حلقه قائم باشد و دانهٔ تسبیح در نقطه‌ای هم‌سطح با مرکز حلقه از حال سکون شروع به حرکت کند، سرعت دانهٔ تسبیح را در پایینترین نقطهٔ حلقه و واکنش سیم را روی دانهٔ تسبیح در این نقطه به‌دست آورید.

۲۳.۴ نشان دهید که زمان تناوب ذرهٔ لغزان در تشت چرخزادی مثال ۲.۶.۴ عبارت است از $4\pi\,(A/g)^{1/2}$.

مسائل کامپیوتری

ک۱.۴ هدف‌گیری کامپیوتر یک هواپیمای بمب‌افکن در هنگامی که می‌خواهد بمب را شلیک کند، دچار اختلال می‌شود. خلبان متوجه می‌شود که بادی افقی و قوی می‌وزد. از این رو تصمیم می‌گیرد بمب را مستقیماً روی هدف که به چشم دیده می‌شود، در همان لحظه‌ای که هواپیما بر فراز آن پرواز می‌کند، در باد رها کند. او سرعت زمینی لازم هواپیما را برای پروازش در ارتفاع ۵۰۰۰۰ پا محاسبه می‌کند و تشخیص می‌دهد که مشکلی برای پرواز هواپیمایش نیست. وی کاملاً مطمئن است که سرعت باد، سرعت هواپیما را تغییر خواهد داد و بمب را «به‌طرف عقب» هدف مورد نظر خواهد کشید. خلبان سرعت زمینی هواپیما را بر طبق آن تنظیم می‌کند و به بمب‌انداز اطلاع می‌دهد که درست در لحظه‌ای که هدف مستقیماً زیر هواپیما در نقطهٔ تقاطع خطوط هدف‌یاب دستگاه مشاهدهٔ هدف ظاهر می‌شود، بمب را رها کند. فرض کنید در تمام فضای زیر هواپیما باد به‌طور افقی با سرعت ۶۰ m/h می‌وزد و چگالی هوا به‌تناسب ارتفاع تغییر نمی‌کند. جرم بمب ۱۰۰ kg است. فرض کنید شکل آن کروی و شعاعش ۰٫۲ m باشد.

(الف) سرعت زمینی لازم هواپیما را برای اینکه بمب به هدف اصابت کند، محاسبه کنید.

(ب) مسیر بمب را ترسیم کنید. توضیح دهید چرا «جزء دنبالهٔ» مسیر خطی است.

(ج) خلبان با چه دقتی باید سرعت هواپیما را کنترل کند تا بمب به محدودهٔ ۱۰۰ متری هدف اصابت کند؟

ک۲.۴ فرض کنید یک پرتابه که تحت تأثیر مقاومت پس‌کشی هوای خطی است، با سرعت اولیهٔ v_0 مساوی با سرعت نهایی v_t آن در زاویهٔ بلندی θ_0، شلیک شود.

(الف) جوابهای پارامتری $x(t)$ و $z(t)$ را برای مسیرهای پرتابه برحسب پارامترهای بالا پیدا کنید. جوابها را به معادلات پارامتری از متغیرهای بی‌بعد $X(s)$، $Z(s)$، و s تبدیل کنید که $X = (g/v_t^2)x$، $Z = (g/v_t^2)z$، و $s = (g/v_t)t$.

(ب) معادلات پارامتری بی‌بعد را که در بالا به‌دست آمد، به‌طور عددی حل کنید و زاویهٔ θ_0 را بیابید که در آن زاویه، پرتابه باید شلیک شود تا به بُرد بیشینه برسد.

(ج) مسیر پرتابه را مطابق با برد بیشینه‌اش ترسیم کنید؛ همچنین مسیری را ترسیم کنید که تحت همین شرایط شلیک و در غیاب مقاومت هوا، رخ می‌دهد. پارامترهای بی‌بعد بالا را در نمودار به‌صورت متغیر به‌کار برید.

(د) با استفاده از جرم و ابعاد توپ بیسبال که در مثال ۲.۳.۴ داده شده است، (I) سرعت حدی توپ بیسبال را برای مقاومت پس‌کشی هوا خطی محاسبه کنید؛ (II) بُرد بیشینهٔ آن را وقتی در این سرعت اولیه و زاویهٔ بلندی بهینه پرتاب می‌شود محاسبه کنید.

۵

دستگاههای مرجع نالخت

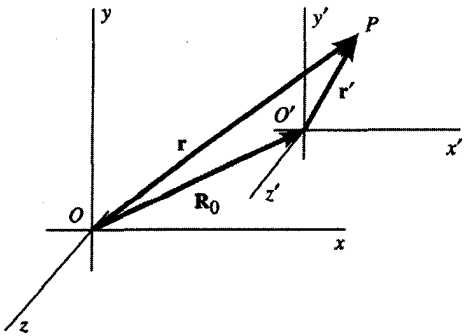
«بر یک صندلی در دفتر اداره ثبت اختراعات در برن نشسته بودم که ناگهان به فکرم رسید: اگر کسی آزادانه سقوط کند، وزن خودش را احساس نخواهد کرد. یکه خوردم. این فکر ساده تأثیر ژرفی بر من نهاد. از همان جا به سوی نظریه‌ای بر گرانش هدایت شدم.»

آلبرت اینشتین[1]

۱.۵ دستگاههای مختصات شتابدار و نیروهای لخت

غالباً برای توصیف هر ذره، بسیار مناسب وگاهی هم ضروری است که از دستگاه مختصاتی بهره گیریم که لخت نباشد؛ مثلاً، برای توصیف حرکت پرتابه دستگاه مختصاتی که محکم بر زمین ثابت شده است، مناسبترین دستگاه مختصات به‌شمار می‌آید؛ هر چند خود زمین شتابدار و چرخان است.

1. "*The Happiest Thought of My life*"; See A. Pais, *Inward Bound*, New york, Oxford Univ. Press, 1986.



شکل ۱.۱.۵ رابطهٔ بین بردارهای مکان در دو دستگاه مختصاتی که نسبت به یکدیگر صرفاً حرکت انتقالی اجرا می‌کنند.

ابتدا حالتی را در نظر می‌گیریم که دستگاه مختصات صرفاً حرکت انتقالی اجرا می‌کند. در شکل ۱.۱.۵، $Oxyz$ محورهای مختصات اولیه‌اند (ثابت فرض می‌شوند)، و $O'x'y'z'$ محورهای متحرک به‌شمار می‌آیند. در انتقال خالص محورهای متناظر Ox و $O'x'$، و به‌همین ترتیب سایر محورها، با یکدیگر موازی باقی می‌مانند. بردار مکان ذرهٔ P در دستگاه ثابت به $\mathbf{r}$ و در دستگاه متحرک به $\mathbf{r}'$ نموده می‌شود. جابه‌جایی مبدأ متحرک، OO'، را با $\mathbf{R}_0$ نشان می‌دهیم. بنابراین، از مثلث $OO'P$ داریم:

$$\mathbf{r} = \mathbf{R}_0 + \mathbf{r}' \qquad (۱.۱.۵)$$

ابتدا مشتق اول و دوم طرفین این عبارت را نسبت به زمان به‌دست می‌آوریم:

$$\mathbf{v} = \mathbf{V}_0 + \mathbf{v}' \qquad (۲.۱.۵)$$

$$\mathbf{a} = \mathbf{A}_0 + \mathbf{a}' \qquad (۳.۱.۵)$$

که در آنها $\mathbf{V}_0$ و $\mathbf{A}_0$، به‌ترتیب، سرعت و شتاب دستگاه متحرک، و $\mathbf{v}'$ و $\mathbf{a}'$ سرعت و شتاب ذره در دستگاه متحرک‌اند.

در حالت خاص، اگر دستگاه متحرک شتابدار نباشد، به‌طوری که $\mathbf{A}_0 = 0$، داریم

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}'$$

از این‌رو، شتاب در هر دو دستگاه یکسان است. در نتیجه، اگر دستگاه $oxyz$ لخت باشد، قانون دوم نیوتون، $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$، در دستگاه متحرک به‌صورت $\mathbf{F} = m\mathbf{a}'$ در می‌آید؛ یعنی، دستگاه

متحرک نیز دستگاهی لخت است (به‌شرط آنکه حرکت چرخشی نداشته باشد). بنابراین، تا آنجا که به‌قلمرو مکانیک نیوتونی مربوط می‌شود، نمی‌توانیم یک دستگاه منحصر به‌فرد را مشخص کنیم. اگر قوانین نیوتون در یک دستگاه برقرار باشند، در هر دستگاه دیگری که نسبت به دستگاه اولی با سرعت یکنواخت حرکت می‌کند، نیز صادق‌اند. از سوی دیگر، اگر دستگاه متحرک شتابدار باشد، قانون دوم نیوتون در مورد حرکت در دستگاه شتابدار از این قرار خواهد شد:

$$\mathbf{F} = m\mathbf{A}_\circ + m\mathbf{a}' \qquad \text{(الف ۴.۱.۵)}$$

یا

$$\mathbf{F} - m\mathbf{A}_\circ = m\mathbf{a}' \qquad \text{(ب ۴.۱.۵)}$$

در صورت تمایل، می‌توانیم معادلهٔ (ب ۴.۱.۵) را به شکل زیر بنویسیم

$$\mathbf{F}' = m\mathbf{a}' \qquad (۵.۱.۵)$$

که در آن $\mathbf{F}' = \mathbf{F} + (-m\mathbf{A}_\circ)$. یعنی، می‌توان شتاب دستگاه مرجع، $\mathbf{A}_\circ$، را، با افزودن جملهٔ لختی $-m\mathbf{A}_\circ$ به نیروی $\mathbf{F}$ و مساوی قراردادن نتیجه با حاصلضرب جرم و شتاب در دستگاه متحرک، به‌حساب آورد. گاهی به‌جملات لختی در معادلات حرکت، نیروهای لختی یا نیروهای مجازی می‌گویند. چنین «نیروهایی» ناشی از برهم‌کنش با سایر اجسام نیستند، بلکه از انتخاب دستگاه مرجع نتیجه می‌شوند. اینکه کسی بخواهد آنها را نیرو بنامد یا خیر، صرفاً به مبحث اصطلاح‌شناسی ربط پیدا می‌کند. به‌هرحال، اگر برای توصیف حرکت ذره دستگاه مختصات نالخت به‌کار رود، جمله‌های لختی نیز حضور خواهند داشت.

مثال ۱.۱.۵

قطعه‌چوبی روی میز افقی ناهمواری قرار دارد. اگر میز در راستای افقی شتاب پیدا کند، قطعه‌چوب تحت چه شرایطی خواهد لغزید؟

حل:

ضریب اصطکاک ایستایی بین قطعه‌چوب و میز را μ_s می‌گیریم. در این صورت بیشینهٔ بزرگی نیروی اصطکاک $\mathbf{F}$ عبارت خواهد بود از $\mu_s mg$، که m جرم قطعه‌چوب است. شرط لغزش آن است که نیروی لختی $-m\mathbf{A}_\circ$ از نیروی اصطکاک بیشتر شود؛ $\mathbf{A}_\circ$ شتاب میز است. از این‌رو، شرط لغزش عبارت است از

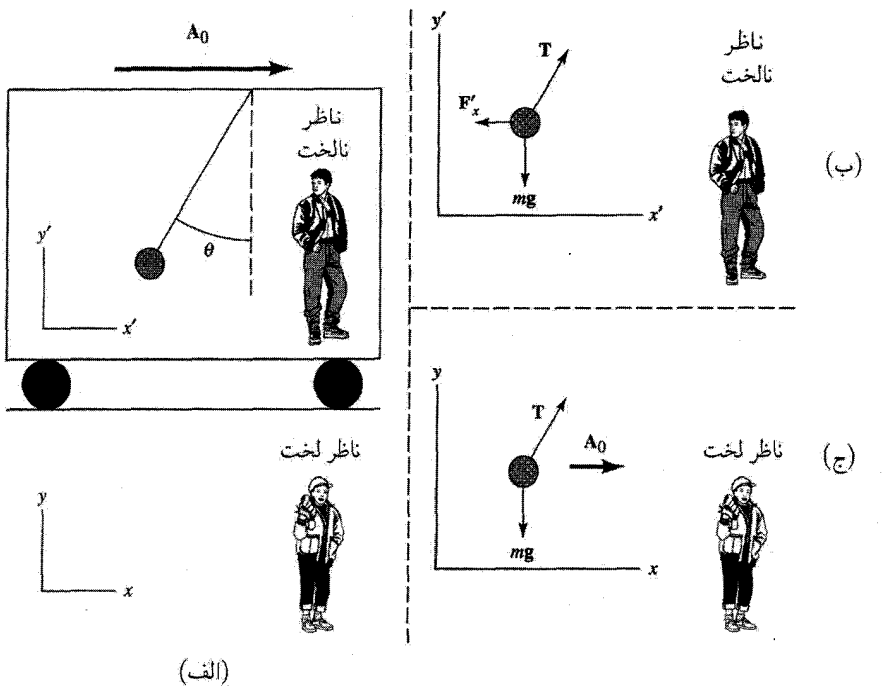
$$|-m\mathbf{A}_\circ| > \mu_s m\mathbf{g}$$

یا

$$A_\circ > \mu_s g$$

مثال ۲.۱.۵

آونگی (مطابق شکل ۲.۱.۵ الف) از سقف یک واگن قطار آویزان است فرض کنید واگن به‌طور یکنواخت به‌سمت راست (در جهت $+x$) شتاب می‌گیرد. ناظر نالختی، پسرکی در داخل واگن، می‌بیند که آونگ تحت زاویهٔ θ در طرف چپ راستای قائم آویزان است. او باور دارد که به این طریق آویخته‌شدن آونگ به‌علت وجود نیروی لخت $\mathbf{F}'_x$ است، که روی تمام اشیائی که در دستگاه مرجع شتابدارش قرار دارند، وارد می‌آید (شکل ۲.۱.۵ ب). ناظر نالخت، دخترکی بیرون از واگن، همان چیز را می‌بیند، ولی او می‌داند که نیروی حقیقی $\mathbf{F}'_x$ که بر آونگ وارد می‌آید، وجود ندارد.



شکل ۲.۱.۵ (الف) آونگی که از سقف یک واگن قطار شتابدار آویخته شده، آن‌طورکه به‌وسیلهٔ (ب) ناظر نالخت مشاهده می‌شود؛ و (ج) ناظر لخت مشاهده می‌شود.

او می‌داند آونگی که به این طریق آویخته است، به‌علت نیروی خالص در جهت افقی است که لازم است آونگ را به‌میزان $\mathbf{A}_\circ$ شتاب بدهد [که آن دختر مشاهده می‌کند (شکل ۲.۱.۵ ج)]. نشان دهید که، برطبق نظر ناظر نالخت، $\mathbf{F}'_x = -m\mathbf{A}_\circ$ نیرویی است که باعث می‌شود آونگ در زاویهٔ θ آویزان شود.

حل:

ناظر لخت قانون دوم نیوتون را برای آونگ آویخته به‌صورت زیر می‌نویسد:

$$\sum \mathbf{F}_i = m\mathbf{a}$$

$$T\sin\theta = mA_\circ \qquad T\cos\theta - mg = \circ$$

$$\therefore A_\circ = g\tan\theta$$

وی نتیجه می‌گیرد که آونگ تحت زاویهٔ θ آویزان می‌ماند، زیرا واگن قطار در جهت افقی شتاب می‌گیرد و برای شتاب‌دادن آن نیرو لازم است. این نیرو مؤلفهٔ x کشش نخ است. شتاب واگن متناسب با تانژانت زاویهٔ انحراف است. بنابراین، آونگ به‌صورت یک شتاب‌سنج خطی به‌کار می‌رود.

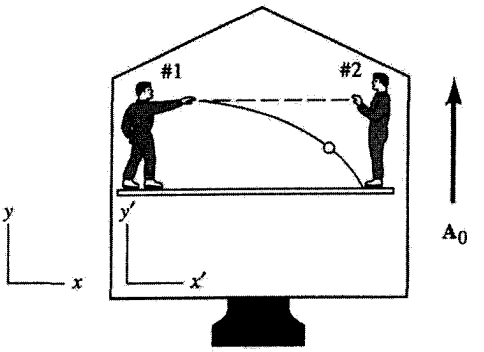
از سوی دیگر، ناظر نالخت، بی‌خبر از دنیای خارج (به‌فرض آنکه، مسیر راه‌آهن کاملاً هموار و بدون ارتعاش باشد و واگن هیچ پنجره یا هیچ سررشتهٔ حسگر دیگری برای نقطهٔ مرجع دیگر نداشته باشد)، مشاهده می‌کند آونگ در آنجا درست سمت چپ راستای قائم، به‌طور مایل آویخته می‌شود. وی نتیجه می‌گیرد:

$$\sum \mathbf{F}'_i = m\mathbf{a}' = \circ$$

$$T\sin\theta - F'_x = \circ \qquad T\cos\theta - mg = \circ$$

$$\therefore F'_x = mg\tan\theta$$

تمام نیروهای وارد بر آونگ در وضعیت تعادل‌اند و آونگ در سمت چپ راستای قائم بر اثر وارد آمدن نیروی $\mathbf{F}'_x (= -m\mathbf{A}_\circ)$ آویزان می‌شود. در واقع، اگر این ناظر آزمایشهای بیشتری در واگن قطار انجام می‌داد، مثلاً گلوله‌ها یا سنگها یا هر چیز دیگر را به پایین می‌انداخت، می‌دید که آنها نیز به سمت چپ راستای قائم منحرف می‌شوند. وی پس از کوتاه‌زمانی پی‌می‌برد که مقدار انحراف از جرم آنها مستقل است. به‌بیان دیگر، او نتیجه می‌گرفت که نیرویی مانند نیروی گرانش (که در فصل ۶ راجع به آن بحث می‌شود.) در آنجا باید برقرار باشد که اشیاء را با شتاب $\mathbf{A}_\circ$ به‌طرف چپ واگن هُل دهد. همان‌طور که نیرویی با شتاب $\mathbf{g}$ آنها را به‌طرف پایین می‌کشد.



شکل ۳.۱.۵ دو فضانورد در حال پرتاب توپ، در سفینهٔ فضایی با شتاب $|\mathbf{A}_\circ| = |\mathbf{g}|$.

مثال ۳.۱.۵

دو فضانورد در یک سفینهٔ فضایی ایستاده‌اند که (مطابق شکل ۳.۱.۵) بالا می‌رود. بزرگی $\mathbf{A}_\circ$ را مساوی g بگیرید. فضانورد ۱# توپی را مستقیماً به‌سوی فضانورد ۲# پرتاب می‌کند، که به‌فاصلهٔ $10\,\mathrm{m}$ از او در طرف دیگر سفینه قرار دارد. سرعت اولیهٔ توپ چقدر باید باشد تا قبل از برخورد به کف سفینه به فضانورد ۲# برسد؟ فرض کنید فضانورد ۱# توپ را در ارتفاع $h = 2\,\mathrm{m}$ بالای کف سفینه رها کند. مسئله را از دیدگاه هر دو حل کنید: (الف) ناظر نالخت (در داخل سفینه)؛ و (ب) ناظر لخت (در خارج سفینه).

حل:

(الف) به‌نظر ناظر نالخت نیروی $-m\mathbf{A}_\circ$ بر تمام اشیاء واقع در سفینه وارد می‌آید. بنابراین، در دستگاه مرجع (x', y') نالخت، نتیجه می‌گیریم که مسیر توپ سهمی است، یعنی،

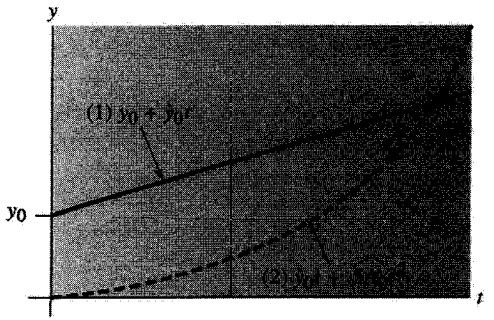
$$x'(t) = \dot{x}'_\circ t \qquad y'(t) = y'_\circ - \frac{1}{2}A_\circ t^2$$

$$\therefore\ y'(x') = y'_\circ - \frac{1}{2}A_\circ \left(\frac{x'}{\dot{x}'_\circ}\right)^2$$

با صفر قراردادن $y'(x')$ به‌ازای $x' = 10$، و حل‌کردن آن به‌منظور یافتن $\dot{x}'_\circ$، می‌رسیم به:

$$\dot{x}'_\circ = \left(\frac{A_\circ}{2y'_\circ}\right)^{1/2} x'$$

$$= \left(\frac{9{,}8\,\mathrm{ms}^{-2}}{4\,\mathrm{m}}\right)^{1/2} (10\,\mathrm{m}) = 15{,}6\,\mathrm{ms}^{-1}$$



شکل ۴.۱.۵ موضع قائم (۱) توپ پرتاب‌شده در یک سفینهٔ شتابدار و (۲) کف سفینه، آن‌طورکه ناظر لخت مشاهده می‌کند.

(ب) ناظر لخت تصویر را کمی متفاوت می‌بیند. به‌نظر او می‌رسد که توپ بعد از رهاشدن با سرعت ثابت در خط راست حرکت می‌کند وکف سفینهٔ فضایی به‌سمت بالا شتاب می‌گیرد تا راه را بر توپ ببندد. نمودار موضع قائم وکف سفینهٔ فضایی را در شکل ۴.۱.۵ مشاهده می‌کنید. در لحظه‌ای که فضانورد ۱# توپ را رها می‌کند، توپ و سفینه هر دو سرعت اولیه یکسان و بالاسوی $\dot{y}_0$ را دارند. مواضع قائم توپ و کف در لحظهٔ t برهم منطبق می‌شوند، بسته به اینکه ارتفاع اولیهٔ توپ از این قرار باشد:

$$y_0 + \dot{y}_0 t = \dot{y}_0 t + \frac{1}{2} A_0 t^2$$

$$y_0 = \frac{1}{2} A_0 t^2$$

در مدت‌زمان t، توپ فاصلهٔ افقی x را پیموده است که

$$t = \frac{x_0}{\dot{x}_0} \qquad \text{یا} \qquad x = \dot{x}_0 t$$

این زمان را در رابطهٔ برحسب y_0 در بالا می‌نشانیم، سرعت افقی اولیهٔ توپ را به‌دست می‌آوریم:

$$y_0 = \frac{1}{2} A_0 \left(\frac{x}{\dot{x}_0}\right)^2$$

$$\dot{x}_0 = \left(\frac{A_0}{2y_0}\right)^{1/2} x$$

به این ترتیب، هر دو ناظر برای سرعت افقی اولیه، همان‌طورکه باید، مقدار یکسانی را به‌دست می‌آورند.

تجزیه و تحلیل از دیدگاه ناظر نالخت کمتر پیچیده به‌نظر می‌رسد. در واقع، باید از لحاظ فیزیکی نیروی لخت $-m\mathbf{A}$ بر ناظر لخت وارد آمده باشد. آن نیرو، مانند نیروی گرانشی، که در زمین بر ما وارد می‌آید، باید حقیقی به‌نظر رسد. فضانورد ما به‌خاطر «توضیح‌دادن» دینامیک اشیاء متحرک مشاهده‌شده در سفینهٔ فضایی، حتی باید مفهومی برای گرانی ابداع کند.

۲.۵ دستگاههای مختصات چرخان

در بخش قبل، نشان دادیم که چگونه سرعتها، شتابها و نیروها بین دستگاه مرجع لخت و دستگاه مرجع نالخت که شتابی با بزرگی ثابت دارد، تغییر شکل می‌دهند. در این بخش و بخش بعدی نشان خواهیم داد که چگونه این کمّیات بین دستگاه لخت و دستگاه نالخت نیز که چرخش هم دارد، دگرگون می‌شوند.

بحث خود را در مورد دستگاه مختصات پریم‌دار چرخان نسبت به دستگاه مختصات بدون پریم، یعنی ثابت، دستگاه مختصات لخت شروع می‌کنیم. محورهای دستگاههای مختصات مبدأ مشترک دارند (شکل ۱.۲.۵). در هر لحظهٔ معین، چرخش دستگاه پریم‌دار حول محور چرخش خاصی صورت می‌گیرد، که راستای این محور با بردار یکهٔ $\mathbf{n}$ نشان داده می‌شود. سرعت زاویه‌ای لحظه‌ای چرخش با ω نمایش داده می‌شود. حاصلضرب $\omega\mathbf{n}$ را بردار سرعت زاویه‌ای دستگاه چرخان می‌نامند

$$\boldsymbol{\omega} = \omega\mathbf{n} \qquad (۱.۲.۵)$$

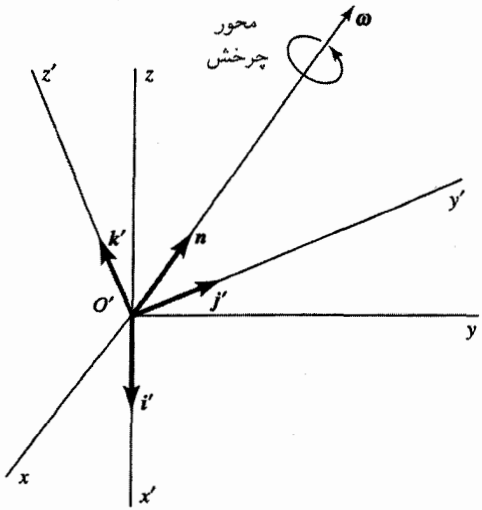
سوی بردار سرعت زاویه‌ای به‌کمک قاعدهٔ دست راست (شکل ۱.۲.۵)، مانند مورد تعریف حاصلضرب برداری، تعیین می‌شود.

مکان هر نقطهٔ P در فضا می‌تواند با بردار $\mathbf{r}$ در دستگاه ثابت، بدون پریم و با بردار $\mathbf{r}'$ در دستگاه چرخان، دستگاه پریم‌دار، نشان داده شود (شکل ۲.۲.۵). چون محورهای مختصات دو دستگاه مبدأ یکسانی دارند، این بردارها یکسان‌اند، یعنی

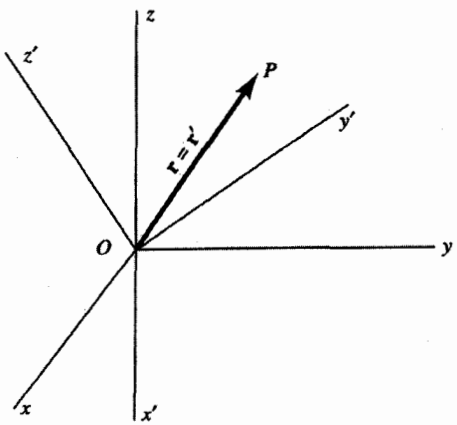
$$\mathbf{r} = \mathbf{i}x + \mathbf{j}y + \mathbf{k}z = \mathbf{r}' = \mathbf{i}'x' + \mathbf{j}'y' + \mathbf{k}'z' \qquad (۲.۲.۵)$$

وقتی برای یافتن سرعت نسبت به‌زمان مشتق می‌گیریم، باید به یاد داشته باشیم که بردارهای یکهٔ $\mathbf{i}'$، $\mathbf{j}'$، و $\mathbf{k}'$ در دستگاه چرخان ثابت نیستند، در صورتی که بردارهای یکهٔ $\mathbf{i}$، $\mathbf{j}$، و $\mathbf{k}$ در دستگاه اول ثابت‌اند. بنابراین، می‌توانیم بنویسیم:

$$\mathbf{i}\frac{dx}{dt} + \mathbf{j}\frac{dy}{dt} + \mathbf{k}\frac{dz}{dt} = \mathbf{i}'\frac{dx'}{dt} + \mathbf{j}'\frac{dy'}{dt} + \mathbf{k}'\frac{dz'}{dt} + x'\frac{d\mathbf{i}'}{dt} + y'\frac{d\mathbf{j}'}{dt} + z'\frac{d\mathbf{k}'}{dt} \qquad (۳.۲.۵)$$



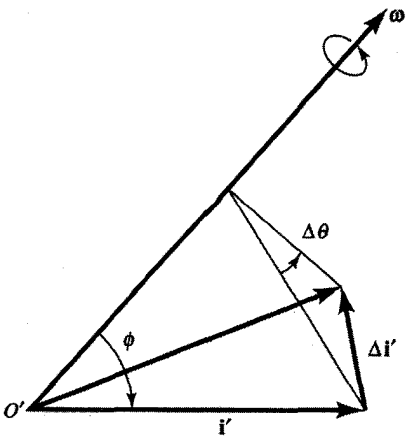
شکل ۱.۲.۵ بردار سرعت زاویه‌ای دستگاه مختصات چرخان.



شکل ۲.۲.۵ دستگاه مختصات چرخان (دستگاه پریم‌دار).

سه جملهٔ سمت چپ معادلهٔ بالا، آشکارا بردار سرعت $\mathbf{v}$ را در دستگاه ثابت می‌دهند و سه جملهٔ اول سمت راست مؤلفه‌های سرعت در دستگاه چرخان هستند که ما آن را $\mathbf{v}'$ می‌نامیم، از این‌رو معادلهٔ بالا را می‌توان از این قرار نوشت:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}' + x'\frac{d\mathbf{i}'}{dt} + y'\frac{d\mathbf{j}'}{dt} + z'\frac{d\mathbf{k}'}{dt} \qquad (۴.۲.۵)$$



شکل ۳.۲.۵ تغییر در بردار یکهٔ $\mathbf{i}'$ که چرخش جزئی $\Delta\theta$ آن را پدید می‌آورد.

سه جملهٔ آخر سمت راست نمایانگر سرعت ناشی از چرخش دستگاه مختصات پریم‌دارند. اکنون باید تعیین کنیم که بین مشتقهای زمانی بردارهای یکه با چرخش چگونه رابطه برقرار می‌شود.

برای یافتن مشتقهای زمانی $d\mathbf{i}'/dt$، $d\mathbf{j}'/dt$، و $d\mathbf{k}'/dt$ به شکل ۳.۲.۵ نظر کنید. در این شکل، تغییر $\Delta\mathbf{i}'$ در بردار یکهٔ $\mathbf{i}'$ ناشی از چرخش جزئی $\Delta\theta$ حول محور چرخش نشان داده شده است. (برای اینکه شکل واضح باشد بردارهای $\mathbf{j}'$ و $\mathbf{k}'$ حذف شده‌اند.) با توجه به شکل می‌بینیم که بزرگی $\Delta\mathbf{i}'$ از رابطهٔ تقریبی زیر به‌دست می‌آید:

$$|\Delta\mathbf{i}'| \approx (|\mathbf{i}'| \sin\phi)\Delta\theta = (\sin\phi)\Delta\theta$$

که ϕ زاویهٔ بین $\mathbf{i}'$ و $\boldsymbol{\omega}$ است. Δt را فاصلهٔ زمانی برای این تغییر می‌گیریم؛ در این صورت می‌توانیم بنویسیم

$$\left|\frac{d\mathbf{i}'}{dt}\right| = \lim_{\Delta t \to 0} \left|\frac{\Delta\mathbf{i}'}{\Delta t}\right| = \sin\phi\frac{d\theta}{dt} = (\sin\phi)\omega \qquad (۵.۲.۵)$$

حال جهت $\Delta\mathbf{i}'$ بر هر دو بردار $\boldsymbol{\omega}$ و $\mathbf{i}'$ عمود است؛ در نتیجه، از تعریف حاصلضرب برداری، می‌توانیم معادلهٔ بالا را به‌صورت برداری زیر بنویسیم

$$\frac{d\mathbf{i}'}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{i}' \qquad (۶.۲.۵)$$

به‌همین‌ترتیب $d\mathbf{j}'/dt = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{j}'$ و $d\mathbf{k}'/dt = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{k}'$ را پیدا کنیم.

اکنون نتیجهٔ بالا را به‌قرار زیر بر سه جملهٔ آخر معادلهٔ (۴.۲.۵) اعمال می‌کنیم:

$$x'\frac{d\mathbf{i}'}{dt}+y'\frac{d\mathbf{j}'}{dt}+z'\frac{d\mathbf{k}'}{dt}=x'(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{i}')+y'(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{j}')+z'(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{k}')$$
$$=\boldsymbol{\omega}\times(\mathbf{i}'x'+\mathbf{j}'y'+\mathbf{k}'z') \qquad (۷.۲.۵)$$
$$=\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}'$$

این کمیت عبارت است از سرعت P ناشی از چرخش دستگاه مختصات پریم‌دار. با استفاده از آن، معادلهٔ (۴.۲.۵) را می‌توان خلاصه‌نویسی کرد تا داشته باشیم:

$$\mathbf{v}=\mathbf{v}'+\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}' \qquad (۸.۲.۵)$$

یا، به بیان صریحتر:

$$\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)_{\text{ثابت}}=\left(\frac{d\mathbf{r}'}{dt}\right)_{\text{چرخان}}+\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}'=\left[\left(\frac{d}{dt}\right)_{\text{چرخان}}+\boldsymbol{\omega}\times\right]\mathbf{r}' \qquad (۹.۲.۵)$$

یعنی، عمل مشتق‌گیری بردار مکان نسبت به زمان در دستگاه ثابت با عمل مشتق‌گیری نسبت به زمان در دستگاه چرخان به اضافهٔ عملگر $\boldsymbol{\omega}\times$ معادل است. با اندکی تأمل، پی‌می‌بریم که همین استدلال در مورد هر بردار $\mathbf{Q}$ صادق است، یعنی:

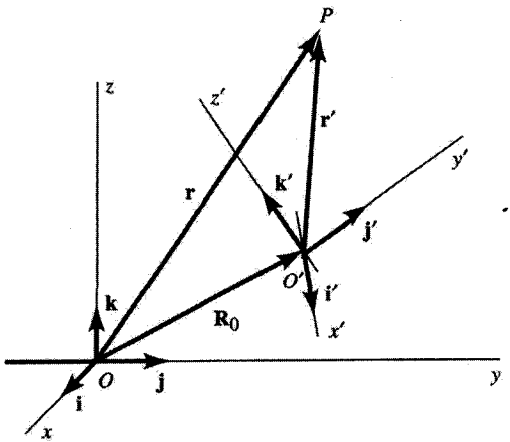
$$\left(\frac{d\mathbf{Q}}{dt}\right)_{\text{ثابت}}=\left(\frac{d\mathbf{Q}}{dt}\right)_{\text{چرخان}}+\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{Q} \qquad (۱۰.۲.۵\ \text{الف})$$

در حالت خاص، اگر آن کمیت بردار سرعت باشد، در این صورت داریم:

$$\left(\frac{d\mathbf{v}}{dt}\right)_{\text{ثابت}}=\left(\frac{d\mathbf{v}}{dt}\right)_{\text{چرخان}}+\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v} \qquad (۱۰.۲.۵\ \text{ب})$$

اما $\mathbf{v}=\mathbf{v}'+\boldsymbol{\omega}+\mathbf{r}'$، از این‌رو

$$\left(\frac{d\mathbf{v}}{dt}\right)_{\text{ثابت}}=\left(\frac{d}{dt}\right)_{\text{چرخان}}(\mathbf{v}'+\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}')+\boldsymbol{\omega}\times(\mathbf{v}'+\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}')$$
$$=\left(\frac{d\mathbf{v}'}{dt}\right)_{\text{چرخان}}+\left[\frac{d(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}')}{dt}\right]+\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v}'+\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}') \qquad (۱۱.۲.۵)$$
$$=\left(\frac{d\mathbf{v}'}{dt}\right)_{\text{چرخان}}+\left(\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}\right)_{\text{چرخان}}\times\mathbf{r}'+\boldsymbol{\omega}\times\left(\frac{d\mathbf{r}'}{dt}\right)_{\text{چرخان}}$$
$$+\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v}'+\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}')$$



شکل ۴.۲.۵ شکل هندسی حالت کلی حرکت انتقالی و چرخشی دستگاه مختصات متحرک (دستگاه پریم‌دار).

حال با توجه به جملهٔ شامل مشتق زمانی $\boldsymbol{\omega}$، داریم $(d\boldsymbol{\omega}/dt)_{\text{چرخان}} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} = (d\boldsymbol{\omega}/dt)_{\text{ثابت}}$. اما حاصلضرب برداری هر بردار در خودش صفر است، از این رو $(d\boldsymbol{\omega}/dt)_{\text{چرخان}} = (d\boldsymbol{\omega}/dt)_{\text{ثابت}}$. چون $\mathbf{v}' = (d\mathbf{r}'/dt)_{\text{چرخان}}$ و $\mathbf{a}' = (d\mathbf{v}'/dt)_{\text{چرخان}}$ می‌توانیم نتیجهٔ نهایی را از این قرار بیان کنیم:

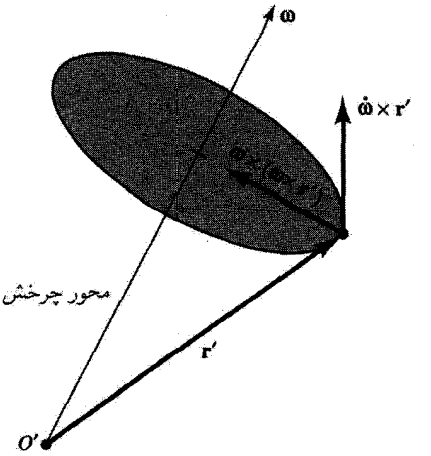
$$\mathbf{a} = \mathbf{a}' + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}' + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}' + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') \qquad (۱۲.۲.۵)$$

که شتاب در دستگاه را برحسب مکان، سرعت، و شتاب در دستگاه چرخان بیان می‌کند. در حالت کلی، دستگاه پریم‌دار هم حرکت انتقالی دارد و هم چرخشی (شکل ۴.۲.۵)؛ باید سرعت انتقال $\mathbf{v}_\circ$ را به‌سمت راست معادلهٔ (۸.۲.۵)، و شتاب دستگاه متحرک $\mathbf{A}_\circ$ را به‌سمت راست معادلهٔ (۱۲.۲.۵)، اضافه کنیم. به این ترتیب، معادلات کلی تبدیل از دستگاه ثابت به متحرک و چرخان را به‌دست می‌آوریم:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}' + \mathbf{V}_\circ \qquad (۱۳.۲.۵)$$

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}' + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}' + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}' + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') + \mathbf{A}_\circ \qquad (۱۴.۲.۵)$$

جملهٔ $2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}'$ را شتاب کوریولیس و جملهٔ $\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}')$ را شتاب مرکزگرا می‌نامند. شتاب کوریولیس وقتی ظاهر می‌شود که ذره در دستگاه مختصات چرخان حرکت کند (مگر وقتی که سرعت $\mathbf{v}'$ با محور چرخش موازی باشد)، و شتاب مرکزگرا حاصلِ قرارگرفتن ذره در مسیری دایره‌ای



شکل ۵.۲.۵ نمایش شتاب مرکزگرا.

در دستگاه چرخان است. مطابق شکل ۵.۲.۵، شتاب مرکزگرا همواره به‌سوی محور چرخش متوجه و بر آن عمود است. جملهٔ $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'$ شتاب عرضی نامیده می‌شود، زیرا بر بردار مکان $\mathbf{r}'$ عمود است. این شتاب به‌صورت هر گونه شتاب زاویه‌ای دستگاه چرخان، یعنی هرگاه بزرگی یا جهت بردار سرعت زاویه‌ای، یا هر دو تغییر کنند، ظاهر می‌شود.

مثال ۱.۲.۵

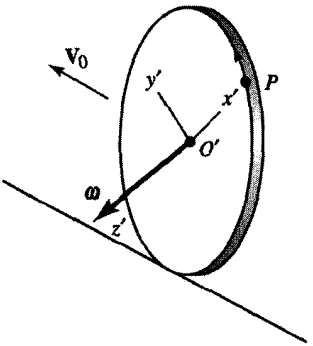
چرخی به‌شعاع b روی زمین می‌غلتد و با سرعت $V_\circ$ به پیش می‌رود. شتاب هر نقطه از محیط چرخش را نسبت به زمین پیدا کنید.

حل:
دستگاه مختصات را متصل به چرخ چرخان می‌گیریم، به‌طوری که، مطابق شکل ۶.۲.۵، مبدأ متحرک در مرکز چرخ واقع باشد و محور x' از نقطهٔ موردنظر بگذرد. بنابراین داریم

$$\mathbf{r}' = \mathbf{i}'b \qquad \mathbf{a}' = \ddot{\mathbf{r}}' = \circ \qquad \mathbf{v}' = \dot{\mathbf{r}}' = \circ$$

بردار سرعت زاویه‌ای در این دستگاه مختصات عبارت است از

$$\boldsymbol{\omega} = \mathbf{k}'\omega = \mathbf{k}'\frac{V_\circ}{b}$$



شکل ۶.۲.۵ دستگاه مختصات متصل به چرخ غلتان.

از این‌رو با انتخاب مختصات نشان داده‌شده، تمام جملات در عبارت مربوط به شتاب صفر می‌شود به‌استثنای جملهٔ شتاب مرکزگرا:

$$\begin{aligned}\mathbf{a} = \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') &= \mathbf{k}'\omega \times (\mathbf{k}'\omega \times \mathbf{i}'b) \\ &= \frac{V_\circ^2}{b}\mathbf{k}' \times (\mathbf{k}' \times \mathbf{i}') \\ &= \frac{V_\circ^2}{b}\mathbf{k}' \times \mathbf{j}' \\ &= \frac{V_\circ^2}{b}(-\mathbf{i}')\end{aligned}$$

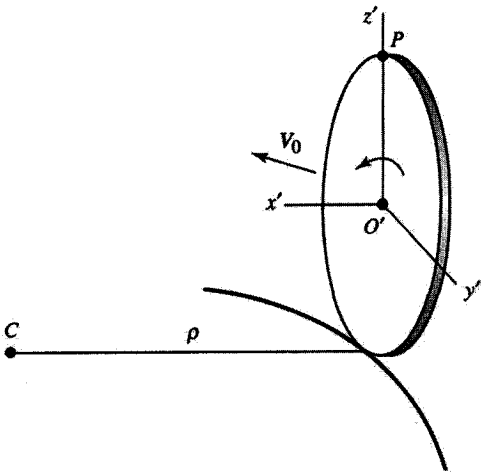
بنابراین، بزرگی $\mathbf{a}$ عبارت است از $V_\circ^2/b$ و همواره به‌سوی مرکز چرخ غلتان متوجه است.

مثال ۲.۲.۵

دوچرخه‌ای با سرعت ثابت، مسیری دایره‌ای به شعاع ρ را می‌پیماید. شتاب بالاترین نقطه روی یکی از چرخهایش چقدر است؟ سرعت دوچرخه را به $V_\circ$ و شعاع چرخ آن را به b نشان می‌دهیم.

حل:

دستگاه مختصاتی اختیار می‌کنیم که مبدأ آن در مرکز چرخ و محور x' آن افقی و به‌سوی محور انحنای مسیر، C، متوجه باشد. به‌جای آنکه دستگاه مختصاتی متحرک داشته باشیم که با چرخ بچرخد، دستگاهی اختیار می‌کنیم که، مطابق شکل ۷.۲.۵، محور z' آن قائم باقی بماند. بنابراین،



شکل ۷.۲.۵ چرخ غلتان بر مسیری خمیده. همچنان که چرخ دور می‌زند محور z' قائم باقی می‌ماند.

دستگاه $O'x'y'z'$ با سرعت زاویه‌ای $\boldsymbol{\omega}$ می‌چرخد که به‌صورت زیر بیان می‌شود:

$$\boldsymbol{\omega} = \mathbf{k}'\frac{V_\circ}{\rho}$$

و شتاب مبدأ متحرک $\mathbf{A}_\circ$ عبارت است از

$$\mathbf{A}_\circ = \mathbf{i}'\frac{V_\circ^2}{\rho}$$

چون هر نقطه بر روی چرخ نسبت به مبدأ حرکت با مسیری دایره‌ای به شعاع b می‌پیماید، در دستگاه $O'x'y'z'$ شتاب هر نقطه روی چرخ به سمت O' متوجه و بزرگیش $V_\circ^2/b$ است. بنابراین، در دستگاه متحرک برای شتاب بالاترین نقطهٔ چرخ داریم:

$$\ddot{\mathbf{r}}' = -\mathbf{k}'\frac{V_\circ^2}{b}$$

همچنین، سرعت این نقطه در دستگاه متحرک عبارت است از

$$\mathbf{v}' = -\mathbf{j}'V_\circ$$

به‌این ترتیب، شتاب کوریولیس از این قرار خواهد بود:

$$2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}' = 2\left(\frac{V_\circ}{\rho}\mathbf{k}'\right) \times (-\mathbf{j}'V_\circ) = 2\frac{V_\circ^2}{\rho}\mathbf{i}'$$

چون سرعت زاویه‌ای $\boldsymbol{\omega}$ ثابت است، شتاب عرضی صفر خواهد بود. شتاب مرکزگرا نیز صفر است، زیرا

$$\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') = \frac{V_\circ^2}{\rho^2}\mathbf{k}' \times (\mathbf{k}' \times b\mathbf{k}') = \circ$$

بنابراین، شتاب خالص بالاترین نقطهٔ روی چرخ، نسبت به زمین عبارت خواهد بود از

$$\mathbf{a} = 2\frac{V_\circ^2}{\rho}\mathbf{i}' - \frac{V_\circ^2}{b}\mathbf{k}'$$

۳.۵ دینامیک ذره در دستگاه مختصات چرخان

معادلهٔ اساسی حرکت ذره در دستگاه مرجع لخت عبارت است از

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} \qquad (۱.۳.۵)$$

که $\mathbf{F}$ حاصل‌جمع برداری تمام نیروهای فیزیکی وارد بر ذره است. از منظر معادلهٔ (۱۴.۲.۵)، معادلهٔ حرکت را می‌توانیم در دستگاه مرجع نالخت به‌صورت زیر بنویسیم

$$\mathbf{F} - m\mathbf{A}_\circ - 2m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}' - m\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}' - m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') = m\mathbf{a}' \qquad (۲.۳.۵)$$

تمام جملات معادلهٔ (۴.۲.۵)، جز $\mathbf{a}'$، در m ضرب و جملگی به چپ منتقل شده‌اند، تا آنها را به‌صورت نیروهای لختی اضافه‌شده به نیروهای حقیقی و فیزیکی $\mathbf{F}$ نمایش دهند. جملهٔ $\mathbf{a}'$ نیز در m ضرب شده، اما در سمت راست نگه داشته شده است. بنابراین، معادلهٔ (۲.۳.۵)، معادلهٔ دینامیکی حرکت ذره را در دستگاه مرجع نالخت بروز می‌دهد که تحت تأثیر نیروهای فیزیکی حقیقی و نیروهای لختی است که در نتیجهٔ شتاب دستگاه مرجع نالخت ظاهر می‌شوند. این نیروهای لختی، بسته به شتابهای مربوط به آنها که در بخش ۲.۵ بحث شد، نامگذاری شده‌اند. نیروی کوریولیس عبارت است از

$$\mathbf{F}'_{\text{کوریولیس}} = -2m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}' \qquad (۳.۳.۵)$$

نیروی عرضی از این قرار است:

$$\mathbf{F}'_{\text{عرضی}} = -m\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}' \qquad (۴.۳.۵)$$

نیروی مرکز گریز عبارت است از

$$\mathbf{F}'_{\text{مرکزگریز}} = -m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') \qquad (۵.۳.۵)$$

نیروی لختی باقیمانده، $-m\mathbf{A}_{\circ}$، وقتی ظاهر می‌شود که دستگاه مختصات (x', y', z')، مطابق بحثهایی که در بخش ۱.۵ کردیم، شتاب انتقالی داشته باشد.

ناظر نالخت در دستگاه مرجع شتابدارکه شتاب ذره را با بردار $\mathbf{a}'$ نمایش می‌دهد؛ باید هریک یا تمام این نیروهای لختی همواره با نیروهای حقیقی را به‌حساب آورد تا حرکت صحیح ذره محاسبه شود. به بیان دیگر، چنین ناظری معادلهٔ اساسی حرکت را از این قرار می‌نویسد:

$$\mathbf{F}' = m\mathbf{a}'$$

که در آن مجموع نیروهای برداری، $\mathbf{F}'$، وارد بر ذره از این رابطه به‌دست می‌آید:

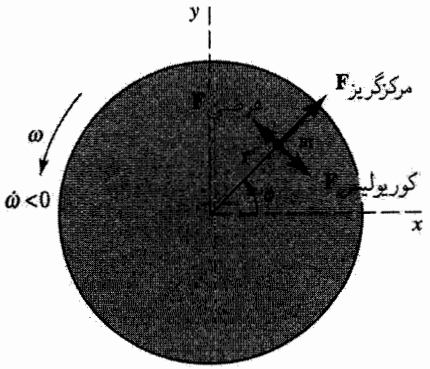
$$\mathbf{F}' = \mathbf{F}_{\text{فیزیکی}} + \mathbf{F}'_{\text{کوریولیس}} + \mathbf{F}'_{\text{عرضی}} + \mathbf{F}'_{\text{مرکزگریز}} - m\mathbf{A}_{\circ}$$

با واردکردن زیرنویس فیزیکی به $\mathbf{F}$ در معادلهٔ (۲.۳.۵)، به ماهیت فیزیکی و حقیقی جملهٔ نیروی $\mathbf{F}$ در این معادله تأکید ورزیده‌ایم. نیروهای $\mathbf{F}$ (یا $\mathbf{F}_{\text{فیزیکی}}$) تنها نیروهایی‌اند که ناظر نالخت ادعا می‌کند واقعاً به ذره وارد می‌آیند. گنجاندن چهار جملهٔ لختی باقیمانده به وضعیت دقیق دستگاه مرجع نالخت بستگی جدی دارد که برای توصیف حرکت ذره به‌کار برده می‌شود. این جمله‌ها، به‌علت خاصیت لختی ماده‌ای که حرکتش بررسی می‌شود ظاهر می‌شوند، نه اینکه به حضور یا عمل هر ماده که در آن اطراف باشد بستگی داشته باشند.

نیروی کوریولیس مخصوصاً برای ما جالب است. این نیرو فقط زمانی وجود دارد که ذره در دستگاه مختصات چرخان در حالت حرکت باشد. جهت آن همیشه بر بردار سرعت ذره در دستگاه متحرک عمود است. از این‌رو به‌نظر می‌رسد که نیرویی کوریولیس ذرهٔ متحرک را در امتداد عمود بر جهت حرکت آن منحرف می‌کند. (نیروی کوریولیس را بیشتر از روی تفنن «نیروی چرخ و فلکی» نامیده‌اند. سعی کنید به‌طور شعاعی به‌داخل یا خارج روی چرخ و فلک متحرک قدم بزنید تا اثر آن را تجربه کنید.) این نیرو در محاسبهٔ مسیر پرتابه نقش مهمی دارد. آثار کوریولیس همچنین عامل گردش هوای اطراف نواحی پر فشار، یا کم‌فشار بر سطح زمین به‌شمار می‌آیند. در مورد ناحیهٔ پرفشار[۱]، هنگامی که هوا از بالا به پایین می‌ریزد، گرایش آن، در حالی که به سوی ناحیهٔ کم‌فشار می‌رود، برون‌سو و با منحرف‌شدن و جریان‌یافتن به سمت راست است. بدین‌ترتیب، گردشی ساعتگرد برقرار می‌شود. در نیمکرهٔ جنوبی، عکس این حالت صادق است.

نیروی عرضی فقط وقتی برقرار است که شتاب (یا شتاب منفی) زاویه‌ای وجود داشته باشد. این نیرو همیشه در دستگاه مختصات چرخان بر بردار شعاعی $\mathbf{r}'$ عمود است.

۱. ناحیهٔ پرفشار اساساً یک برآمدگی در جو زمین است که در آنجا هوای واقع در بالای ناحیه‌ای در روی سطح زمین بیشتر از نواحی اطراف انباشته می‌شود.



شکل ۱.۳.۵ نیروهای لختی وارد بر جرم m واقع بر یک سکوی چرخان با سرعت زاویه‌ای ω و شتاب زاویه‌ای $\dot{\omega} < 0$ که به‌طور شعاعی به سمت خارج حرکت می‌کنند. محورهای xy ثابت‌اند. جهت ω به سوی خارج از صفحهٔ کاغذ است.

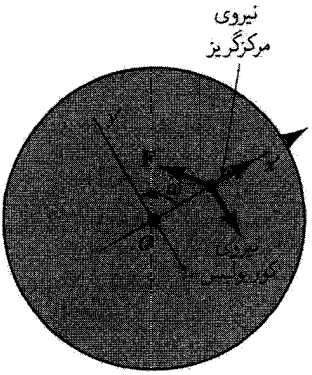
نیروی مرکزگریز نیروی آشنایی است که بر اثر چرخش حول یک محور حاصل می‌شود. این نیرو همواره به سوی خارج از محور چرخش متوجه و بر آن عمود است. این سه نیروی لخت که آنها را در شکل ۱.۳.۵ مشاهده می‌کنیم، مربوط به حالتی است که جرم m روی یک سکوی چرخان به‌طور شعاعی به سمت خارج حرکت می‌کند و آهنگ چرخش سکو کندشونده ($\dot{\omega} < 0$) است. z، محور چرخش و به سوی خارج صفحهٔ کاغذ متوجه است. محور z نیز در جهت بردار سرعت زاویه‌ای $\boldsymbol{\omega}$ است. چون $\mathbf{r}'$، بردار شعاعی، نمایانگر مکان m در دستگاه چرخان، بر $\boldsymbol{\omega}$ عمود است، بزرگی نیروی مرکزگریز عبارت است از $mr'\omega^2$. در حالت کلی، اگر زاویهٔ بین $\boldsymbol{\omega}$ و $\mathbf{r}'$ باشد، نیروی مرکزگریز عبارت خواهد شد از $mr'\omega^2 \sin\theta$، که $r' \sin\theta$ کوتاهترین فاصلهٔ m تا محور چرخش است.

مثال ۱.۳.۵

حشره‌ای با سرعت ثابت v' در امتداد پرهٔ یک چرخ به برونسو می‌خزد؛ چرخ با سرعت زاویه‌ای ثابت ω حول محور قائمی می‌چرخد. تمام نیروهای مشخص وارد بر حشره را بیابید (شکل ۲.۳.۵).

حل:

ابتدا دستگاه مختصات را متصل به چرخ اختیار می‌کنیم و محور x' را در امتداد پرهٔ موردنظر می‌گیریم. بنابراین، برای اینکه سرعت و شتاب حشره در دستگاه چرخان توصیف شوند،



شکل ۲.۳.۵ نیروهای وارد بر حشره‌ای که در امتداد یک خط شعاعی روی چرخ چرخان به برونسوی چرخ می‌خزد.

$$\dot{\mathbf{r}}' = \mathbf{i}'\dot{x}' = \mathbf{i}'v'$$
$$\ddot{\mathbf{r}}' = 0 \quad .$$

اگر محور z' را قائم بگیریم، آنگاه

$$\boldsymbol{\omega} = \mathbf{k}'\omega$$

در این صورت، نیروهای گوناگون از این قرارند:

نیروی کوریولیس $\quad -2m\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}}' = -2m\omega v'(\mathbf{k}' \times \mathbf{i}') = -2m\omega v'\mathbf{j}'$

نیروی عرضی $\quad -m\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}' = 0 \qquad (\boldsymbol{\omega} = \text{ثابت})$

نیروی مرکزگریز $\quad -m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') = -m\omega^2[\mathbf{k}' \times (\mathbf{k}' \times \mathbf{i}'x')]$

$$= -m\omega^2(\mathbf{k}' \times \mathbf{j}'x')$$
$$= m\omega^2 x'\mathbf{i}'$$

بنابراین، معادلهٔ (۲.۳.۵) به‌صورت زیر در می‌آید

$$\mathbf{F} - 2m\omega v'\mathbf{j}' + m\omega^2 x'\mathbf{i}' = 0$$

در اینجا، $\mathbf{F}$ عبارت است از نیروی واقعی وارد بر ذره از سوی پره؛ نیروها در شکل ۲.۳.۵ نشان داده شده‌اند.

مثال ۲.۳.۵

در مثال ۱.۳.۵، معلوم کنید قبل از آنکه حشره شروع به لغزیدن کند، چه مقدار راه می‌پیماید؟ ضریب اصطکاک بین حشره و پره را μ_s بگیرید.

حل:

چون بیشینهٔ مقدار نیروی اصطکاک $\mathbf{F}$ عبارت است از $\mu_s mg$، لغزش وقتی آغاز خواهد شد که

$$|\mathbf{F}| = \mu_s mg$$

یا

$$[(۲m\omega v')^۲ + (m\omega^۲ x')^۲]^{\frac{۱}{۲}} = \mu_s mg$$

با حل این معادله برحسب x'، می‌رسیم به:

$$x' = \frac{[\mu_s^۲ g^۲ - ۴\omega^۲ (v')^۲]^{\frac{۱}{۲}}}{\omega^۲}$$

x' فاصله‌ای است که حشره قبل از لغزیدن می‌تواند طی کند.

مثال ۳.۳.۵

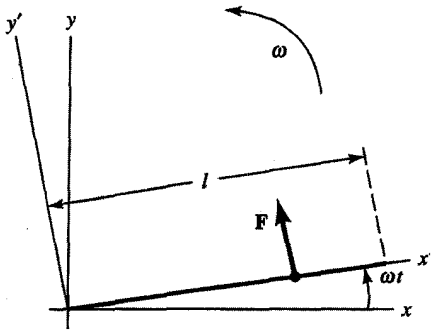
میلهٔ صافی به‌طول l در یک صفحه با سرعت زاویه‌ای ثابت ω حول محوری می‌چرخد که از ابتدای میله می‌گذرد و بر صفحهٔ چرخش عمود است. حشره‌ای به جرم m نخست در ابتدای ثابت میله قرارگرفته و به آن اندکی هل داده می‌شود، به‌طوری که سرعت اولیه‌اش با جهتی به سوی انتهای میله عبارت است از $\epsilon = \omega l$ (شکل ۳.۳.۵). مدت‌زمانی را محاسبه کنید که طول می‌کشد تا حشره به انتهای میله برسد.

حل:

بهترین راه حل این مسئله آن است که آن را، از دیدگاه دستگاه مرجع (x', y') که با میله می‌چرخد، بررسی کنیم. اگر محور x' را در امتداد میله بگیریم، در این صورت، مسئله در آن امتداد یک بعدی است. تنها نیروی واقعی وارد بر حشره، $\mathbf{F}$، نیروی واکنش میله بر حشره است. مطابق شکل ۳.۳.۵، این نیرو عمود بر میله و در امتداد y' است. به‌علت فقدان اصطکاک، $\mathbf{F}$ مؤلفهٔ x' ندارد. بنابراین، با بهره‌گیری از معادلهٔ ۲.۳.۵ در مورد حشره در این دستگاه چرخان، می‌رسیم به:

$$\mathbf{F}\mathbf{j}' - ۲m\omega\mathbf{k}' \times \dot{x}'\mathbf{i}' - m\omega\mathbf{k}' \times (\omega\mathbf{k}' \times x'\mathbf{i}') = m\ddot{x}'\mathbf{i}'$$

$$\mathbf{F}\mathbf{j} - ۲m\omega\dot{x}'\mathbf{j}' + m\omega^۲ x'\mathbf{i}' = m\ddot{x}'\mathbf{i}'$$



شکل ۳.۳.۵ حشره در حال خزیدن در امتداد میله‌ای صاف است که با سرعت زاویه‌ای ثابت ω حول محوری که در ابتدای میله ثابت‌شده می‌چرخد.

اولین نیروی لختی در معادلهٔ بالا نیروی کوریولیس است. این نیرو از آن جهت در این معادله وارد می‌شود که سرعت حشره، $\dot{x}'\hat{\mathbf{i}}'$، در امتداد محور x' در دستگاه چرخان است. توجه کنید که حشره با واکنش نیروی $\mathbf{F}$ که میله روی حشره وارد می‌آورد به حالت موازنه در می‌آید. دومین نیروی خطی نیروی مرکزگریز عبارت است از $m\omega^2 x'$. از دیدگاه حشره، این نیرو و آن را به سوی انتهای میله هل می‌دهد. این ایده‌ها در دو معادلهٔ اسکالر که از معادلهٔ برداری بالا به‌دست می‌آیند، بروز می‌کنند

$$\mathbf{F} = 2m\omega\dot{x}' \qquad m\omega^2 x' = m\ddot{x}'$$

با حل معادلهٔ دوم در بالا، $x'(t)$، مکان حشره در امتداد میله به‌صورت تابعی از زمان به‌دست می‌آید:

$$x'(t) = Ae^{\omega t} + Be^{-\omega t}$$
$$\dot{x}'(t) = \omega Ae^{\omega t} - \omega Be^{-\omega t}$$

شرایط مرزی، $x'(t=0) = 0$ و $\dot{x}'(t=0) = \epsilon$، به ما امکان تعیین ثابتهای A و B را می‌دهند:

$$x'(0) = 0 = A + B \qquad \dot{x}(0) = \epsilon = \omega(A - B)$$
$$A = -B = \frac{\epsilon}{2\omega}$$

که به جواب صریح زیر می‌انجامند

$$x'(t) = \frac{\epsilon}{۲\omega}(e^{\omega t} - e^{-\omega t})$$
$$= \frac{\epsilon}{\omega}\sinh \omega t$$

حشره در انتهای میله در لحظهٔ T به بیرون پرتاب می‌شود که

$$x'(T) = \frac{\epsilon}{\omega}\sinh \omega T = l$$
$$T = \frac{۱}{\omega}\sinh^{-۱}\left(\frac{\omega l}{\epsilon}\right)$$

چون سرعت اولیهٔ حشره عبارت است از $\epsilon = \omega l$، معادلهٔ بالا به‌صورت زیر در می‌آید

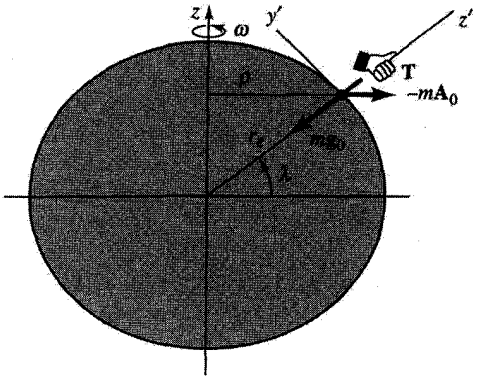
$$T = \frac{۱}{\omega}\sinh^{-۱}(۱) = \frac{°\text{ر}۸۸}{\omega}$$

۴.۵ آثار چرخش زمین

نظریه‌ای را که در بخشهای پیشین مطرح کردیم در مورد هر دستگاه مختصاتی که همراه با زمین حرکت می‌کند، اعمال می‌کنیم. چون سرعت زاویه‌ای چرخش زمین ۲π رادیان بر روز یا حدود $۷\text{ر}۲۷ \times ۱۰^{-۵}$ رادیان بر ثانیه است، باید انتظار داشته باشیم که آثار چنین چرخشی نسبتاً ناچیز است. با همهٔ اینها، چرخش زمین یک برآمدگی در استوای زمین ایجاد می‌کند؛ شعاع استوایی نسبت به شعاع قطبی حدود ۱۳ مایل (۲۲ کیلومتر) بزرگتر است.

آثار استاتیکی: راستای شاقولی

شاقولی را در نظر می‌گیریم که معمولاً از آن برای تعیین راستای «قائم» مکانی روی سطح زمین استفاده می‌شود. پی‌می‌بریم که شاقول عمود بر سطح محلی است (با چشم‌پوشی از برآمدگیها و ناهمواریهای سطح زمین). ولی به علت چرخش زمین راستای شاقول به سمت مرکز زمین متوجه نیست مگر اینکه جایی در طول خط استوا یا درست بالای یکی از قطبها آویزان شود. حرکت شاقول را در دستگاه مرجع محلی که مبدأ آن در مکان وزنهٔ شاقول است، توصیف می‌کنیم. دستگاه مرجع ما متصل به سطح زمین است. این دستگاه مرجع هم حرکت انتقالی و هم حرکت چرخشی دارد. انتقال دستگاه مرجع در طول دایره‌ای صورت می‌گیرد که شعاع آن عبارت است از $\rho = r_e \cos\lambda$ که r_e شعاع زمین و λ عرض زمین مرکزی (جغرافیایی) شاقول است (شکل ۱.۴.۵).

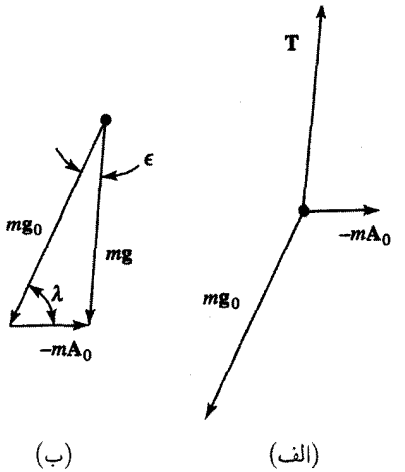


شکل ۱.۴.۵ نیروی گرانشی $m\mathbf{g}_0$، یعنی نیروی لختی $-m\mathbf{A}_0$، وکشش T وارد بر شاقولی که دست بالای سطح زمین در عرض جغرافیایی λ، آویخته است.

آهنگ چرخش ω، همان آهنگ چرخش زمین حول محورش است. حال جملاتی را بررسی می‌کنیم که معادلهٔ (۲.۳.۵) تشکیل می‌دهند. شتاب وزنهٔ شاقول، $\mathbf{a}'$، صفر است؛ چون گلوله در دستگاه مرجع محلی در حال سکون است. نیروی مرکزگریز وارد برگلوله نسبت به دستگاه محلی ما صفر و $\mathbf{r}'$ هم صفر است. مبدأ دستگاه مختصات محلی روی گلوله قرار دارد. نیروی عرضی نیز صفر است، زیرا $\omega = 0$، چرخش زمین ثابت است؛ نیروی کوریولیس صفر است زیرا $\mathbf{v}'$ سرعت حرکت شاقول صفر و شاقول در دستگاه محلی در حال سکون است. تنها جملاتی که در معادلهٔ (۲.۳.۵) باقی مانده‌اند نیروهای واقعی $\mathbf{F}$ هستند و جملهٔ $-m\mathbf{A}_0$، به‌علت شتابدار بودن دستگاه مرجع لخت، حضور دارد. بنابراین،

$$\mathbf{F} - m\mathbf{A}_0 = 0 \qquad (۱.۴.۵)$$

چرخش زمین به ایجاد شتاب دستگاه محلی می‌انجامد. در واقع، وضعیت مورد بررسی ما در اینجا کاملاً شبیه وضعیت مثال ۲.۱.۵، شتاب‌سنج خطی، است. در آنجا، گلولهٔ آونگ در راستای قائم آویخته نبود، زیرا نیرویی لختی که به جهت مخالف شتاب واگن قطار متوجه بود، بر آن وارد می‌شد. مسئلهٔ مورد بحث در اینجا تقریباً به‌طور کامل با مورد مثال یادشده یکسان است. گلوله روی خطی آویزان نمی‌ماند که به سمت مرکز زمین متوجه است، زیرا نیروی لختی $-m\mathbf{A}_0$ آن را به سمت خارج از محور زمین می‌راند. این نیرو نیز مانند نیروی مثال ۲.۱.۵، به سوی خلاف جهت شتاب دستگاه مرجع محلی متوجه است. این امر از شتاب مرکزگرای دستگاه محلی ناشی می‌شود



شکل ۲.۴.۵ (الف) نیروهای وارد بر شاقول در عرض جغرافیایی λ. (ب) نیروهایی که وزن شاقولی را تعیین می‌کنند.

که به سمت محور زمین متوجه است. بزرگی این نیرو $m\omega^2 r_e \cos\lambda$ است. چون در استوای زمین $\lambda = 0^\circ$، این نیرو بیشینه است و در هر یک از قطبها که $\lambda = \pm 90^\circ$، کمینه است؛ مقایسهٔ بزرگی این جزء شتاب از این جملهٔ $A_0 = \omega^2 r_e \cos\lambda$ با g، یعنی شتاب گرانشی، آموزنده است. این کمیت در استوا $3.4 \times 10^{-3} g$ یا کمتر از یک درصد g است.

$\mathbf{F}$ حاصل‌جمع تمام نیروهای حقیقی و فیزیکی است که بر شاقول وارد می‌آیند. تمام نیروها، از جمله نیروی لختی $-m\mathbf{A}_0$ را در نمودار برداری شکل ۲.۴.۵ الف مشاهده می‌کنید. کشش نخ، $\mathbf{T}$، با نیروی گرانشی، $m\mathbf{g}_0$، و نیروی لختی، $-m\mathbf{A}_0$، به حالت موازنه درمی‌آید. به‌بیان دیگر:

$$(\mathbf{T} + m\mathbf{g}_0) - m\mathbf{A}_0 = 0 \qquad (۲.۴.۵)$$

اکنون وقتی شاقول را می‌آویزیم، معمولاً به این فکر می‌افتیم که $\mathbf{T}$ با نیروی گرانش در محل که $m\mathbf{g}$ نامیده می‌شود، به حالت موازنه در می‌آید. از معادلهٔ (۲.۴.۵) و شکل ۲.۴.۵ (ب) می‌توانیم دریابیم که $m\mathbf{g}$ در واقع برایند برداری نیروی گرانشی حقیقی، $m\mathbf{g}_0$، و نیروی لختی، $-m\mathbf{A}_0$، است؛ بنابراین

$$m\mathbf{g}_0 - m\mathbf{g} - m\mathbf{A}_0 = 0 \qquad \therefore \mathbf{g} = \mathbf{g}_0 - \mathbf{A}_0 \qquad (۳.۴.۵)$$

همان‌طور که در شکل ۲.۴.۵ (ب) مشاهده می‌کنیم، شتاب محلی، گرانش، $\mathbf{g}$، شامل جملهٔ $\mathbf{A}_0$

ناشی از چرخش زمین است. نیروی $m\mathbf{g}_\circ$ نیروی گرانشی حقیقی و به سمت مرکز زمین متوجه است. واکنش لختی، $-m\mathbf{A}_\circ$، از مرکز زمین به بیرون از سطح زمین متوجه است، و باعث می‌شود راستای شاقولی با زاویهٔ کوچک ϵ از راستای متوجه به مرکز زمین، منحرف شود. جهت راستای شاقولی، جهت محلی بردار $\mathbf{g}$ را تعریف می‌کند. شکل زمین نیز با جهت $\mathbf{g}$ تعریف می‌شود. از این‌رو، راستای شاقولی همیشه بر سطح زمین عمود است؛ مطابق شکل ۱.۴.۵، شکل زمین مانند کرهٔ واقعی نیست بلکه در قطبها پهن‌شده و در استوا به سمت خارج برآمده است.

می‌توان مقدار زاویهٔ ϵ را به‌آسانی محاسبه کرد. این زاویه تابعی از عرض جغرافیایی شاقول است. با به‌کارگیری قانون سینوسها در مورد شکل ۲.۴.۵ (ب)، داریم

$$\frac{\sin\epsilon}{m\omega^2 r_e\cos\lambda}=\frac{\sin\lambda}{mg} \qquad \text{(الف ۴.۴.۵)}$$

یا به علت کوچک‌بودن ϵ،

$$\sin\epsilon\approx\epsilon=\frac{\omega^2 r_e}{g}\cos\lambda\sin\lambda=\frac{\omega^2 r_e}{2g}\sin 2\lambda \qquad \text{(ب ۴.۴.۵)}$$

به این ترتیب، مطابق انتظارمان ϵ در استوا ($\lambda=0^\circ$) و در قطبین ($\lambda=\pm 90^\circ$) صفر می‌شود. بیشینهٔ انحراف راستای شاقولی از راستای متوجه به مرکز زمین به‌ازای $\lambda=45^\circ$، صورت می‌گیرد که

$$\epsilon_{\max}=\frac{\omega^2 r_e}{2g}\approx 1{,}7\times 10^{-3}\,\text{rad}\approx 0{,}1^\circ \qquad \text{(ج ۴.۴.۵)}$$

در این تجزیه و تحلیل، فرض کردیم که نیروی گرانش حقیقی، $m\mathbf{g}_\circ$، ثابت و به سمت مرکز زمین متوجه است. این ادعا درست نیست، زیرا زمین کرهٔ واقعی نیست. سطح مقطع آن، مطابق شکل ۱.۴.۵، تقریباً بیضوی است؛ به این جهت $\mathbf{g}_\circ$ با عرض جغرافیایی تغییر می‌کند. به‌علاوه، کانسارهای محلی، کوهستانها و جز آنها بر مقدار $\mathbf{g}_\circ$ اثر می‌گذارند. واضح است که محاسبهٔ شکل زمین (اساساً، زاویهٔ ϵ به‌صورت تابعی از λ) دشوار است. حل دقیقتر فقط می‌تواند به‌طور عددی به‌دست آید. تصحیحات مربوط به تجزیه و تحلیل قبلی کم‌دامنه‌اند.

آثار دینامیکی: حرکت پرتابه

معادلهٔ حرکت پرتابه در نزدیکی سطح زمین (معادلهٔ ۲.۳.۵) را می‌توان از این قرار نوشت:

$$m\ddot{\mathbf{r}}'=\mathbf{F}+m\mathbf{g}_\circ-m\mathbf{A}_\circ-2m\boldsymbol{\omega}\times\dot{\mathbf{r}}'-m\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}') \qquad (۵.۴.۵)$$

که $\mathbf{F}$ نمایانگر هر نیروی وارد بر ذره غیر از نیروی گرانش است. اما با توجه به حالت ایستایی موردنظر در بالا، ترکیب $m\mathbf{g}_\circ - m\mathbf{A}_\circ$ را $m\mathbf{g}$ می‌نامیم. بنابراین، می‌توانیم معادلهٔ حرکت را چنین بنویسیم:

$$m\ddot{\mathbf{r}}' = \mathbf{F} + m\mathbf{g} - ۲m\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}}' - m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') \qquad (۶.۴.۵)$$

حال حرکت پرتابه را در نظر می‌گیریم. اگر از مقاومت هوا چشم بپوشیم، در این صورت $\mathbf{F} = \circ$. به‌علاوه، جملهٔ $-m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}')$ در مقایسه با جمله‌های دیگر خیلی کوچک است. از این‌رو، از آن نیز چشم می‌پوشیم. به‌این‌ترتیب، معادلهٔ حرکت تبدیل می‌شود به

$$m\ddot{\mathbf{r}}' = m\mathbf{g} - ۲m\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}}' \qquad (۷.۴.۵)$$

که جملهٔ آخری همان نیروی کوریولیس است.

برای حل معادلهٔ بالا، جهت محورهای مختصات $O'x'y'z'$ چنان اختیار می‌کنیم که محور z' قائم (در راستای شاقول) روبه بالا، محور x' به شرق و محور y' به شمال متوجه باشد (شکل ۳.۴.۵). با این انتخاب محورها، می‌رسیم به

$$\mathbf{g} = -\mathbf{k}'g \qquad (۸.۴.۵)$$

مؤلفه‌های $\boldsymbol{\omega}$ در دستگاه پریم‌دار عبارت‌اند از

$$\omega_{x'} = \circ \qquad \omega_{y'} = \omega\cos\lambda \qquad \omega_{z'} = \omega\sin\lambda \qquad (۹.۴.۵)$$

بنابراین، حاصلضرب برداری از این قرار بیان می‌شود:

$$\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}}' = \begin{vmatrix} \mathbf{i}' & \mathbf{j}' & \mathbf{k}' \\ \omega_{x'} & \omega_{y'} & \omega_{z'} \\ \dot{x}' & \dot{y}' & \dot{z}' \end{vmatrix} \qquad (۱۰.۴.۵)$$

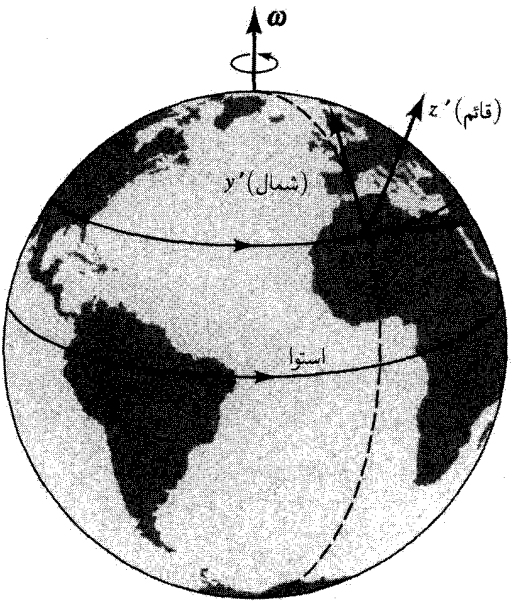
$$= \mathbf{i}'(\omega\dot{z}'\cos\lambda - \omega\dot{y}'\sin\lambda) + \mathbf{j}'(\omega\dot{x}'\sin\lambda) + \mathbf{k}'(-\omega\dot{x}'\cos\lambda)$$

با استفاده از عبارت بالا مربوط به $\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}}'$ در معادلهٔ (۱۰.۴.۵)، و حذف m از طرفین و مساوی قراردادن مؤلفه‌ها، معادلات دیفرانسیل مؤلفه‌ای حرکت را به‌صورت زیر به‌دست می‌آوریم:

$$\ddot{x}' = -۲\omega(\dot{z}'\cos\lambda - \dot{y}'\sin\lambda) \qquad (۱۱.۴.۵ \text{ الف})$$

$$\ddot{y}' = -۲\omega(\dot{x}'\sin\lambda) \qquad (۱۱.۴.۵ \text{ ب})$$

$$\ddot{z}' = -g + ۲\omega\dot{x}'\cos\lambda \qquad (۱۱.۴.۵ \text{ ج})$$



شکل ۳.۴.۵ محورهای مختصات برای تحلیل حرکت پرتابه.

این معادلات از نوع دستگاه معادلات مجزا نیستند، ولی می‌توانیم از آنها یک بار نسبت به زمان t انتگرال بگیریم و برسیم به

$$\dot{x}' = -2\omega(z'\cos\lambda - y'\sin\lambda) + \dot{x}'_0 \qquad \text{(الف ۱۲.۴.۵)}$$

$$\dot{y}' = -2\omega x'\sin\lambda + \dot{y}'_0 \qquad \text{(ب ۱۲.۴.۵)}$$

$$\dot{z}' = -gt + 2\omega x'\cos\lambda + \dot{z}'_0 \qquad \text{(ج ۱۲.۴.۵)}$$

ثابتهای انتگرال‌گیری $\dot{x}'_0$، $\dot{y}'_0$، و $\dot{z}'_0$ مؤلفه‌های سرعت اولیه‌اند. مقادیر $\dot{y}'$ و $\dot{z}'$ از معادله‌های (۱۲.۴.۵ ب و ج) را می‌توان در معادلهٔ (۱۱.۴.۵ الف) قرار داد. می‌رسیم به:

$$\ddot{x}' = 2\omega gt\cos\lambda - 2\omega(\dot{z}'_0\cos\lambda - \dot{y}'_0\sin\lambda) \qquad (۱۳.۴.۵)$$

که از جمله‌های شامل ω^2 چشم پوشیده‌ایم. حال دوباره انتگرال می‌گیریم، می‌رسیم به:

$$\dot{x}' = \omega gt^2\cos\lambda - 2\omega t(\dot{z}'_0\cos\lambda - \dot{y}_0\sin\lambda) + \dot{x}'_0 \qquad (۱۴.۴.۵)$$

و سرانجام، با انتگرال‌گیری سوم، x' را به‌صورت تابعی از t به‌دست می‌آوریم:

$$x'(t) = \frac{1}{3}\omega g t^3 \cos\lambda - \omega t^2(\dot{z}'_0 \cos\lambda - \dot{y}'_0 \sin\lambda) + \dot{x}'_0 t + x'_0 \quad \text{(الف ۱۵.۴.۵)}$$

عبارت بالا برحسب x' را می‌توان در معادلات (۱۲.۴.۵ ب و ج) نشاند. معادلات حاصل، پس از انتگرال‌گیری، به‌صورت زیر درمی‌آیند:

$$y'(t) = \dot{y}'_0 t - \omega \dot{x}'_0 t^2 \sin\lambda + y'_0 \quad \text{(ب ۱۵.۴.۵)}$$

$$z'(t) = -\frac{1}{2} g t^2 + \dot{z}'_0 t + \omega \dot{x}'_0 t^2 \cos\lambda + z'_0 \quad \text{(ج ۱۵.۴.۵)}$$

در اینجا نیز جمله‌های از مرتبهٔ ω^2 حذف شده‌اند.

در معادله‌های (۱۵.۴.۵ الف) تا (ج)، جملات شامل ω اثر چرخش زمین بر حرکت پرتابه را، در دستگاه مختصات متصل به زمین، نشان می‌دهند.

مثال ۱.۴.۵ جسم افتان

فرض کنید در ارتفاع h بر فراز سطح زمین جسمی از حال سکون به پایین رها شود. بنابراین، در لحظهٔ $t = 0$ داریم: $\dot{x}'_0 = \dot{y}'_0 = \dot{z}'_0 = 0$؛ و برای مکان اولیه قرار می‌دهیم: $x'_0 = y'_0 = 0$، $z'_0 = h$. در این صورت، معادلات (۱۵.۴.۵ الف تا ج) به معادلات زیر تبدیل می‌شوند

$$x'(t) = \frac{1}{3}\omega g t^3 \cos\lambda$$

$$y'(t) = 0$$

$$z'(t) = -\frac{1}{2} g t^2 + h$$

از این‌رو جسم در ضمن سقوط به شرق کشیده می‌شود. وقتی این جسم به زمین اصابت می‌کند ($z' = 0$)، می‌بینیم که $t^2 = 2h/g$، و کشش به سوی شرق از مقدار متناظر $x'(t)$، یعنی عبارت زیر، به‌دست می‌آید:

$$x'_h = \frac{1}{3}\omega \left(\frac{8h^3}{g}\right)^{\frac{1}{2}} \cos\lambda$$

در ارتفاع، مثلاً، ۱۰۰ متر در عرض جغرافیایی $45°$ این کشش عبارت است از

$$\frac{1}{3}(7{,}27\times10^{-5}\,\mathrm{s}^{-1})(8\times100^3\,\mathrm{m}^3/9{,}8\,\mathrm{m\cdot s}^{-2})^{\frac{1}{2}}\cos 45° = 1{,}55\times10^{-2}\,\mathrm{m} = 1{,}55\,\mathrm{cm}$$

چون زمین به سوی شرق می‌چرخد، ظاهراً بیان این نکته منطقی است که جسم باید به غرب کشیده شود؛ آیا می‌توانید در این باره توضیح دهید؟

مثال ۲.۴.۵ انحراف گلولهٔ تفنگ

پرتابه‌ای را در نظر بگیرید که با سرعت اولیهٔ زیاد v_0 در راستای تقریباً افقی شلیک می‌شود و فرض کنید این راستا به مشرق باشد. بنابراین $\dot{x}'_0 = v_0$ و $\dot{y}'_0 = \dot{z}'_0 = 0$. اگر مبدأ را در نقطه‌ای بگیریم که پرتابه شلیک می‌شود، در این صورت در لحظهٔ $t = 0$ داریم: $x'_0 = y'_0 = z'_0 = 0$. به این ترتیب، از معادلهٔ (۱۵.۴.۵ ب) خواهیم داشت:

$$y'(t) = -\omega v_0 t^2 \sin\lambda$$

از این معادله نتیجه می‌شود که پرتابه به جنوب یا به راست در نیمکرهٔ شمالی ($\lambda > 0$) و به چپ در نیمکرهٔ جنوبی ($\lambda < 0$)، تغییر جهت می‌دهد. اگر H برد افقی پرتابه باشد، می‌دانیم که $t = t_1 = H/v_0$ که t_1 مدت‌زمان پرواز است. بنابراین، انحراف عرضی با قراردادن $H \approx v_0 t_1$ در عبارت بالا برحسب $y'(t)$ به‌دست می‌آید. در نتیجه، رابطهٔ زیر مقدار انحراف را به‌دست می‌دهد:

$$\Delta \approx \frac{\omega H^2}{v_0} |\sin\lambda|$$

عبارت بالا برای هر جهتی که پرتابه هدف‌گیری شود، یکسان است، به شرطی که مسیر پرتابه مسطح باشد. این نتیجه پیامد این نکته است که بزرگی مؤلفهٔ افقی نیروی کوریولیس وارد بر جسمی که موازی سطح زمین حرکت می‌کند، از جهت حرکت مستقل است (مسئلهٔ ۱۲.۵) چون انحراف با مجذور بردار افقی متناسب است، در تیراندازی بلند برد اهمیت چشمگیری پیدا می‌کند.

*۵.۵ حرکت پرتابه در استوانهٔ چرخان

در اینجا مثال نهایی مربوط به پرتابه‌ها در دستگاه مرجع چرخان را بیان می‌کنیم. این مثال تا حدی متضمن موضوع یاد شده است و در آن از روشهای عددی عملی استفاده می‌شود. امیدواریم ارائهٔ آن برای برقراری رابطهٔ بین هندسهٔ راستخط، مسیرهای بدون تأثیر نیرو که در یک دستگاه مرجع لخت دیده می‌شود، و هندسهٔ فضای خمیدهٔ حاصل، که در دستگاه مرجع نالخت دیده می‌شود، به شما درک بهتری بدهد. نیروهای لختی که در دستگاه نالخت ظاهر می‌شوند، مسیر خمیده‌ای پدید می‌آورند که از دیدگاه دستگاه لخت تنها می‌توان این مسیر را بر اساس ملاحظات هندسی محاسبه کرد. اگر قرار است قوانین حرکت نیوتون در دستگاه مرجع نالخت کماکان صادق باشد، آنچه گفته

شد، باید رخ دهد. چنین درکی، هرچند کاملاً واضح، با آنچه به‌نظر می‌رسد متفاوت است و نباید آن را کم‌اهمیت جلوه داد. سرانجام، درست این نوع درک بود که اینشتین را به فرمولبندی نظریهٔ عمومی نسبیتش هدایت کرد.

مثال ۱.۵.۵

در چند داستان علمی تخیلی برای همگان[۱]، سفینه‌های فضایی که می‌توانند کل جمعیت جهان را در خود جای دهند به شکل چنبره‌های بزرگ چرخان یا استوانه‌های بزرگ چرخان در نظر گرفته شده‌اند. استوانه‌ای به شعاع $R = ۱۰۰۰\,\mathrm{km}$، و برای منظور ما در اینجا، با طول نامحدود در نظر بگیرید. این استوانه با سرعت زاویه‌ای $\omega = ۰٫۱۸^\circ/\mathrm{s}$ حول محورش می‌چرخد. هر ۲۰۰۰ ثانیه یک دور را کامل می‌کند. این آهنگ چرخش به ظاهرشدن شتاب مرکزگریز برای اشیاء در درون سطح استوانه به میزان $\omega^۲R = ۱\mathrm{g}$ می‌انجامد. فرض کنید چند دسته جنگجو در داخل استوانه زندگی می‌کنند. آنها پرتابه‌هایی به سوی یکدیگر شلیک می‌کنند.

(الف) نشان دهید وقتی پرتابه‌ها با سرعت کم ($v \ll \omega R$) و در «عرضهای جغرافیایی» کم در نزدیکی نقاط (مثلاً $\Delta r' \leq R/۱۰$) شلیک می‌شوند، معادلات حرکت حاکم بر مسیرهای حاصل با معادلات حرکت پرتابه‌ای به همان میزان محدود به درونهٔ استوانه، یکسان‌اند. فرض کنید آنها پرتابه‌ها را به سوی یکدیگر شلیک می‌کنند.

(ب) معادلات کلی حرکت برای پرتابه‌ای با سرعت و برد نامحدود، با بهره‌گیری از مختصات استوانه‌ای چرخان همراه با استوانه، را بیابید.

(ج) مسیر h را برحسب ϕ' یک پرتابه بیابید که به‌طور قائم با سرعت $v' = \omega R$ در این دستگاه مرجع نالخت به بالا شلیک شده است. $h = R - r'$ عرض جغرافیایی پرتابه و ϕ' مکان زاویه‌ای آن در زاویهٔ سمتی نسبت به نقطهٔ پرتاب است. زاویهٔ Φ را که پرتابه نسبت به نقطهٔ پرتاب، فرود می‌آید محاسبه کنید. همچنین، ارتفاع بیشینه‌ای را محاسبه کنید که پرتابه به آن می‌رسد.

(د) سرانجام، h را برحسب ϕ' تنها بر مبنای اصول هندسی محاسبه کنید که یک ناظر لخت به‌کار می‌برد تا آنچه را پیشگویی کند که ناظر نالخت می‌بیند. نشان دهید که این نتیجه با نتیجهٔ بند (ج) سازگار است و از دیدگاه ناظر نالخت محاسبه شده است. به‌خصوص نشان دهید که Φ و H سازگارند.

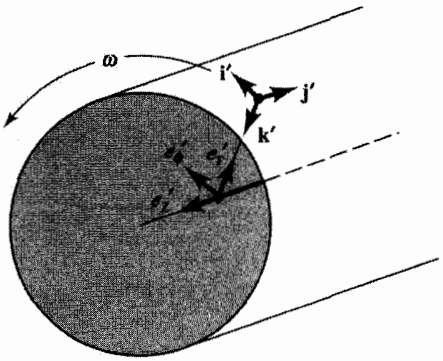
---

۱. مثلاً

Rendezvous with Rama and Rama II by Arthur C. Clarke (Bantam Books)

یا

Titan by John Varley (Berkeley Books).



شکل ۱.۵.۵ مختصات نموده‌شده به‌وسیلهٔ بردارهای یکهٔ $\mathbf{k}$، $\mathbf{j}'$، $\mathbf{i}'$ به سطح داخلی یک استوانهٔ چرخان. بردارهای یکه $\mathbf{e}_{r'}$، $\mathbf{e}_{\phi'}$، $\mathbf{e}_{z'}$ مختصات استوانه‌ای را نشان می‌دهند. هر مجموعه داخل استوانه محاط‌شده است و با آن می‌چرخد.

حل:

(الف) چون ابتدا مسیرهای کم‌ارتفاع و کوتاه را در نظر می‌گیریم، دستگاه مختصات دکارتی (x', y', z') را اختیار می‌کنیم که بردارهای یکهٔ آن را با $\mathbf{i}', \mathbf{j}', \mathbf{k}'$ نمایش می‌دهیم و به استوانه متصل‌اند و با آن می‌چرخند (شکل ۱.۵.۵).

مبدأ دستگاه مختصات بر نقطهٔ پرتاب واقع است. از آنجا که هیچ نیروی واقعی بعد از پرتاب بر پرتابه عمل نمی‌کند، جرم m در تمام جملات باقیمانده در معادلهٔ (۲.۳.۵) مشترک‌اند و می‌توان آن را حذف کرد و در این صورت معادله فقط برحسب شتابها نوشته می‌شود

$$-\mathbf{A}_0 - 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}' - \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') = \mathbf{a}' \qquad (۱.۵.۵)$$

شتاب عرضی صفر است، زیرا استوانه با آهنگ ثابت می‌چرخد. نخستین جملهٔ سمت چپ شتاب مبدأ مختصات دستگاه است، و از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$\mathbf{A}_0 = \omega^2 R\mathbf{k}' \qquad (۲.۵.۵)$$

جملهٔ دوم، شتاب کوریولیس و از این قرار است

$$\begin{aligned}\mathbf{a}_{\text{کوریولیس}} &= 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}' = 2(-\mathbf{j}'\omega) \times (\mathbf{i}'\dot{x}' + \mathbf{j}'\dot{y}' + \mathbf{k}'\dot{z}') \\ &= 2\omega\dot{x}'\mathbf{k}' - 2\omega\dot{z}'\mathbf{i}' \qquad (۳.۵.۵)\end{aligned}$$

سومین جمله، شتاب مرکزگریز است که به این طریق بیان می‌شود:

$$\begin{aligned}\mathbf{a}_{\text{مرکزگریز}} &= -\mathbf{j}'\omega \times [(-\mathbf{j}'\omega) \times \mathbf{r}'] \\ &= \mathbf{j}'\omega \times [(\mathbf{j}'\omega) \times (\mathbf{i}'x' + \mathbf{j}'y' + \mathbf{k}'z')] \\ &= \mathbf{j}'\omega \times (-\mathbf{k}'\omega x' + \mathbf{i}'\omega z') \\ &= -\mathbf{i}'\omega^2 x' - \mathbf{k}'\omega^2 z'\end{aligned} \tag{۴.۵.۵}$$

بعد از جمع‌آوری تمام جملات مناسب، مؤلفه‌های x'، y'، و z' شتاب برایند به‌صورت زیر درمی‌آیند:

$$\begin{aligned}\ddot{x}' &= 2\omega\dot{z}' + \omega^2 x' \\ \ddot{y}' &= 0 \\ \ddot{z}' &= -2\omega\dot{x}' + \omega^2 z' - \omega^2 R\end{aligned} \tag{۵.۵.۵}$$

اگر پرتابه‌ها هم از لحاظ سرعت و هم از لحاظ برد محدود شوند، به‌طریقی که

$$|\dot{x}'| \sim |\dot{z}'| \ll \omega R \qquad |x'| \sim |z'| \ll R \tag{۶.۵.۵}$$

و به‌خاطر می‌آوریم که آهنگ چرخش استوانه چنان تنظیم شده است که $\omega^2 R = g$، مؤلفه‌های شتاب در بالا تبدیل می‌شوند به

$$\ddot{x}' \approx 0 \qquad \ddot{y}' = 0 \qquad \ddot{z}' \approx -g \tag{۷.۵.۵}$$

که با معادلات حرکت پرتابه‌ای که سرعت و برد آن روی سطح زمین محدود شده باشد، معادل‌اند.

(ب) در این حالت محدودیتی برای سرعت و برد پرتابه وجود ندارد. حرکت را با به‌کاربردن مختصات استوانه‌ای (r', ϕ', z') متصل به استوانه و چرخاندن با آن، مطابق شکل ۱.۵.۵، توصیف می‌کنیم؛ r' مکان شعاعی پرتابه را نشان می‌دهد که از محور مرکزی استوانه اندازه‌گیری می‌شود و ϕ' مکان سمتی آن را نشان می‌دهد و با بردار شعاعی که از سمت خارج به نقطهٔ پرتاب متوجه است، سنجیده می‌شود؛ z' مکان آن را در طول استوانه ($z' = 0$ مطابق با مکان z' نقطهٔ پرتاب) نمایش می‌دهد. به‌طور کلی، مکان، سرعت، و شتاب پرتابه در مختصات استوانه‌ای با معادلات (۱.۱۲.۱) تا (۳.۱۲.۱) بیان می‌شوند. می‌توانیم این روابط را برای ارزیابی تمام جملات شتاب در معادلهٔ (۱.۵.۵) به‌کار بریم. جملهٔ $\mathbf{A}_0$ صفر است، زیرا مرکز دستگاه مختصات چرخان بر

محور چرخش قرار دارد. شتاب کوریولیس عبارت است از

$$\begin{aligned} ۲\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}' &= ۲\omega \boldsymbol{e}_{z'} \times (\dot{r}' \boldsymbol{e}_{r'} + r' \dot{\phi}' \boldsymbol{e}_{\phi'} + \dot{z}' \boldsymbol{e}_{z'}) \\ &= ۲\omega \dot{r}' (\boldsymbol{e}_{z'} \times \boldsymbol{e}_{r'}) + ۲\omega r' \dot{\phi}' (\boldsymbol{e}_{z'} \times \boldsymbol{e}_{\phi'}) \\ &= ۲\omega \dot{r}' \boldsymbol{e}_{\phi'} - ۲\omega r' \dot{\phi}' \boldsymbol{e}_{r'} \end{aligned} \tag{۸.۵.۵}$$

و شتاب مرکزگریز عبارت است از

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') &= \omega^{۲} \boldsymbol{e}_{z'} \times [\boldsymbol{e}_{z'} \times (r' \boldsymbol{e}_{r'} + z' \boldsymbol{e}_{z'})] \\ &= \omega^{۲} \boldsymbol{e}_{z'} \times r' \boldsymbol{e}_{\phi'} \\ &= -\omega^{۲} r' \mathbf{e}^{r'} \end{aligned} \tag{۹.۵.۵}$$

حال می‌توانیم معادلهٔ (۱.۵.۵) را با گردآوری تمام مؤلفه‌های مربوطه قبلی و مساوی قراردادن آنها با مؤلفه‌های موجود در معادلهٔ (۳.۱۲.۱)، دوباره برحسب مؤلفه‌ها بنویسیم

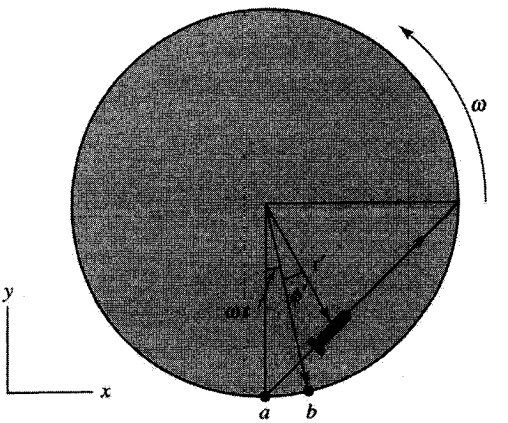
$$\begin{aligned} \ddot{r}' - r' \dot{\phi}'^{۲} &= ۲\omega r' \dot{\phi}' + \omega^{۲} r' \\ ۲\dot{r}' \dot{\phi}' + r' \ddot{\phi}' &= -۲\omega \dot{r}' \\ \ddot{z}' &= ۰ \end{aligned} \tag{۱۰.۵.۵}$$

در مطالبی که در زیر می‌آیند، از معادلهٔ z' حرکت چشم می‌پوشیم، زیرا شامل جملات شتاب ناصفر است و صرفاً «رانش» را در طول محور استوانه برای هر مسیری می‌دهد که در صفحهٔ $r'\phi'$ دیده می‌شود. سرانجام، معادلات شعاعی و سمتی را چنان می‌نویسیم که بستگی شتاب به سرعتها و مکانها را آسانتر بتوانیم ببینیم:

$$\ddot{r}' = ۲\omega r' \dot{\phi}' + (\omega^{۲} + \dot{\phi}'^{۲}) r' \tag{۱۱.۵.۵ الف}$$

$$\ddot{\phi}' = -\frac{۲\dot{r}'}{r'} (\omega + \dot{\phi}') \tag{۱۱.۵.۵ ب}$$

(ج) قبل از حل این معادلات حرکت برای پرتابه، که (از دیدگاه ناظر ساکن در استوانه) به‌طور قائم به سمت بالا شلیک می‌شود، وضعیت را از دیدگاه ناظر لخت که خارج از استوانهٔ چرخان قرار دارد، بررسی می‌کنیم. سرعت چرخشی استوانه ωR است. اگر پرتابه از دیدگاه ناظر نالخت با سرعت ωR به‌طور قائم به سمت بالا شلیک شود، ناظر لخت می‌بیند که پرتابه با سرعت $v = \sqrt{۲}\omega R$ در زاویهٔ ۴۵° نسبت به راستای قائم پرتاب شده است. به‌علاوه، از دید این ناظر، هیچ



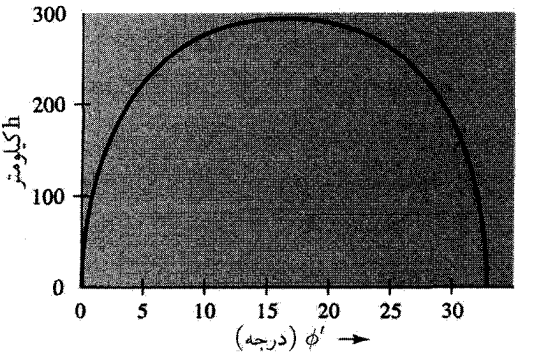
شکل ۲.۵.۵ مسیر پرتابه‌ای که در داخل استوانهٔ چرخان، تحت زاویهٔ ۴۵° نسبت به راستای قائم از دیدگاه ناظر لخت پرتاب شده است.

نیروی واقعی‌ای بر پرتابه وارد نمی‌آید. به‌نظر می‌رسد که این مسیر در یک خط راست طی می‌شود. مسیر پرواز، وتر قوس ربع محیط دایره است. این وضعیت را در شکل ۲.۵.۵ مشاهده می‌کنید.

مطابق شکل ۲.۵.۵، در مدت‌زمانی که پرتابه به‌نقطه‌ای در مسیرش می‌رسد که با بردار $\mathbf{r}'$ نشان داده شده است، استوانه چنان چرخیده که نقطهٔ پرتاب a به مکانی که با b مشخص می‌شود، حرکت کرده است. از این‌رو، ناظر لخت نتیجه می‌گیرد که ناظر نالخت فکر می‌کند پرتابه به اندازهٔ زاویهٔ ϕ' حرکت کرده و به عرض جغرافیایی $R - r'$ رسیده است. وقتی پرتابه به زمین برمی‌گردد، ناظر نالخت پی‌می‌برد که پرتابه به اندازهٔ زاویهٔ $\Phi = \pi/۲ - \omega T$ حرکت کرده، که T زمان کل پرواز است. اما $T = L/v = \sqrt{۲}R/(\sqrt{۲}\omega R) = ۱/\omega$ یا $\omega T = ۱\text{rad}$. بنابراین، زاویهٔ انحراف ظاهرشده باید $\Phi = \pi/۲ - ۱$ یا حدود ۳۲٫۷° باشد. ارتفاع بیشینه‌ای که پرتابه به آن می‌رسد، در وسط مسیرش رخ می‌دهد. وقتی $\omega t + \phi' = \pi/۴\text{rad}$، در این نقطه $r' = R/\sqrt{۲}$ یا $H = R - R/\sqrt{۲} = ۲۹۰\text{km}$. دست‌کم، این کمیت همان است که ناظر لخت باور دارد که ناظر نالخت می‌بیند؛ حال ببینیم ناظر نالخت بر طبق قوانین نیوتون، اتفاقی را مشاهده می‌کند.

برای حل عددی معادلات دیفرانسیل حرکت (معادلات ۱۱.۵.۵ الف و ب)، مانند مثال ۲.۳.۴ از متماتیکا بهره می‌گیریم و نتیجه در شکل ۳.۵.۵ نشان داده می‌شود.

ملاحظه می‌شود که پرتابه از دیدگاه ناظر چرخان به‌طور قائم به سمت بالا پرتاب می‌شود. اما وجود نیروهای لختی مرکزگریز و کوریولیس باعث می‌شود که پرتابه به عقب به سمت سطح و



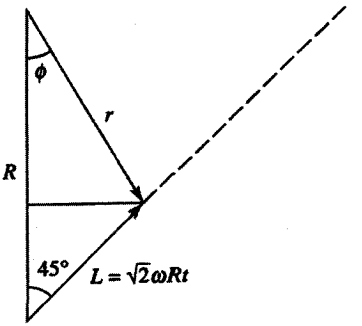
شکل ۳.۵.۵ مسیر پرتابه‌ای که به‌طور قائم به بالا (به سمت محور مرکز) از سطح داخلی یک استوانهٔ بزرگ چرخان با سرعت زاویه‌ای ω شلیک می‌شود، به‌طوری که $\omega^2 R = g$.

به طرف شرق در جهت چرخش زاویه‌ای استوانه شتاب گیرد. توجه کنید که ناظر چرخان نتیجه می‌گیرد پرتابه‌ای که به‌طور قائم پرتاب شده است، به‌وسیلهٔ نیروی کوریولیس از پهلو هل داده می‌شود و $۳۲٫۷^\circ$ در سوی شرق نقطهٔ پرتاب فرود می‌آید. نیروی مرکزگریز ارتفاع آن را به مقدار بیشینهٔ $۲۹۰\,\mathrm{km}$ محدود کرده است. هر یک از این مقادیر با نتیجهٔ ناظر نالخت کاملاً سازگار است. واضح است که هر نظام هوشمندی که از معادلات دینامیکی حرکت آگاه باشد، به مسیرهای پرتابه در این دنیای استوانه‌ای تسلط دارد؛ و می‌تواند تمام موشکهایش را به‌طور قائم به سمت بالا پرتاب کند و هر نقطه در اطراف استوانه را فقط با تنظیم سرعتهای پرتاب، مورد اصابت قرار دهد. (مکانهایی که در بالا یا پایین محور استوانه قرار گرفته‌اند می‌توانند با کج‌کردن پرتاب‌گر در آن جهت و شلیک‌کردن پرتابه در سرعت اولیهٔ لازم و پس از آن سرعت محوری ثابت $\dot{z}_0$ مورد اصابت قرار گیرد.)

(د) ناظر لخت مسیری را به طریق زیر محاسبه می‌کند که ناظر نالخت دیده است: نخست، به شکل ۴.۵.۵ نگاه کنید. این شکل بزرگ‌شده‌ای از نمایش هندسی شکل ۲.۵.۵ است.

ϕ، مطابق اندازه‌گیری در چارچوب ثابت و لخت، زاویهٔ سمتی پرتابه است. زاویهٔ سمتی در چارچوب نالخت عبارت است از $\phi' = \phi - \omega t$ (شکل ۲.۵.۵). آن‌طور که از هندسهٔ شکل ۴.۴.۵ می‌توان دید، می‌توانیم بستگی زمانی تابع ϕ را محاسبه کنیم:

$$\tan\phi(t) = \frac{L(t)\sin ۴۵^\circ}{R - L(t)\cos ۴۵^\circ} = \frac{L(t)}{\sqrt{۲}R - L(t)}$$
$$= \frac{\sqrt{۲}\omega R t}{\sqrt{۲}R - \sqrt{۲}\omega R t} = \frac{\omega t}{۱ - \omega t} \qquad (۱۲.۵.۵)$$



شکل ۴.۵.۵ شکل هندسی به‌کاررفته در محاسبهٔ مسیری که به‌وسیلهٔ ناظر چرخان بنابر دیدگاه ناظر لخت دیده می‌شود.

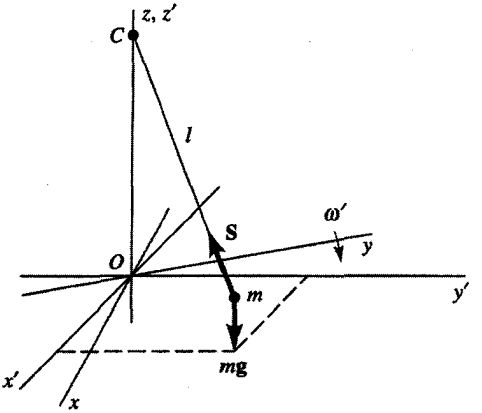
به‌نظر می‌رسد پرتابه به‌اندازهٔ زاویهٔ ϕ' به شرق کج شده است؛ زاویهٔ ϕ' به‌صورت تابعی از زمان به‌صورت زیر بیان می‌شود:

$$\phi'(t) = \phi(t) - \omega t = \tan^{-1}\left(\frac{\omega t}{1 - \omega t}\right) - \omega t \qquad (۱۳.۵.۵)$$

بستگی r' به زمان از این قرار بیان می‌شود:

$$\begin{aligned} r'^2(t) &= [L(t)\sin 45^\circ]^2 + [R - L(t)\cos 45^\circ]^2 \\ &= L(t)^2 + R^2 - \sqrt{2}L(t)R \\ &= 2(\omega R t)^2 + R^2 - \sqrt{2}(\sqrt{2}\omega R t)R \qquad (۱۴.۵.۵) \\ &= R^2[1 - 2\omega t(1 - \omega t)] \\ \therefore r'(t) &= R[1 - 2\omega t(1 - \omega t)]^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

دو معادلهٔ پارامتری آخری $r'(t)$ و $\phi'(t)$ مسیری را توصیف می‌کنند که ناظر لخت پیشگویی می‌کند ناظر نالخت باید آن را ببیند. اگر در ضمن سپری‌شدن زمان $h = R - r'$ را برحسب ϕ' ترسیم کنیم، دقیقاً به همان مسیر نشان داده‌شده در شکل ۳.۵.۵ می‌رسیم. این همان مسیری است که ناظر نالختی محاسبه کرده که معادلات دینامیکی حرکت نیوتون را در دستگاه مرجع چرخان به‌کار برده است، بنابراین مشاهده می‌کنیم که بین هندسهٔ خمیدهٔ خطوط راست که از دیدگاه دستگاه مرجع شتابدار دیده‌شده، و برقراری نیروهای لختی که آن هندسه را در دستگاه شتابدار ایجاد می‌کنند، هم‌ارزی برقرار است.



شکل ۱.۶.۵ آونگ فوکو.

۶.۵ آونگ فوکو

در این بخش اثر چرخش زمین بر حرکت آونگی را مطالعه می‌کنیم که آزادانه در هر جهت تاب می‌خورد و از این‌رو به آن آونگ کروی می‌گویند. مطابق شکل ۱.۶.۵، نیروی وارد بر گلولهٔ آونگ عبارت است از جمع برداری وزن $m\mathbf{g}$ و کشش نخ، $\mathbf{S}$. در این صورت معادلهٔ دیفرانسیل حرکت عبارت است از

$$m\ddot{\mathbf{r}}' = m\mathbf{g} + \mathbf{S} - 2m\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}}' \qquad (۱.۶.۵)$$

در اینجا، از جملهٔ $-m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}')$ چشم پوشیده‌ایم که در این مورد تا حد صفر کوچک است. قبلاً، مؤلفه‌های ضرب برداری $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'$ را به‌دست آورده‌ایم (معادلهٔ ۱۰.۴.۵). حال با توجه به اینکه کسینوسهای هادی بردار $\mathbf{S}$، به‌ترتیب، عبارت‌اند از $-x'/l$، $-y'/l$، و $-(l-z')/l$، می‌توانیم مؤلفه‌های x' و y' کشش نخ را به‌آسانی پیدا کنیم. در نتیجه، $S_x = -x'S/l$، $S_y = -y'S/l$، و به این ترتیب، مؤلفه‌های مربوط به معادلهٔ دیفرانسیل حرکت (۱.۶.۵) عبارت‌اند از

$$m\ddot{x}' = \frac{-x'}{l}S - 2m\omega(\dot{z}'\cos\lambda - \dot{y}'\sin\lambda) \qquad (۲.۶.۵ \text{ الف})$$

$$m\ddot{y}' = \frac{-y'}{l}S - 2m\omega\dot{x}'\sin\lambda \qquad (۲.۶.۵ \text{ ب})$$

حالت نوسان کم‌دامنه را در نظر می‌گیریم، به‌طوری‌که بزرگی کشش S تقریباً ثابت و مساوی mg شود. همچنین، در معادلهٔ (۲.۶.۵ الف) در مقایسه با $\ddot{y}'$ از $\ddot{z}$ چشم می‌پوشیم. بنابراین، معادلات

دیفرانسیل بر حرکت حاکم و از این قرارند:

$$\ddot{x}' = -\frac{g}{l}x' + ۲\omega'\dot{y}' \qquad (۳.۶.۵ \text{ الف})$$

$$\ddot{y}' = -\frac{g}{l}y' - ۲\omega'\dot{x}' \qquad (۳.۶.۵ \text{ ب})$$

در اینجا کمیت $\omega' = \omega \sin\lambda = \omega_z$ را وارد کرده‌ایم، که مؤلفهٔ قائم محلی سرعت زاویه‌ای زمین است.

در اینجا نیز با مجموعه‌ای از معادلات دیفرانسیل حرکت مواجه‌ایم که به شکل مجزا نیستند. یکی از روشهای حل سرانگشتی این معادلات از آن قرار است که تبدیلی به دستگاه مختصات جدید $Oxyz$ صورت گیرد که این دستگاه جدید نسبت به دستگاه پریم‌دار چنان بچرخد که مؤلفهٔ قائم چرخش زمین حذف شود؛ یعنی مطابق شکل ۳.۴.۵، سرعت زاویه‌ای چرخش آن حول محور قائم نسبت به دستگاه پریم‌دار $-\omega'$ باشد. بنابراین، دستگاه بدون پریم چرخشی حول محور قائم ندارد. معادلات تبدیل عبارت‌اند از

$$x' = x\cos\omega' t + y\sin\omega' t \qquad (۴.۶.۵ \text{ الف})$$

$$y' = -x\sin\omega' t + y\cos\omega' t \qquad (۴.۶.۵ \text{ ب})$$

بر اثر نشاندن این روابط به‌جای کمّیات پریم‌دار و مشتقات آنها از معادلات قبلی در (معادلات ۳.۶.۵ الف) و (ب)، و بعد از جمع‌آوری جملات و حذف جملات شامل $\omega'^{۲}$، می‌رسیم به

$$\left(\ddot{x} + \frac{g}{l}x\right)\cos\omega' t + \left(\ddot{y} + \frac{g}{l}y\right)\sin\omega' t = ۰ \qquad (۵.۶.۵)$$

و به معادلهٔ دیگری همانند این معادله می‌رسیم که فقط جای سینوس و کسینوس در آن عوض شده باشد، بدیهی است که معادلهٔ بالا در صورتی برقرار است که ضرایب جمله‌های سینوسی و کسینوسی هر دو صفر شوند؛ یعنی:

$$\ddot{x} + \frac{g}{l}x = ۰ \qquad (۶.۶.۵ \text{ الف})$$

$$\ddot{y} + \frac{g}{l}y = ۰ \qquad (۶.۶.۵ \text{ ب})$$

اینها، معادلات دیفرانسیل نوسانگر هماهنگ دوبعدی‌اند که قبلاً در بخش ۴.۴ بحث شد. به‌این ترتیب، مسیر، که بر صفحهٔ xy تصویر شده است، یک بیضی با سمتگیری ثابت را در دستگاه بدون

پریم تشکیل می‌دهد. در دستگاه پریم‌دار مسیر عبارت است از یک بیضی که حرکت تقدیمی دائمی با سرعت زاویه‌ای $\omega' = \omega \sin\lambda$ انجام می‌دهد.

علاوه‌براین نوع حرکت تقدیمی، حرکت تقدیمی طبیعی آونگ کروی دیگر نیز وجود دارد که معمولاً از حرکت تقدیمی مورد بحث خیلی بزرگتر است. اما، اگر آونگ با دقت شروع به حرکت کند، به این ترتیب که آونگ را با نخی به یک طرف بکشند و با سوزاندن نخ آن را از حال سکون به حرکت درآورند، حرکت تقدیمی طبیعی کوچک می‌شود که چشم‌پوشیدنی[1] است.

سوی حرکت تقدیمی چرخشی در نیمکرهٔ شمالی ساعتگرد و در نیمکرهٔ جنوبی پادساعتگرد است. دورهٔ تناوب آن عبارت است از $2\pi/\omega' = 2\pi/(\omega \sin\lambda) = (24/\sin\lambda)$ h بنابراین، در عرض جغرافیایی $45°$، زمان تناوب عبارت خواهد بود از $33{,}94\text{h} = (24/0{,}707)\text{h}$. این نتیجه را نخستین بار در سال ۱۸۵۱، فیزیکدان فرانسوی، ژان فوکو، در پاریس به نمایش گذاشت. آونگ فوکو در اکثر افلاک‌نماهای جهان به یک نمایش سنتی تبدیل شده است.

مسائل

۱.۵ شخصی به وزن ۱۲۰ پوند درحالی‌که در یک آسانسور سوار است، روی یک ترازوی فنری مخصوص حمام ایستاده است. اگر (الف) شتاب بالاسوی آسانسور و (ب) شتاب پایین‌سوی آن $g/4$ باشد، ترازو در هر حالت چه وزنی را نشان می‌دهد؟

۲.۵ سرعت چرخش یک دستگاه مرکزگریز سریع (اولتراسانتریفوژ) ۵۰۰ دور در هر ثانیه است. (الف) نیروی مرکزگریز وارد بر ذره‌ای یک میکروگرمی واقع در اتاقک نمونه را در حالتی بیابید که این ذره در فاصلهٔ 5cm از محور چرخش قرار داشته باشد. (ب) نتیجه را به‌صورت نسبت نیروی مرکزگریز به وزن ذره بیان کنید.

۳.۵ راستای شاقولی درحالی‌که در داخل یک قطار واقع است و با آن حرکت می‌کند، ثابت نگه‌داشته می‌شود. اگر جرم شاقول m باشد، هرگاه قطار با شتاب ثابت $g/10$ به جلو حرکت کند، کشش ریسمان و انحراف از راستای قائم محل را به‌دست آورید. (از هر نوع اثر چرخشی زمین چشم بپوشید.)

۴.۵ در مسئلهٔ بالا اگر راستای شاقول ثابت نباشد بلکه مانند آونگ ساده نوسان کند، دورهٔ تناوب در دامنه‌های کوچک را به‌دست آورید.

۵.۵ کامیونی در سطح جاده در حال حرکت است. ناگهان رانندهٔ آن ترمز می‌کند که باعث می‌شود حرکت کامیون با شتاب $g/2$ کند شود. این عمل سبب می‌شود جعبه‌ای در عقب کامیون به جلو

۱. دربارهٔ حرکت تقدیمی طبیعی به‌اختصار در فصل دهم بحث خواهیم کرد.

بلغزد. اگر ضریب اصطکاک لغزشی بین جعبه و کف کامیون $\frac{1}{3}$ باشد، شتاب جعبه را (الف) نسبت به کامیون؛ و (ب) نسبت به جاده پیدا کنید.

۶.۵ مکان ذره‌ای در دستگاه مرجع لخت بی‌حرکتی با بردار زیر بیان می‌شود:

$$\mathbf{r} = \mathbf{i}(x_\circ + R\cos\Omega t) + \mathbf{j}R\sin\Omega t$$

که $x_\circ$، R، و Ω مقادیری ثابت‌اند.

(الف) نشان دهید که ذره بر محیط دایره‌ای با سرعت ثابت حرکت می‌کند.

(ب) دستگاه دو معادلهٔ دیفرانسیل مرتبهٔ اول حرکت را بیابید که بین مؤلفه‌های مکان x' و y' و مؤلفه‌های سرعت $\dot{x}'$ و $\dot{y}'$ ذره نسبت به دستگاه مختصاتی که با سرعت زاویه‌ای $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{k}\omega$ می‌چرخد، رابطه برقرار کند.

(ج) درنظر بگیرید که دستگاههای مرجع ثابت و چرخان در لحظهٔ $t = \circ$ برهم منطبق باشند و قرار دهید: $u' = x' + iy'$؛ به فرض آنکه $\Omega \neq -\omega$، $u'(t)$ را پیدا کنید. (گوشزد: $(i = \sqrt{-1})$.)

۷.۵ یک سیارک جدید که در مداری دایره‌ای به شعاع $4^{1/3}\,\mathrm{AU}$ خورشید را دور می‌زند، کشف شده است.[۱] دورهٔ تناوب حرکت دورانی آن دقیقاً دو سال است. فرض کنید که در $t = \circ$ آن سیارک در نزدیکترین فاصله‌اش تا زمین است.

(الف) مختصاتش $[x(t), y(t)]$ را، در دستگاه مرجعی متصل به زمین بیابید که محورهایش در جهت‌گیری نسبت به خورشید ثابت باقی مانده‌اند. فرض کنید محور x در $t = \circ$ به سمت سیارک متوجه است.

(ب) سرعت این سیارک را نسبت به زمین در $t = \circ$ محاسبه کنید.

(ج) مؤلفه‌های x و y شتاب سیارک را در این دستگاه مرجع بیابید. با دوبار انتگرال‌گرفتن از آنها نشان دهید که مکانهای حاصل به‌صورت تابعی از زمان با بند (الف) سازگارند.

(د) مسیر سیارک را، آن طورکه از دستگاه مرجع چرخان متصل به زمین برای دورهٔ تناوب مداری ۲ ساله‌اش دیده می‌شود، ترسیم کنید. (راهنمایی: ابزار نموداری ترسیم پارامتری متماتیکا را به‌کار برید).

۸.۵ حشره‌ای با سرعت ثابت در مسیری دایره‌ای به شعاع b بر صفحهٔ گرامافونی می‌خزد که با سرعت زاویه‌ای ثابت ω می‌چرخد. مسیر دایره‌ای با صفحه هم‌مرکز است. اگر جرم حشره m و ضریب اصطکاک ایستایی با سطح صفحهٔ گرامافون، قبل از اینکه حشره شروع به لغزیدن کند،

---

۱. شعاع زمین در مداری تقریباً دایره‌ای عبارت است از ۱ AU یا یک یکای نجومی. سیارهٔ کوچک و زمین هر دو در یک صفحهٔ مشترک حول خورشید در سوی پادساعتگرد، آن‌طورکه از ستارهٔ قطبی دیده می‌شود، می‌چرخند.

μ_s باشد، هرگاه این حشره (الف) در جهت چرخش، و (ب) در خلاف جهت چرخش حرکت کند سرعت چرخش آن نسبت به صفحه چقدر است؟

۹.۵ در مسئله‌ای که چرخ دوچرخه یک منحنی را دور می‌زند، مثال ۲.۲.۵، شتاب نسبت به زمین در جلوترین نقطهٔ چرخ چقدر است؟

۱۰.۵ اگر دانهٔ تسبیحی بر روی میلهٔ چرخان مثال ۳.۳.۵، ابتدا از حال سکون (نسبت به میله) در نقطهٔ وسط آن رها شود، محاسبه کنید: (الف) جابه‌جایی دانهٔ تسبیح در طول میله به‌صورت تابعی از زمان؛ (ب) زمان؛ و (ج) سرعت (نسبت به میله) وقتی دانهٔ تسبیح انتهای میله را ترک می‌کند.

۱۱.۵ در سال ۱۹۴۷، در نمکزارهای بن‌ویل واقع در ایالت یوتا (عرض جغرافیایی ۴۱ درجهٔ شمالی)، جان کب شرکت‌کنندهٔ انگلیسی در مسابقهٔ اتومبیل‌رانی با سرعت ۴۰۰ مایل (۶۰۰ کیلومتر) بر ساعت نفر اول شد. اگر با این سرعت در جهت شمال حرکت می‌کرده است، نسبت بزرگی نیروی کوریولیس وارد بر اتومبیل مسابقه به وزن اتومبیل را به‌دست آورید. جهت این نیروی کوریولیس چگونه است؟

۱۲.۵ ذره‌ای در یک صفحهٔ افقی روی سطح زمین حرکت می‌کند؛ نشان دهید که بزرگی مؤلفهٔ افقی نیروی کوریولیس از جهت حرکت این ذره مستقل است.

۱۳.۵ اگر دانهٔ ریگی از میلهٔ آسانسور ساختمان امپایر استیت ($h = ۳۸۱\text{m}$، عرض جغرافیایی ۴۱ درجهٔ شمالی) فروافتد، انحراف آن، ناشی از نیروی کوریولیس، چقدر است؟ فرض کنید مقاومت هوا وجود ندارد.

۱۴.۵ در استادیوم یانکی در نیویورک، یک بازیکن توپ بیسبال را به فاصلهٔ ۶۰٫۹۶ متر (۲۰۰ پا) در مسیری کاملاً مسطح پرتاب می‌کند. آیا مقدار انحراف ناشی از نیروی کوریولیس به‌تنهایی حائز اهمیت است؟ (زاویهٔ پرتاب را ۱۵° بگیرید). فرض کنید مقاومت هوا وجود ندارد.

۱۵.۵ نشان دهید مشتق سوم زمانی بردار مکان (مشتق زمانی شتاب) یک ذرهٔ متحرک در دستگاه مختصات چرخان برحسب مشتقات مناسب در دستگاه چرخان از این قرار است:

$$\dddot{\mathbf{r}} = \dddot{\mathbf{r}}' + ۳\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \dot{\mathbf{r}}' + ۳\boldsymbol{\omega} \times \ddot{\mathbf{r}}' + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}' + ۳\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}}')$$
$$+ \dot{\boldsymbol{\omega}} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') + ۲\boldsymbol{\omega} \times (\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}') - \omega^۲(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}')$$

۱۶.۵ گلوله‌ای با سرعت اولیهٔ $v'_۰$ مستقیماً به بالا شلیک می‌شود. با فرض اینکه g ثابت باشد و از مقامت هوا چشم‌پوشی شود، نشان دهید که این گلوله هنگام اصابت به زمین در غرب نقطهٔ اولیهٔ حرکت روبه بالای خود از آن به میزان $۴\omega v'^۳_۰ \cos\lambda/۳g^۲$ فاصله خواهد داشت، درحالی که λ عرض جغرافیایی و ω سرعت زاویه‌ای زمین است.

۱۷.۵ اگر گلولهٔ مسئلهٔ ۱۶.۵ به سمت شرق با زاویهٔ بلندی α از نقطه‌ای روی سطح زمین و به عرض جغرافیایی $\lambda+$ شلیک شود، نشان دهید گلوله با انحرافی جانبی که با $۴\omega v_0'^{۳} \sin\lambda \sin^{۲}\alpha \cos\alpha/g^{۲}$ داده می‌شود، به زمین اصابت خواهد کرد.

۱۸.۵ ماهواره‌ای در مداری دایره‌ای به شعاع R زمین را دور می‌زند. سرعت زاویه‌ای ماهواره بنابر رابطهٔ $\omega^{۲} = k/R^{۳}$ با عکس مجذور فاصله‌اش از زمین تغییر می‌کند که k مقداری ثابت است. ناظران داخل ماهواره مجاور خود شیئی متحرک می‌بینند که از قرار معلوم در مداری حول زمین حرکت می‌کند. آنها برای توصیف حرکت شیء دستگاه مرجع متصل به ماهواره را به‌کار می‌برند که محور x آن به‌سوی دورشدن از زمین متوجه است و محور y در جهتی قرار دارد که ماهواره حرکت می‌کند. نشان دهید که معادلات حرکت شیء مجاور نسبت به دستگاه مرجع ناظران به‌تقریب به این طریق بیان می‌شود:

$$\ddot{x} - ۲\omega\dot{y} - ۳\omega^{۲}x = ۰$$

$$\ddot{y} + ۲\omega\dot{x} = ۰$$

(برای نیروی گرانشی که زمین بر شیئی در فاصلهٔ r از آن وارد می‌آورد، مثال ۲.۳.۲ را ببینید و از اثر گرانشی ماهواره بر شیء چشم بپوشید).

۱۹.۵ نیروی وارد بر ذرهٔ باردار در میدان الکتریکی $\mathbf{E}$ و میدان مغناطیسی $\mathbf{B}$ در دستگاه لخت عبارت است از

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

که q بار و $\mathbf{v}$ سرعت ذره در دستگاه لخت است. نشان دهید که معادلهٔ دیفرانسیل حرکت نسبت به دستگاه مختصات چرخان با سرعت زاویه‌ای $\boldsymbol{\omega} = -(q/۲m)\mathbf{B}$، به‌ازای $\mathbf{B}$ کوچک، عبارت است از

$$m\ddot{\mathbf{r}}' = q\mathbf{E}$$

یعنی، جملهٔ شامل $\mathbf{B}$ حذف می‌شود. این نتیجه را قضیهٔ لارمور گویند.

۲۰.۵ مراحل محاسباتی را که برای معادلهٔ دیفرانسیل حرکت آونگ فوکو به معادلهٔ (۵.۶.۵) منجر می‌شوند، کامل کنید.

۲۱.۵ عرض جغرافیایی مکزیکوسیتی تقریباً ۱۹ درجهٔ شمالی است. زمان تناوب حرکت تقدیمی آونگ فوکو، در آنجا چقدر است؟

۲۲.۵ مثال ۲.۲.۵ را با بهره‌گیری از دستگاه مختصاتی که به چرخ دوچرخه متصل شده و با آن می‌چرخد، مانند وضعیت مثال ۱.۲.۵ حل کنید.

مسائل کامپیوتری

ک۱.۵ (الف) بندهای (ج) و (د) مثال ۱.۵.۵ را حل کنید. مسیر h را برحسب ϕ'، آن‌طورکه از دیدگاه هر ناظر (لخت و نالخت) دیده می‌شود، مانند آنچه در متن درس توضیح داده شده است، ترسیم کنید. نموداری که رسم می‌کنید، باید با نمودارهای شکل ۱.۵.۵ یکسان باشد. (ب) بند (الف) را برای وقتی که پرتابه با سرعت اولیه، $\mathbf{v}' = (2\omega R/\pi)\mathbf{e}_{r'} - \omega R\mathbf{e}_{\phi'}$ [شکل ۱.۵.۵ را ملاحظه کنید] شلیک شود، تکرار کنید. در این حالت، بیشینهٔ ارتفاع H که پرتابه به آن می‌رسد و زاویهٔ Φ که نسبت به نقطهٔ پرتاب فرود می‌آید، چقدرند؟

ک۲.۵ جرم کوچکی آزادانه روی سطح افقی بدون اصطکاک حرکت می‌کند. این سطح افقی را دایره‌ای به شعاع $R = 1\text{m}$ در نظر بگیرید که حول محور قائم با سرعت زاویه‌ای ثابت $\omega = 1\text{rad/s}$ در جهت پادساعتگرد می‌چرخد. مختصات این جرم را با دستگاه مختصات راستگوشهٔ (x, y) که مرکز آن روی محور دستگاه چرخان قرار دارد و با آن می‌چرخد، توصیف کنید. (الف) معادلات حرکت این جرم را برحسب دستگاه مختصات چرخان (x, y) بیابید. (ب) اگر مکان اولیهٔ جرم $(-R, 0)$ باشد، مؤلفهٔ y سرعت اولیهٔ لازم (نسبت به دستگاه چرخان) چقدر باشد هرگاه از دیدگاه ناظر لخت ثابت، جرم در طول قطری از سطح دایره‌ای پرتاب شود؟ (ج) رابطه‌ای برحسب اعداد صحیح $n = 1, 2, 3, \cdots$ برای مؤلفهٔ x سرعتهایی بیابید که باعث می‌شود جرم روی قطری از سطح دایره‌ای در دستگاه مرجع لخت ثابت حرکت کند و در همان نقطهٔ $(-R, 0)$ که از آن در دستگاه چرخان پرتاب شده بود، فرود آید. ($n = 1$ را برای نمایش‌دادن سریعترین سرعت اولیه بگیرید). (د) این مسیرها از دیدگاه دستگاه مرجع چرخان برای پنج تا از بزرگترین مؤلفه‌های سرعتهای اولیه ($n = 1000$) ترسیم کنید. (ه) مسیر حاصل را، آن‌طورکه از دستگاه مرجع چرخان دیده می‌شود، هنگامی توصیف کنید که مؤلفهٔ x سرعت به صفر نزدیک شود ($n \to \infty$).

ک۳.۵ معادلات حرکت را برای سیارک مسئلهٔ ۷.۵، آن‌طورکه از دستگاه مرجع زمین دیده می‌شود و در آن مسئله توصیف شده است، بیابید. آنها را به‌طور عددی با استفاده از متماتیکا حل کنید. برای شرایط شروع، فرض کنید سیارک در جهت مخالف نسبت به زمین در $t = 0$ است و سرعتهای اولیهٔ مناسب برای مدارات دایره‌ای حول خورشید را به‌کار ببرید تا سرعت اولیهٔ سیارک را نسبت به زمین محاسبه کنید. مسیر ماهواره را برای یک زمان تناوب مداری ترسیم کنید.

۶

گرانش و نیروهای مرکزی

«پدیده‌های آسمانها و دریایمان را از طریق قدرت گرانش توضیح داده‌ایم، اما هنوز علت این قدرت را مشخص نکرده‌ایم . . .نتوانسته‌ام علت آن خواص گرانش را از طریق پدیده‌ها کشف کنم و هیچ فرضیه‌ای نمی‌سازم.[1]»

«گرانش باید با یک خاصیت مرموز غیبی و جزمی یا معلول معجزه باشد.[2]»

۱.۶ مقدمه

باستانیان در طی سال پنج سیارهٔ مرئی را مشاهده می‌کردند که در صورتهای فلکی منطقةالبروج آهسته و نسبتاً منظم حرکت می‌کردند. اما، گهگاه، در مواقعی که با قابلیت پیشگویی حیرت‌انگیزی

1. Sir Isaac Newton, *The Principia*, 1687; Florian Cajori's translation, Berkeley, Univ. of Calif. Press, 1966.

2. Gottfried Wilhelm Leibniz; See *Let Newton Be!*, by J. Fauvel, R. Flood, M. Shorthand, and R. Wilson, Oxford Univ. Press, 1988.

همراه می‌شد، این سیارات به‌طور اسرارآمیزی در پیشروی کند خود به جلو مکث و ناگهان در ظرف چند هفته جهت حرکتشان را معکوس می‌کردند و سپس دوباره حرکت پایدارشان را در آسمان از سر می‌گرفتند. این پدیدهٔ غیرعادی ظاهری رفتار سیاره‌ای را حرکت رجعی می‌گویند. برای برگرفتن نقاب از منشأ این حرکت در طی قرنها انرژی ذهنی و فکری اخترشناسان و منجمان مصرف شد. در واقع؛ معجونهای فوق‌العاده پیچیدهٔ تراویده از اذهان اسیر در جزئیات فلسفی و مفاهیم مبهم فیزیک، مانند دایره‌ها و فلکهای تدویر بطلمیوسی (۱۲۵ م) وکسان دیگری با ذهنیتهایی هم‌مسلک او، در حکم مدلهایی از واقعیت فیزیکی در مدت‌زمانی بیشتر از دو هزار سال به خدمت گرفته شدند. سرانجام، نیکولای کوپرنیک (۱۵۴۳ـ۱۴۷۳) نشان داد که حرکت رجعی چیزی نبود مگر پیامد سادهٔ حرکت نسبی بین زمین و سایر سیارات که در مدار خورشید مرکزی حرکت می‌کنند. با همهٔ این احوال؛ حتی کوپرنیک نتوانست خودش را از شر فلکهای تدویر بطلمیوسی رها کند، و در قید جزمیات حرکت دایره‌ای یکنواخت و استلزام و اجبار رسیدن به تطابق بین بی‌نظمیهای مشاهده‌شده و پیش‌بینی‌شدهٔ حرکت سیاره‌ای باقی ماند.

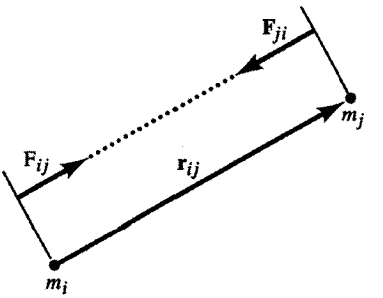
این وضع ادامه داشت تا اینکه یوهان کپلر (۱۶۳۰ـ۱۵۷۱) استعداد خود را در زمینهٔ حل مسئلهٔ مدار مریخ متمرکز کرد؛ تلاشی که به مدت بیست سال عمیقاً توان خود را صرف آن کرد و برای نخستین بار در تاریخ باعث شد که دانشمندان نظری اجمالی بر ماهیت ریاضی دقیق حرکتهای سماوی بیفکنند. کپلر با رنج زیاد مجموعهٔ مختصری از سه قانون ریاضی بنا نهاد که مدار سیارات به دور خورشید را دقیقاً توصیف کرد. اندک زمانی نیوتون این سه قانون حرکت سیاره‌ای را پیامد سادهٔ کنش متقابل قانون گرانش عمومی با سه قانون بنیادی مکانیک تلقی کرد که خودش آنها را عمدتاً از تحقیقات و کاوشهای گالیله در خصوص حرکت اشیاء زمین، به‌دست آمده بود. به این ترتیب، نیوتون بر آن شد تا کارکردهای فیزیکی تمام اجسام سماوی را در داخل یک چارچوب قانون طبیعی بگنجاند، که بر زمین جاری بود. از آن پس، جهان دیگر هرگز نباید به طریقی مشاهده شود که تا آن هنگام نگریسته شده بود.

قانون گرانش عمومی نیوتون

نیوتون قانون گرانش عمومی خود را رسماً در پرینکیپیا اعلام کرد که در سال ۱۶۸۷ منتشر شد. درواقع او قسمت اعظم این نظریه را در سکونتگاه خانوادگیش در ولستروپ انگلیس چند سال پیشتر، بین سالهای ۱۶۶۵ و ۱۶۶۶، در خلال شش‌ماه تعطیلی دانشگاه کمبریج به‌دلیل بروز واگیری طاعون در لندن، یافته و تدوین کرده بود.

این قانون را می‌توان به این قرار بیان کرد:

هر ذره در عالم ذرهٔ دیگری را با نیرویی می‌رباید که بزرگی آن با حاصلضرب جرمهای این دو ذره



شکل ۱.۱.۶ کنش و واکنش در قانون گرانش نیوتون.

متناسب است و با مجذور فاصلهٔ بین آنها نسبت عکس دارد. راستای این نیرو در امتداد خط مستقیمی است که دو ذره را به هم وصل می‌کند.

این قانون را به شکل برداری می‌توانیم در قالب معادلهٔ زیر بنویسیم:

$$\mathbf{F}_{ij} = G\frac{m_i m_j}{r_{ij}^{۲}}\left(\frac{\mathbf{r}_{ij}}{r_{ij}}\right) \qquad (۱.۱.۶)$$

در اینجا، $\mathbf{F}_{ij}$ عبارت است از نیروی وارد بر ذرهٔ iام به جرم m_i که ذرهٔ j به جرم m_j وارد می‌آورد. بردار $\mathbf{r}_{ij}$، مطابق شکل ۱.۱.۶، پاره‌خط جهت‌داری است از ذرهٔ i به سوی ذرهٔ j؛ قانون کنش و واکنش ایجاب می‌کند که $\mathbf{F}_{ij} = -\mathbf{F}_{ji}$. ثابت تناسب G را ثابت عمومی گرانش می‌گویند. مقدار این ثابت را در آزمایشگاه با اندازه‌گیری دقیق نیروی بین دو جسم به جرمهای معلوم، تعیین می‌کنند. در حال حاضر مقدار پذیرفته‌شدهٔ این ثابت در سطح جهان، در دستگاه یکاهای SI، عبارت است از

$$G = (۶٫۶۷۲۵۹ \pm ۰٫۰۰۰۸۵) \times ۱۰^{-۱۱}\mathrm{Nm}^{۲}\mathrm{kg}^{-۲}$$

تمام معرفت کنونی ما نسبت به جرم اجرام نجومی، از جمله زمین، بر مبنای این ثابت بنیادی استوار است.[۱]

۱. دقت مقدار G نسبت به همهٔ ثابتهای بنیادی فیزیک کمتر است. این عدم دقت در G ناشی از این نکته است که نیروی گرانش بین دو جسم در ابعاد آزمایشگاهی فوق‌العاده کوچک است. برای مروری بر وضعیت فعلی مربوط به تعیین G، ر.ک.

J. Maddox, *Nature*, **30**, 723 (1984)

نیز ر.ک.

H. de Boer, "Experiments Relating to the Newtonian Gravitational Constant," in B. N. Taylor and W. D. Phillips, eds., *Precision Measurements and Fundamental Constants* (Natl. Bur. Stand. U.S., Spec. Publ., 617, 1984).

این قانون نمونه‌ای از ردهٔ کُلی نیروهایی به‌شمار می‌آید که به آنها نیروهای مرکزی می‌گویند؛ یعنی، نیروهایی که خط کنش آنها از یک نقطه یا مرکز ناشی می‌شود یا به آن خاتمه می‌یابد. افزون بر اینها، بزرگی این نیرو، مانند بزرگی نیروی گرانش، باید از جهت مستقل باشد؛ یعنی نیروی مرکزی همسانگرد است. رفتار چنین نیرویی را می‌توان به‌طریق زیر مجسم کرد: سطحی فرضی و کروی را با ذره‌ای جرم‌دار در مرکز آن، به صورت منبع گرانش فرض کنید. وقتی کسی روی این سطح گام برمی‌دارد، پی‌می‌برد که همواره تحت تأثیر نیرویی ربایشی به سمت مرکز قرار دارد، که بزرگیش از مکان او بر سطح کره مستقل است. برای تعیین موضع روی سطح این کره، از این نیرو به هیچ‌وجه نمی‌توان استفاده کرد.

هدف اصلی این فصل مطالعهٔ حرکت ذرهٔ تحت تأثیر نیروی مرکزی همسانگرد با تأکید خاص بر نیروی گرانشی است. در این بررسی مسیر اصلی کاوشهای نیوتون را پی‌می‌گیریم که ما را به چگونگی تدوین قانون گرانش عمومی او هدایت می‌کند. در این رهگذر، امیدواریم به عظمت کار ذهنی سترگ نیوتون هم پی‌ببریم.

گرانش: قانونی عکس مجذوری؟

مادام که نیوتون در سال ۱۶۶۵ در خانهٔ خود در ولستروپ به‌سر می‌برد، مطالعاتی انجام داد که او را در بقیهٔ عمرش به حوزه‌های ریاضیات، مکانیک، اپتیک و گرانش مشغول کرد. شاید پردامنه‌ترین تصور کلاسیکی که ما از نیوتون داریم این باشد که او زیر درخت سیب نشسته بود و تفکراتش تحت تأثیر افتادن سیب قرار گرفت. منظور از این تصویر عینی آن است که مفهوم تأمل نیوتون درخصوص ماهیت گرانش را بیان کنیم که به احتمال زیاد در این خصوص می‌اندیشید که آیا نیروی موجد فروافتادن سیب می‌تواند همان نیرویی باشد که ماه را در مدارش برگرد زمین نگه می‌دارد، یا خیر.

گالیله که قانون لختی را خیلی شبیه به شکل نیوتونیش به‌صورت اصل موضوع پذیرفت، به‌طور غیر قابل توضیحی در بهره‌بردن از آن قانون به‌صورت صحیح در مورد اشیاء آسمانی ناکام ماند. او بنیادیترین نکتهٔ حرکت دایره‌ای، یعنی این معنی را که اشیاء متحرک در مدارهای دایره‌ای به سوی داخل دایره شتاب می‌گیرند و بنابراین، نیازمند نیروی برایندی در آن جهت‌اند، نادیده گرفت. در عصر نیوتون، تعدادی از فلاسفهٔ علوم طبیعی به این نتیجه رسیده بودند که نوعی نیرو نیاز است، ولی نه نیرویی که سیاره یا ماهواره را به سمت داخل و به طرف جسم مادر شتاب دهد؛ بلکه، نیرویی که آن را «در مدارش نگه دارد». در سال ۱۶۶۵، منجم ایتالیایی، جیووانی بورلی نظریهٔ حرکت قمرهای مشتری را عرضه کرد. بنابراین

نظریه، نیروی مرکزگریز حرکت مداری قمر دقیقاً با نیروی ربایشی مشتری در حالت تعادل قرار می‌گیرد.[۱]

نیوتون نخستین کسی بود که تشخیص داد «ماه زمین» در مدارش به دور زمین از نظر نیرو «در حالت تعادل» نیست، بلکه تحت تأثیر شتابی مرکزگرا به سمت زمین است که از نیرویی مرکزگرا ناشی می‌شود. نیوتون حدس زد که این نیرو شبیه نیرویی است که تمام اشیاء مقید به زمین را به سطح زمین جذب کرده است. باید هم همین‌طور باشد، زیرا رفتار سینماتیکی ماه با رفتار جسمی که به زمین سقوط می‌کند، فرقی ندارد. ماه در حالت افتادن هرگز به زمین برخورد نمی‌کند، زیرا سرعت مماسی آن چندان بزرگ است که وقتی ماه به مسافتی معین سقوط کند، این مسافت به قدر کافی زیاد را در حالی می‌پیماید که از مسیرش منحرف می‌شود؛ در این حال سطح منحنی زمین به همان میزان دور می‌شود. هیچ‌کس در آن زمان حتی اندکی حدس نمی‌زد که شتاب مرکزگرای ماه و شتاب گرانشی سیبی که بر سطح زمین سقوط می‌کند، منشأ مشترکی دارند.

نیوتون نشان داد که اگر به سیبی افتان نیز بتوان سرعت افقی به اندازهٔ کافی زیادی داد، حرکتش با حرکت مداری ماه یکسان می‌شود (فقط مدار سیب باید به زمین نزدیکتر باشد) بنابراین، استدلال برای مبدأ مشترک نیروی گرانشی جاذبه، حتی به‌نحوی متقاعدکننده‌تر، صورت گرفت. به‌علاوه، نیوتون استدلال کرد که شتاب مرکزگرایی که سیب را در مداری حول زمین درست بر فراز سطحش، قرار می‌دهد، باید با شتاب سقوط آزاد گرانشی آن یکسان باشد. (فرض کنید توپخانهٔ قدرتمندی سیبی را در جهت افقی شلیک کند؛ فرض کنید مقاومت هوا وجود نداشته باشد؛ اگر سرعت افقی اولیهٔ سیب پرتاب‌شده به‌دقت تنظیم شود، سیب نباید هرگز به زمین برخورد کند، چون سطح زمین نیز به‌همان اندازه که سیب به سمت آن سقوط می‌کند باید به پایین بیفتد؛ درست مانند حالتی که در مدار ماه پیش می‌آید. به‌بیان دیگر، برای سیبی که در مدار واقع باشد، شتاب مرکزگرا باید دقیقاً با شتاب سیبی که از حال سکون شروع به سقوط می‌کند، g، برابر باشد.) بنابراین، با این جرقه‌ای که در ذهن نیوتون زده شد، توانست اولین و یکی از زیباترین اصلها از اصول وحدت‌ساز در فیزیک، یعنی قانون گرانش عمومی، را کشف کند.

---

۱. بنابر مطالب فصل ۵، به‌یاد می‌آوریم که نیروی مرکزگریز، نیرویی لختی است که بر هر جسم در دستگاه مرجع چرخان وارد می‌آید. در این مبحث، این نیرو از شتاب مرکزگرای قمری گالیله‌ای که اساساً مداری دایره‌ای حول مشتری را می‌پیماید، ناشی می‌شود. در نزد اکثر اندیشمندان قبل از نیوتون، نیروی مرکزگریز که به سیارات یا قمرها وارد می‌آمد، نیرویی حقیقی بود. بسیاری از بحثهای آنها روی ماهیت نیرویی متمرکز بود که لازم است تا با نیروی مرکزگرا «به حالت تعادل قرار گیرد». آنان به‌طور کامل این نکته را نادیده گرفتند که از دیدگاه ناظر لخت، بر قمر شتاب مرکزگرایی به سمت داخل وارد می‌آید. بنابراین آنان از دیدگاه ناظر نالخت بحث می‌کردند، گرچه هیچ‌کدام از آنها چنان درک دقیقی از این تمایز نداشتند.

مشکل اساسی نیوتون این بود که پی‌ببرد این نیروی ربایشی چگونه به فاصله تا مرکز زمین بستگی دارد. نیوتون می‌دانست که شدت نیروی ربایشی زمین با شتاب اجسام سقوطی، در هر فاصله‌ای از زمین واقع باشند، متناسب است. شتاب ماه به سمت زمین عبارت است از $a = v^2/r$، که v سرعت ماه و r شعاع مدار دایره‌ای آن است. (این شتاب با مقدار موضعی g برابر است.) نیوتون به کمک قانون سوم کپلر (متناسب‌بودن مجذور زمان تناوب مدار، τ^2، با مکعب فاصله تا مرکز مدار، r^3)، نتیجه گرفت که این شتاب باید به‌صورت $\frac{1}{r^2}$ تغییر کند. مثلاً، اگر فاصلهٔ ماه تا زمین ۴ برابر فاصله‌ای بود که هم‌اکنون با زمین دارد، در این صورت طبق قانون سوم کپلر، زمان تناوب گردش آن می‌بایست ۸ برابر و سرعت مداری آن ۲ بار آهسته‌تر، و در نتیجه، شتاب مرکزگرای آن ۱۶ بار کمتر از مقدار فعلیش می‌بود یا به‌صورت عکس مجذور فاصله ضعیفتر می‌شد.

به‌این ترتیب، نیوتون وجود مقدار موضعی g را برای تمام اجسام افتان فرض کرد و، از این‌رو، باید نیروی ربایش گرانشی طبق آن تغییر کند؛ برای تأیید این فرض، نیوتون باید شتاب مرکزگرای ماه را محاسبه و با شتاب سیب افتان، g، مقایسه می‌کرد تا ببیند آیا این آهنگ با آهنگ عکس مجذوری فاصلهٔ آنها تا مرکز زمین برابر است یا خیر. فاصلهٔ ماه تا زمین ۶۰ برابر شعاع زمین است. بنابراین، نیروی گرانشی زمین باید با ضریب ۳۶۰۰ تضعیف شود، آهنگ سقوط سیب باید ۳۶۰۰ مرتبه بزرگتر از آهنگ سقوط ماه باشد، یا به‌بیان دیگر، فاصله‌ای که سیب در ۱ ثانیه سقوط می‌کند باید برابر باشد با فاصله‌ای که ماه در یک دقیقه به سمت زمین سقوط می‌کند؛ فاصلهٔ سقوط با مجذور زمان متناسب است. متأسفانه، نیوتون در انجام این محاسبه یک اشتباه مرتکب شد؛ وی فرض کرد که یک زاویهٔ 1° روبه‌روی طول قوسی ۶۰ مایلی روی سطح زمین واقع می‌شود. وی این مقدار را از یک دستنامهٔ دریانوردی، که تنها کتاب در اختیارش بود، برگرفت. (در واقع، این فاصله ۶۰ مایل دریایی یا ۶۹ مایل انگلیسی است.) اما، نیوتون این کمیت را ۶۰ مایل انگلیسی (هر مایل انگلیسی = ۵۲۸۰ فوت) قرار داد و فاصلهٔ سقوطی ماه را در یک ثانیه ۰٫۰۰۳۶ فوت یا ۱۳ فوت در دقیقه حساب کرد. با توجه به آزمایشهای گالیله در مورد اجسام افتان، که بعدها با دقت بیشتری تکرار شد، نتیجهٔ اندازه‌گیریها این بود که مسافت سقوط سیب (یا هر جسم دیگر) در هر ثانیه ۱۵ فوت بر روی زمین است؛ این مقادیر خیلی به‌هم نزدیک‌اند و حدود یک جزء در هشت، با هم اختلاف دارند. اما چنین اختلافی به‌قدر کافی بزرگ بود که باعث شود نیوتون این ایدهٔ درخشانش را رها کند. بعدها که مقادیر صحیح را به‌کار برد، مقدار دقیق آن را به‌دست آورد. بنابراین، قانون عکس مجذوری را برای قانون گرانشی به‌طور بارزی نشان می‌دهد.

آیا نیروی گرانشی با جرم متناسب است؟

نیوتون همچنین نتیجه گرفت که نیروی گرانی وارد بر هر شیء باید با جرمش متناسب باشد (در مقابل، مثلاً، مجذور جرم یا هر چیز دیگر). این نتیجه را از قانون دوم حرکت او و نیز یافتهٔ گالیله

مبنی بر اینکه آهنگ سقوط تمام اجسام از وزن و ترکیب مواد آنها مستقل است، می‌توان استنتاج کرد. مثلاً نیروی گرانی زمین وارد بر جسمی به جرم لختی m را می‌توانیم با جرمش متناسب تلقی کنیم. در این صورت، بنابر قانون دوم حرکت نیوتون، $F_{\text{گرانشی}} = k \cdot m/r^2 = m \cdot a = m \cdot g$. بنابراین، $g = k/r^2$. جرمها در این معادلهٔ دینامیکی حذف می‌شوند، و شتاب g فقط به ثابت k (که به‌طریقی باید به جرم زمین بستگی داشته باشد ولی، به‌وضوح، برای تمام اجسامی که زمین آنها را می‌رباید باید یکسان باشد) و فاصلهٔ r تا مرکز زمین، بستگی دارد. از این‌رو، تمام اجسام با شتاب مساوی، مستقل از جرم یا ترکیبشان، سقوط می‌کنند. نیروی گرانشی باید مستقیماً با جرم لختی متناسب باشد، در این صورت این حذف دقیق نبایست رخ می‌داد. در این صورت، تمام اجسام افتان باید شتابهای وابسته به جرم را بروز دهند؛ برخلاف نتیجهٔ تمام آزمایشهایی که طراحی شده‌اند تا چنین فرضی را بررسی کنند. در واقع، معادل‌بودن جرم لختی و گرانشی تمام اجسام یکی از سنگ بناهای نظریهٔ نسبیت عام اینشتین به‌شمار می‌آید. در نزد نیوتون، این معادل‌بودن تا هنگام مرگش همچنان راز و رمز باقی ماند.

آیا حاصلضرب جرمها، عمومیت دارد؟

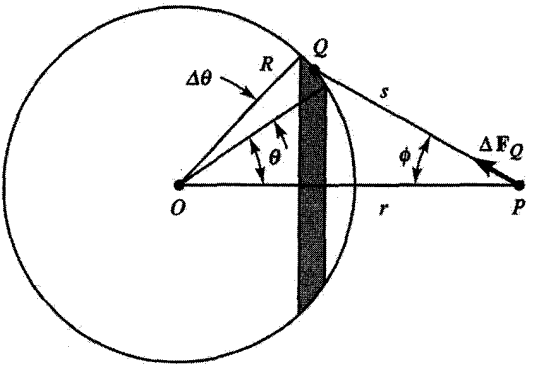
نیوتون همچنین پی‌برد که اگر قرار است نیروی گرانشی از قانون سوم حرکت او پیروی کند و اگر نیروی گرانشی باید با جرم جسم ربوده‌شده متناسب باشد، در این صورت این نیرو نیز باید با جرم جسم رباینده متناسب باشد. چنین شرطی حتماً ما را به این نتیجه هدایت می‌کند که قانون گرانشی باید «عمومی» باشد؛ یعنی هر جسمی در جهان هستی باید هر جسم دیگر در جهان هستی را برباید (هر چند در بیشتر موارد این ربایش خیلی ضعیف باشد). ببینیم از این قانون چه چیزی دستگیرمان می‌شود. فرض کنید فاصلهٔ دو جرم m_1 و m_2 عبارت باشد از r. نیروهای ربایشی وارد بر ۱ از سوی ۲ و وارد بر ۲ از سوی ۱، به‌ترتیب عبارت‌اند از $F_{12} = k_2 m_1/r^2$ و $F_{21} = k_1 m_2/r^2$، که k_1 و k_2 مقادیر «ثابت‌اند» و ناگزیر نتیجه می‌گیریم که باید به جرم جسم رباینده بستگی داشته باشند. بنابر قانون سوم نیوتون، بزرگی این نیروها باید برابر (و از لحاظ جهت مخالف هم) باشد؛ به این علت، $k_2 m_1 = k_1 m_2$، یا $k_2/k_1 = m_2/m_1$. برای اطمینان از مساوی‌بودن این نسبتها، شدت نیروی ربایشی گرانشی باید با جرم جسم رباینده متناسب باشد، یعنی؛ $k_i = G m_i$؛ از این‌رو، نیروی گرانشی بین دو ذره عبارت است از قانون نیروی مرکزی همسانگردی که تقارن شگفت‌آوری دارد: ذرهٔ ۱ ذرهٔ ۲ را می‌رباید (جذب می‌کند) و ذرهٔ ۲ ذرهٔ ۱ را می‌رباید؛ بزرگی و جهت این نیروها از قانون سوم نیوتون پیروی می‌کنند و با حاصلضرب هر کدام از جرم آنها متناسب است و به‌طور معکوس با مجذور فاصله‌شان از یکدیگر تغییر می‌کند. این نتیجه حاصل نبوغی واقعی بود!

۲.۶ نیروی گرانشی بین کرهٔ یکنواخت و ذره

نیوتون پرینکیپیا را تا سال ۱۶۸۷ منتشر نکرد. مشکل خاصی او را نگران و برای انتشار این کتاب با اکراه روبه‌رو کرده بود. در بحث پیشین خود به سرعت از سر این مسئله گذشتیم. نیوتون با فرض آنکه فاصلهٔ مناسب بین دو جسم، نظیر زمین و ماه، فاصلهٔ بین مراکز هندسی آنهاست، به قانون عکس مجذوری دست یافت. به‌نظر نمی‌رسد که برای اجسام کروی مانند خورشید و سیارات، یا زمین و ماه، که فواصل آنها در مقایسه با شعاعشان بزرگ است، این فرض نامعقول باشد؛ اما در مورد زمین و سیب چطور؟ اگر من یا شما سیب بودیم، یا نگریستن به پیرامون و تمام مواد تشکیل‌دهندهٔ زمین که ما را جذب می‌کنند، خطوط نیروی گرانشی را می‌دیدیم که از جهات مربوط به تمام مواد موجود در زمین ما را به سوی خود می‌کشند. ماده‌ای در سمت شرق و ماده‌ای در سمت غرب وجود دارند که اختلاف جهت کشش آنها 180° است. یعنی، چگونه می‌شود گفت که وقتی تمام بردارهای نیرو مربوط به تمام این مواد ربایشی را به‌درستی و به‌نحو مناسبی با هم جمع کنیم، بردار برایندی به‌دست می‌آوریم که به سوی مرکز زمین متوجه است و شدت آن به جرم زمین و با نسبت معکوس با مجذور فاصله تا مرکز زمین بستگی دارد؛ گویی تمام جرم زمین کاملاً در مرکز زمین متمرکز شده باشد؟

با همهٔ این احوال، از این راه به جواب می‌رسیم. این موضوع مسئله‌ای دشوار و پردردسر در حساب انتگرال و دیفرانسیل و مستلزم جمع برداری عوامل بینهایت کوچک مربوط به تعداد نامحدودی عنصر جرمی است که به نتیجه‌ای معین و مشخص می‌انجامد. در آن زمان هیچ‌کس حساب انتگرال و دیفرانسیل نمی‌دانست زیرا در همان موقع خود نیوتون احتمالاً برای حل همین مسئله، آن را ابداع کرده بود! او به‌حق نسبت به انتشار چنین برهانی، که در چارچوبی ریاضیاتی بیان می‌شد که وجود نداشت، بی‌میل بود و امتناع می‌ورزید. چون در عصر روشنگری کنونی ما همه از حساب انتگرال و دیفرانسیل سر در می‌آورند، ما بحث خود را به‌پیش می‌بریم و از این ابزار برای حل این مسئله بهره می‌گیریم و اثبات می‌کنیم که برای هر جسم کروی یکنواخت یا هرگونه توزیع متقارن کروی، نیروی گرانشی وارد از آن بر هر ذرهٔ خارجی را می‌توان صرفاً با این فرض محاسبه کرد که کل جرم این توزیع چنان عمل می‌کند که گویی در مرکز هندسی آن متمرکز شده است. فقط قانون نیروی عکس مجذور به این صورت کارآمد است.

ابتدا پوستهٔ یکنواخت نازکی به جرم M و شعاع R را در نظر می‌گیریم. فاصلهٔ ذرهٔ آزمون P به جرم m تا مرکز O را در r می‌گیریم (شکل ۱.۲.۶). فرض می‌شود $r > R$. مطابق شکل، پوسته را به حلقه‌های دایره‌ای به پهنای $R\Delta\theta$ تقسیم می‌کنیم، که در آن زاویهٔ POQ را به θ نمایش می‌دهیم و Q را نقطه‌ای واقع بر حلقه می‌گیریم. بنابراین، محیط عنصر حلقه‌ای که در نظر



شکل ۱.۲.۶ مختصات مربوط به محاسبهٔ میدان گرانشی یک پوسته کروی.

گرفته‌ایم عبارت است از $2\pi R\sin\theta$ و جرم آن، ΔM، از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$\Delta M \approx \rho 2\pi R^2 \sin\theta\Delta\theta \qquad (۱.۲.۶)$$

که ρ جرم واحد مساحت پوسته است.

اکنون نیروی گرانشی وارد بر P از سوی عنصرکوچک Q از حلقه (که آن را ذره می‌پنداریم) در جهت PQ است. این نیروی $\Delta\mathbf{F}_Q$ را به دو مؤلفه، یکی در امتداد PO، به بزرگی $\Delta F_Q\cos\phi$، و دیگری عمود بر PO، به بزرگی $\Delta F_Q\sin\phi$، تجزیه می‌کنیم. مطابق شکل ۱.۲.۶، در اینجا ϕ همان زاویهٔ OPQ است. به اعتبار تقارن به‌آسانی می‌توانیم ملاحظه کنیم که بردار حاصل‌جمع تمام مؤلفه‌های عمودی وارد بر P از سوی کل حلقه، صفر می‌شود. بنابراین، نیروی $\Delta\mathbf{F}$ که از جانب تمام حلقه بر ذره وارد می‌آید، در جهت PO است و بزرگی آن، ΔF، از جمع‌کردن مؤلفه‌های $\Delta F_Q\cos\phi$ به‌دست می‌آید. نتیجه عبارت خواهد شد از

$$\Delta F = G\frac{m\Delta M}{s^2}\cos\phi = G\frac{m2\pi\rho R^2\sin\theta\cos\phi}{s^2}\Delta\theta \qquad (۲.۲.۶)$$

که، مطابق شکل، s فاصلهٔ PQ (فاصلهٔ ذرهٔ P تا حلقه) است. از این‌رو، بزرگی نیروی وارد بر ذرهٔ P از جانب تمام پوسته از طریق گرفتن حد $\Delta\theta$ و انتگرال‌گیری حاصل می‌شود:

$$F = Gm2\pi\rho R^2\int_0^\pi \frac{\sin\theta\cos\phi d\theta}{s^2} \qquad (۳.۲.۶)$$

با بیان‌کردن انتگرالده برحسب s، محاسبهٔ انتگرال بالا بسیار آسان می‌شود. با توجه به مثلث OPQ، با استفاده از قانون کسینوسها، داریم:

$$r^2 + R^2 - 2rR\cos\theta = s^2 \tag{۴.۲.۶}$$

از طرفین این عبارت انتگرال می‌گیریم؛ چون R و r هر دو ثابت‌اند، خواهیم داشت

$$rR\sin\theta d\theta = sds \tag{۵.۲.۶}$$

همچنین، در همان مثلث OPQ، می‌توانیم رابطهٔ زیر را نیز بنویسیم:

$$\cos\phi = \frac{s^2 + r^2 - R^2}{2rs} \tag{۶.۲.۶}$$

با نشاندن دو معادلهٔ بالا در انتگرالده و تغییر حدود انتگرال‌گیری از $[0, \pi]$ به $[r - R, r + R]$، می‌رسیم به

$$\begin{aligned} F &= Gm2\pi\rho R^2 \int_{r-R}^{r+R} \frac{s^2 + r^2 - R^2}{2Rr^2 s^2} ds \\ &= \frac{GmM}{4Rr^2} \int_{r-R}^{r+R} \left(1 + \frac{r^2 - R^2}{s^2}\right) ds \\ &= \frac{GmM}{r^2} \end{aligned} \tag{۷.۲.۶}$$

که $M = 4\pi\rho R^2$ جرم پوسته است. بنابراین، به بیان برداری می‌توان نوشت

$$\mathbf{F} = -G\frac{M_m}{r^2}\mathbf{e}_r \tag{۸.۲.۶}$$

که $\mathbf{e}_r$ بردار یکهٔ شعاعی از مبدأ O است. نتیجهٔ بالا به این معنی است که یک پوسته کروی یکنواخت از ماده، ذرهٔ خارجی را چنان می‌رباید که گویی تمام جرم پوسته در مرکزش متمرکز است. این معنا در مورد هر جزء کروی از یک کرهٔ یکنواخت جامد صادق است. بنابراین، هر جسم کروی یکنواخت ذرهٔ خارجی را چنان می‌رباید که گویی تمام جرم کره در مرکزش متمرکز است. همین موضوع در مورد هر کرهٔ نایکنواخت نیز صادق است، به‌شرط آنکه چگالی فقط به فاصلهٔ شعاعی r بستگی داشته باشد.

نیروی گرانشی وارد بر ذره‌ای واقع در داخل پوستهٔ کروی یکنواخت صفر است. اثبات این گزاره برای تمرین به خواننده واگذار می‌شود (مسئلهٔ ۲.۶).

۳.۶ قوانین حرکت سیاره‌ای کپلر

قوانین حرکت سیاره‌ای کپلر در تاریخ فیزیک نقطهٔ عطفی به‌شمار می‌آمدند. این قوانین تدوین و تکوین قانون گرانش نیوتون نقشی قطعی بازی کردند. کپلر این قوانین را از تجزیه و تحلیل مشروح حرکات سیاره‌ای و عمدتاً از حرکت مریخ یعنی نزدیکترین سیارهٔ خارجی به زمین و سیاره‌ای که مدارش، بر خلاف مدار زهره، بسیار بیضیوار است، استنتاج کرد. تیکو براهه[1] (۱۶۰۱ـ۱۵۴۶)، حامی و استاد تندخو، اما باهوش کپلر، مریخ را به‌دقت بسیار رصد و مواضع آن را در کرهٔ سماوی با صحت و دقت زیاد ثبت کرده بود. کپلر حتی از برخی مشاهدات هیپارخوس[2] (۱۲۵ـ۱۹۰ ق‌م)، منجم یونان باستان، نیز سود جست. سه قانون کپلر از این قرارند:

I. قانونی بیضیها (۱۶۰۹)

مدار هر سیاره یک بیضی است که خورشید در یکی از کانونهای آن قرار دارد.

II. قانون مساحتهای مساوی (۱۶۰۹)

خط واصل بین خورشید و سیاره مساحتهای مساوی را در زمانهای مساوی جارو می‌کند.

III. قانون هماهنگها (۱۶۱۸)

مجذور زمان تناوب نجومی هر سیاره (زمانی که طول می‌کشد تا سیاره خورشید را، از دیدهٔ ناظر ساکن نسبت به ستارگان، به‌طور کامل دور بزند) با مکعب نیم قطر بزرگ مدار سیاره متناسب است.

استنتاج این قوانین از نظریه‌های گرانش و مکانیک نیوتون یکی از شگفت‌انگیزترین دستاوردهای تاریخ علم به‌شمار می‌آید. تعدادی از همکاران نیوتون که اعضای برجسته انجمن سلطنتی بریتانیا بودند، متقاعد شده بودند که خورشید بر سیارات نیرویی گرانشی وارد می‌آورد که شدت آن نیرو باید با مجذور فاصلهٔ بین خورشید و سیاره کاهش یابد و از این واقعیت می‌توان برای توضیح‌دادن قوانین کپلر بهره جست. (اما، قانون دوم کپلر، یعنی گزاره‌ای که بر پایهٔ آن تکانهٔ زاویه‌ای سیاره در مدارش پایسته می‌ماند، فقط پیامدی از ماهیت مرکزی نیروی گرانشی است و حاصل جنبهٔ عکس‌مجذوری آن نیست.) همان‌طور که ادموند هالی (۱۷۴۲ـ۱۶۵۶) هنگام صرف نهاری با رابرت هوک (۱۷۰۳ـ۱۶۳۵) و کریستوفر رِن (۱۷۲۳ـ۱۶۳۲) در ژانویهٔ ۱۶۸۴ اظهار داشت، مشکل این بود که هیچ‌کس نتوانست این رابطه را از نظر ریاضی برقرار کند. جزئی از مسئله از این قرار بود که، جز نیوتونِ خاموش، کسی نتوانست نشان دهد که نیروهای گرانشی اجسام کروی می‌توانند چنان رفتاری بروز دهند که گویی از مرکز هندسی اجسام کروی صادر و به آنجا ختم می‌شوند. هوک با جسارت اعلام کرد که توانسته است این حقیقت را که سیارات مدارهایی بیضوی

1. Tycho de Brahe 2. Hipparchus

می‌پیمایند اثبات کند، ولی به کسی نگفت که چگونه آن را انجام داده است و از این‌رو، آنها در هنگامی که خود به حل این مسئله اقدام می‌کردند، عظمت این راه حل هوک را درک می‌کردند. رِن جایزهٔ ۴۰ شلینگی، بهای یک کتاب گران در آن روزها، را به کسی پیشنهاد کرد که بتواند اثباتی را در ظرف دو ماه برای این مسئله ارائه دهد. نه هوک نه هیچ‌کس دیگر این جایزه را نبرد!

در ماه اوت سال ۱۶۸۴، در حالی‌که هالی ازکمبریج بازدید می‌کرد، به دیدار نیوتون شتافت و از وی در خصوص شکلی که مدارهای سیارات تحت تأثیر نیروی ربایشی عکس مجذوری خورشید به‌خود می‌گیرند، سؤال کرد. نیوتون بدون تردید پاسخ داد: «بیضی!». هالی خواست تا بداند نیوتون ازکجا به این نتیجه رسیده است، و نیوتون گفت آن را سالها پیش محاسبه کرده است؛ هالی گیج شده بود. آنان در میان هزاران برگ کاغذهای دست‌نوشتهٔ نیوتون، جستجو کردند ولی نتوانستند این محاسبه را پیدا کنند. نیوتون به هالی گفت باید دوباره آن را انجام دهد. وی اظهار داشت که محاسبه را برای وی خواهد فرستاد.

در واقع، نیوتون این محاسبه را پنج سال قبل، در سال ۱۶۷۹، تا حدودی به تحریک رابرت هوک، مدعی پیش‌گفتهٔ قانون عکس مجذوری، انجام داده بود که طی نوشته‌هایی به نیوتون از وی دربارهٔ مسیر اشیاء سقوطی به سوی جسم ربایشی گرانشی سؤال کرده بود. متأسفانه، نیوتون در محاسبات خود در پاسخ به هوک اشتباهی مرتکب شده بود. هوک با شعف این اشتباه را به رخ نیوتون کشید و نیوتون خشمگین با شور و نیرویی نو ذهن خود را بر مسئله متمرکز و ظاهراً اشتباه را برطرف کرد. ولی این محاسبات بعدی نیز حاوی اشتباهی بود که، شاید به همین علت وقتی هالی از آن جویا شد، نیوتون نتوانست آنها را پیدا کند. در هر صورت، نیوتون با خشم زیاد مجدداً به این مسئله روی آورد و در ظرف سه ماه نامه‌ای برای هالی فرستاد که در آن به‌درستی تمامی قوانین کپلر را، از قانون عکس مجذوری گرانش و قوانین مکانیک، به‌دست آورده بود. به این ترتیب، پرینکیپیا متولد شد. در بخشهایی که از این پس خواهند آمد، ما نیز قوانین کپلر را از اصول اساسی نیوتون استنتاج می‌کنیم.

۴.۶ قانون دوم کپلر: مساحتهای مساوی

پایستگی تکانهٔ زاویه‌ای

قانون دوم کپلر چیزی نیست مگر این گزاره که تکانهٔ زاویه‌ای هر سیاره حول خورشید کمیتی پایسته است. برای توصیف این معنی، ابتدا تکانهٔ زاویه‌ای را تعریف می‌کنیم و بعد نشان می‌دهیم که پایستگی آن نتیجهٔ کلی ماهیت مرکزی نیروی گرانشی است.

تکانهٔ زاویه‌ای ذره‌ای واقع در فاصلهٔ $\mathbf{r}$ از مبدأ معلومی، که با تکانهٔ خطی $\mathbf{p}$ حرکت می‌کند، بنابر تعریف، عبارت است از با کمیت $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$. مشتق زمانی این کمیت عبارت است از

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \frac{d(\mathbf{r} \times \mathbf{p})}{dt} = \mathbf{v} \times \mathbf{p} + \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{p}}{dt} \qquad (۱.۴.۶)$$

اما

$$\mathbf{v} \times \mathbf{p} = \mathbf{v} \times m\mathbf{v} = m\mathbf{v} \times \mathbf{v} = ۰ \qquad (۲.۴.۶)$$

بنابراین،

$$\mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{d\mathbf{L}}{dt} \qquad (۳.۴.۶)$$

که از قانون دوم نیوتون، $\mathbf{F} = d\mathbf{p}/dt$، بهره گرفته‌ایم.

حاصلضرب برداری $\mathbf{N} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$ گشتاور نیروی وارد بر ذره‌ای حول مبدأ دستگاه مختصات است. اگر $\mathbf{r}$ و $\mathbf{F}$ همخط باشند، این حاصلضرب برداری، و نیز $\mathbf{L}$، صفر می‌شود. در چنین حالتهایی، تکانهٔ زاویه‌ای $\mathbf{L}$ ثابت حرکت است. واضح است که این حالت در مورد ذره (یا سیاره)ای تحت تأثیر نیروی مرکزی $\mathbf{F}$ نیز صادق است، یعنی نیرویی که از یک نقطهٔ خارج یا به آن ختم می‌شود و خط کنش آن در امتداد بردار شعاعی $\mathbf{r}$ قرار می‌گیرد.

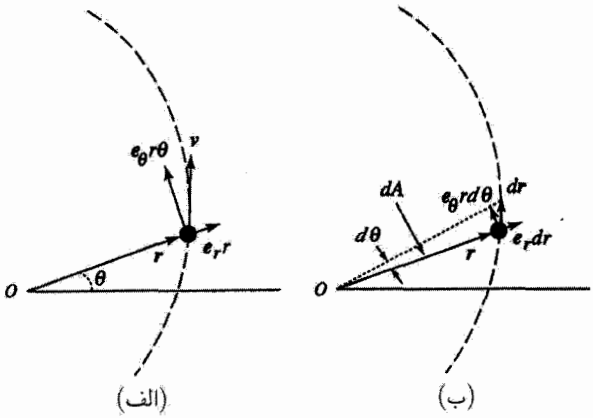
به‌علاوه، چون بردارهای $\mathbf{r}$ و $\mathbf{v}$ یک صفحهٔ «لحظه‌ای» را مشخص می‌کنند که در آن ذره حرکت می‌کند، و چون بردار تکانهٔ زاویه‌ای $\mathbf{L}$ بر این صفحه عمود و بزرگی و جهت آن ثابت است، سمتگیری این صفحه در فضا ثابت می‌ماند. بنابراین، مسئلهٔ حرکت ذره در میدان مرکزی، در واقع مسئله‌ای دوبعدی است و می‌توان رفتار آن را بدون آنکه از عمومیت موضوع کاسته شود، در دو بعد بررسی کرد.

تکانهٔ زاویه‌ای و سرعت سطحی ذرهٔ متحرک در میدان مرکزی

همان‌طور که پیشتر گفتیم، قانون دوم کپلر، یعنی ثابت‌بودن سرعت سطحی، $\mathring{A}$، هر سیاره حول خورشید، فقط به ماهیت مرکزی نیروی گرانشی بستگی دارد و به چگونگی تغییر شدت نیرو با فاصلهٔ شعاعی از خورشید بستگی ندارد. در اینجا، نشان می‌دهیم که این قانون معادل نتیجهٔ کلیتری است که در بخش قبل اثبات شد و بنابر آن تکانهٔ زاویه‌ای هر ذرهٔ متحرک در میدان نیروی مرکزی پایسته است.

برای انجام این کار، ابتدا بزرگی تکانهٔ زاویه‌ای ذره‌ای متحرک را در میدان مرکزی محاسبه می‌کنیم. از مختصات قطبی برای توصیف حرکت بهره می‌گیریم. سرعت ذره عبارت است از

$$\mathbf{v} = \mathbf{e}_r \dot{r} + \mathbf{e}_\theta r\dot{\theta} \qquad (۴.۴.۶)$$



شکل ۱.۴.۶ (الف) تکانهٔ زاویه‌ای $L = |\mathbf{r} \times m\mathbf{v}|$ ذرهٔ متحرک در میدان نیروی مرکزی. (ب) مساحت $dA = \frac{1}{2}|\mathbf{r} \times d\mathbf{r}|$ که بردار شعاعی $\mathbf{r}$ ذره هنگام حرکت در میدان مرکزی جارو می‌کند.

که $\mathbf{e}_r$ بردار یکهٔ شعاعی و $\mathbf{e}_\theta$ بردار یکهٔ عرضی است (شکل ۱.۴.۶ (الف)).
بزرگی تکانهٔ زاویه‌ای از این قرار است:

$$L = |\mathbf{r} \times m\mathbf{v}| = |r\mathbf{e}_r \times m(\dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta)| \qquad (۵.۴.۶)$$

چون $|\mathbf{e}_r \times \mathbf{e}_r| = 0$ و $|\mathbf{e}_r \times \mathbf{e}_\theta| = 1$، برای هر ذرهٔ متحرک در میدان نیروی مرکزی، از جمله سیارهٔ متحرکی در میدان گرانشی خورشید، می‌رسیم به

$$L = mr^2\dot{\theta} = \text{ثابت} \qquad (۶.۴.۶)$$

اکنون «سرعت سطحی» ذره، $\dot{\mathbf{A}}$، را محاسبه می‌کنیم. مساحت مثلث، dA، که بردار شعاعی $\mathbf{r}$ آن را در هنگامی جارو می‌کند که سیاره فاصلهٔ برداری $d\mathbf{r}$ را در مدت‌زمان dt در طول مسیرش نسبت به مبدأ میدان مرکزی می‌پیماید، در شکل ۱.۴.۶ (ب) مشاهده می‌شود. مساحت این مثلث کوچک عبارت است از

$$dA = \frac{1}{2}|\mathbf{r} \times d\mathbf{r}| = \frac{1}{2}|r\mathbf{e}_r \times (\mathbf{e}_r dr + \mathbf{e}_\theta r d\theta)| = \frac{1}{2}r(r d\theta) \qquad (۷.۴.۶)$$

(**گوشزد:** هرگونه افزایش حرکت در جهت شعاعی، $\mathbf{e}_r$، به مساحت dA، اضافه یا از آن کم نمی‌شود و در تکانهٔ زاویه‌ای ذره حول مرکز نیرو تأثیری ندارد.)

به‌این ترتیب، سرعت سطحی، یا آهنگی که با آن بردار شعاعی به سوی ذرهٔ شعاعی متوجه است و «سطح را جارو می‌کند»، عبارت است از

$$\frac{dA}{dt} = \dot{A} = \frac{1}{2}r^2\dot{\theta} = \frac{L}{2m} = \text{ثابت} \qquad (۸.۴.۶)$$

روش هم‌ارزی دیگر، برای اثبات برقراری این رابطه، از این قرار است که توجه کنیم چون $d\mathbf{r} = \mathbf{v}dt$، معادلهٔ (۷.۴.۶) را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$dA = \frac{1}{2}|\mathbf{r} \times d\mathbf{r}| = \frac{1}{2}|\mathbf{r} \times \mathbf{v}dt| = \frac{L}{2m}dt \qquad (۹.۴.۶)$$

که این عبارت نیز به معادلهٔ (۸.۴.۶) تبدیل می‌شود.

به این ترتیب، سرعت سطحی، $\dot{A}$، ذرهٔ متحرک در میدان مرکزی با تکانهٔ زاویه‌ایش تناسب مستقیم دارد و، بنابراین، این کمیت ثابت حرکت هم هست، دقیقاً همان‌طور که کپلر برای سیارات متحرک در میدان گرانشی مرکزی خورشید دریافت.

مثال ۱.۴.۶

ذره‌ای تحت تأثیر نیروی مرکزی ربایشی به شکل $f(r)$ قرار دارد که r فاصلهٔ بین ذره و مرکز نیروست. اگر تمام مدارهای دایره‌ای سرعتهای سطحی یکسان $\mathring{A}$ داشته باشند، $f(r)$ را بیابید.

حل:

چون مدارها دایره‌ای‌اند، شتاب، $\ddot{r}$، مؤلفهٔ عرضی ندارد و کاملاً در جهت شعاعی است. در مختصات قطبی، این کمیت از معادلهٔ (۱۰.۱۱.۱) به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -r\dot{\theta}^2$$

زیرا $\ddot{r} = 0$. بنابراین

$$-mr\dot{\theta}^2 = f(r)$$

چون سرعت سطحی برای تمام مدارهای دایره‌ای یکسان است، در این صورت تکانهٔ زاویه‌ای ذره، $L = mr^2\dot{\theta}$، نیز باید برای همهٔ آنها یکسان باشد. با ضرب کردن در و تقسیم کردن بر ضریب r^3، می‌رسیم به

$$-\frac{mr^4\dot{\theta}^2}{r^3} = -\frac{L^2}{mr^3} = f(r)$$

یا برحسب سرعت سطحی، $\dot{A} = L/۲m$، داریم

$$f(r) = -\frac{۴m\dot{A}^۲}{r^۳}$$

به این جهت، نیروی ربایشی که برای تمام مدارهای دایره‌ای سرعت سطحی (و تکانه‌های زاویه‌ای) یکسان دارد، به شکل عکس مکعب r است.

۵.۶ قانون اول کپلر: قانون بیضیها

برای اثبات قانون اول کپلر، معادلهٔ دیفرانسیل کلی مدار ذره را در هر میدان نیروی مرکزی و همسانگرد تشکیل می‌دهیم. آنگاه این معادلهٔ مداری را برای حالت خاص نیروی عکس مجذوری حل می‌کنیم.

ابتدا معادلات دیفرانسیل حرکت نیوتون را، با به‌کار بردن مختصات قطبی دوبعدی به‌جای سه بعد، بیان می‌کنیم و از بحث گذشته‌مان به‌خاطر می‌آوریم که چون حرکت به یک صفحه محدود می‌شود، از عمومیت بحث کاسته نخواهد شد. معادلهٔ حرکت در مختصات قطبی عبارت است از

$$m\ddot{\mathbf{r}} = f(r)\mathbf{e}_r \qquad (۱.۵.۶)$$

که $f(r)$ نیروی مرکزی همسانگرد است که بر ذرهٔ به جرم m وارد می‌آید. این نیرو فقط تابعی از فاصلهٔ اسکالر r تا مرکز نیرو (از این‌رو، نیروی همسانگرد)، و جهت آن در امتداد بردار شعاعی (از این‌رو، نیروی مرکزی) است. همان‌طور که در معادلات (۹.۱۱.۱) و (۱۰.۱۱.۱) نشان داده‌شده است، مؤلفهٔ شعاعی $\ddot{\mathbf{r}}$ به‌صورت $\ddot{r} - r\dot{\theta}^۲$ و مؤلفهٔ عرضی آن $r\ddot{\theta} + ۲\dot{r}\dot{\theta}$ است. از این‌رو، معادلات دیفرانسیل مؤلفه‌ای حرکت عبارت‌اند از

$$m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^۲) = f(r) \qquad (۲.۵.۶ \text{ الف})$$

$$m(۲\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) = ۰ \qquad (۲.۵.۶ \text{ ب})$$

از معادلهٔ اخیر نتیجه می‌شود که (معادلهٔ (۱۱.۱۱.۱))

$$\frac{d}{dt}(r^۲\dot{\theta}) = ۰ \qquad (۳.۵.۶)$$

یا

$$r^۲\dot{\theta} = \text{ثابت} = l \qquad (۴.۵.۶)$$

از معادلهٔ (۶.۴.۶) می‌رسیم به

$$|l| = \frac{L}{m} = |\mathbf{r} \times \mathbf{v}| \qquad (۵.۵.۶)$$

بنابراین، l تکانهٔ زاویه‌ای در واحد جرم است. ثابت‌بودن این کمیت صرفاً بیان مجدد واقعیتی است که از قبل بر آن واقف بودیم. یعنی، تکانهٔ زاویه‌ای ذرهٔ متحرک تحت تأثیر نیروی مرکزی ثابت باقی می‌ماند.

با معلوم فرض‌کردن تابع نیروی شعاعی یعنی $f(r)$، از لحاظ نظری می‌توانیم زوج معادلات دیفرانسیل (معادلات ۲.۵.۶ الف و ب) را حل کنیم تا r و θ را به‌صورت تابعی از t به‌دست آوریم. غالباً حالتی پیش می‌آید که تنها مسیر در فضای (مدار) مستقل از زمان، t، موردنظر است. برای یافتن معادلهٔ مدار، از متغیر u بهره می‌گیریم که بنا بر تعریف عبارت است از

$$r = \frac{۱}{u} \qquad (۶.۵.۶)$$

در این صورت،

$$\dot{r} = -\frac{۱}{u^۲}\dot{u} = -\frac{۱}{u^۲}\dot{\theta}\frac{du}{d\theta} = -l\frac{du}{d\theta} \qquad (۷.۵.۶)$$

جملهٔ آخر، طبق معادلات (۴.۵.۶) و (۶.۵.۶)، از این نکته ناشی می‌شود که

$$\dot{\theta} = lu^۲ \qquad (۸.۵.۶)$$

یک بار دیگر مشتق می‌گیریم و می‌رسیم به

$$\ddot{r} = -l\frac{d}{dt}\frac{du}{d\theta} = -l\frac{d\theta}{dt}\frac{d}{d\theta}\frac{du}{d\theta} = -l\dot{\theta}\frac{d^۲u}{d\theta^۲} = -l^۲u^۲\frac{d^۲u}{d\theta^۲} \qquad (۹.۵.۶)$$

با نشاندن مقادیر یافته‌شده برای r، $\dot{\theta}$، و $\ddot{r}$ در معادلهٔ (۲.۵.۶ الف)، می‌رسیم به

$$m\left[-l^۲u^۲\frac{d^۲u}{d\theta^۲} - \frac{۱}{u}(l^۲u^۴)\right] = f(u^{-۱}) \qquad (۱۰.۵.۶ \text{ الف})$$

که به این معادله تبدیل می‌شود

$$\frac{d^۲u}{d\theta^۲} + u = -\frac{۱}{ml^۲u^۲}f(u^{-۱}) \qquad (۱۰.۵.۶ \text{ ب})$$

معادلهٔ (۱۰.۵.۶ ب) معادلهٔ دیفرانسیل مدار ذرهٔ متحرک تحت تأثیر نیروی مرکزی است. با حل این معادله، u (و بنابراین r) را به‌صورت تابعی از θ به‌دست می‌آوریم. برعکس، اگر معادلهٔ قطبی مدار، یعنی $r = r(\theta) = u^{-۱}$ در دست باشد، در این صورت با مشتق‌گیری و دستیابی به‌عبارت $d^۲u/d\theta^۲$ و واردکردن آن در معادلهٔ دیفرانسیل، تابع نیرو به دست می‌آید.

مثال ۱.۵.۶

ذره‌ای در میدانی مرکزی در مدار مارپیچی حرکت می‌کند:

$$r = c\theta^{۲}$$

تابع این نیرو را تعیین کنید.

حل:

داریم

$$u = \frac{۱}{c\theta^{۲}}$$

و

$$\frac{du}{d\theta} = \frac{-۲}{c}\theta^{-۳} \qquad \frac{d^{۲}u}{d\theta^{۲}} = \frac{۶}{c}\theta^{-۴} = ۶cu^{۲}$$

به این ترتیب، از معادلهٔ (۱۰.۵.۶ ب) خواهیم رسید به

$$۶cu^{۲} + u = -\frac{۱}{ml^{۲}u^{۲}}f(u^{-۱})$$

از این‌رو،

$$f(u^{-۱}) = -ml^{۲}(۶cu^{۴} + u^{۳})$$

و

$$f(r) = -ml^{۲}\left(\frac{۶c}{r^{۴}} + \frac{۱}{r^{۳}}\right)$$

بنابراین، نیرو ترکیبی از قانون عکس مکعب و عکس توان چهارم است.

مثال ۲.۵.۶

در مثال ۱.۵.۶، تعیین کنید زاویهٔ θ چگونه با زمان تغییر می‌کند.

حل:

در اینجا از این واقعیت بهره می‌گیریم که $l = r^{۲}\dot{\theta}$ کمیتی ثابت است. بنابراین

$$\dot{\theta} = lu^{۲} = l\frac{۱}{c^{۲}\theta^{۴}}$$

یا

$$\theta^{۴} d\theta = \frac{l}{c^{۲}} dt$$

و از این‌رو پس از انتگرال‌گیری، به‌دست می‌آوریم

$$\frac{\theta^{۵}}{۵} = lc^{-۲} t$$

که ثابت انتگرال‌گیری صفر گرفته شده است. از این‌رو، در $t = ۰$ داریم: $\theta = ۰$. بنابراین می‌توانیم بنویسیم:

$$\theta = \alpha t^{۱/۵}$$

که، $\alpha = \text{ثابت} = (۵lc^{-۲})^{۱/۵}$.

قانون عکس مجذور

اکنون می‌توانیم معادلهٔ (۱۰.۵.۶ ب) را برای مدار ذره‌ای تحت تأثیر نیروی گرانشی حل کنیم. در این حالت

$$f(r) = -\frac{k}{r^{۲}} \qquad (۱۱.۵.۶)$$

که $k = GMm$ ثابت است. در این فصل همواره فرض می‌کنیم $M \gg m$ و در فضا ثابت باقی می‌ماند. جرم کوچک m همان جرمی است که مدارش را محاسبه می‌کنیم. (وقتی $M \approx m$، یا M دست‌کم خیلی از m بزرگتر نباشد؛ محاسبهٔ ما یک اصلاح لازم دارد. چنین اصلاحی را در فصل ۷ ارائه خواهیم داد.) بنابراین، معادلهٔ مدار (معادلهٔ ۱۰.۵.۶ ب) به‌صورت زیر در می‌آید:

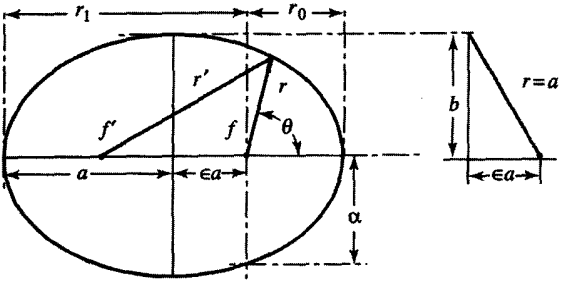
$$\frac{d^{۲}u}{d\theta^{۲}} + u = \frac{k}{ml^{۲}} \qquad (۱۲.۵.۶)$$

معادلهٔ ۱۲.۵.۶ همان شکل معادله‌ای را دارد که نوسانگر هماهنگ ساده را توصیف می‌کند، ولی از یک ثابت اضافه هم برخوردار است. جواب عمومی این معادله عبارت خواهد بود از

$$u = A\cos(\theta - \theta_{۰}) + \frac{k}{ml^{۲}} \qquad (۱۳.۵.۶)$$

یا

$$r = \frac{۱}{k/ml^{۲} + A\cos(\theta - \theta_{۰})} \qquad (۱۴.۵.۶)$$



f, f' دو کانون بیضی

a نیم‌قطر بزرگ

b نیم‌قطر کوچک

ϵ خروج از مرکز: هر کانون به اندازهٔ $۴a$ از مرکز فاصله دارد

α ضلع قائم: فاصلهٔ کانون از نقطه‌ای واقع بر محیط بیضی و واقع بر خطی که از کانون می‌گذرد و بر قطر بزرگ عمود است: $\alpha = (۱-\epsilon^۲)a$

$r_۰$ فاصلهٔ کانون تا نزدیکترین نقطهٔ محیط بیضی به آن: $r_۰ = (۱-\epsilon)a$

$r_۱$ فاصلهٔ کانون تا دورترین نقطهٔ محیط بیضی از آن: $r_۱ = (۱+\epsilon)a$

شکل ۱.۵.۶ بیضی.

ثابتهای انتگرال‌گیری، A و $\theta_۰$، از روی شرایط اولیه یا با توجه به مقادیر مکان و سرعت ذره در لحظهٔ خاصی از زمان تعیین می‌شوند. ولی مقدار $\theta_۰$ را همواره می‌توان با چرخش سادهٔ دستگاه مختصاتی که برای اندازه‌گیری زاویهٔ قطبی ذره به‌کار می‌رود، تنظیم کرد. در نظر می‌گیریم $\theta_۰ = ۰$، که با جهت محور متوجه به سوی نقطه‌ای که ذره نزدیکترین رویکرد را به مبدأ دارد، مطابقت می‌کند. بنابراین، دوباره معادلهٔ (۱۴.۵.۶) را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$r = \frac{ml^۲/k}{۱ + (Aml^۲/k)\cos\theta} \qquad (۱۵.۵.۶)$$

این معادله، یک بیضی را توصیف می‌کند که مبدأ در یکی از کانونهای آن واقع است (شکل ۱.۵.۶). در این حالت، حرکت ذره مقید است.

بیضی، بنا بر تعریف، عبارت است از مکان هندسی نقاطی که فاصلهٔ کل آنها از دو کانون f و f' مقداری ثابت است، یعنی

$$r + r' = \text{ثابت} = ۲a \qquad (۱۶.۵.۶)$$

که a نیم‌قطر بزرگ بیضی، و فاصلهٔ هر یک از دو کانون تا مرکز بیضی عبارت است از ϵa. کمیت ϵ را خروج از مرکز بیضی نامند. می‌توانیم نشان دهیم که معادلهٔ (۱۵.۵.۶) معادل با این تعریف اساسی بیضی است؛ از این‌رو، ابتدا رابطه‌ای بین r و r' با به‌کاربردن قضیهٔ فیثاغورس (شکل ۱.۵.۶) می‌یابیم:

$$\begin{aligned} r'^2 &= r^2 \sin^2\theta + (2\epsilon a + r\cos\theta)^2 \\ &= r^2 + 4\epsilon a(\epsilon a + r\cos\theta) \end{aligned} \qquad (۱۷.۵.۶)$$

و آنگاه با نشاندن تعریف بنیادی، $r' = 2a - r$، در این عبارت، می‌رسیم به

$$r = \frac{a(1-\epsilon^2)}{1+\epsilon\cos\theta} \qquad (۱۸.۵.۶ \text{ الف})$$

همان‌طور که از شکل ۱.۵.۶ می‌توان دید، در $\theta = \pi/2$، داریم $\alpha = a(1-\epsilon^2)$ که $r = \alpha$ پارامتر مسیر بیضی است. از این‌رو، معادلهٔ (۱۸.۵.۶ الف) را می‌توان به این قرار بیان کرد

$$r = \frac{\alpha}{1+\epsilon\cos\theta} \qquad (۱۸.۵.۶ \text{ ب})$$

که این عبارت معادل است با معادلهٔ (۱۵.۵.۶) با

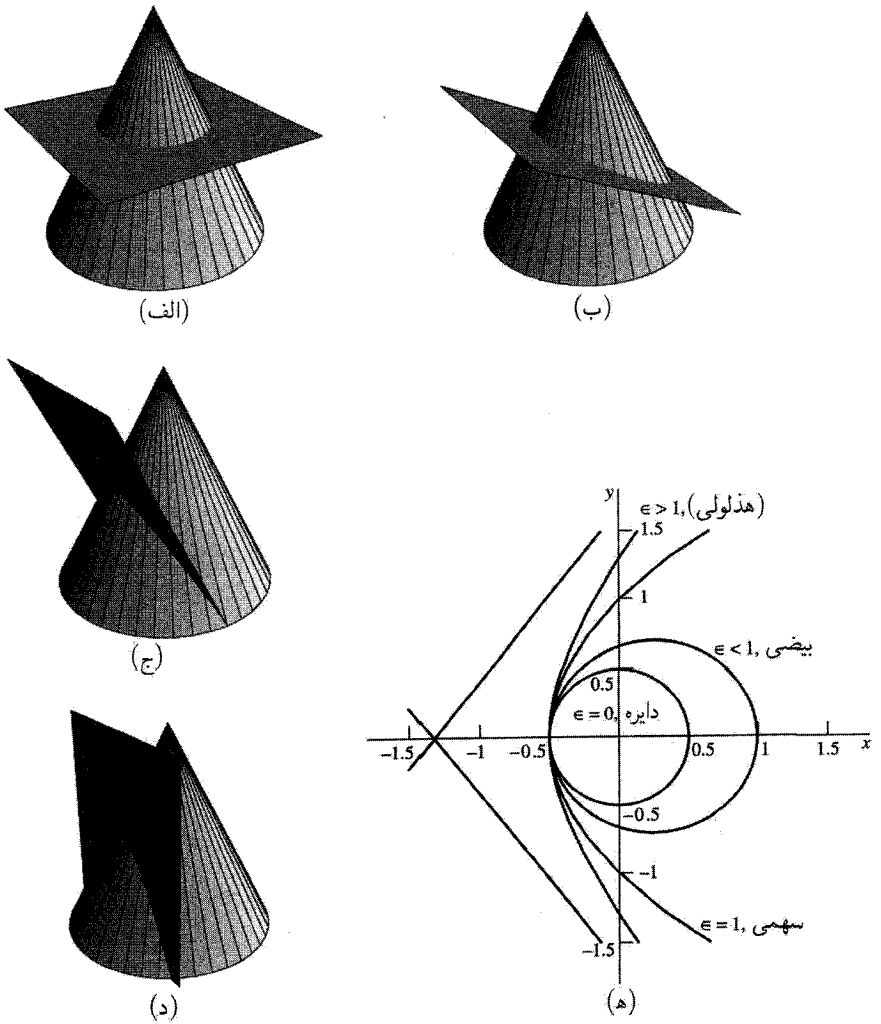
$$\alpha = \frac{ml^2}{k} \qquad (۱۹.۵.۶)$$

و

$$\epsilon = \frac{Aml^2}{k} \qquad (۲۰.۵.۶)$$

هر چند معادلات (۱۸.۵.۶ الف و ب) برای بیضی به‌دست آمده‌اند، اما کلیترند: در واقع این معادلات هر مقطع مخروطی و تمام مدارهای ممکن، غیر از بیضی، پیرامون منبع گرانشی را توصیف می‌کنند.

هر مقطع مخروطی بر اثر تقاطع یک صفحه و یک مخروط تشکیل می‌شود (شکل ۲.۵.۶ الف تا د). زاویهٔ کجی (اریب) بین این صفحه و محور مخروط، ماهیت مقطع حاصل را تعیین می‌کند. این زاویه به خروج از مرکز، ϵ، در معادلات (۱۸.۵.۶ الف و ب) مربوط می‌شود. به‌ازای $0 < \epsilon < 1$، معادلات (۱۸.۵.۶ الف و ب) یک بیضی را توصیف می‌کنند. بیضی وقتی تشکیل می‌شود که زاویهٔ بین این صفحه و محور مخروط کمتر از $\pi/2$ ولی بزرگتر از β باشد؛ β زاویهٔ مولد مخروط است (شکل ۲.۵.۶ (ب)). عبارت مربوط به دایره، $r = a$، وقتی به‌دست می‌آید که $\epsilon = 0$، و دایره وقتی تشکیل می‌شود که این صفحه بر محور مخروط عمود باشد



شکل ۲.۵.۶ (الف) دایره: $\epsilon = 0$. (ب): بیضی $\epsilon < 1$. (ج) سهمی: $\epsilon = 1$. (د) هذلولی: $\epsilon > 1$. (ه) خانوادهٔ مقاطع مخروطی.

(شکل ۲.۵.۶ (الف)). به‌ازای $\epsilon \to 1$، داریم $a \to \infty$، اما حاصلضرب $\alpha = a(1 - \epsilon^2)$ متناهی می‌ماند و به‌ازای $\epsilon = 1$ معادلات (۱۸.۵.۶ الف و ب) یک سهمی را توصیف می‌کنند زاویهٔ بین این صفحه و محور مخروط در این حالت β است (شکل ۲.۵.۶ ج). سرانجام، اگر $\epsilon > 1$، معادلات (۱۸.۵.۶ الف و ب) یک هذلولی را توصیف می‌کنند، و زاویهٔ کجی بین صفر و

β قرار می‌گیرد (شکل ۲.۵.۶ (د)). مقاطع مخروطی گوناگون آن‌طور که ناظر، در راستای عمود بر این صفحه، در هر یک از شکلهای ۲.۵.۶ (الف) تا (د)، مشاهده می‌کند، در شکل ۲.۵.۶ (ه)، نشان داده می‌شوند. این تقاطع با مدارهای ممکن مختلف ذره مطابقت دارند.

با مراجعه به مدارهای بیضی سیارات حول خورشید (شکل ۱.۵.۶)، r_0، فاصلهٔ نزدیکترین نقطهٔ مدار تا خورشید را حضیض خورشیدی و r_1، فاصلهٔ دورترین نقطهٔ مدار تا خورشید را اوج خورشیدی می‌گویند. فواصل متناظر با آنها در مورد مدار ماه به دور زمین، و برای مدار ماهواره‌ها را، به‌ترتیب، فواصل حضیض و اوج می‌نامند. از معادلهٔ (۱۸.۵.۶ ب)، می‌توان مشاهده کرد این کمیتها عبارت‌اند از مقادیر r، به‌ترتیب، در $\theta = 0$ و $\theta = \pi$

$$r_0 = \frac{\alpha}{1+\epsilon} \qquad \text{(۲۱.۵.۶ الف)}$$

$$r_1 = \frac{\alpha}{1-\epsilon} \qquad \text{(۲۱.۵.۶ ب)}$$

خروج از مرکز مداری سیارات خیلی کوچک‌اند (جدول ۱.۵.۶). مثلاً، در مورد مدار زمین $\epsilon = 0.017$، $r_0 = 91,000,000\,\text{mi}$ و $r_1 = 95,000,000\,\text{mi}$. از سوی دیگر، خروج از مرکز مداری ستاره‌های دنباله‌دار عموماً بزرگ است (مدارهای خیلی کشیده). مثلاً، خروج از مرکز مداری ستارهٔ دنباله‌دار هالی ۰٫۹۶۷ و فاصلهٔ حضیض خورشیدی آن فقط $55,000,000\,\text{mi}$ است، در صورتی که در اوج خورشیدی مدار آن فراتر از مدار نپتون است. مدار بسیاری از ستاره‌های دنباله‌دار سهمی یا هذلولی (از نوع برنگشتنی) است.

انرژی هر شیء عامل اصلی است برای اینکه تعیین کند مدار آن جسم مقطع مخروطی باز (سهمی، هذلولی) یا بسته (دایره، سهمی) است. اشیاء «پرانرژی» مدارهای باز و نامقید، و اشیاء «کم‌انرژی» مدارهای بسته و مقید پدید می‌آورند. ما این موضوع را در بخش ۱۰.۶ به‌طور مشروحتری بررسی می‌کنیم. از دیدگاه ناظر نالخت، مدارهای کاملاً دایره‌ای با موقعیتی مطابق است که در آن نیروهای گرانشی و مرکزگریز یک سیاره دقیقاً با هم به حالت تعادل در می‌آیند. شاید ملاحظهٔ این معنا که مدار سیارات تقریباً دایره‌ای‌اند، حیرت‌انگیز باشد.

تصور اینکه دقیقاً چگونه چنین وضعیتی ممکن است از شرایط اولیه ناشی شود، بسیار دشوار است. اگر سیاره‌ای که برای گردش حول خورشید پرتاب می‌شود کمی بیشتر از میزان لازم سریع باشد، نیروی مرکزگریز اندکی بر نیروی گرانشی پیشی می‌گیرد، و سیاره اندکی از خورشید دورتر می‌شود. در این حالت، حرکت سیاره کند می‌شود تا اینکه نیروی گرانشی بر نیروی مرکزگریز غلبه پیدا کند. آنگاه سیاره اندکی به خورشید نزدیکتر می‌شود و در این راه سرعت می‌گیرد. نیروی مرکزگریز تا حدی افزایش می‌یابد و دوباره از تعادل با نیروی گرانشی خارج می‌شود و این فرایند، خودش را تکرار

می‌کند. بنابراین، مدارهای بیضوی به‌صورت نتیجهٔ کشاکش دائم بین نیروهای مرکزگریز و گرانشی که اندکی از تعادل خارج شده‌اند، مشاهده می‌شود و هر وقت سرعت مماسی سیاره آن‌طورکه باید درست تنظیم نشده باشد حتماً این وضع رخ می‌دهد. این نیروها باید کم و زیاد شوند، به‌طریقی که پایداری مدار تأمین شود. در باب شرط بحرانی پایداری در بخش ۱۳.۶ بحث خواهیم کرد.

یکی از راههایی که این دو نیرو بتوانند در سراسر مدار به‌طورکامل با یکدیگر به تعادل برسند، این است که سرعت آغاز حرکت دقیقاً این مقصود را برآورده کند؛ یعنی، به‌تعبیری، باید در آغاز شرایط اولیه خیلی خاص برقرار بوده باشد. تصور اینکه چگونه هر فرایند طبیعی می‌تواند چنین پیش‌نیازهایی تقریباً کامل را برقرار کند، دشوار است. از این‌رو، اگر سیارات کلاً به خورشید مقید باشند، می‌توان فکر کرد که باید با احتمال زیاد مدارهای بیضوی را، درست مطابق گفته‌های کپلر، بپیمایند، مگر اینکه در دورهٔ تکوین منظومهٔ شمسی حادثه‌ای رخ داده باشد که سیارات را در مدارهای دایره‌ای قرار داده باشد. فکرکردن در این خصوص را که چه اتفاقی ممکن است افتاده باشد، به دانشجو واگذار می‌کنیم.

مثال ۳.۵.۶

سرعت یک ماهواره را در مدار دایره‌ای حول زمین محاسبه کنید.

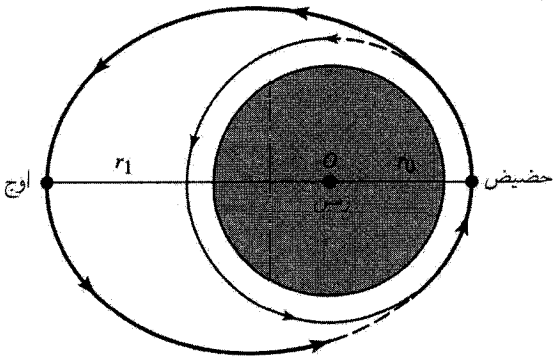
حل:

در حالت حرکت دایره‌ای، شعاع مدار به‌صورت $r_c = a = \alpha = ml^2/k$ بیان می‌شود زیرا خروج از مرکز صفر است (معادلات (۱۸.۵.۶ الف)، و (۱۹.۵.۶)). در میدان گرانشی زمین، ثابت نیرو عبارت است از $k = GM_e m$، که در آن M_e جرم زمین و m جرم ماهواره است. تکانهٔ زاویه‌ای ماهواره در واحد جرم عبارت است از $l = v_c r_c$، که v_c سرعت ماهواره است. به این ترتیب،

$$r_c = \frac{m(v_c r_c)^2}{GM_e m}$$
$$\therefore v_c^2 = \frac{GM_e}{r_c}$$

همان‌طورکه در مثال ۲.۳.۲ نشان داده شده است، می‌توان حاصلضرب GM_e را با توجه به این نکته یافت که نیروی گرانش در سطح زمین عبارت است از $mg = GM_e/R_e^2$ یا $GM_e = gR_e^2$، که R_e شعاع زمین است. بنابراین، سرعت ماهواره در مداری دایره‌ای عبارت است از

$$v_c = \left(\frac{gR_e^2}{r_c}\right)^{1/2}$$



شکل ۳.۵.۶ سفینهٔ فضایی در حال تغییر مدار از دایره‌ای به بیضوی.

از آنجا که برای ماهواره‌هایی که در مدارهای پایین و نزدیکتر به سطح زمین قرار دارند، داریم $r_c \approx R_e$ از این‌رو $v_c \approx (gR_e)^{1/2} = (۹٫۸\text{ms}^{-1} \times ۶٫۴ \times ۱۰^۶\text{m})^{1/2} = ۷۹۲۰\text{m/s}$، یا حدود ۸km/s است.

مثال ۴.۵.۶

صرفه‌جویانه‌ترین شیوهٔ مصرف انرژی، برای فرستادن سفینهٔ فضایی به ماه آن است که سرعتش را درحالی که در مداری دایره‌ای زمین را دور می‌زند، چنان افزایش دهیم که مدار جدیدش بیضی شود. نقطهٔ آغاز افزایش سرعت در حضیض بیضی، و نقطهٔ ورود به ماه در نقطهٔ اوج است (شکل ۳.۵.۶). درصد افزایش سرعت لازم را برای دستیابی به چنین مداری محاسبه کنید. فرض کنید سفینه ابتدا در مدار دایره‌ای پایین حول زمین قرارگرفته باشد. فاصلهٔ بین زمین و ماه $۶۰R_e$ و R_e شعاع زمین است.

حل:
شعاع و سرعت سفینه در مدار دایره‌ای اولیه‌اش در مثال ۳.۵.۶ محاسبه شده است. این شعاع فاصلهٔ حضیض برای مدار جدید، $r_۰ = R_e$، است. $v_۰$ سرعت لازم در حضیض به‌شمار می‌آید تا سفینه را به اوج در $r_۱ = ۶۰R_e$ بفرستد. چون خروج از مرکز مدار دایره‌ای اولیه صفر است، داریم (معادلات (۱۹.۵.۶)، (۲۱.۵.۶الف)):

$$r_۰ = \frac{\alpha_c}{\epsilon + ۱} = \alpha_c = \frac{ml_c^۲}{k}$$

اما تکانهٔ زاویه‌ای بر واحد جرم برای مدار دایره‌ای l_c (معادلهٔ ۴.۵.۶)، مقداری ثابت است و می‌تواند

از این قرار باشد:

$$l_c = r^۲\dot{\theta} = r_۰^۲\dot{\theta}_۰ = r_۰ v_c$$

با نشاندن این کمیت در رابطهٔ قبلی، می‌رسیم به

$$r_۰ = \frac{k}{mv_c^۲}$$

بعد از تقویت سرعت از v_c به $v_۰$ در حضیض، از معادلهٔ (۲۱.۵.۶ الف)، به یک مدار بیضوی می‌رسیم که خروج از مرکز آن، ϵ، از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$\epsilon = \frac{\alpha}{r_۰} - ۱ = \frac{ml^۲}{kr_۰} - ۱ = \frac{mv_۰^۲ r_۰}{k} - ۱$$

که ما از این نکته بهره برده‌ایم که تکانهٔ زاویه‌ای جدید واحد جرم عبارت است از $l = v_۰ r_۰$. با واردکردن رابطهٔ قبلی به‌جای $r_۰$ در رابطهٔ بالا، نسبت سرعتهای لازم برای ایجاد مداری با خروج از مرکز جدید به‌دست می‌آید

$$\left(\frac{v_۰}{v_c}\right)^۲ = \epsilon + ۱$$

می‌توانیم خروج از مرکز را برحسب فواصل حضیض و اوج، از روی شکل هندسی بیضی بیابیم

$$r_۱ = (۱+\epsilon)a = (۱+\epsilon)\frac{(r_۱ + r_۰)}{۲}$$

$$\therefore (۱+\epsilon) = \left(\frac{v_۰}{v_c}\right)^۲ = \frac{۲r_۱}{r_۱ + r_۰}$$

برای مدار لازم، مقادیری عددی می‌نشانیم و می‌رسیم به

$$\frac{v_۰}{v_c} = \sqrt{\frac{۲r_۱}{r_۱ + r_۰}} = \sqrt{\frac{۱۲۰R_e}{۶۱R_e}} = ۱٫۴۰$$

بنابراین، برای رسیدن به سرعتی حدود ۱۱٫۲km/s، ۴۰٪ افزایش سرعت ضروری است.

۶.۶ قانون سوم کپلر: قانون هماهنگها

چرا قانون سوم کپلر، که بین زمان تناوب مداری با فاصله از خورشید رابطه برقرار می‌کند، قانون هماهنگها نامیده می‌شود؟ کارهای کپلر، بیشتر از هر یک از دانشمندان بزرگ دیگر که برای گشودن قفل را از حرکت سیاره‌ای تلاش می‌کردند، نمایش شگفت‌آورِ اثر عمیقی به‌شمار می‌آید که شوق

شدید به علم و معرفت و باور شخصی بر رشد علم داشته است. کپلر متقاعد شد که جهان، با وجود آنکه در آن روزگار رفتار بس خشنی در حق خود وی بروز داده بود، اساساً مکان زیبایی است. کپلر به اصول فیثاغورسی هماهنگی سماوی معتقد بود. جهان مکان پرآشوبی بود و سیارات ناهماهنگ بودند، فقط به این علت که آدمی هنوز یاد نگرفته بود چگونه هماهنگی واقعی جهان را بشنود. کپلر در اثرش تحت عنوان هماهنگی جهان[1]، مانند فیثاغورسیان تقریباً ۲۰۰۰ سال پیش از آن، تلاش کرد بین حرکات سیاره‌ای با تمام زمینه‌های تجرید و هماهنگی، یعنی اشکال هندسی، اعداد، و هماهنگهای موسیقی، رابطه برقرار کند. وی در این تلاش با ناکامی مواجه شد. اما در هنگامهٔ همهٔ کارهایش، که حاکی از آرزوها و تلاشهای وی بود، جواهر گرانبهای او را می‌یابیم که همیشه از آن به‌نام قانون سوم کپلر، قانون هماهنگها، یاد شده است. این قانون بود که به ما برگه‌هایی از موسیقی آسمانها را عرضه کرد.

نشان می‌دهیم که چگونه قانون سوم را می‌توان از قوانین حرکت نیوتون و قانون عکس مجذور گرانشی به‌دست آورد. بررسی خود را با معادلهٔ (۷.۴.۶ ب)، قانون دوم کپلر، آغاز می‌کنیم:

$$\dot{A} = \frac{L}{2m} \tag{۱.۶.۶}$$

می‌توانیم با انتگرال‌گیری از سرعت سطحی روی تمام دورهٔ تناوب مداری، بین مساحت مدار با زمان تناوب و تکانهٔ زاویه‌ای واحد جرم، $l = L/m$، رابطه برقرار کنیم:

$$\begin{aligned} \int_0^\tau \dot{A}dt = A &= \frac{l}{2}\tau \\ \tau &= \frac{2A}{l} \end{aligned} \tag{۲.۶.۶}$$

به‌آسانی، و با کمی تأمل، می‌شود اثبات کرد که مساحت بیضی πab است. بنابراین داریم (شکل ۱.۵.۶):

$$\tau = \frac{2\pi ab}{l} = \frac{2\pi a^2\sqrt{1-\epsilon^2}}{l} \tag{۳.۶.۶}$$

یا

$$\begin{aligned} \tau^2 &= \frac{4\pi^2 a^4}{l^2}(1-\epsilon^2) \\ &= \frac{4\pi^2 a^4}{l^2}\frac{\alpha}{a} = 4\pi^2 a^3 \frac{\alpha}{l^2} \end{aligned} \tag{۴.۶.۶}$$

1. *Harmonice Mundi (The Harmony of the World)*

جدول ۱.۶.۶ داده‌های سیاره‌ای

سیاره	زمان تناوب		مکعب نیم‌قطر بزرگ		خروج از مرکز
	τ (به سال)	مربع τ^2 (سال)^2	قطر$a(AU)$	$a^3(AU)^3$	ϵ
عطارد	۰٫۲۴۱	۰٫۰۵۸۱	۰٫۳۸۷	۰٫۰۵۸۰	۰٫۲۰۶
زهره	۰٫۶۱۵	۰٫۳۷۸	۰٫۷۲۳	۰٫۳۷۸	۰٫۰۰۷
زمین	۱٫۰۰۰	۱٫۰۰۰	۱٫۰۰۰	۱٫۰۰۰	۰٫۰۱۷
مریخ	۱٫۸۸۱	۳٫۵۳۸	۱٫۵۲۴	۳٫۵۴۰	۰٫۰۹۳
مشتری	۱۱٫۸۶	۱۴۰٫۷	۵٫۲۰۳	۱۴۰٫۸	۰٫۰۴۸
زحل	۲۹٫۴۶	۸۶۷٫۹	۹٫۵۳۹	۸۶۸٫۰	۰٫۰۵۶
اورانوس	۸۴٫۰۱	۷۰۵۸	۱۹٫۱۸	۷۰۵۶	۰٫۰۴۷
نپتون	۱۶۴٫۸	۲۷۱۶۰	۳۰٫۰۶	۲۷۱۶۰	۰٫۰۰۹
پلوتون	۲۴۷٫۷	۶۱۳۶۰	۳۹٫۴۴۰	۶۱۳۵۰	۰٫۲۴۹

با واردکردن رابطهٔ $\alpha = ml^2/k$ (معادلهٔ ۱۹.۵.۶) و ثابت نیرو، $k = GM_\odot m$، مناسب برای حرکت سیاره‌ای حول خورشید (به جرم $M_\odot$)، در معادلهٔ ۴.۶.۶، به قانون سوم کپلر می‌رسیم:

$$\tau^2 = \frac{4\pi^2}{GM_\odot} a^3 \qquad (۵.۶.۶)$$

یعنی، مجذور زمان تناوب مداری سیاره با مکعب «فاصلهٔ» آن از خورشید متناسب است. این فاصله، نیم قطر بزرگ، a، مدار بیضی است. در مورد مدار دایره‌ای این فاصله به شعاع مدار تبدیل می‌شود.

ثابت $4\pi^2/GM_\odot$ برای تمام اجسام در مدار حول خورشید، مستقل از جرمشان، یکسان است.[۱] اگر فواصل به یکاهای نجومی ($1\text{AU} = ۱٫۵ \times 10^8\text{km}$) سنجیده و زمانهای تناوب به سال زمینی بیان شوند، در این صورت، $4\pi^2/GM_\odot = 1$. بنابراین، قانون سوم کپلر شکل خیلی ساده‌ای به‌خود می‌گیرد: $\tau^2 = a^3$. زمانهای تناوب و مربعات آنها، نیم‌قطر بزرگ و مکعب آنها، همراه با خروج از مرکز تمام سیارات را در جدول ۱.۶.۶ درج کرده‌ایم.

(**گوشزد:** مدار اکثر سیارات به‌استثنای پلوتون، عطارد، و مریخ، دایره‌ای است.)

۱. عملاً خورشید و سیاره به دور مرکز جرم مشترکشان می‌گردند (اگر فقط مسئلهٔ دو جسمی موردنظر باشد). بررسی دقیقتر حرکت مداری در بخش ۷ـ۳ انجام می‌شود؛ در آنجا نشان داده خواهد شد که مقدار صحیحتر برای این ثابت $4\pi^2/G(M_\odot + m)$ است، که m جرم سیاره به‌شمار می‌آید. این تصحیح خیلی کوچک است.

مثال ۱.۶.۶

زمان تناوب ستارهٔ دنباله‌داری را بیابید که نیم‌قطر بزرگ آن ۴AU است.

حل:

هرگاه τ به سال و a با یکای نجومی سنجیده شوند، داریم

$$\tau = ۴^{۳/۲}\mathrm{y} = ۸\mathrm{y}$$

حدود ۲۰ ستارهٔ دنباله‌دار مانند این یکی در منظومهٔ شمسی یافت می‌شود که اوج آنها جملگی نزدیک به مدار مشتری قرارگرفته است. آنها را خانوادهٔ ستاره‌های دنباله‌دار مشتری نامند. ستارهٔ دنباله‌دار هالی عضوی از خانوادهٔ مشتری نیست.

مثال ۲.۶.۶

ارتفاع ماهواره با مدار زمینی پایین (LEO)، تقریباً دایره‌ای، حدود ۲۰۰ مایل است.
(الف) زمان تناوب این ماهواره را محاسبه کنید.

حل:

برای مدارهای دایره‌ای،

$$\frac{GM_Em}{R^۲} = m\frac{v^۲}{R} = m\frac{۴\pi^۲R^۲/\tau^۲}{R}$$

این معادله را برحسب τ حل می‌کنیم:

$$\tau^۲ = \frac{۴\pi^۲}{GM_E}R^۳$$

که، جای تعجب نیست که قانون سوم کپلر برای اشیاء واقع در مدار حول زمین است. فرض کنید $R = R_E + h$، که h ارتفاع ماهواره از سطح زمین است. در این صورت

$$\tau^۲ = \frac{۴\pi^۲}{GM_E}R_E^۳\left(۱ + \frac{h}{R_E}\right)^۳$$

اما $GM_E/R_E^۲ = g$، از این‌رو، داریم

$$\tau = ۲\pi\sqrt{\frac{R_E}{g}}\left(۱ + \frac{h}{R_E}\right)^{۳/۲} \approx ۲\pi\sqrt{\frac{R_E}{g}}\left(۱ + \frac{۳h}{۲R_E}\right)$$

با نشاندن مقادیر عددی $R_E = ۶۳۷۱\text{km}$، $h = ۳۲۲\text{km}$، می‌رسیم به

$$\tau \approx ۹۰٫۸\,\text{min} \approx ۱٫۵۱\text{h}$$

اگر پی‌ببرید که قانون سوم کپلر، مشتق از قوانین حرکت نیوتون و قانون گرانشی او، در مورد هر مجموعه از اجسام در مدار حول یکدیگر صادق است، راه دیگری برای حل این مثال در اختیارتان قرار می‌گیرد. ماه هر ۲۷٫۳ روز یک بار در شعاع $۶۰٫۳R_E$ زمین را دور می‌زند[۱]. بنابراین، قانون سوم کپلر را برحسب این کمیتها (۲۷٫۳روز= ۱ ماه، و $۶۰٫۳R_E = (\text{LU})$ ۱ یکای قمری) به‌کار بریم؛ داریم

$$\tau^۲(\text{ماه}) = R^۳(LU)$$

بنابراین، برای ماهوارهٔ (LEO)،

$$R = \frac{۶۶۹۳}{۶۳۷۱}R_E = ۱٫۰۵۱R_E = \frac{۱٫۰۵۱R_E}{۶۰٫۳R_E/LU} = ۰٫۰۱۷۴۳LU$$

$$\tau(\text{ماه}) = R^{۳/۲}[LU] = (۰٫۰۱۷۴۳)^{۳/۲}\,\text{ماه} = ۰٫۰۰۲۳۰۱\,\text{ماه} \equiv ۱٫۵۱\text{h}$$

(ب) ماهواره‌ای زمینگرد صفحهٔ استوانه‌ای زمین را با زمان تناوب ۲۴ ساعت دور می‌زند. بنابراین، ظاهراً ماهواره بر بالای نقطهٔ ثابتی روی زمین قرار دارد به‌همین علت است که می‌توانید بشقاب گیرندهٔ ماهواره‌ای تلویزیونی خود را در جهت ثابتی در آسمان متوجه کنید). شعاع مدارش چقدر است؟

حل:

با به‌کار بردن مجدد قانون سوم کپلر، می‌رسیم به

$$R_{geo} = \tau^{۲/۳} = \left(\frac{۱}{۲۷٫۳}\right)^{۲/۳} = ۰٫۰۱۱۰LU \equiv ۶٫۶۵R_E \approx ۴۲۴۰۰\text{km}$$

عمومیت گرانش

پیروزی عظیم فیزیک نیوتونی در قرن نوزدهم، به کشف نپتون به‌وسیلهٔ اوربَن ژین لوِوریه (۱۸۷۷ـ۱۸۱۱) منجر شد. این کشف نقطهٔ عطفی در تاریخ علم به‌شمار می‌آید و این همان

۱. این مدت ماه نجومی، یا زمانی است که طول می‌کشد تا ماه یک مدار ۳۶۰ درجه را نسبت به ستاره‌ها کامل کند. ماه آشنا برای همهٔ ما ماه قمری ۲۹٫۵ روزه است، و آن عبارت است از زمانی که طول می‌کشد تا تمام اهلهٔ خود را طی کند.

هنگام بود که روش نوپیدا، که از دیرباز با ایده‌های کتاب مقدس درگیر منازعه بود، چیرگی و سلطهٔ خود را بر مفاهیم این جهان آغازکرد. داستان از آنجا شروع شد که الکسی بووارد، فرزند خانواده‌ای کشاورز از ناحیهٔ آلپ، برای تحصیل علم به پاریس آمد و در آنجا بی‌نظمیهایی را در حرکت اورانوس مشاهده کرد که نتوانست آن را ناشی از ربایش سایر سیارات شناخته‌شدهٔ دیگر بداند. در سالهای بعد که بی‌نظمیها در حرکت اورانوس زیاد شد، این نظر بین منجمین گسترش یافت که باید ستارهٔ نامعلومی وجود داشته باشد که حرکت اورانوس را مغشوش سازد.

در فاصلهٔ ۱۸۴۳ـ۱۸۴۲ جان کوچ آدامز (۱۸۹۲ـ۱۸۱۹)، دانشجویی با استعداد درکمبریج، روی این مسئله شروع به‌کارکرد و در سپتامبر ۱۸۴۵ مختصات احتمالی سیارهٔ مشکل‌آفرین، اما در آن هنگام ناشناخته، را به سِر جورج اِیری (۱۸۹۲ـ۱ ۱۸۰)، منجم سلطنتی و جیمز چالیس، رئیس رصدخانهٔ کمبریج، ارائه کرد. از نظر آنان، ممکن نبود که دانشجویی معمولی فقط مجهز به قلم و کاغذ، توانسته باشد رصدهایی از اورانوس انجام داده و از قوانین شناختهٔشده فیزیک بهره برده باشد، و وجود و مکان دقیق سیاره‌ای نامکشوف را پیش‌گویی کند. به‌علاوه، اِیری در مورد اعتبار قانون عکس مجذورگرانشی خیلی شک داشت. در واقع، اعتقاد وی بر این بود که گرانش در فواصل زیاد سریعتر از عکس مجذور افت می‌کند. بنابراین، ایری، تا حدودی به‌حق، از اعتباربخشیدن زیادی به کار آدامز اکراه داشت و از این‌رو آن دو مرد بزرگ بهتر دیدند که کارهای آدامز را نادیده بگیرند و برای همیشه بر سرنوشت خود به‌عنوان منجمینی مُهر زدند که درکشف نپتون ناکام ماندند.

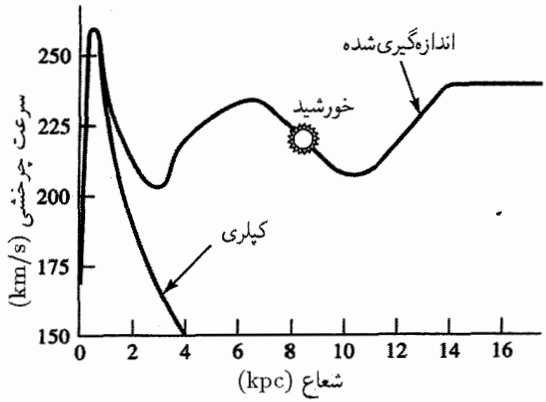
تقریباً در همین ایام لوِوریه کار روی این مسئله را آغازکرد. در سال ۱۸۴۶ مدار سیارهٔ ناشناخته را محاسبه و مکان آن را به‌طور دقیق روی کرهٔ سماوی پیش‌گویی کرد. ایری و چالیس مشاهده کردند که نتیجهٔ لوِوریه به‌طور معجزه‌آسایی با پیش‌گویی آدامز منطبق است. چالیس بلافاصله شروع به تحقیق در مورد سیارهٔ ناشناخته در آن بخش مشکوک آسمان کرد، اما به علت اینکه کمبریج نقشه‌های مشروح ستاره‌ای در آن قسمت آسمان را نداشت، تحقیق با دشواری و رنج و مشقت صورت می‌گرفت و مسئلهٔ تبدیل داده‌ها پردامنه و عظیم بود. چالیس با قدرت و پیگیری به‌کارش ادامه داد، و حتماً بایست نپتون را می‌یافت زیرا نپتون روی نقشه‌هایش وجود داشت. متأسفانه، گامهایش را آهسته برداشت. اما در آن موقع، لوِوریهٔ بی‌حوصله به یوهان گال (۱۹۱۰ـ۱۸۱۲) منجم رصدخانهٔ برلین نامه‌ای نوشت و از او خواست تا دوربین نجومی با عدسی بزرگ آن رصدخانه را برای بررسی ستارگان در ناحیهٔ مظنون آسمان به‌کارگیرد و اگر قرصی را نشان داد، قطعاً نشانهٔ وجود یک سیاره است. مدت کوتاهی قبل از اینکه نامهٔ لوِوریهٔ حامل این درخواست به مقصد برسد، رصدخانهٔ برلین یک نقشهٔ مشروح ستاره‌ای از این ناحیهٔ مظنون آسمان از آکادمی برلین دریافت کرد. هنگام رسیدن نامهٔ لوِوریه، ۲۳ سپتامبر ۱۸۴۶، این نقشه با تصویری که آن شب از آسمان گرفته شده بود مقایسه شد، و سیاره‌ای به‌عنوان یک ستارهٔ خارجی با بزرگنمایی هشت

شناسایی شد، که قبلاً روی نقشهٔ ستاره‌ای دیده نشده بود. آن ستاره را نپتون نام نهادند. فیزیک نیوتونی به نحو بی‌سابقه‌ای به پیروزی رسیده بود؛ قوانین فیزیک را برای پیشگویی اثبات‌پذیر دنیای بزرگ مقیاس به کار برده بودند، که نمایش نامنتظره‌ای از قدرت علم به‌شمار آمد.

از آن زمان به‌بعد، اشیاء آسمانی مشاهده (رصد) شده در فواصل هردم‌افزاینده، کماکان نمایش سازگاری رفتار با قوانین فیزیک نیوتونی را (به‌استثنای حالتهای مربوط به میدانهای گرانشی بزرگ یا فواصل بسیار دور، که هر کدام مستلزم بهره‌گیری از نسبیت عام است) ادامه می‌دهند. رفتار منظومه‌های ستاره‌ای دوتایی در داخل کهکشان ما نمونه‌های کلاسیکی از این موارد به‌شمار می‌آیند. چنین ستارگانی را نیروی گرانشی به یکدیگر مقید می‌کند و دینامیک مداری آنها را با مکانیک نیوتونی به نحو مطلوبی توصیف می‌کند. دربارهٔ این ستارگان در فصل بعد بحث خواهیم کرد. ما با چنان قوتی به عمومیت گرانش و قوانین فیزیکی اعتقاد داریم که تخطیهای ظاهری اجرام سماوی، مانند قضیهٔ اورانوس و کشف بعدی نپتون، معمولاً با جستجوی اختلالهای نادیده مورد استقبال قرار می‌گیرند. به‌ندرت کسی به برانداز قوانین فیزیکی اقدام می‌کند. (هرچند، در نهایت حیرت، دو مثال مشهوری که بعداً در این فصل دربارهٔ آنها بحث خواهیم کرد، دقیقاً چنین تأثیری دارند و به دگرگون‌سازی فیزیک یاری رسانده‌اند.)

سناریوی محتملتر، برای یافتن اختلال نادیده، در بسیاری از حوزه‌های پژوهشهای نجومی معاصر در حال حاضر جاری است، مانند جستجوی مادهٔ تاریک در عالم. یکی از دلایلی که فکر می‌کنیم مقدار عظیمی مادهٔ نامرئی عالم را پر کرده است (شاید ۱۰ برابر مادهٔ مرئی) می‌تواند از دینامیک کهکشانهای مارپیچی ــ انبوهه‌های قرصی‌شکل چرخان متشکل از صد میلیارد ستاره ــ به‌دست آید. در بادی امر، به‌نظر می‌رسد منحنی چرخش کهکشانهای مارپیچی (منحنی نمایش تغییرات سرعت چرخشی ستاره‌ها به‌صورت تابعی از فاصلهٔ شعاعی آنها تا مرکز کهکشانی) از قوانین کپلر تخطی می‌کند. مثالی از این نوع منحنی را در شکل ۱.۶.۶ مشاهده می‌کنید. قسمت اعظم مادهٔ درخشان کهکشان مارپیچی در هستهٔ مرکزی آن جای دارد که شعاعش تا مرتبهٔ چند هزار سال نوری امتداد دارد. بقیهٔ مادهٔ درخشان در بازوهای مارپیچ، به شعاعی که تا ۵۰۰۰۰ سال نوری امتداد می‌یابد، قرار دارد. کل کهکشان به‌آهستگی حول مرکز گرانش خود می‌چرخد، دقیقاً مانند مرکزی که برای انبوه گرانشی از ستاره‌ها، گاز، گرد و غبار، و غیره، انتظار داریم. موضوع شگفت‌آور دربارهٔ منحنی چرخش شکل ۱.۶.۶، این است که ظاهراً ناکپلری است.

می‌توانیم با یک مثال ساده منظور خودمان را به‌خوبی بیان کنیم. فرض کنید جرم کهکشانی به‌طور کامل در داخل هسته‌ای به شعاع R متمرکز شده و ستاره‌ها هسته را با چگالی یکنواخت پر کرده باشند. این بیان، ساده‌سازی بی‌رویه‌ای است، اما برای آنچه می‌توان انتظار داشت تا منحنی



شکل ۱.۶.۶ منحنی چرخش کهکشانی. سرعت خورشید حدود ۲۲۰km/s و فاصله‌اش از مرکز کهکشان حدود ۸٫۵kpc یا (۲۸۰۰۰ سال نوری ≈) است.

چرخش مانند آن به‌نظر آید، باید محاسبه‌ای مبتنی بر چنین مدلی به‌صورت هدایتگر به کار گرفته شود. سرعت چرخشی ستاره در شعاعی حدود $r < R$ در داخل هسته فقط از طریق مقدار جرم M در داخل شعاع r تعیین می‌شود. ستاره‌های خارج از r هیچ اثری ندارند. چون چگالی ستارگان داخل کل هسته‌ای به شعاع R ثابت است، M را به‌صورت زیر محاسبه می‌کنیم:

$$M = \frac{۴}{۳}\pi\rho r^۳ \qquad (۶.۶.۶)$$

که

$$\rho = \frac{M_{\text{کهکشان}}}{\left(\frac{۴}{۳}\right)\pi R^۳} \qquad (۷.۶.۶)$$

و از قانون دوم نیوتون، داریم

$$\frac{GMm}{r^۲} = \frac{mv^۲}{r} \qquad (۸.۶.۶)$$

که رابطه‌ای است برای نیروی گرانشی وارد بر ستاره‌ای به جرم m در فاصلهٔ r از مرکز هسته به جرم M در داخل هسته تا فاصلهٔ r. این عبارت را به‌ازای v حل می‌کنیم،

$$v = \sqrt{GM_{\text{کهکشان}}/R^۳}\; r \qquad (۹.۶.۶)$$

یا، سرعت چرخشی ستاره در $r < R$ متناسب با r است. برای ستاره‌های داخل بازوهای مارپیچ

در فاصلهٔ $r > R$، می‌رسیم به:

$$\frac{GM_{\text{کهکشان}}m}{r^۲} = \frac{mv^۲}{r} \qquad (۱۰.۶.۶)$$

به این ترتیب،

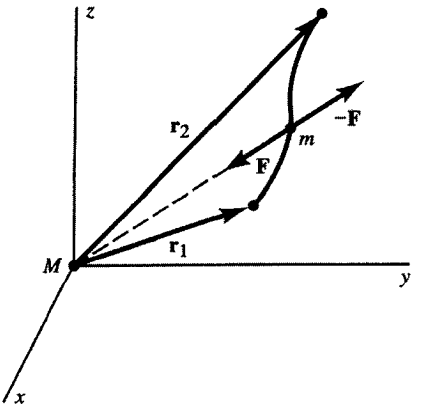
$$v = \sqrt{\frac{GM_{\text{کهکشان}}}{r}} \qquad (۱۱.۶.۶)$$

به بیان دیگر، سرعت چرخشی ستاره در $r > R$ متناسب است با $۱/\sqrt{r}$. منظور ما از چرخش کپلری همین است. به این ترتیب، سرعت سیارات به فاصلهٔ آنها از خورشید بستگی دارد. این نوع منحنی را در شکل ۱.۶.۶ مشاهده می‌کنیم، که در آن فرض کرده‌ایم تمام جرم کهکشان به‌طور یکنواخت در کره‌ای به شعاع ۱kpc توزیع شده است. [(سال نوری) $۱ = ۱\text{Pc} = ۳٫۲۶\text{ly}$ پارسک].

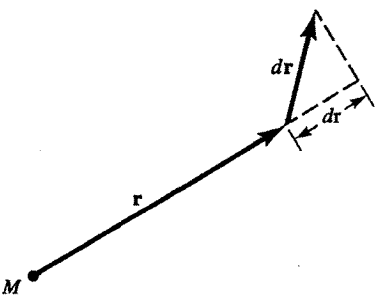
حال منحنی چرخش اندازه‌گیری‌شده را بررسی می‌کنیم. در ابتدا، این منحنی به‌سرعت از صفر در مرکز کهکشان تا حدود ۲۵۰km/s در ۱kpc افزایش می‌یابد، که کم و بیش انتظارش را داشتیم، ولی موضوع حیرت‌انگیز از این قرار است که این منحنی به شیوهٔ مورد انتظار کپلری اُفت نمی‌کند. کم و بیش تمام راه تا لبه‌های بازوهای مارپیچ پهن باقی می‌ماند (صفحه بر روی محور عمودی متوقف شده است به‌طوری که منحنی پهنتر از آن است که ظاهراً باید باشد). نتیجه گریزناپذیر است. هم‌چنان که از مرکز کهکشان دور می‌شویم، باید در محدودهٔ هر شعاع مفروضی، هرچه بیشتر، ماده «جمع‌آوری» کنیم، که سبب می‌شود حتی دوردست‌ترین اشیاء در کهکشان، در سرعتهایی بیشتر از سرعتهایی بچرخند که برای یک توزیع مادهٔ فوق‌العاده متمرکز انتظار می‌رفت. چون قسمت اعظم درخشانی کهکشان از هستهٔ آن ناشی می‌شود، نتیجه می‌گیریم که مادهٔ تاریک نامرئی باید به هر طریق به کناره‌های دور یا خارج کهکشانهای مارپیچی نفوذ کند. (در واقع، خیلی ساده می‌شود نتیجه گرفت که توزیع شعاعی مادهٔ تاریک برای تولید این منحنی چرخش تخت لازم است.) البته، ممکن است قوانین نیوتون اشتباه باشد، ولی ما این طور فکر نمی‌کنیم. این موضوع مانند مورد مربوط به نپتون به‌نظر می‌رسد که در آن تجدیدنظر شده باشد.

۷.۶ انرژی پتانسیل در میدان گرانشی: پتانسیل گرانشی

در مثال ۲.۳.۲ نشان دادیم که قانون نیروی عکس مجذور به قانون عکس توان اول برای تابع انرژی پتانسیل می‌انجامد. در این بخش همان رابطه را به روش فیزیکی‌تری نیز به‌دست می‌آوریم.



(الف)



(ب)

شکل ۱.۷.۶ نمودار مربوط به یافتن کار لازم برای حرکت ذرهٔ آزمون در میدان گرانشی.

کار، W، لازم را برای به‌حرکت درآوردن ذرهٔ آزمونی به جرم m در امتداد مسیری معلوم در میدان گرانشی ذرهٔ دیگر به جرم M در نظر می‌گیریم.

این ذرهٔ به جرم M را، مطابق شکل ۱.۷.۶ (الف)، در مبدأ دستگاه مختصات خود قرار می‌دهیم. چون نیروی، $\mathbf{F}$، وارد بر ذرهٔ آزمون از رابطهٔ $\mathbf{F} = -(GMm/r^2)\mathbf{e}_r$ به‌دست می‌آید، بنابراین برای غلبه بر این نیرو، باید یک نیروی خارجی $-\mathbf{F}$ وارد آید. کار dW که هنگام حرکت ذرهٔ آزمون در تغییر مکان $d\mathbf{r}$ انجام می‌شود، عبارت است از

$$dW = -\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \frac{GMm}{r^2}\mathbf{e}_r \cdot d\mathbf{r} \qquad (۱.۷.۶)$$

حال می‌توانیم بردار $d\mathbf{r}$ را به دو مؤلفهٔ $\mathbf{e}_r dr$ موازی با $\mathbf{e}_r$ (مؤلفهٔ شعاعی)، و دیگری عمود بر $\mathbf{e}_r$

تجزیه کنیم (شکل ۱.۷.۶ ب). بدیهی است که

$$\mathbf{e}_r \cdot d\mathbf{r} = dr \qquad (۲.۷.۶)$$

و به این ترتیب، W به‌صورت زیر بیان می‌شود

$$W = GMm \int_{r_۱}^{r_۲} \frac{dr}{r^۲} = -GMm \left(\frac{۱}{r_۲} - \frac{۱}{r_۱} \right) \qquad (۳.۷.۶)$$

که $r_۱$ و $r_۲$، به‌ترتیب، فواصل شعاعی ذره در آغاز و پایان مسیرند. به این ترتیب، کار از مسیر خاص پیموده‌شده مستقل است؛ کار فقط به نقاط ابتدا و انتهای مسیر بستگی دارد. در اینجا نکته‌ای که از پیش می‌دانستیم محقق می‌شود، یعنی قانون عکس مجذور نیرو، که قانون عکس مجذور آن را توصیف کرده، پایسته است.

به این ترتیب، می‌توانیم انرژی پتانسیل ذرهٔ آزمون به جرم m را در یک نقطهٔ معین در میدان گرانشی ذرهٔ دیگری به جرم M در حکم کار انجام‌شده در حرکت ذرهٔ آزمون از مکان مرجع دلخواه $r_۱$ به مکان $r_۲$ تعریف کنیم. مکان مرجع را در $r_۱ = \infty$ اختیار می‌کنیم. نشانه‌گذاری معمولاً مناسب است، زیرا نیروی گرانشی بین دو ذره، وقتی صفر می‌شود که فاصله‌شان از هم بینهایت (∞) شود. بنابراین، با قراردادن $r_۱ = \infty$ و $r_۲ = r$ در معادلهٔ (۳.۷.۶)،

$$V(r) = GMm \int_{\infty}^{r} \frac{dr}{r^۲} = -\frac{GMm}{r} \qquad (۴.۷.۶)$$

مانند نیروی گرانشی، انرژی پتانسیل گرانشی دو ذره که بینهایت از هم دور شده باشند، نیز صفر می‌شود. توجه کنید که برای فواصل محدود، انرژی پتانسیل گرانشی منفی است.

هم نیروی گرانشی و هم انرژی پتانسیل گرانشی دو ذره متضمن مفهوم کنش از دورند. نیوتون خودش هرگز نتوانست سازوکاری را توصیف کند که چنین نیرویی با آن عمل می‌کند. ما هم این کار را نمی‌کنیم، اما می‌خواهیم به نحوی با مفهوم میدان آشنا شویم که بتوان نیروها و انرژیهای پتانسیل را نه حاصل کنش از دور بلکه ناشی از کنشهای موضعی ماده با میدان موجود تلقی کرد. برای این کار، کمیت Φ را معرفی می‌کنیم و آن را پتانسیل گرانشی می‌نامیم:

$$\Phi = \lim_{m \to ۰} \left(\frac{V}{m} \right) \qquad (۵.۷.۶)$$

اساساً Φ انرژی پتانسیل واحد جرم است که باید ذرهٔ آزمونی خیلی کوچک در حضور سایر جرمها در آن محیط داشته باشد. حد را به‌صورت $m \to ۰$، می‌گیریم تا اطمینان یابیم حضور ذرهٔ آزمون

بر توزیع سایر مواد تأثیر نمی‌کند و چیزی را که می‌خواهیم تعریف کنیم تغییر نمی‌دهد. بدیهی است که پتانسیل باید فقط به بزرگی سایر جرمها و مکان آنها در فضا بستگی داشته و به خصوصیت ذره‌ای که آن را برای بررسی حضور گرانش به‌کار می‌بریم، بستگی نداشته باشد. می‌توانیم پتانسیل را به‌صورت تابع اسکالری از مختصات فضایی، $\Phi(x,y,z)$، یا میدانی در نظر بگیریم که به‌وسیلهٔ تمام جرمهای دیگر آن محیط ایجاد شد. حضور آن را با قراردادن جرم آزمونی در هر نقطهٔ (x,y,z) می‌آزماییم. از این‌رو، انرژی پتانسیل ذرهٔ آزمون از این قرار بیان می‌شود:

$$V(x,y,z) = m\Phi(x,y,z) \qquad (۶.۷.۶)$$

می‌توانیم این انرژی پتانسیل را در نظر بگیریم که با برهم‌کنش موضعی جرم m و میدان ϕ که در نقطهٔ (x,y,z) حضور دارد، ایجاد شده است.

پتانسیل گرانشی در فاصلهٔ r از ذره‌ای به جرم M عبارت است از

$$\Phi = -\frac{GM}{r} \qquad (۷.۷.۶)$$

هرگاه تعدادی ذرهٔ M_1، M_2، $\cdots$، M_i، $\cdots$ داشته باشیم که در مکانهای $\mathbf{r}_1$، $\mathbf{r}_2$، $\cdots$، $\mathbf{r}_i$، $\cdots$ واقع باشند، در این صورت پتانسیل گرانشی در نقطهٔ $\mathbf{r}(x,y,z)$، عبارت است از مجموع پتانسیلهای گرانشی تمام ذرات، یعنی

$$\Phi(x,y,z) = \sum \Phi_i = -G\sum \frac{M_i}{s_i} \qquad (۸.۷.۶)$$

که در آن s_i فاصلهٔ نقطهٔ میدانی $\mathbf{r}(x,y,z)$ از مکان $\mathbf{r}_i(x_i,y_i,z_i)$ ذرهٔ iام است.

$$s_i = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_i| \qquad (۹.۷.۶)$$

میدان برداری $\mathbf{g}$، به‌نام شدت میدان گرانشی، را به طریقی کاملاً مشابه با تعریف میدان اسکالر پتانسیل گرانشی، تعریف می‌کنیم

$$\mathbf{g} = \lim_{m\to 0}\left(\frac{\mathbf{F}}{m}\right) \qquad (۱۰.۷.۶)$$

به این ترتیب، شدت میدان گرانشی عبارت است از نیروی گرانشی واحد جرم که ذرهٔ آزمون به جرم m واقع درنقطهٔ (x,y,z) وارد می‌آید. بدیهی است که اگر نیروی گرانشی بر ذرهٔ آزمون وارد آید، این نیرو عبارت است از

$$\mathbf{F} = m\mathbf{g} \qquad (۱۱.۷.۶)$$

در این صورت می‌دانیم که سایر جرمهای مجاور عامل وجود شدت میدان موضعی $\mathbf{g}$ هستند.[۱] رابطهٔ بین شدت میدان و پتانسیل مانند رابطهٔ بین نیروی $\mathbf{F}$ و انرژی پتانسیل، V، است؛ یعنی

$$\mathbf{g} = -\boldsymbol{\nabla}\Phi \qquad \text{(الف ۱۲.۷.۶)}$$

$$\mathbf{F} = -\boldsymbol{\nabla}V \qquad \text{(ب ۱۲.۷.۶)}$$

شدت میدان گرانشی را می‌توان ابتدا با یافتن تابع انرژی پتانسیل از معادلهٔ (۸.۷.۶) و آنگاه محاسبهٔ گرادیان، به‌دست آورد. این روش معمولاً از روش محاسبهٔ مستقیم میدان از روی قانون عکس مجذور ساده‌تر است. علت این سادگی آن است که انرژی پتانسیل یک جمع اسکالر است، در صورتی که شدت میدان از طریق جمع برداری به‌دست می‌آید. این وضعیت به نظریهٔ میدانهای الکتروستاتیکی خیلی شبیه است. در واقع، می‌توان نتایج متناظر حاصل از مبحث الکتروستاتیک را برای یافتن میدانها و پتانسیلهای گرانشی به‌کاربرد؛ البته با توجه به اینکه در اینجا جرمهای منفی مشابه بار منفی وجود ندارد.

مثال ۱.۷.۶ پتانسیل پوستهٔ کروی یکنواخت

برای مثال، تابع پتانسیل را برای پوستهٔ کروی یکنواخت به‌دست می‌آوریم.

حل:

با استفاده از همان نمادگذاری شکل ۱.۲.۶، داریم

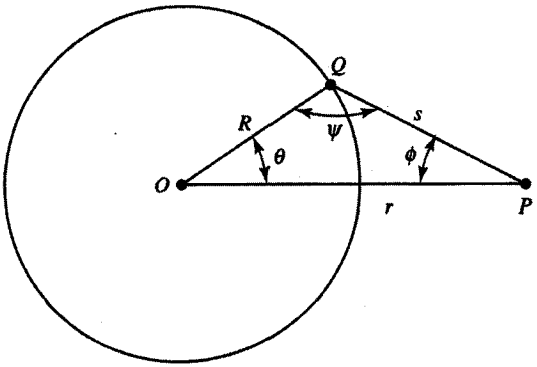
$$\Phi = -G\int \frac{dM}{s} = -G\int \frac{2\pi\rho R^2 \sin\theta d\theta}{s}$$

از رابطهٔ بین s و θ که در معادلهٔ (۵.۲.۶) به‌کار بردیم، پی‌می‌بریم که معادلهٔ قبلی را می‌توان به‌صورت زیر ساده کرد

$$\Phi = -G\frac{2\pi\rho R^2}{rR}\int_{r-R}^{r+R} ds = -\frac{GM}{r} \qquad (۱۳.۷.۶)$$

که M جرم پوسته است. این تابع پتانسیل مانند تابع پتانسیل حاصل از تک ذرهٔ به جرم M واقع در O است. از این‌رو، میدان گرانشی خارج از پوستهٔ مثل آن است که تمام جرم را در مرکز پوسته قرار داده باشند. برای تمرین، با تغییر مناسب انتگرال و حدود آن نشان دهید که پتانسیل در داخل پوسته ثابت، و از این‌رو میدان در آنجا صفر است.

۱. $\mathbf{g}$ شتاب موضعی جرم m ناشی از گرانی است. روی سطح زمین، مقدارش عبارت است از $g = ۹٫۸\mathrm{m/s^2}$، و عمدتاً به جرم زمین بستگی دارد.



شکل ۲.۷.۶ مختصات مربوط به محاسبهٔ میدان گرانشی حلقه.

مثال ۲.۷.۶ پتانسیل و میدان حلقهٔ نازک

اکنون می‌خواهیم تابع پتانسیل و شدت میدان گرانشی را در صفحهٔ حلقهٔ نازک دایره‌ای به‌دست آوریم.

حل:

شعاع حلقه را R و جرم آن را M می‌گیریم. طبق شکل ۲.۷.۶، برای نقطه‌ای که خارج حلقه و در صفحهٔ آن واقع باشد، داریم

$$\Phi = -G\int \frac{dM}{s} = -G\int_{۰}^{۲\pi} \frac{\mu R d\theta}{s}$$

که μ چگالی جرم خطی حلقه است. برای محاسبهٔ انتگرال، ابتدا s را به‌صورت تابعی از θ با به‌کاربردن قانون کسینوسها بیان می‌کنیم:

$$s^{۲} = R^{۲} + r^{۲} - ۲Rr\cos\theta$$

انتگرال به‌صورت زیر در می‌آید

$$\begin{aligned}\Phi &= -۲R\mu G\int_{۰}^{\pi} \frac{d\theta}{(r^{۲}+R^{۲}-۲Rr\cos\theta)^{۱/۲}} \\ &= -\frac{۲R\mu G}{r}\int_{۰}^{\pi} \frac{d\theta}{[۱+(R^{۲}/r^{۲})-۲(R/r)\cos\theta]^{۱/۲}}\end{aligned}$$

ابتدا، به اصطلاح تقریب میدان دور $r > R$ را به‌کار می‌گیریم و انتگرال را به سری توانی $x(= R/r)$ بسط می‌دهیم، و اطمینان می‌یابیم که تمام جملات تا مرتبهٔ $x^۲$ را نگه داشته‌ایم

$$\Phi = -۲x\mu G \int_۰^\pi \left[\left(۱ - \frac{۱}{۲}x^۲ + x\cos\theta \right) + \frac{۳}{۸}(x^۲ - ۲x\cos\theta)^۲ + \cdots \right] d\theta$$

$$= -۲x\mu G \int_۰^\pi \left(۱ - \frac{۱}{۲}x^۲ + x\cos\theta + \frac{۳}{۲}x^۲\cos^۲\theta - \frac{۳}{۲}x^۳\cos\theta + \frac{۳}{۸}x^۴ + \cdots \right) d\theta$$

اکنون، اگر از تمام جملات مرتبهٔ $x^۳$ یا بالاتر چشم بپوشیم و توجه کنیم که انتگرال جملات شامل $\cos\theta$ روی نیم‌دور صفر است، می‌رسیم به

$$\Phi = -۲x\mu G \left(\pi + \pi\frac{x^۲}{۴} + \cdots \right.$$

$$= \frac{-۲\pi R\mu G}{r} \left(۱ + \frac{R^۲}{۴r^۲} + \cdots \right.$$

$$= -\frac{GM}{r} \left(۱ + \frac{R^۲}{۴r^۲} + \cdots \right.$$

شدت میدان در فاصلهٔ r از مرکز حلقه در راستای شعاعی است (چون Φ تابعی از θ نیست) و از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید

$$\mathbf{g} = -\frac{\partial\Phi}{\partial r}\mathbf{e}_r = -\frac{GM}{r^۲}\left(۱ + \frac{۳}{۴}\left(\frac{R}{r}\right)^۲ + \cdots \right)\mathbf{e}_r$$

این میدان از قانون عکس مجذور به‌دست نمی‌آید. اما اگر $R \gg r$، جملهٔ داخل پرانتز به واحد و شدت میدان به میدان عکس مجذور یک ذره به جرم M نزدیک می‌شود. این مطلب برای جسمی محدود، با هر شکلی صادق است؛ یعنی برای فواصلی که در مقایسه با ابعاد خطی جسم بزرگ‌اند، شدت میدان به‌شدت میدان ذرهٔ به جرم M نزدیک می‌شود.

پتانسیل مربوط به نقطه‌ای در نزدیکی مرکز حلقه را می‌توان با استناد به میدان نزدیک، یا تقریب $r < R$، یافت. حل آن کم و بیش مانند قبل انجام می‌شود، اما در این مورد، انتگرالده قبلی را به سری توانی از r/R بسط می‌دهیم تا برسیم به

$$\Phi = -\frac{GM}{R}\left(۱ + \frac{r^۲}{۴R^۲} + \cdots \right.$$

$\mathbf{g}$ را دوباره با مشتق‌گیری می‌توان یافت:

$$\mathbf{g} = \left(\frac{GM}{۲R^۳}r \right)\mathbf{e}_r + \cdots$$

به این ترتیب، یک حلقهٔ مادهٔ نیروی رانشی تقریباً خطی‌ای را، در جهت دورشدن از مرکز، بر ذره‌ای وارد می‌آورد که در جایی نزدیک مرکز حلقه واقع است. آسان است که پی‌ببریم چنین هم باید باشد. فرض کنید جرم کوچکی در مرکز چنین حلقه‌ای به شعاع R باشید که میدان دیدتان هم در جلو و هم در پشت سر زاویهٔ معینی دارد. اگر به‌آهستگی مسافت r را از مرکز دور شوید، ماده‌ای که می‌بینید شما را در جهت جلو می‌رباید با ضریب r کاهش می‌یابد، در صورتی که ماده‌ای که می‌بینید شما را از پشت سر می‌رباید با ضریب r افزایش می‌یابد. اما چون نیروی گرانشی از هر عنصر مادی به‌صورت $1/r^2$ افت می‌کند، نیروی وارد بر شما از سوی جرمِ واقع در جلو و جرم واقع در عقب به‌صورت $1/r$ تغییر می‌کند و بنابراین اختلاف نیرو بین آنها $[1/(R-r) - 1/(R+r)]$ یا متناسب با r به‌ازای $r < R$ است. نیروی گرانشی حلقه اشیاء را از مرکز خود می‌راند (دفع می‌کند).

۸.۶ انرژی پتانسیل در میدان مرکزی عمومی

قبلاً نشان داده‌ایم که میدان مرکزی از نوع عکس مجذوری پایسته است. اکنون این سؤال را بررسی کنیم که آیا هر میدان مرکزی (همسانگرد) نیرو پایسته است یا خیر. میدان مرکزی همسانگرد عمومی را می‌توان از این قرار بیان کرد:

$$\mathbf{F} = f(r)\mathbf{e}_r \qquad (۱.۸.۶)$$

که در آن $\mathbf{e}_r$ بردار شعاعی یکه است. برای بهره‌گیری از آزمون پایسته‌بودن، تاو $\mathbf{F}$ را محاسبه می‌کنیم. در اینجا بهتر است مختصات کروی را به‌کار گیریم که تاو آن در پیوست و داده شده است. می‌رسیم به

$$\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{F} = \frac{1}{r^2 \sin\theta} \begin{vmatrix} \mathbf{e}_r & \mathbf{e}_\theta r & \mathbf{e}_\phi r \sin\theta \\ \dfrac{\partial}{\partial r} & \dfrac{\partial}{\partial \theta} & \dfrac{\partial}{\partial \phi} \\ F_r & rF_\theta & rF_\phi \sin\theta \end{vmatrix} \qquad (۲.۸.۶)$$

در مورد نیروی مرکزی مورد بررسیمان، $F_r = f(r)$، $F_\theta = 0$، و $F_\phi = 0$. بنابراین، تاو تبدیل می‌شود به

$$\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{F} = \frac{\mathbf{e}_\theta}{r \sin\theta} \frac{\partial f}{\partial \phi} - \frac{\mathbf{e}_\phi}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} = 0 \qquad (۳.۸.۶)$$

هر دو مشتق جزئی صفر می‌شوند، زیرا $f(r)$ به مختصات زاویه‌ای θ و ϕ بستگی ندارد. به این ترتیب، تاو صفر می‌شود و از این قرار میدان مرکزی عمومی، بنا بر تعریف معادلهٔ (۱.۸.۶)، پایسته

است. به یاد می‌آوریم که همین آزمون در مورد میدان عکس مجذوری در مثال ۵.۲.۴، به‌کارگرفته شد.

اکنون می‌توانیم تابع انرژی پتانسیل را تعریف کنیم

$$V(r) = -\int_{r_{ref}}^{r} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = -\int_{r_{ref}}^{r} f(r)dr \qquad (۴.۸.۶)$$

که حد پایین r_{ref} مقدار مرجع r است که به‌ازای آن انرژی پتانسیل، بنابر تعریف، صفر است. در مورد نیروهای از نوع توان معکوس، غالباً r_{ref} بینهایت اختیار می‌شود. بنابر معادلهٔ بالا، با معلوم‌بودن تابع نیرو، می‌توان انرژی پتانسیل را محاسبه کرد؛ برعکس، اگر تابع انرژی پتانسیل معلوم باشد، داریم

$$f(r) = -\frac{dV(r)}{dr} \qquad (۵.۸.۶)$$

که از اینجا تابع نیروی میدان مرکزی به‌دست می‌آید.

۹.۶ معادلهٔ انرژی مدار در میدان مرکزی

مجذور سرعت در مختصات قطبی که از معادلات (۷.۱۱.۱) داده می‌شود، به‌صورت زیر است

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 \qquad (۱.۹.۶)$$

به‌علت پایستگی نیروی مرکزی، انرژی کل، $T + V$، ثابت است و داریم

$$\frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + V(r) = E = \text{ثابت} \qquad (۲.۹.۶)$$

نیز، می‌توانیم معادلهٔ (۲.۹.۶) را برحسب متغیر $u = 1/r$ بنویسیم. از معادلات (۷.۵.۶) و (۸.۵.۶) می‌رسیم به

$$\frac{1}{2}ml^2\left[\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + u^2\right] + V(u^{-1}) = E \qquad (۳.۹.۶)$$

معادلهٔ بالا را معادلهٔ انرژی مدار می‌گویند.

مثال ۱.۹.۶

در مثال ۱.۵.۶ برای مدار مارپیچی داشتیم $r = c\theta^{۲}$

$$\frac{du}{d\theta} = \frac{-۲}{c}\theta^{-۳} = -۲c^{۱/۲}u^{۳/۲}$$

از این‌رو، معادلهٔ انرژی مدار عبارت است از

$$\frac{۱}{۲}ml^{۲}(۴cu^{۳} + u^{۲}) + V = E$$

بنابراین،

$$V(r) = E - \frac{۱}{۲}ml^{۲}\left(\frac{۴c}{r^{۳}} + \frac{۱}{r^{۲}}\right)$$

این رابطه فوراً به تابع نیرو در مثال ۱.۵.۶ منجر می‌شود، زیرا $f(r) = -dV/dr$.

۱۰.۶ انرژیهای مداری در میدان عکس مجذور

تابع انرژی پتانسیل برای میدان نیروی عکس مجذور عبارت است از

$$V(r) = -\frac{k}{r} = -ku \qquad (۱.۱۰.۶)$$

از این‌رو معادلهٔ انرژی مدار (معادلهٔ ۳.۹.۶) از این قرار خواهد بود:

$$\frac{۱}{۲}ml^{۲}\left[\left(\frac{du}{d\theta}\right)^{۲} + u^{۲}\right] - ku = E \qquad (۲.۱۰.۶)$$

با حل‌کردن این معادله برحسب $du/d\theta$، ابتدا می‌رسیم به

$$\left(\frac{du}{d\theta}\right)^{۲} + u^{۲} = \frac{۲E}{ml^{۲}} + \frac{۲ku}{ml^{۲}} \qquad (۳.۱۰.۶ \text{ الف})$$

آنگاه

$$\frac{du}{d\theta} = \sqrt{\frac{۲E}{ml^{۲}} + \frac{۲ku}{ml^{۲}} - u^{۲}} \qquad (۳.۱۰.۶ \text{ ب})$$

با جداکردن متغیرها می‌رسیم به

$$d\theta = \frac{du}{\sqrt{\frac{۲E}{ml^{۲}} + \frac{۲ku}{ml^{۲}} - u^{۲}}} \qquad (۳.۱۰.۶ \text{ ج})$$

سه ثابت a، b، و c را به‌صورت زیر معرفی می‌کنیم:

$$a = -۱ \qquad b = \frac{۲k}{ml^۲} \qquad c = \frac{۲E}{ml^۲} \tag{۴.۱۰.۶}$$

در این صورت معادلهٔ (۳.۱۰.۶ ج) را به شکل استاندارد می‌نویسیم تا انتگرال آن را به‌دست آوریم

$$\theta - \theta_۰ = \int \frac{du}{\sqrt{au^۲ + bu + c}} = \frac{۱}{\sqrt{-a}} \cos^{-۱}\left(-\frac{b + ۲au}{\sqrt{b^۲ - ۴ac}}\right) \tag{۵.۱۰.۶}$$

$\theta_۰$ ثابت انتگرال‌گیری است. بازنویسی معادلهٔ (۵.۱۰.۶)، ابتدا می‌دهد:

$$-\frac{b + ۲au}{\sqrt{b^۲ - ۴ac}} = \cos[\sqrt{-a}(\theta - \theta_۰)] \tag{۶.۱۰.۶ الف}$$

سپس این معادله را بر حسب u حل می‌کنیم، می‌رسیم به:

$$u = \frac{\sqrt{b^۲ - ۴ac}}{-۲a} \cos[\sqrt{-a}(\theta - \theta_۰)] + \frac{b}{-۲a} \tag{۶.۱۰.۶ ب}$$

حال $۱/r$ را به‌جای u قرار می‌دهیم و مقادیر ثابتهای a، b، و c را از معادلهٔ (۴.۱۰.۶) در معادلهٔ (۶.۱۰.۶ ب) می‌نشانیم،

$$\frac{۱}{r} = \frac{۱}{۲}\sqrt{\frac{۴k^۲}{m^۲l^۴} + \frac{۸E}{ml^۲}} \cos(\theta - \theta_۰) + \frac{k}{ml^۲} \tag{۷.۱۰.۶ الف}$$

با فاکتورگیری از کمیت $k/ml^۲$ و انتقال آن به بیرون کروشه، می‌رسیم به

$$\frac{۱}{r} = \frac{k}{ml^۲}\left[\sqrt{۱ + \frac{۲Eml^۲}{k^۲}} \cos(\theta - \theta_۰) + ۱\right] \tag{۷.۱۰.۶ ب}$$

که، بعد از ساده‌سازی، معادلهٔ قطبی مدار مشابه معادلهٔ (۱۸.۵.۶ الف) را می‌دهد،

$$r = \frac{ml^۲/k}{۱ + \sqrt{۱ + ۲Eml^۲/k^۲} \cos(\theta - \theta_۰)} \tag{۷.۱۰.۶ ج}$$

اگر مانند قبل قرار دهیم $\theta_۰ = ۰$، که جهت را به سوی نزدیکترین نقطهٔ مدار به مرکز مشخص می‌کند، و این جهت را جهت مرجع اندازه‌گیری زوایای قطبی اختیار و معادلهٔ (۷.۱۰.۶ ج) را با

معادلهٔ (۱۸.۵.۶ ب) مقایسه کنیم، می‌بینیم که دوباره یک مقطع مخروطی را نشان می‌دهد که خروج از مرکز آن عبارت است از

$$\epsilon = \sqrt{1 + \frac{2E}{k}\frac{ml^2}{k}} \qquad (8.10.6)$$

از معادلات (۱۸.۵.۶ الف و ب) و (۱۹.۵.۶) داریم، $\alpha = ml^2/k = (1-\epsilon^2)a$، و با واردکردن این روابط در معادلهٔ (۸.۱۰.۶)، می‌رسیم به:

$$-\frac{2E}{k} = \frac{1-\epsilon^2}{\alpha} = \frac{1}{a} \qquad (9.10.6)$$

یا

$$E = -\frac{k}{2a} \qquad (10.10.6)$$

به این ترتیب، انرژی کل ذره نیم‌قطر بزرگ مدار آن را تعیین می‌کند. اکنون از معادلهٔ (۸.۱۰.۶)، با توجه به مطالب بخش ۵.۶، انرژی کل ذره، E، به‌طور کامل مقطع مخروطی خاصی را تعیین می‌کند که مدار را توصیف می‌کند:

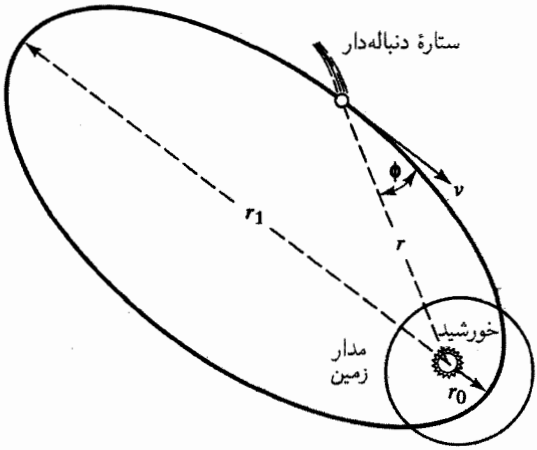
مدارهای بسته (بیضی یا دایره)	$\epsilon < 1$	$E < 0$
مدار سهمی	$\epsilon = 1$	$E = 0$
مدارهای هذلولی	$\epsilon > 1$	$E > 0$

چون $E = T + V$ و ثابت است، مدارهای بسته آنهایی‌اند که برای آنها $T < |V|$ و مدارهای باز عبارت‌اند از مدارهایی که برای آنها $T \geq |V|$.

در میدان گرانشی خورشید، ثابت نیرو عبارت است از $k = GM_\odot m$ که $M_\odot$ جرم خورشید و m جرم جسم است. بنابراین، انرژی کل عبارت است از

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{GM_\odot m}{r} = E = \text{ثابت} \qquad (11.10.6)$$

از این‌رو، بسته به اینکه v^2 کمتر، مساوی، یا بزرگتر از $2GM_\odot/r$ باشد مدار، به‌ترتیب، بیضی، سهمی، یا هذلولی است.



شکل ۱.۱۰.۶ مدار ستارهٔ دنباله‌دار.

مثال ۱.۱۰.۶

وقتی ستارهٔ دنباله‌داری در فاصلهٔ r از خورشید رصد می‌شود، سرعتش v است و جهت حرکت آن با بردار شعاعی از خورشید زاویهٔ ϕ می‌سازد (شکل ۱.۱۰.۶). خروج از مرکز مدار این ستارهٔ دنباله‌دار را به‌دست آورید.

حل:

برای به‌کاربردن فرمول خروج از مرکز (معادلهٔ ۸.۱۰.۶)، مجذور تکانهٔ زاویه‌ای ثابت l را لازم داریم. این کمیت از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$l^2 = |\mathbf{r} \times \mathbf{v}|^2 = (rv \sin \phi)^2$$

به این ترتیب، مقدار خروج از مرکز عبارت است از

$$\epsilon = \left[1 + \left(v^2 - \frac{2GM_\odot}{r} \right) \left(\frac{rv \sin \phi}{GM_\odot} \right)^2 \right]^{1/2}$$

توجه کنید که جرم ستارهٔ دنباله‌دار حذف می‌شود. حال می‌توان حاصلضرب $GM_\odot$ را برحسب سرعت زمین، v_e، و شعاع مداریش، a_e، (به فرض دایره‌ای‌بودن این مدار) بیان کرد؛ یعنی

$$GM_\odot = a_e v_e^2$$

بنابراین، رابطهٔ بالا برای خروج از مرکز به‌صورت زیر در می‌آید:

$$\epsilon = \left[1 + \left(V^2 - \frac{2}{R}\right)(RV\sin\phi)^2\right]^{1/2}$$

که نسبتهای بدون بعد زیر را وارد کرده‌ایم تا محاسبه ساده شود

$$V = \frac{v}{v_e} \qquad R = \frac{r}{a_e}$$

در مثالی عددی، v را نصف سرعت زمین و r را چهار برابر فاصلهٔ زمین تا خورشید می‌گیریم، و اختیار می‌کنیم $\phi = 30^\circ$. در این صورت، $V = 0.5$ و $R = 4$. بنابراین، خروج از مرکز عبارت است از

$$\epsilon = [1 + (0.25 - 0.5)(4 \times 0.5 \times 0.5)^2]^{1/2} = (0.75)^{1/2} = 0.866$$

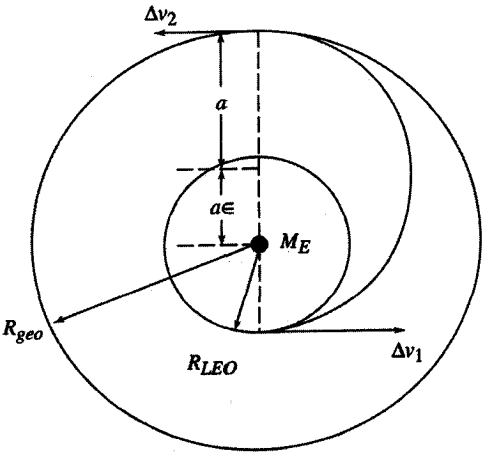
در بیضی کمیت $(1 - \epsilon^2)^{-1/2} - 1$ مساوی نسبت قطر بزرگ (اطول) به قطر کوچک (اقصر) است. برای مدار ستارهٔ دنباله‌دار، در این مثال، مطابق شکل ۱.۱۰.۶، این نسبت عبارت است از $(0.75)^{-1/2} - 1 = 2$ یا ۱ : ۲.

مثال ۲.۱۰.۶

وقتی یک سفینهٔ فضایی در مدار زمینگرد قرار داده شود (مثال ۲.۶.۶)، ابتدا همراه با یک مرحلهٔ پیشران، در مدار دایره‌ای نزدیک یعنی مدار زمینی پایین (LEO)، با به‌کارانداختن یک موشک بالابرنده، پرتاب می‌شود. بعد با مرحلهٔ پیشران دیگری که با شلیک انجام می‌شود، سفینهٔ فضایی به مدار بیضی منتقل می‌شود که آن را در ارتفاع زمینگرد در اوج مداری برساند (شکل ۲.۱۰.۶). در اوج، مرحلهٔ پیشران مجدداً روشن می‌شود تا سفینه را از مدار بیضی خارج کند و در مداری دایره‌ای به مرکز زمین قرار دهد. به این ترتیب، دو بار افزایش سرعت از طریق مرحلهٔ پیشران ضرورت پیدا می‌کند: (الف) Δv_1، برای اینکه ماهواره را از مدار دایره‌ای (LEO) به مدار بیضی منتقل کند و (ب) Δv_2، تا مدار ماهواره را در ارتفاع زمینگرد دایره‌ای کند. افزایش سرعتهای مورد نیاز، Δv_1 و Δv_2، را محاسبه کنید.

حل (الف):

این مسئله را اساساً در مثال ۴.۵.۶ حل کرده‌ایم. ما این مسئله را در اینجا با روشی کمی متفاوت حل می‌کنیم. ابتدا توجه می‌کنیم که بین شعاعهای دو مدار دایره‌ای و نیم‌قطر بزرگ مدار بیضی



شکل ۲.۱۰.۶ افزایش سرعت یک ماهواره زمینی پایین (LEO) به مدار همزمانی با زمین (مدار زمینی).

انتقال (شکل ۲.۱۰.۶) این رابطه برقرار است:

$$R_{LEO} + R_{geo} = ۲a$$

با توجه به شکل می‌بینیم که $R_{LEO} = a(۱ - \epsilon)$ و $R_{geo} = a(۱ + \epsilon)$، به ترتیب، فواصل حضیض و اوج مدار انتقال هستند.

اکنون معادلهٔ انرژی (۱۱.۱۰.۶) را به‌کار می‌بریم تا سرعت در حضیض، v_p، سفینهٔ فضایی را، بعد از افزایش سرعت برای انتقال به مدار بیضی، محاسبه کنیم. انرژی مدار بیضی عبارت است از

$$E = -\frac{GM_E m}{۲a} = \frac{۱}{۲}mv_p^۲ - \frac{GM_E m}{a(۱ - \epsilon)}$$

با حل این عبارت برحسب v_p، می‌رسیم به

$$v_p^۲ = \frac{GM_E}{a}\left(\frac{۱ + \epsilon}{۱ - \epsilon}\right)$$

روابط مربوط به a، $۱ + \epsilon$، و $۱ - \epsilon$ را در معادلهٔ بالا می‌نشانیم:

$$v_a^۲ = \frac{۲GM_E}{R_{LEO} + R_{geo}}\left(\frac{R_{geo}}{R_{LEO}}\right)$$

اکنون، می‌توانیم سرعت ماهواره را در شعاع LEO دایره‌ای با توجه به این شرط محاسبه کنیم:

$$\frac{mv_{LEO}^{۲}}{R_{LEO}} = \frac{GM_E m}{R_{LEO}^{۲}}$$

یا

$$v_{LEO}^{۲} = \frac{GM_E}{R_{LEO}}$$

بعد از کمی عملیات جبری، افزایش سرعت لازم را از این قرار به‌دست می‌آوریم:

$$\Delta v_۱ = v_p - v_{LEO} = \sqrt{\frac{GM_E}{R_{LEO}}}\left[\sqrt{\frac{۲R_{geo}}{R_{LEO}+R_{geo}}} - ۱\right]$$

با یادآوری اینکه $g = GM_E/R_E^{۲}$، داریم

$$\Delta v_۱ = R_E\sqrt{\frac{g}{R_{LEO}}}\left[\sqrt{\frac{۲R_{geo}}{R_{LEO}+R_{geo}}} - ۱\right]$$

مقادیر عددی $R_E = ۶۳۷۱\text{km}$، $R_{LEO} = ۶۶۹۳\text{km}$، و $R_{geo} = ۴۲۴۰۰\text{km}$ را در این رابطه می‌نشانیم

$$\Delta v_۱ = ۸۶۰۰\text{km/h}$$

حل (ب):

انرژی سفینهٔ فضایی در اوج عبارت است از

$$E = -\frac{GM_E m}{۲a} = \frac{۱}{۲}mv_a^{۲} - \frac{GM_E m}{a(۱+\epsilon)}$$

با حل این معادله برحسب سرعت اوج، v_a، می‌رسیم به:

$$v_a^{۲} = \frac{GM_E}{a}\left(\frac{۱-\epsilon}{۱+\epsilon}\right)$$

با نشاندن روابط مربوط به a، $۱-\epsilon$، و $۱+\epsilon$ در رابطهٔ بالا، می‌رسیم به

$$v_a^{۲} = \frac{۲GM_E}{R_{LEO}+R_{geo}}\left(\frac{R_{LEO}}{R_{geo}}\right)$$

مانند قبل، شرط مدار دایره‌ای در این شعاع عبارت است از

$$\frac{mv_{geo}^{۲}}{R_{geo}} = \frac{GM_E m}{R_{geo}^{۲}}$$

بنابراین،

$$v_{geo}^{۲} = \frac{GM_E}{R_{geo}}$$

$$\Delta v_{۲} = v_{geo} - v_a = \sqrt{\frac{GM_E}{R_{geo}}}\left[۱ - \sqrt{\frac{۲R_{LEO}}{R_{LEO}+R_{geo}}}\right]$$

$$= R_E\sqrt{\frac{g}{R_{geo}}}\left[۱ - \sqrt{\frac{۲R_{LEO}}{R_{LEO}+R_{geo}}}\right]$$

مقادیر عددی را می‌نشانیم:

$$\Delta v_{۲} = ۵۲۶۹\text{km/h}$$

توجه کنید که افزایش سرعت کل

$$\Delta v_{۱} + \Delta v_{۲} = ۸۶۰۰\text{km/h} + ۵۲۶۹\text{km/h} = ۱۳۸۶۹\text{km/h}$$

ضروری برای سیستم پیشران سفینهٔ فضایی، برای اینکه سفینهٔ فضایی را در مدار نهایی (مدار geo) قرار دهد تقریباً ۵۰٪ افزایش سرعت لازم برای پرتاب به مدار پایین زمینی LEO است!

۱۱.۶ حدود حرکت شعاعی: پتانسیل مؤثر

دیدیم که تکانهٔ زاویه‌ای ذرهٔ متحرک در هر میدان مرکزی همسانگرد، آن طورکه به کمک معادله‌های (۴.۵.۶) و (۵.۵.۶) تعریف‌کنندهٔ l بیان شد، ثابت حرکت است. به این ترتیب، می‌توانیم معادلهٔ انرژی کل (معادلهٔ ۲.۹.۶) را از این قرار بنویسیم:

$$\frac{m}{۲}\left(\dot{r}^{۲} + \frac{l^{۲}}{r^{۲}}\right) + V(r) = E \qquad \text{(۱.۱۱.۶ الف)}$$

یا

$$\frac{m}{۲}\dot{r}^{۲} + U(r) = E \qquad \text{(۱.۱۱.۶ ب)}$$

که در آن

$$U(r) = \frac{ml^2}{2r^2} + V(r) \qquad (ج\ ۱.۱۱.۶)$$

تابع $U(r)$ را، که در اینجا تعریف شد، پتانسیل مؤثر می‌نامند. جملهٔ $ml^2/2r^2$ را پتانسیل مرکزگریز می‌گویند. با توجه به معادلهٔ (۱.۱۱.۶ ب)، می‌بینیم که تا جایی که به حرکت شعاعی مربوط می‌شود، این ذره دقیقاً مانند ذره‌ای به جرم متحرک m در یک بعد تحت تأثیر تابع انرژی پتانسیل $U(r)$ رفتار می‌کند؛ همان‌طورکه در بخش ۳.۳ در خصوص حرکت هماهنگ بحث کردیم، حدود حرکت شعاعی (نقاط برگشت)، با قراردادن $\dot{r} = 0$ در معادلهٔ (۱.۱۱.۶ ب)، به‌دست می‌آید. به این جهت، این حدود عبارت‌اند از ریشه‌های معادلهٔ

$$U(r) - E = 0 \qquad (الف\ ۲.۱۱.۶)$$

یا

$$\frac{ml^2}{2r^2} + V(r) - E = 0 \qquad (ب\ ۲.۱۱.۶)$$

علاوه بر این، مقادیر مجاز r، عبارت‌اند از مقادیری که به‌ازای آنها $U(r) \leq E$؛ زیرا $\dot{r}^2$ باید مثبت یا صفر باشد.

بنابراین، می‌توانیم حدود حرکت شعاعی را بدون اینکه چیزی دربارهٔ مدار بدانیم، تعیین کنیم. نمودار نمایش تغییرات $U(r)$ را در شکل ۱.۱۱.۶ مشاهده می‌کنید. همچنین، حدود شعاعی r_0 و r_1 به‌ازای مقدار خاص انرژی کل E نشان داده شده‌اند. این نمودار برای قانون عکس مجذور، یعنی کمیت زیر، ترسیم شده است:

$$U(r) = \frac{ml^2}{2r^2} - \frac{k}{r} \qquad (۳.۱۱.۶)$$

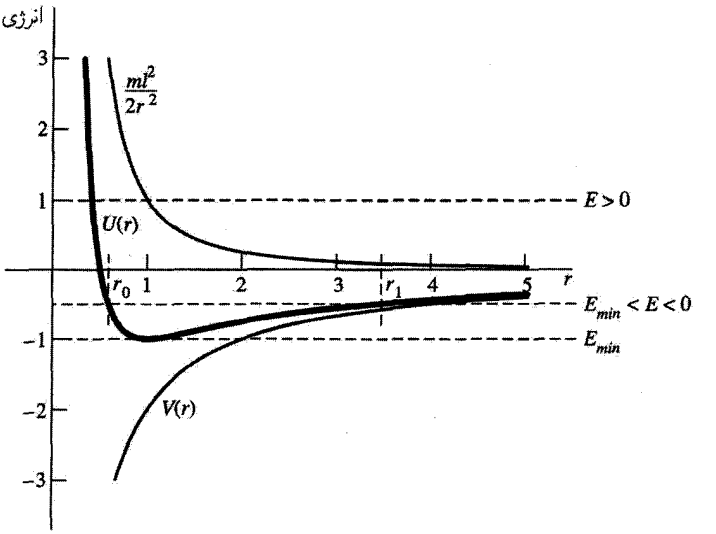
در این حالت معادلهٔ (۲.۱۱.۶ الف)، بعد از بازآرایی جملات، به‌صورت زیر در می‌آید:

$$-2Er^2 - 2kr + ml^2 = 0 \qquad (۴.۱۱.۶)$$

که معادلهٔ درجهٔ دومی برحسب r است. دو ریشهٔ این معادله عبارت‌اند از

$$r_{1,0} = \frac{k \pm (k^2 + 2Eml^2)^{1/2}}{-2E} \qquad (۵.۱۱.۶)$$

که مقادیر بیشینه (علامت بالایی) و کمینهٔ (علامت پایینی) فاصلهٔ شعاعی r را تحت قانون عکس مجذور نیرو به‌دست می‌دهد.



شکل ۱.۱۱.۶ پتانسیل مؤثر و حدود حرکت شعاعی برای قانون نیروی عکس مجذور.

وقتی $E < 0$، مدارها مقید، هر دو ریشه مثبت‌اند، و مدار حاصل بیضی است که r_0 و r_1، به‌ترتیب، فواصل حضیض و اوج‌اند. وقتی انرژی با مقدار ممکن کمینه‌اش مساوی باشد:

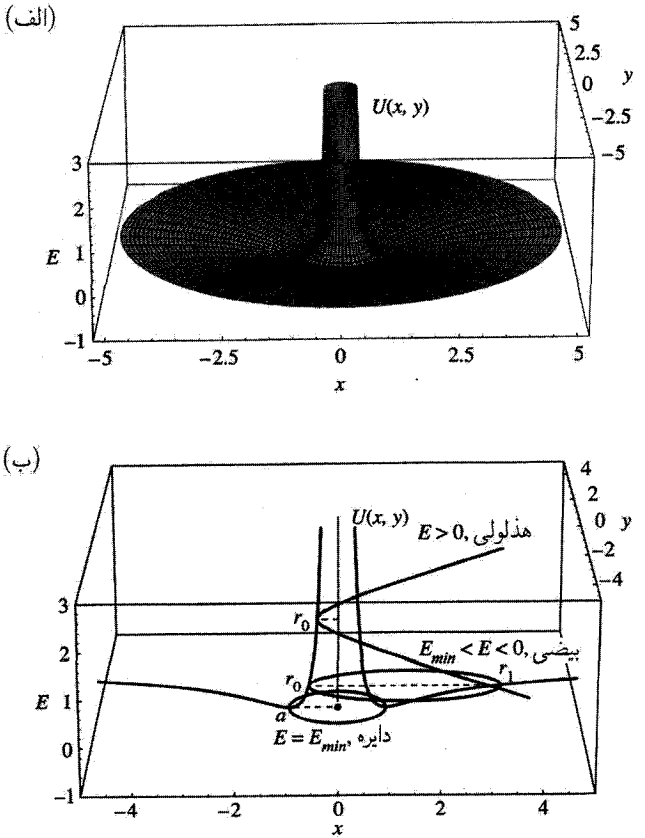
$$E_{\min} = -\frac{k^2}{2ml^2} \qquad (۶.۱۱.۶)$$

در این صورت معادلهٔ (۵.۱۱.۶) فقط یک ریشه دارد که به کمک این رابطه بیان می‌شود:

$$r_0 = -\frac{k}{2E_{\min}} \qquad (۷.۱۱.۶)$$

که مدارش دایره است. توجه کنید که این نتیجه را نیز می‌توان از معادلهٔ (۱۰.۱۰.۶) $(a = -k/2E)$ به‌دست آورد، چون برای حالت مدار دایره‌ای، داریم: $r_0 = a$. وقتی $E \geq 0$، معادلهٔ (۵.۱۱.۶) فقط یک ریشهٔ حقیقی مثبت، متناظر با سهمی $(E = 0)$ یا هذلولی $(E > 0)$، دارد.

چون پتانسیل مؤثر ذره تقارن محوری دارد، شکلش را در دو بعد می‌توان با چرخش منحنی در شکل ۱.۱۱.۶ حول محور قائم (محور انرژی) تشکیل داد. شکل دوبعدی حاصل را در شکل ۲.۱۱.۶ (الف) مشاهده می‌کنید. مدار ذره را می‌توان مطابق آنچه در این شکل‌آمده و به صفحهٔ افقی با انرژی ثابت E مقید است، مجسم کرد. اگر انرژی ذره عبارت باشد از $E < 0$، مقطع صفحه با رویهٔ پتانسیل مؤثر، دایره‌ای داخلی به شعاع r_0 تشکیل می‌دهد که سد مرکزگریزِ نفوذناپذیر مرکزی



شکل ۲.۱۱.۶ (الف) پتانسیل مؤثر برای قانون نیروی عکس مجذور در دو بعد. (ب) رابطهٔ بین انرژی کل E و پتانسیل مؤثر و مدارهای حاصل.

را مشخص می‌کند، به‌علاوهٔ یک دایرهٔ خارجی به شعاع r_1 که دورترین نقطهٔ گریز را از مرکز ربایش به نمایش می‌گذارد. حرکت ذره در داخل ناحیهٔ بین این دو حد مقید می‌شود. اگر انرژی ذره با مقدار ممکن کمینه‌اش مساوی باشد، $E = E_{\min}$، این دو دایره به یک دایره همگرا می‌شوند و کمینهٔ رویهٔ پتانسیل مؤثر را ترسیم می‌کند. ذره به آن دایره مقید می‌شود. اگر انرژی ذره $E \geq 0$ باشد مقطع تنها یک دایره به شعاع r_0 حول سد مرکزگریز می‌سازد و ذره فقط عبورش به آن ناحیه ممنوع می‌شود؛ به بیان دیگر، ذره آزاد است تا در امتداد یکی از مسیرهای سهمی یا هذلولی به بینهایت بگریزد.

نمایش پتانسیل مؤثر به‌صورت توری، در شکل ۲.۱۱.۶ (ب)، در شکل ۲.۱۱.۶ (الف) به‌صورت ساده و خلاصه (به استثنای دو منحنی شعاعی در جهت $\pm x$) ارائه شده و نشان می‌دهد

که وقتی انرژی (در مقیاس یکاهای مناسب)، به‌ترتیب، ۱−، ۱/۲−، و ۱+ باشد، مدارها به‌صورت دایره، بیضی، و هذلولی‌اند. توجه کنید که در تمام موارد، ذره مقید است در ناحیه‌ای از صفحهٔ انرژی ثابت خود حرکت کند که در آن مقدار، انرژیش بر مقدار پتانسیل مؤثر در آن نقطه فزونی داشته باشد.

مثال ۱.۱۱.۶

نیم‌قطر بزرگ مدار ستارهٔ دنباله‌دار را در مثال ۱.۱۰.۶ بیابید.

حل:
از معادلهٔ (۱.۱۰.۶)، مستقیماً به رابطهٔ زیر می‌رسیم

$$a = \frac{k}{-۲E}\frac{GM_{\odot}m}{-۲\left(\frac{mv^{۲}}{۲}-\frac{GM_{\odot}m}{r}\right)}$$

که m جرم ستارهٔ دنباله‌دار است. بدیهی است که m دوباره حذف می‌شود؛ همچنین همان‌طور که قبلاً بیان شد، $GM_{\odot}=a_e v_e^{۲}$. از این‌رو، نتیجهٔ نهایی رابطهٔ ساده زیر است:

$$a=\frac{a_e}{(۲/\mathrm{R})-\mathrm{V}^{۲}}$$

که R و V در مثال ۱.۱۰.۶ تعریف شده‌اند.
به‌ازای مقادیر عددی قبلی، $\mathrm{R}=۴$ و $\mathrm{V}=۰ر۵$، می‌رسیم به $a=a_e/[۰ر۵-(۰ر۵)^{۲}]=۴a_e$.

از مثالهای ۱.۱۰.۶ و ۲.۱۰.۶، این نکتهٔ مهم آشکار می‌شود که پارامترهای مداری از جرم جسم مستقل‌اند. دانه‌ای شن، سفینه‌ای فضایی، یا ستاره‌ای دنباله‌دار، اگر جملگی مکان اولیه، سرعت اولیه، و جهت حرکت اولیهٔ یکسان داشته باشند، همه باید مدارهایی یکسان طی کنند، به شرط آنکه اجسام دیگری چندان نزدیک آنها واقع نباشند که بر حرکتشان تأثیر بگذارند (البته، همچنین فرض می‌کنیم که جرم جسم در مقایسه با جرم خورشید ناچیز باشد).

۱۲.۶ مدارهای تقریباً دایره‌ای در میدانهای مرکزی: پایداری

تشکیل مدار دایره‌ای تحت تأثیر هرگونه نیروی مرکزی ربایشی امکان‌پذیر است، ولی همهٔ نیروهای مرکزی به تشکیل مدارهای دایره‌ای پایدار منجر نمی‌شوند. می‌خواهیم دربارهٔ این پرسش تحقیق کنیم: اگر در حرکت ذره‌ای در مدار دایره‌ای اندکی اختلال پدید آید، آیا مدارهای بعدی کماکان در

نزدیکی مدار دایره‌ای اصلی باقی خواهند ماند؟ برای پاسخ این پرسش به معادلهٔ دیفرانسیل شعاعی حرکت (معادلهٔ ۲.۵.۶ الف) رجوع می‌کنیم. چون $\dot{\theta} = l/r^۲$ می‌توانیم معادلهٔ شعاعی را به این قرار بنویسیم:

$$m\ddot{r} = \frac{ml^۲}{r^۳} + f(r) \qquad (۱.۱۲.۶)$$

[این معادله، به معادلهٔ دیفرانسیل حرکت یک‌بعدی تحت تأثیر پتانسیل مؤثر $U(r)=(ml^۲/۲r^۲)+V(r)$، شبیه است، در نتیجه $m\ddot{r} = -dU(r)/dr = (ml^۲/r^۳) - dV(r)/dr$.]

اکنون در مدار دایره‌ای، r ثابت است و $\ddot{r} = ۰$. بنابراین، اگر شعاع مدار دایره‌ای را a بنامیم، برای نیرو در وضعیت $r = a$، داریم

$$-\frac{ml^۲}{a^۳} = f(a) \qquad (۲.۱۲.۶)$$

بهتر است حرکت شعاعی برحسب متغیر x بیان شود که، بنا به تعریف، عبارت است از

$$x = r - a \qquad (۳.۱۲.۶)$$

بنابراین، معادلهٔ دیفرانسیل حرکت شعاعی از این قرار خواهد شد:

$$m\ddot{x} = ml^۲(x+a)^{-۳} + f(x+a) \qquad (۴.۱۲.۶)$$

با بسط دو جملهٔ شامل $x + a$ به سری توانی x، می‌رسیم به

$$m\ddot{x} = ml^۲a^{-۳}\left(۱ - ۳\frac{x}{a} + \cdots\right) + [f(a) + f'(a)x + \cdots] \qquad (۵.۱۲.۶)$$

اگر از جمله‌های شامل $x^۲$ و توانهای بالاتر چشم بپوشیم، معادلهٔ (۵.۱۲.۶) با استفاده از رابطهٔ نموده‌شده در معادلهٔ (۲.۱۲.۶) به‌صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$m\ddot{x} + \left[-\frac{۳}{a}f(a) - f'(a)\right]x = ۰ \qquad (۶.۱۲.۶)$$

اکنون، اگر ضریب x (کمیت داخل کروشه) در معادلهٔ بالا مثبت باشد، در آن صورت، این معادله با معادلهٔ نوسانگر هماهنگ ساده یکی است. در این حالت، اگر ذره مختل شود، حول دایرهٔ $r = a$ نوسان هماهنگ اجرا می‌کند. از این‌رو، مدار دایره‌ای، یک مدار پایدار است. از سوی دیگر، اگر ضریب x منفی باشد، حرکت نانوسانی است و در نتیجه، سرانجام x به‌طور نمایی با زمان افزایش

می‌یابد و در نتیجه مدار ناپایدار است. (اگر ضریب x صفر باشد، در این صورت جمله‌های بالاتر این بسط را باید اختیارکرد تا پایداری آشکار شود). بنابراین، می‌توان گفت که مدار دایره‌ای به شعاع a در صورتی پایدار است که تابع نیروی $f(r)$ در نامساوی زیر صدق کند:

$$f(a)+\frac{a}{۳}f'(a)<۰ \qquad (۷.۱۲.۶)$$

مثلاً، اگر تابع نیروی شعاعی به‌صورت قانون توانی باشد، یعنی

$$f(r)=-cr^n \qquad (۸.۱۲.۶)$$

در این صورت، شرط پایداری عبارت است از

$$-ca^n-\frac{a}{۳}cna^{n-۱}<۰ \qquad (۹.۱۲.۶)$$

که تبدیل می‌شود به:

$$n>-۳ \qquad (۱۰.۱۲.۶)$$

به این ترتیب، قانون عکس مجذور $(n=-۲)$، مانند قانون تناسب مستقیم با فاصلهٔ $(n=۱)$، مدارهای دایره‌ای پایدار تشکیل می‌دهد. حالت اخیر همان حالت نوسانگر هماهنگ همسانگرد دوبعدی است. در مورد عکس توان چهارم $(n=-۴)$ مدارهای دایره‌ای ناپایدارند. می‌توان نشان داد که مدارهای دایره‌ای برای قانون عکس مکعب $(n=-۳)$ نیز ناپایدارند. برای نشان‌دادن این نکته، لازم است دو معادلهٔ شعاعی جملات حاوی توانهای بالاتر از یک را به حساب آورد. (مسئلهٔ ۲۶.۶)

۱۳.۶ نقاط و زوایای اوج و حضیض در مدارهای تقریباً دایره‌ای

اوج و حضیض، یا حدّ دوری و نزدیکی، عبارت است از نقطه‌ای از مدارکه بردار شعاعی مقدار فرین (بیشینه یا کمینه) را می‌گیرد. نقاط حضیض خورشیدی و اوج خورشیدی، نقاط فرین مدارهای سیاره‌ای به شمار می‌آیند. زاویه‌ای راکه بردار شعاعی بین دو نقطهٔ فرین متوالی جارو می‌کند، زاویهٔ اوج و حضیضی نامند. بنابراین، زاویهٔ اوج و حضیضی مدارهای بیضی شکل، بنابر قانون نیروی عکس مجذوری، π است.

دیده‌ایم که، در حالت حرکت در مدار تقریباً دایره‌ای، r حول دایرهٔ $r=a$ (در صورت پایداربودن مدار) نوسان می‌کند. از معادلهٔ (۶.۱۲.۶) نتیجه می‌شود که دورهٔ تناوب، τ_r، این نوسان

عبارت است از

$$\tau_r = ۲\pi \left[\frac{m}{-(۳/a)f(a) - f'(a)}\right]^{۱/۲} \qquad (۱.۱۳.۶)$$

در این حالت، زاویهٔ اوج و حضیضی درست برابر با مقدار افزایش زاویهٔ قطبی θ در مدت‌زمانی است که r از مقدار کمینه به مقدار بیشینهٔ بعدی خود نوسان می‌کند. بدیهی است که این زمان عبارت است از $\tau_r/۲$. حال چون $\dot{\theta} = l/r^۲$، پس $\dot{\theta}$ تقریباً ثابت باقی می‌ماند و می‌توانیم بنویسیم

$$\dot{\theta} \approx \frac{l}{a^۲} = \left[-\frac{f(a)}{ma}\right]^{۱/۲} \qquad (۲.۱۳.۶)$$

آخرین مرحلهٔ معادلهٔ (۲.۱۳.۶) از معادلهٔ (۲.۱۲.۶) نتیجه می‌شود. بنابراین زاویهٔ اوج و حضیضی از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$\psi = \frac{۱}{۲}\tau_r\dot{\theta} = \pi\left[۳ + a\frac{f'(a)}{f(a)}\right]^{-۱/۲} \qquad (۳.۱۳.۶)$$

از این‌رو، برای قانون توانی نیرو، $f(r) = -cr^n$، می‌رسیم به:

$$\psi = \pi(۳+n)^{-۱/۲} \qquad (۴.۱۳.۶)$$

در این مورد زاویهٔ اوج و حضیضی از اندازهٔ مدار مستقل است. در مورد قانون عکس مجذور $(n=-۲)$ که برای آن $\psi = \pi$ و در مورد قانون خطی $(n=۱)$ که در مورد آن $\psi = \pi/۲$، مدار، بازگشتی یا تکرارشونده است. ولی اگر مثلاً $n=۲$، در این صورت $\psi = \pi/\sqrt{۵}$، که مضرب گنگی است از π، و بنابراین حرکت خودش را تکرار نمی‌کند.

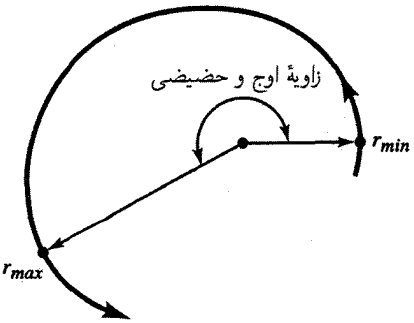
اگر قانون نیرو اندکی از قانون عکس مجذور تخطی کند، نقاط اوج و حضیض، بسته به اینکه زاویهٔ اوج و حضیضی از π اندکی بزرگتر یا کوچکتر باشد، دائماً به پیش یا پس می‌رود (شکل ۱.۱۳.۶).

مثال ۱.۱۳.۶

فرض کنید میدان نیروی گرانشی سیارهٔ عطارد از این قرار باشد

$$f(r) = -\frac{k}{r^۲} + \epsilon r$$

که ϵ خیلی کوچک است. جملهٔ اول میدان گرانشی مربوط به خورشید، و جملهٔ دوم اختلال رانشی ناشی از حلقه‌ای از ماده به شمار می‌آید که آن را احاطه کرده است. فرض کنیم که این توزیع ماده



شکل ۱.۱۳.۶ نمایش زاویهٔ اوج و حضیضی.

مدلی ساده از آثار گرانشی تمام سیارات دیگر، عمدتاً مشتری، را نشان دهد. اختلال برای نقاط نزدیک به خورشید و در صفحهٔ اطراف حلقه، همان‌طور که قبلاً در مثال ۲.۷.۶ توضیح داده شد، خطی است. زاویهٔ اوج و حضیضی، با توجه به معادلهٔ (۳.۱۳.۶)، عبارت است از

$$\begin{aligned}\Psi &= \pi\left(3 + a\frac{2ka^{-3}+\epsilon}{-ka^{-2}+\epsilon a}\right)^{-1/2}\\ &= \pi\left(\frac{1-4k^{-1}\epsilon a^3}{1-k^{-1}\epsilon a^3}\right)^{-1/2} = \pi\left(1-\frac{\epsilon}{k}a^3\right)^{1/2}\left(1-4\frac{\epsilon}{k}a^3\right)^{-1/2}\\ &\approx \pi\left(1-\frac{1}{2}\frac{\epsilon}{k}a^3\right)\left(1+2\frac{\epsilon}{k}a^3\right)\\ &\approx \pi\left(1+\frac{3}{2}\frac{\epsilon}{k}a^3\right)\end{aligned}$$

در مرحلهٔ آخر، از قضیهٔ بسط دوجمله‌ای برای بسط جملات داخل کروشه به توانهای ϵ/k بهره بردیم و فقط جملات مرتبهٔ اول را نگه داشتیم. زاویهٔ اوج و حضیضی، اگر ϵ مثبت باشد، افزایش می‌یابد، و اگر ϵ منفی باشد، به عقب برمی‌گردد.

در سال ۱۸۷۷، اوربن لوویریه، با بهره‌گیری از روشهای اختلال (نظریهٔ اختلال) موفق شد آثار گرانشی تمام سیارات شناخته‌شده بر مدار سیاره‌ای دیگر را محاسبه کند. او پی‌برد که زاویه‌های اوج و حضیضی، بسته به اینکه سیاره کدام باشد، به جلو یا عقب می‌روند که با نظریه به‌خوبی سازگارند، و در این مورد، استثنای منحصر به‌فرد عطارد است. رصدهایی از گذارهای خورشیدی عطارد از سال ۱۶۳۱ به بعد، جلورفتن نقطهٔ حضیض مدارش را به اندازهٔ $565''$ ثانیهٔ قوسی در طی یک قرن نشان دادند. طبق نظر لوویریه، باید فقط جلورفتن ۵۲۷ ثانیهٔ قوسی را در طی یک قرن نشان می‌داد،

که وی به اختلاف ″۳۸ برخورد کرد. سیمون نیوکُمب (۱۹۰۹ـ۱۸۳۵)، رئیس ادارهٔ سالنامهٔ دریایی امریکا، محاسبات لووریه را اصلاح کرد و در شروع قرن بیستم، مقادیر پذیرفته‌شده برای جلورفتن حضیض عطارد در یک قرن، به ترتیب ″۵۷۵ و ″۵۳۴ بودند، که آن اختلاف به ″۲ ± ″۴۱ می‌رسید. لووریه خودش فکر کرده بود این اختلاف واقعی است و می‌تواند به علت وجود سیاره‌ای تا آن موقع نامرئی به قطر حدود ۱۰۰۰ مایل باشد که حول خورشید دایره‌ای را طی می‌کند و مدار آن در داخل مدار عطارد و به فاصلهٔ ۰٫۲AU از آن قرار دارد. (به‌آسانی می‌توانید مثال قبلی را تعمیم دهید و نشان دهید که یک سیارهٔ داخلی باید باعث جلورفتن حضیض مدار عطارد با ضریب δ/ka^2 شده باشد.) لووریه این سیاره نامرئی را وولکان نامید. چنین سیاره‌ای هرگز یافت نشد.

آساف هال (۱۹۰۷ـ۱۸۲۹)، کاشف اقمار مریخ در سال ۱۸۷۷، توضیح ممکن دیگری را در این مورد پیش کشید. وی اظهارنظر کرد که توان در قانون گرانش نیوتون شاید دقیقاً ۲ نباشد، بلکه ۲٫۰۰۰۰۰۰۱۶۱۲ و چارهٔ کار و حل مشکل باید در همین جا نهفته باشد. اینشتین چنین استدلال کرد که این مغایرت در مدار عطارد را می‌توان «در چارچوب مکانیک کلاسیک فقط با پیش‌کشیدن فرضیه‌هایی با احتمال اندک که منحصراً برای این منظور پرداخته می‌شوند» توضیح داد. البته، این مغایرت را خود اینشتین طی مقاله‌ای که در سال ۱۹۱۵ به آکادمی برلین ارائه کرد، به‌زیبایی توضیح داد. این مقاله بر مبنای محاسبات اینشتین در نسبیت عام استوار بود، حتی قبل از آنکه این نظریه را به‌خوبی کامل کرده باشد. به این ترتیب، در اینجا از اختلاف بین مشاهده و نظریهٔ موجود، رویداد بسیار چشمگیری را در اختیار داریم که به تأیید نظریه‌ای کاملاً جدید انجامید.

اگر خورشید به اندازهٔ کافی یَخ (به شکل توپ فوتبال) باشد، میدان گرانشی آن پیرو قانون عکس مجذور منحرف می‌شود و حضیض مدار عطارد باید به جلو رود. تا این تاریخ اندازه‌گیریها برای تأیید این فرض به‌صورت توضیح ممکن این مشکل موفق نبوده‌اند. ولی آثار مشابه در مورد ماهواره‌های مصنوعی در مدار زمین مشاهده شده‌اند. اگر ماهواره در صفحهٔ استوایی واقع نباشد، نه فقط نقطهٔ حضیض مدار ماهواره جلو می‌رود، بلکه صفحهٔ مدار حرکت تقدیمی هم اجرا می‌کند. تجزیه و تحلیل مبسوط این مدارها نشان می‌دهد که زمین اساساً «گلابی‌شکل و قدری موج‌دار است».

۱۴.۶ حرکت در میدان رانشی عکس مجذور پراکندگی ذرات آلفا

عجب آنکه از بزرگترین دستاوردهای مکانیک نیوتونی این است که خودش حاوی بذرهای ویرانی خودش بود. در سال ۱۹۱۱، ارنست رادرفورد (۱۹۳۷ـ۱۸۷۱)، سیر تلاش برای حل مسئلهٔ پراکندگی ذرات آلفا به‌وسیلهٔ برگه‌های نازک فلزی، به‌سوی همان سرچشمهٔ مکانیک کلاسیک، یعنی

پرینکیپیای ایساک نیوتون، دست نیاز درازکرد. بر خلاف عقاید همگانی، در فرایند یافتن جوابی برای این مسئله که مبتنی بر مکانیک کلاسیک باشد، نظریهٔ هستهٔ اتم متولد شد؛ ایده‌ای که برای همیشه در داخل حصارهای پارادایم (الگو) کلاسیک نامفهوم باقی ماند. یک نظریهٔ کامل و خودسازگار هستهٔ اتم فقط وقتی ظاهر می‌شود که مفاهیم و تصورات نیوتونی را پس براند و به‌جای آنها مفاهیم نوظهور و بهت‌آور مکانیک کوانتومی را قرار داده باشد. نه اینکه مکانیک نیوتونی «اشتباه» بوده است؛ مفاهیمش که زمانی به‌خوبی کارآمد و کارساز بودند باز هم اگر در دنیای بزرگ‌مقیاس سقوط گلوله و سیارات چرخان به‌کارگرفته شود به‌خوبی عمل می‌کند؛ ولی وقتی در دنیای کوچک‌مقیاس اتمها و هسته‌ها وارد شد، ناتوانیش را کاملاً عیان کرد. طراحان قوانین فیزیک کوانتومی آنها را چنان تدوین کردند که نتایج محاسبات بر مبنای این قوانین جدید با نتایج مکانیک نیوتونی، وقتی در مورد مسائل جهان بزرگ‌مقیاس به کار برده شد، سازگاری داشته باشد. مشاهده شد که حوزه و گسترهٔ فیزیک نیوتونی نه اینکه «اشتباه» بوده، بلکه محدود شده است، و کاربَرهایش از آن زمان به بعد باید نسبت به این محدویتها آگاهی داشته باشند.

در اوایل دههٔ ۱۹۰۰، فکر می‌کردند اتم نوعی قطرهٔ مختل‌شده با بار مثبت است که الکترونهای منفی باری را در برگرفته است که آنها را ج. ج. تامسون (۱۹۴۰ـ۱۸۵۶) در سال ۱۸۹۷ کشف کرد. این مدل را ابتدا لرد کلوین (۱۹۰۷ـ۱۸۲۴) در سال ۱۹۰۲ پیشنهاد کرد ولی یک سال بعد تامسون آن را از لحاظ ریاضی اصلاح کرد و پالود. تامسون با تأکید بر پایداری مکانیکی و الکتریکی سیستم، این مدل را تدوین کرد. این مدل را به افتخارش اتم تامسون نامیده‌اند.

در سال ۱۹۰۷، رادرفورد در دانشگاه منچستر سمتی را پذیرفت که در آنجا به هانس گایگر (۱۹۴۵ـ۱۸۸۲) فیزیکدان تجربی جوان برجستهٔ آلمانی برخورد کرد؛ گایگر درصدد اجرای برنامه‌ای تجربی بود که برای بررسی اعتبار اتم تامسون طراحی کرده بود. ایدهٔ او این بود که باریکه‌ای از ذرات آلفا را که همان روزها کشف شده بود و از اتمهای رادیواکتیو منتشر می‌شد، به‌طور مستقیم به سوی برگه‌های نازک فلزی بتاباند. تجزیه و تحلیل مبسوط شیوهٔ پراکنده‌شدن این ذرات باید اطلاعاتی از ساختار اتم فراهم می‌آورد. گایگر به کمک ارنست مارسدن، دانشجوی جوان، این تحقیقات را چند سالی بود که پیش می‌برد. اوضاع کم و بیش مطابق انتظار پیش می‌رفت، با این تفاوت که چند پراکندگی با زاویهٔ بزرگتر از آنکه با مدل تامسون انطباق داشته باشد، به‌وقوع می‌پیوستند. در واقع، بعضی ذرات آلفا با زاویهٔ 180° به‌طور کامل به عقب پراکنده می‌شدند. وقتی رادرفورد از این موضوع با خبر شد حیرت کرد، مثل این بود که قطار باری در حال حرکت به جلو در تصادف با جوجه‌ای که در وسط مسیر حرکتش نشسته، به عقب رانده شود.

رادرفورد، در جستجوی مدلی که منجر به چنان نیروی بزرگی شود که بر پرتابهٔ سریعی وارد

آمده باشد، ستاره‌ای دنباله‌دار را مجسم کرد که دور خورشید می‌گردد و مجدداً بازگشت می‌کند، درست مانند ذرات آلفایی که در زوایای بزرگ پراکنده می‌شوند. این نگرش، مداری هذلولی را برای ذرات آلفای مثبت باری را که جذب هستهٔ منفی باری شده بودند، در نظر می‌گرفت. البته، رادرفورد پی‌برد که تنها مورد مهم در دینامیک این مسئله ماهیت عکس مجذوری قانون است که، همان‌طور که دیدیم، به ایجاد مقاطع مخروطی به عنوان جوابهای مدار منجر می‌شود. چه نیرو ربایشی باشد و چه رانشی، فرقی در ماهیت این موضوع نمی‌کند. رادرفورد سپس قضیه‌ای هندسی را دربارهٔ مقاطع مخروطی به‌خاطر آورد که بین خروج از مرکز هذلولی با زاویهٔ بین مجانبهایش رابطه برقرار می‌کرد. وی با بهره‌گیری از این قضیه، در کنار پایستگی تکانهٔ زاویه‌ای و انرژی، جواب کاملی برای مسئلهٔ پراکندگی ذرهٔ آلفا به‌دست آورد، که با داده‌های گایگر و مارسدن به‌خوبی منطبق بود. به این ترتیب، مدل رایج اتم هسته‌ای پای بر عرصهٔ وجود نهاد.

این مسئله را بعداً حل می‌کنیم اما آگاه باشید که جوابی یکسان برای نیروی ربایشی می‌توانست به‌دست آید. این جواب چیزی دربارهٔ علامت بار هسته نمی‌گوید. این علامت با توجه به برهانهای دیگر روشن می‌شود.

ذره‌ای با بار q و جرم m (ذرهٔ فرودی سریع) را در نظر بگیرید که از نزدیکی ذره‌ای سنگین به بار Q (هسته، که ثابت فرض می‌شود) عبور کند. ذرهٔ فرودی با نیرویی رانده می‌شود که به‌کمک قانون کولن به‌شرح زیر به‌دست می‌آید:

$$f(r) = \frac{Qq}{r^2} \qquad (۱.۱۴.۶)$$

مکان Q در مبدأ اختیار می‌شود. (یکاهای cgs الکتروستاتیکی را برای Q و q به‌کار می‌بریم. بنابراین، r برحسب سانتی‌متر و نیرو برحسب دین است.) از این‌رو معادلهٔ دیفرانسیل مدار (معادلهٔ ۱۲.۵.۶) به این قرار خواهد شد:

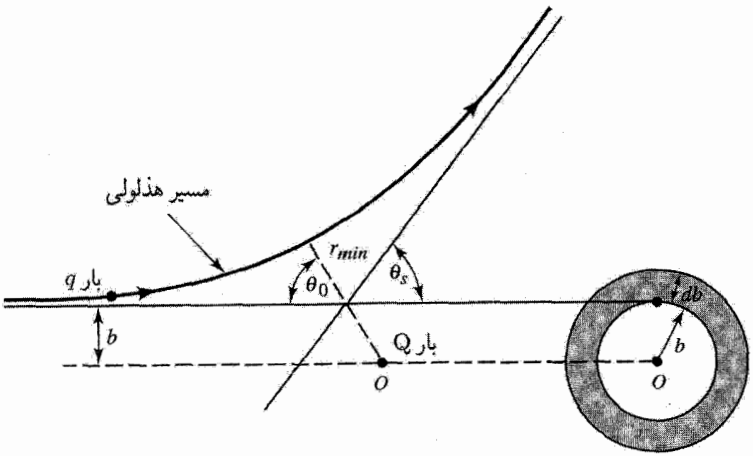
$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = -\frac{Qq}{ml^2} \qquad (۲.۱۴.۶)$$

و در این صورت، معادلهٔ مدار عبارت است از

$$u^{-1} = r = \frac{1}{A\cos(\theta - \theta_0) - Qq/ml^2} \qquad (۳.۱۴.۶)$$

همچنین می‌توانیم معادلهٔ مدار را به‌صورتی که به‌کمک معادلهٔ (۷.۱۰.۶ ج) بیان شد، بنویسیم، یعنی،

$$r = \frac{ml^2Q^{-1}q^{-1}}{-1 + (1 + 2Eml^2Q^{-2}q^{-2})^{1/2}\cos(\theta - \theta_0)} \qquad (۴.۱۴.۶)$$



شکل ۱.۱۴.۶ مسیر (مدار) هذلولی ذرهٔ باردارکه در میدان نیروی رانشی عکس مجذوری ذرهٔ باردار دیگری حرکت می‌کند.

زیرا $k = -Qq$. این مدار یک هذلولی است. می‌توان از این واقعیت فیزیکی به این نکته پی‌برد که انرژی E در میدان نیروی رانشی همواره بزرگتر از صفر است. (در حالت مورد بررسی ما، $E = \frac{1}{2}mv^2 + Qq/r$.) از این‌رو، خروج از مرکز ϵ، ضریب $\cos(\theta - \theta_0)$، از واحد بزرگتر است، یعنی مدار باید هذلولی باشد.

مطابق شکل ۱.۱۴.۶، ذرهٔ فرودی در امتداد یک مجانب نزدیک و در امتداد مجانب دیگر دور می‌شود. جهت محور قطبی را چنان اختیارکرده‌ایم که مکان اولیهٔ ذره در $r = \infty$ و $\theta = 0$ واقع باشد. از هر یک از دو معادلهٔ مدار بر می‌آید که وقتی $\cos(\theta - \theta_0) = 1$، یعنی وقتی $\theta = \theta_0$، مقدار r کمینه است. زیرا هرگاه $\theta = 0$، آنگاه $r = \infty$. از این‌رو، به‌ازای $\theta = 2\theta_0$ نیز r بینهایت می‌شود. بنابراین، زاویهٔ بین دو مجانب مسیر هذلولی عبارت است از $2\theta_0$، و زاویهٔ θ_s که تحت آن ذرهٔ فرودی منحرف می‌شود از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$\theta_s = \pi - 2\theta_0 \qquad (5.14.6)$$

به‌علاوه، در معادلهٔ (۴.۱۴.۶) مخرج کسر سمت راست به ازای $\theta = 0$ و $\theta = 2\theta_0$ صفر می‌شود. بنابراین

$$-1 + (1 + 2Eml^2Q^{-2}q^{-2})^{1/2}\cos\theta_0 = 0 \qquad (6.14.6)$$

که از آن به‌آسانی می‌رسیم به

$$\tan\theta_{\circ} = (۲Em)^{۱/۲} l Q^{-۱} q^{-۱} = \cot\frac{\theta_s}{۲} \qquad (۷.۱۴.۶)$$

این جملهٔ آخری از رابطهٔ زاویه‌ای ناشی می‌شود که در بالا به‌دست آمد.

در هنگام کاربرد معادلهٔ (۷.۱۴.۶) در مورد مسائل پراکندگی، بهتر است ثابت l برحسب کمیت دیگری، b، به‌نام پارامتر برخورد بیان شود. مطابق شکل ۱.۱۴.۶، پارامتر برخورد عبارت است از فاصلهٔ عمودی مبدأ (مرکز پراکندگی) تا خط اولیهٔ حرکت ذره. بنابراین

$$|l| = |\mathbf{r}\times\mathbf{v}| = bv_{\circ} \qquad (۸.۱۴.۶)$$

که $v_{\circ}$ سرعت اولیهٔ ذره است. نیز می‌دانیم که انرژی E ثابت و برابر است با انرژی جنبشی اولیه، $\frac{۱}{۲}mv_{\circ}^{۲}$، زیرا انرژی پتانسیل اولیه $(r=\infty)$ صفر است. به‌همین ترتیب، می‌توان فرمول پراکندگی (معادلهٔ ۷.۱۴.۶) را به‌صورت زیر نوشت:

$$\cot\frac{\theta_s}{۲} = \frac{bmv_{\circ}^{۲}}{Qq} = \frac{۲bE}{Qq} \qquad (۹.۱۴.۶)$$

که رابطهٔ بین زاویهٔ پراکندگی و پارامتر برخورد را به‌دست می‌دهد.

در آزمایش پراکندگی معمولی باریکه‌ای از ذرات به یک هدف، نظیر یک برگهٔ نازک، تابانده می‌شود. هستهٔ اتمهای هدف، مراکز پراکندگی‌اند. کسری از ذرات فرودی را که تحت زاویهٔ معین θ_s منحرف می‌شوند، می‌توان برحسب سطح مقطع مؤثر پراکندگی دیفرانسیلی، $\sigma(\theta_s)$، بیان کرد که به‌واسطهٔ معادلهٔ زیر تعریف می‌شود:

$$\frac{dN}{N} = n\sigma(\theta_s)d\Omega \qquad (۱۰.۱۴.۶)$$

در اینجا، dN تعداد ذرات فرودی پراکنده‌شده بین زاویهٔ θ_s و $\theta_s+d\theta_s$، N تعداد کل ذرات فرودی، n تعداد مراکز پراکندگی در واحد سطح برگهٔ هدف، و $d\Omega$ عنصر زاویهٔ فضایی مربوط به افزایش $d\theta_s$ است. از این‌رو، $d\Omega = ۲\pi\sin\theta_s d\theta_s$.

اکنون پارامتر برخورد یک ذرهٔ فرودی که به مرکز پراکندگی نزدیک می‌شود بین b و $b+db$ است، در صورتی که تصویر مسیر آن در داخل حلقه‌ای به‌شعاع داخلی b و شعاع خارجی $b+db$ واقع می‌شود (شکل ۱.۱۴.۶). مساحت این حلقه $۲\pi bdb$ است. تعداد کل چنین ذراتی باید با تعداد ذرات پراکنده در داخل یک زاویهٔ معین برابر باشد، یعنی

$$dN = Nn\sigma(\theta_s)۲\pi\sin\theta_s d\theta_s = Nn۲\pi bdb \qquad (۱۱.۱۴.۶)$$

به این ترتیب،

$$\sigma(\theta_s) = \frac{b}{\sin\theta_s}\left|\frac{db}{d\theta_s}\right| \qquad (۱۲.۱۴.۶)$$

برای یافتن سطح مقطع پراکندگی ذرات باردار، از معادلهٔ (۹.۱۴.۶) نسبت به θ_s مشتق می‌گیریم:

$$\frac{۱}{۲\sin^۲\left(\frac{\theta_s}{۲}\right)} = \frac{۲E}{Qq}\left|\frac{db}{d\theta_s}\right| \qquad (۱۳.۱۴.۶)$$

(علامت قدرمطلق به این علت وارد شده است که مشتق منفی است.) با حذف b و $|db/d\theta_s|$ بین معادلات (۹.۱۴.۶)، (۱۲.۱۴.۶)، (۱۳.۱۴.۶) و بهره‌گیری از اتحاد:

$$\sin\theta_s = ۲\sin(\theta_s/۲)\cos(\theta_s/۲)$$

به نتیجهٔ زیر می‌رسیم:

$$\sigma(\theta_s) = \frac{Q^۲q^۲}{۱۶E^۲}\frac{۱}{\sin^۴(\theta_s/۲)} \qquad (۱۴.۱۴.۶)$$

که همان فرمول مشهور پراکندگی رادرفورد است. بنابراین، فرمول سطح مقطع دیفرانسیلی به‌صورت عکس توان چهارم $\sin(\theta_s/۲)$ تغییر می‌کند. اثبات درستی این فرمول از طریق آزمایش، در نیمهٔ نخست قرن بیستم، یکی از نخستین پایه‌های فیزیک هسته‌ای را بنیان نهاد.

مثال ۱.۱۴.۶

ذرهٔ آلفایی که از رادیم گسیل می‌شود ($E = ۵\text{ میلیون eV} = ۵ \times ۱۰^۶ \times ۱\text{ر}۶ \times ۱۰^{-۱۲}\text{erg}$) هنگام عبور از نزدیکی هستهٔ طلا به اندازهٔ ۹۰° منحرف می‌شود. مقدار پارامتر برخورد چقدر است؟

حل:

برای ذرات آلفا $q = ۲e$، و برای طلا $Q = ۷۹e$، که e بار بنیادی است (باری که به‌وسیلهٔ یک تک الکترون حمل می‌شود $e-$ است). برحسب یکاهای egs داریم: $e = ۴\text{ر}۸ \times ۱۰^{-۱۰}\text{esu}$. بنابراین، از معادلهٔ (۹.۱۴.۶) می‌رسیم به

$$b = \frac{Qq}{۲E}\cot ۴۵^\circ = \frac{۲ \times ۷۹ \times (۴\text{ر}۸)^۲ \times ۱۰^{-۲۰}\text{cm}}{۲ \times ۵ \times ۱\text{ر}۶ \times ۱۰^{-۶}}$$

$$= ۲\text{ر}۱ \times ۱۰^{-۱۲}\text{cm}$$

مثال ۲.۱۴.۶

در مثال ۱.۱۴.۶، نزدیکترین فاصلهٔ ذرهٔ آلفا به هسته را محاسبه کنید.

حل:

نزدیکترین فاصله به‌کمک معادلهٔ مدار (معادلهٔ ۴.۱۴.۶) به‌ازای $\theta = \theta_0$ به‌دست می‌آید؛ به‌این ترتیب،

$$r_{\min} = \frac{ml^2Q^{-1}q^{-1}}{-1 + (1 + 2Eml^2Q^{-2}q^{-2})^{1/2}}$$

با استفاده از معادلهٔ (۹.۱۴.۶) و بعد از کمی عملیات جبری می‌توان نوشت:

$$r_{\min} = \frac{b\cot(\theta_s/2)}{-1 + [1 + \cot^2(\theta_s/2)]^{1/2}} = \frac{b\cos(\theta_s/2)}{1 - \sin(\theta_s/2)}$$

به این ترتیب، به‌ازای $\theta_s = 90^\circ$، می‌رسیم به $r_{\min} = 2.41b = 5.1 \times 10^{-12}\text{cm}$.

توجه کنید که عبارتهای مربوط به $r_{\min}$ به‌ازای $l = b = 0$ نامعین می‌شوند. در این حالت، ذره مستقیماً به‌طرف هسته هدف‌گیری می‌شود. ذره در امتداد خط مستقیم به هسته نزدیک و همواره توسط نیروی کولنی آن رانده می‌شود؛ وقتی به نقطهٔ معین، $r_{\min}$، رسید سرعتش به صفر کاهش می‌یابد و از این نقطه در طول همان خط مستقیم مراجعت می‌کند. زاویهٔ انحراف 180° است؛ در این حالت می‌توان مقدار $r_{\min}$ را با استفاده از این نکته که انرژی E ثابت است، به‌دست آورد. در نقطهٔ برگشت، انرژی پتانسیل $Qq/r_{\min}$، و انرژی جنبشی صفر است. بنابراین، $E = \frac{1}{2}mv_0^2 = Qq/r_{\min}$، و

$$r_{\min} = \frac{Qq}{E}$$

در مورد ذرات آلفای رادیم و هسته‌های طلا، به‌ازای زاویهٔ انحراف 180° به‌دست می‌آوریم: $r_{\min} \approx 10^{-12}\text{cm}$. این نکته که چنین انحرافهایی واقعاً مشاهده می‌شوند، نشان می‌دهد که مرتبهٔ بزرگی شعاع دستکم به کوچکی 10^{-12}cm است.

مسائل

۱.۶ ربایش گرانشی بین دو کرهٔ سربی صلب را، هرکدام به جرم یک کیلوگرم، پیدا کنید در صورتی که دو کره تقریباً بر هم مماس باشند. جواب را به‌صورت کسری از وزن یکی از کره‌ها بیان کنید (چگالی سرب 11.35g/cm^3 است.)

۲.۶ نشان دهید که نیروی گرانشی وارد بر یک ذرهٔ آزمون واقع در داخل پوستهٔ کروی نازک صفر است: (الف) از طریق یافتن مستقیم نیرو و (ب) با نشان‌دادن این نکته که پتانسیل گرانشی ثابت است.

۳.۶ به‌فرض آنکه زمین کرهٔ صلب یکنواخت باشد، نشان دهید که اگر مستقیماً حفره‌ای از قطب شمال به قطب جنوب تعبیه شود و ذره‌ای در این حفره بیفتد، این ذره باید حرکت هماهنگ ساده اجرا کند. نیز نشان دهید که زمان تناوب این نوسان فقط به چگالی زمین بستگی دارد و از ابعاد آن مستقل است. زمان تناوب برحسب ساعت چقدر است؟ ($R_{\text{زمین}} = ۶٫۴ \times ۱۰^۶ \text{m}$).

۴.۶ نشان دهید که هرگاه ذره‌ای در داخل لولهٔ صاف مستقیمی بلغزد که این لوله به‌طور مایل از مرکز زمین می‌گذرد، حرکت نوسانی ساده، با همان زمان تناوب مسئلهٔ قبل، اجرا می‌شود (از آثار چرخشی چشم بپوشید).

۵.۶ با فرض دایره‌ای‌بودن مدار نشان دهید که قانون سوم کپلر مستقیماً از قانون دوم نیوتون و قانون گرانش او $GMm/r^۲ = mv^۲/r$، نتیجه می‌شود.

۶.۶ **(الف)** نشان دهید که شعاع مدار دایره‌ای برای یک ماهوارهٔ زمینگرد (۲۴h)، حدود ۶٫۶ برابر شعاع زمین است.

(ب) فاصلهٔ زمین تا ماه تقریباً ۶۰٫۳ برابر شعاع زمین است. با استفاده از آن، مدت یک ماه نجومی (زمان تناوب گردش مداری ماه) را محاسبه کنید.

۷.۶ نشان دهید که زمان تناوب مداری برای یک ماهوارهٔ زمینی در مدار دایره‌ای، درست بالای سطح زمین، با زمان تناوب نوسان ذره‌ای برابر است که در داخل حفره‌ای افتاده که از زمین می‌گذرد (مسئلهٔ ۳.۶).

۸.۶ سرعت نزدیک‌شدن زمین به‌خورشید را وقتی محاسبه کنید که در منتهی‌الیه پارامتر مسیری قرار دارد که از خورشید می‌گذرد. خروج از مرکز مدار زمین را ۱/۶۰ و نیم‌قطر بزرگ آن را ۹۳,۰۰۰,۰۰۰ بگیرید (شکل ۱.۵.۶).

۹.۶ اگر منظومهٔ شمسی را ابری از گرد و غبار یکنواخت با چگالی ρ در برمی‌گرفت، نشان دهید که قانون نیروی وارد بر سیاره‌ای واقع در فاصلهٔ r از مرکز خورشید، با عبارت زیر بیان می‌شود:

$$F(r) = -\frac{GM_m}{r^۲} - \left(\frac{۴}{۳}\right)\pi\rho mGr$$

۱۰.۶ ذره‌ای متحرک در یک میدان مرکزی، مدار مارپیچی $r = r_۰e^{k\theta}$ را طی می‌کند. نشان دهید که قانون نیرو عکس مکعبی است و θ به‌صورت لگاریتمی با t تغییر می‌کند.

۱۱.۶ ذره‌ای در میدان نیروی عکس مکعبی حرکت می‌کند. نشان دهید که علاوه بر مدار مارپیچی نمایی مسئلهٔ ۱۰.۶، دو نوع مدار ممکن دیگر وجود دارد، و معادلهٔ آنها را به‌دست آورید.

۱۲.۶ مدار ذره‌ای که در میدان مرکزی حرکت می‌کند دایره‌ای است که از مبدأ می‌گذرد؛ یعنی $r = r_0 \cos\theta$. نشان دهید که قانون نیرو در این حالت عکس توان پنجمی است.

۱۳.۶ ذره‌ای در یک میدان مارپیچی به معادلهٔ $r = a\theta$ حرکت می‌کند. اگر θ به‌طور خطی با t افزایش یابد، آیا نیرو میدان مرکزی است؟ در غیر این صورت، تعیین کنید θ چگونه باید با t تغییر کند تا نیرو مرکزی باشد.

۱۴.۶ ذره‌ای به جرم واحد با سرعت v_0 عمود بر بردار شعاعی در فاصلهٔ a از مبدأ مرکز نیروی ربایشی پرتاب می‌شود، که این نیرو از این قرار بیان می‌شود:

$$f(r) = -k\left(\frac{4}{r^3} + \frac{a^2}{r^5}\right)$$

در صورتی که $v_0^2 = 9k/2a^2$.

(الف) معادلهٔ قطبی مدار حاصل را بیابید.

(ب) چه مدت‌زمان طول می‌کشد تا ذره زاویهٔ $3\pi/2$ را طی کند؟ در آن زمان ذره کجاست؟

(ج) سرعت این ذره در آن زمان چقدر است؟

۱۵.۶ (الف) در مثال ۴.۵.۶، تغییر کسری در اوج، $\delta r_0/r_1$، را به‌صورت تابعی از تغییر کسری کوچکی در نسبت افزایش سرعت مدار دایره‌ای، $\delta(v_0/v_c)/(v_0/v_c)$، را بیابید.

(ب) اگر نسبت سرعت ۱٪ زیادتر باشد، سفینهٔ فضایی تا چند درصد به مدار ماه وارد نمی‌شود؟ [این مسئله دقت فوق‌العاده‌ای را نشان می‌دهد که برای دستیابی به مداری به دور ماه لازم است.]

۱۶.۶ زمان تناوب ستارهٔ دنباله‌دار هالی را با توجه به اطلاعات داده‌شده در متن کتاب، در بخش ۵.۶ محاسبه کنید. همچنین، سرعت ستارهٔ دنباله‌دار را در حضیض خورشیدی و در اوج خورشیدی به‌دست آورید.

۱۷.۶ یک ستارهٔ دنباله‌دار ابتدا در فاصلهٔ d، برحسب یکاهای نجومی، از خورشید که با سرعت qبرابر سرعت زمین در حال حرکت است رؤیت می‌شود. نشان دهید بسته به اینکه کمیت $q^2 d$ بزرگتر، مساوی یا کوچکتر از ۲ باشد، مدار ستارهٔ دنباله‌دار، به‌ترتیب، هذلولی، سهمی، یا بیضی است.

۱۸.۶ ذره‌ای در مداری بیضی شکل در میدان نیروی عکس مجذوری حرکت می‌کند. ثابت کنید که حاصلضرب سرعتهای کمینه و بیشینه برابر است با $(2\pi a/\tau)^2$ که a نیم‌قطر بزرگ و τ زمان تناوب است.

۱۹.۶ یک سیاره در نقطهٔ معینی در مدار بیضی خود به دور خورشید، ضربهٔ مماسی کوچکی دریافت می‌کند به‌طوری که سرعت آن از v به $v + \delta v$ تغییر می‌کند. تغییرات کوچک حاصل در a، نیم‌قطر بزرگ، را بیابید.

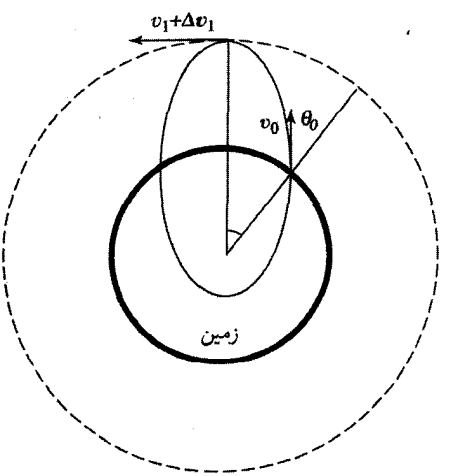
۲۰.۶ **(الف)** ثابت کنید که متوسط زمانی انرژی پتانسیل یک سیاره در مداری بیضی به دور خورشید $-k/a$ است.

(ب) متوسط زمانی انرژی جنبشی این سیاره را محاسبه کنید.

۲۱.۶ یک ماهواره با موشکی دو مرحله‌ای از کیپ کاناورال با سرعت اولیهٔ v_0 که از حالت قائم با زاویهٔ بلندی θ_0 متمایل شده است، پرتاب و در مدار پایین قرار داده می‌شود. با رسیدن به اوج مدار اولیه، مرحلهٔ دوم به‌کار می‌افتد، افزایش سرعت Δv_1 را فراهم می‌آورد، و محمولهٔ خود را در مدار دایره‌ای قرار می‌دهد (شکل م۲۱.۶).

(الف) افزایش سرعت اضافی، Δv_1، را که از مرحلهٔ دوم برای قرارگرفتن در مدار دایره‌ای لازم است، محاسبه کنید.

(ب) ارتفاع h مدار نهایی را محاسبه کنید. از مقاومت هوا و حرکت چرخشی زمین چشم بپوشید. جرم و شعاع زمین، به ترتیب، عبارت‌اند از $M_E = ۵٫۹۸ \times ۱۰^{۲۴}\text{kg}$ و $R_E = ۶٫۴ \times ۱۰^{۳}\text{km}$. بگیرید: $v_0 = ۶\text{km/s}$ و $\theta_0 = ۳۰^\circ$.



شکل م۲۱.۶ پرتاب دو مرحله‌ای برای قراردادن ماهواره در مدار دایره‌ای.

۲۲.۶ زاویهٔ اوج مدارهای تقریباً دایره‌ای را در یک میدان مرکزی بیابید که قانون آن از این قرار است

$$f(r) = -k\frac{e^{-br}}{r^۲}$$

۲۳.۶ اگر ابری از گرد و غبار یکنواخت منظومهٔ شمسی را فراگرفته باشد (مسئلهٔ ۶ـ۹). زاویهٔ بین دو نقطهٔ اوج و حضیض سیاره‌ای که در مدار تقریباً دایره‌ای در حرکت است، چقدر باید باشد؟ این مطلب درگذشته به‌صورت توضیح ممکنی برای جلورفتن نقطهٔ حضیض خورشیدی عطارد، بیان شده بود.

۲۴.۶ نشان دهید که شرط پایداری برای یک مدار دایره‌ای به شعاع a با شرط $d^۲U/dr^۲ > ۰$ به‌ازای $r = a$ معادل است، که $U(r)$ پتانسیل مؤثری است که در بخش ۱۱.۶ تعریف کردیم.

۲۵.۶ هرگاه تابع نیرو از این قرار باشد:

$$f(r) = -\frac{k}{r^۲} - \frac{\epsilon}{r^۴}$$

شرطی را بیابید که در آن مدارهای دایره‌ای پایدار باشند.

۲۶.۶ (الف) نشان دهید که در مسئلهٔ ۲۲.۶ اگر کمیت r کمتر از $b^{-۱}$ باشد، مدار دایره‌ای به شعاع r، پایدار است.

(ب) نشان دهید که در میدان عکس مکعبی مدارهای دایره‌ای ناپایدارند.

۲۷.۶ ستارهٔ دنباله‌داری در مدار سهمی‌شکلی واقع در صفحهٔ مدار زمین حرکت می‌کند. مدار زمین را دایره‌ای به شعاع a به‌حساب آورید و نشان دهید که نقاط تقاطع مدار ستارهٔ دنباله‌دار با مدار زمین از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$\cos\theta = -۱ + \frac{۲p}{a}$$

که p فاصلهٔ حضیض خورشیدی ستارهٔ دنباله‌داری است که در $\theta = ۰$ تعریف شده است.

۲۸.۶ با بهره‌گیری از نتیجهٔ مسئلهٔ ۲۷.۶ نشان دهید فاصلهٔ زمانی که ستارهٔ دنباله‌دار در مدار زمین باقی می‌ماند، کسری از سال، به این قرار است:

$$\frac{۲^{۱/۲}}{۳\pi}\left(\frac{۲p}{a}+۱\right)\left(۱-\frac{p}{a}\right)^{۱/۲}$$

و مقدار بیشینهٔ این فاصلهٔ زمانی $۲/۳\pi$ سال یا ۷۷٫۵ روز، مطابق با $p = a/۲$، است. این فاصلهٔ زمانی را برای ستارهٔ دنباله‌دار هالی $(p = ۰٫۶a)$ محاسبه کنید.

۲۹.۶ درکتابهای درسی پیشرفته در زمینهٔ نظریهٔ پتانسیل، نشان داده می‌شود که انرژی پتانسیل ذره‌ای به جرم m در میدان گرانشی یک کره‌وار پخ، نظیر زمین، تقریباً عبارت است از

$$V(r) = -\frac{k}{r}\left(1 + \frac{\epsilon}{r^2}\right)$$

که r به فواصلی در صفحهٔ استوایی برمی‌گردد، مانند قبل $k = GMm$، و $\epsilon = 2/5R\Delta R$، و در اینجا R شعاع استوایی و ΔR اختلاف بین شعاعهای استوایی و قطبی است. با استفاده از این موضوع، زاویهٔ اوج یک ماهوارهٔ متحرک در مدار تقریباً دایره‌ای را در صفحهٔ استوایی زمین بیابید، که $R = 4000\,\text{mil}$ و $\Delta R = 13\,\text{mil}$.

۳۰.۶ بنابر نظریهٔ نسبیت خاص، ذرهٔ متحرک در میدان مرکزی، با انرژی پتانسیل $V(r)$، همان مدار را طی می‌کند که ذره با انرژی پتانسیلی به قرار زیر، بنا بر قوانین مکانیک نانسبیتی می‌پیماید

$$V(r) - \frac{[E - V(r)]^2}{2m_0c^2}$$

در این رابطه E انرژی کل، m_0 جرم ذرهٔ در حال سکون، و c سرعت سیر نور است. از اینجا زاویهٔ اوج را برای حرکت در میدان نیروی عکس مجذوری، $V(r) = -k/r$، به‌دست آورید.

۳۱.۶ سرعت ستارهٔ دنباله‌داری در هنگام رصد v و فاصلهٔ آن از خورشید r است؛ و جهت حرکتش با بردار شعاعی از خورشید زاویهٔ ϕ می‌سازد. نشان دهید که قطر بزرگ مدار بیضی‌شکل ستارهٔ دنباله‌دار با بردار شعاعی اولیهٔ ستارهٔ دنباله‌دار، زاویهٔ θ را می‌سازد که به این ترتیب بیان می‌شود:

$$\theta = \cot^{-1}\left(\tan\phi - \frac{2}{V^2R}\csc 2\phi\right)$$

در اینجا، بنا به تعریفهایی که در مثال ۱.۱۰.۶ ارائه کردیم، $V = v/v_e$ و $R = r/a_e$ نسبتهای بدون بعدند. مقادیر عددی مثال ۱.۱۰.۶ را به‌کار ببرید و مقدار زاویهٔ θ را محاسبه کنید.

۳۲.۶ دو سفینهٔ فضایی (A و B) که در مدار دایره‌ای زمین را دور می‌زنند، در یک صفحه و در یک جهت حرکت می‌کنند. سفینهٔ فضایی A در مدار LEO و سفینهٔ فضایی B در مدار زمینی (geo)، مطابق توصیفهای مثال ۲.۶.۶، قرار دارند. فضانوردان روی عرشهٔ سفینهٔ فضایی A می‌خواهند با فضانوردان روی عرشهٔ سفینهٔ فضایی B ملاقات کنند. وقتی سفینهٔ فضایی B در مکان صحیح در مدارش قرار دارد، آنان برای رسیدن به نقطهٔ ملاقات، در اوج در زمان یکسان، باید با شلیک موشکهای جلوبرندهٔ خود این کار را انجام دهند.

(الف) محاسبه کنید چقدر طول می‌کشد تا سفینهٔ A به نقطهٔ اوج برسد؛ (ب) سفینهٔ B در پیشرفت زاویه‌ای چقدر باید نسبت به A دورتر باشد، وقتی سفینهٔ A موشکهای جلوبرنده‌اش را شلیک می‌کند.

۳۳.۶ نشان دهید که سطح مقطع پراکندگی دیفرانسیلی برای یک ذره به جرم m تحت تأثیر میدان نیروی مرکزی $f(r) = k/r^۳$ به‌صورت زیر بیان می‌شود:

$$\sigma(\theta_s)d\Omega = ۲\pi|bdb| = \frac{k\pi^۳}{E}\left[\frac{\pi - \theta_s}{(۲\pi - \theta_s)^۲\theta_s^۲}\right]d\theta_s$$

که θ_s زاویهٔ پراکندگی و E انرژی ذره است.

مسائل کامپیوتری

ک۱.۶ در مثال ۲.۷.۶ پتانسیل گرانشی در نقطهٔ P را خارج از حلقهٔ مادی به جرم M و شعاع R محاسبه کردیم. P در صفحهٔ حلقه واقع بود و به فاصلهٔ $r > R$ از مرکزش قرار داشت. اکنون فرض کنید که نقطهٔ P در فاصله $r < R$ از مرکز حلقه قرار دارد اما هنوز در همان صفحهٔ حلقه واقع است.

(الف) نشان دهید که پتانسیل گرانشی مربوط به این حلقهٔ مادی که در نقطهٔ r عمل می‌کند، عبارت است از

$$\Phi = -\frac{GM}{R}\left(۱ + \frac{r^۲}{۴R^۲} + \cdots\right.$$

بگیرید:
$R =$ شعاع مدار مشتری $= ۷٫۷۸۴ \times ۱۰^{۱۱}\,\mathrm{m}$، $r =$ شعاع مدار زمین $= ۱٫۴۹۶ \times ۱۰^{۱۱}\,\mathrm{m}$، و $M =$ جرم مشتری $= ۱٫۹۰ \times ۱۰^{۲۷}\,\mathrm{kg}$. فرض کنید پتانسیل گرانشی میانگین که مشتری بر زمین ایجاد می‌کند، با پتانسیل گرانشی حلقهٔ مادی یکنواخت اطراف خورشید معادل است که جرمش با جرم مشتری برابر و شعاعش از خورشید مساوی شعاع مشتری باشد.

(ب) این فرض و مقادیر داده‌شده در قسمت (الف) را به‌کار ببرید و مقدار عددی پتانسیل گرانشی میانگین را که مشتری بر زمین وارد آورد، محاسبه کنید.

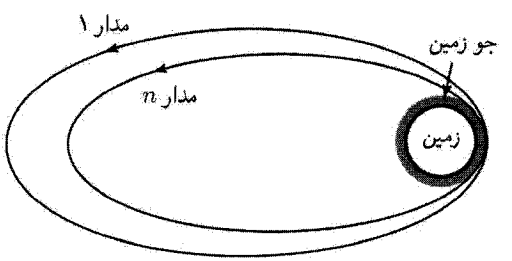
(ج) فرض کنید می‌توانیم این حلقهٔ جرمی را با مجموعی از N نقطهٔ مادی مجزای منظم ردیف‌شدهٔ M_i که $NM_i = M$، تقریب‌بندی کنیم؛ به‌عنوان تقریب اول $N = ۲$، $M_i = M/۲$. این دو نقطهٔ مادی را در شعاع R و در طول خطی که بین مرکز حلقه و مکان زمین در شعاع r جهت داده شده است، ردیف کنید. مقدار عددی پتانسیل در r مربوط به این دو جرم را محاسبه

کنید. این محاسبه را برای حالت $N = ۴$ تکرار کنید، به‌طوری که در این حالت چهار جرم در نقاط تقسیم محیط دایره‌ای به شعاع R به چهار قسمت، واقع شده باشند و دوباره دوتای آنها در امتداد خط واصل مرکز دایره و زمین قرار گیرند. تقریب‌بندی حلقهٔ مادی به این روش (با ضربهای متوالی N در ۲ و تقسیم‌کردن M_i بر ۲) را ادامه بدهید و پتانسیل حاصل را در r محاسبه کنید. وقتی پتانسیل محاسبه‌شده بیشتر از یک قسمت در $۱۰^۴$ تغییر نکرد، تکرار را متوقف کنید. نتیجه را با آنچه در قسمت (ب) به‌دست آمد، مقایسه کنید. چند تک جرم لازم است تا به این دقت نایل شوید؟

(د) حالت (ج) را برای مقادیری از r تکرار کنید که، به‌ترتیب، با ۰، ۰ر۲، ۰ر۴، ۰ر۶، و ۰ر۸ برابر r که در بالا داده شد، مساوی باشد. منحنی نمایش مقادیر مطلق‌اختلاف $|\Phi(r) - \Phi(۰)|$ را برحسب r ترسیم کنید و نشان دهید که این اختلاف همان‌طور که با معادلهٔ داده‌شده در قسمت (الف) پیش‌بینی شده بود، به‌صورت درجهٔ دوم با r تغییر می‌کند.

ک۲.۶ ماهواره‌ای را در نظر بگیرید که ابتدا در مدار بیضی خیلی کشیده‌ای پیرامون زمین قرار داده شده است به‌طریقی که در حضیض درست بالای جو زمین را می‌خراشد (مطابق شکل). فرض کنید مقاومت پس‌کشی روی ماهواره‌ای را هنگامی که از جو زمین در حضیض مدارش عبور می‌کند، بتوان با نیروی ضربه‌ای کوچکی مدل‌سازی کرد که برای کاهش سرعتش با کسر کوچک δ به کار گرفته می‌شود. بنابراین مکان حضیض ثابت باقی می‌ماند اما فاصله تا اوج در هر مدار متوالی کاهش می‌یابد. در حد، مدار نهایی دایره‌ای است که با این مدل آرمانی داده شده است. فرض کنید خروج از مرکز مدار اولیه عبارت باشد از $\epsilon_۰ = ۰ر۹۶۵۶$ و فاصله تا حضیض $r_p = ۶ر۶ \times ۱۰^۳\text{km}$ یا در ارتفاع حدود $۲۰۰\,\text{km}$ است. بنابراین، مدار اولیه، ماهواره را به‌دور دست، به‌اندازهٔ فاصله تا ماه، می‌برد.

(الف) بگیرید $\delta = ۰ر۰۱$ و جواب تحلیلی تقریبی را بیابید که چند مدار n طی می‌شود تا مدار «دایره‌ای شود» (مداری را «دایره‌ای» تعریف می‌کنیم که خروج از مرکزش کمتر از $\epsilon_f = \frac{۱}{۷}$



شکل ک۲.۶ ماهواره در مدار بیضی که بالای جو زمین را می‌خراشد.

بشود. در این نقطه، نسبت نیم‌قطر کوچک به نیم‌قطر بزرگ از ۰٫۹۹ بیشتر می‌شود. واضح است که مدل در اینجا کارآیی خود را از دست می‌دهد؛ زیرا مقاومت پس‌کشی به‌خوبی در سراسر مدار ادامه می‌یابد.). جوابتان را برحسب ϵ_0 و ϵ_f و δ بیان کنید.

(ب) محاسبه کنید از لحاظ عددی چند مدار طی خواهد شد تا «مدار دایره‌ای شود».

(ج) چه مدت‌زمان طول خواهد کشید؟

(د) نسبت قطر کوچک به قطر بزرگ را به‌صورت تابعی از تعداد مدار، n، رسم کنید.

(ه) سرعت ماهواره را در اوج آخرین مدارش محاسبه کنید. این سرعت را با سرعت در اوج مدار اولیه‌اش مقایسه کنید. توضیح دهید، چرا سرعت ماهواره در هر اوج متوالی وقتی نیروی مقاومت پس‌کشی هوا بر آن وارد می‌آید، افزایش می‌یابد. (جرم و شعاع زمین در مسئلهٔ ۲۱.۶ داده شده است.)

۷

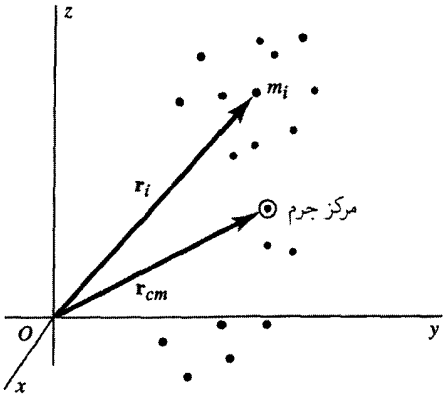
دینامیک سیستمهای ذرات

«دو جسم مساوی که با یکدیگر برخورد مستقیم دارند و سرعتشان پیش از برخورد مساوی و مختلف‌الجهت است، بعد از برخورد سرعت یکسانی، فارغ از جهت و علامت، دارند.» «مجموع حاصلضرب بزرگی (جرم) هر جسم سخت در مجذور سرعت، همیشه قبل و بعد از برخورد یکسان است.»[1]

۱.۷ مقدمه: مرکز جرم و تکانهٔ خطی سیستم

اکنون بررسیهای خود را در مبحث مکانیک به سیستمهای بس (دو یا چند) ذره‌ای تعمیم می‌دهیم. این ذرات ممکن است مستقل از یکدیگر حرکت کنند یا وابسته به هم باشند. سیستمهای خاصی را، به‌نام اجسام صلب، که مواضع نسبی تمام ذرات آنها ثابت‌اند، در دو فصل بعد مطالعه خواهیم

1. Christiaan Huygens, memoir, *De Motu Corporum ex mutuo impulsu Hypothesis*, composed in Paris, 5-jan-1669, to Oldenburg, Secretary of the Royal Society.



شکل ۱.۱.۷ مرکز جرم سیستم ذرات.

کرد. فعلاً، چند قضیهٔ کلی را، که برای تمام سیستمها صادق‌اند، پیش می‌کشیم. از این رو، این قضیه‌ها را در مورد چند سیستم سادهٔ ذرات آزاد به‌کار خواهیم گرفت.

سیستم کلی ما شامل n ذره به جرمهای m_1، m_2، ...، m_n است که بردار مکان آنها، به‌ترتیب، عبارت‌اند از $\mathbf{r}_1$، $\mathbf{r}_2$، ...، $\mathbf{r}_n$. مرکز جرم این سیستم نقطه‌ای است به بردار مکان $\mathbf{r}_{cm}$ (شکل ۱.۱.۷) که از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید

$$\mathbf{r}_{cm} = \frac{m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2 + \cdots + m_n\mathbf{r}_n}{m_1 + m_2 + \cdots + m_n} = \frac{\sum_i m_i\mathbf{r}_i}{m} \qquad (۱.۱.۷)$$

در اینجا، $m = \sum m_i$ جرم کلی سیستم است. بدیهی است که تعریف بالا با سه معادلهٔ زیر معادل است:

$$x_{cm} = \frac{\sum_i m_i x_i}{m} \qquad y_{cm} = \frac{\sum_i m_i y_i}{m} \qquad z_{cm} = \frac{\sum_i m_i z_i}{m} \qquad (۲.۱.۷)$$

تکانهٔ خطی، $\mathbf{p}$، سیستم، بنا بر تعریف، عبارت است از جمع برداری تکانهٔ خطی هر یک از ذرات، یعنی،

$$\mathbf{p} = \sum_i \mathbf{p}_i = \sum_i m_i\mathbf{v}_i \qquad (۳.۱.۷)$$

با محاسبهٔ $\dot{\mathbf{r}}_{cm} = \mathbf{v}_{cm}$ به‌کمک معادلهٔ ۱.۱.۷ و مقایسهٔ آن با معادلهٔ (۳.۱.۷)، به‌آسانی نتیجه می‌گیریم که

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v}_{cm} \qquad (۴.۱.۷)$$

یعنی، تکانهٔ خطی سیستم ذرات برابر است با سرعت مرکز جرم ضرب در جرم کل سیستم.

اکنون فرض می‌کنیم که نیروهای خارجی $\mathbf{F}_1$، $\mathbf{F}_2$ و ... $\mathbf{F}_i$ ... $\mathbf{F}_n$، به‌ترتیب، بر ذرات وارد آیند. افزون بر اینها، ممکن است نیروهای داخلی برهم‌کنش بین هر دو ذرهٔ سیستم نیز وجود داشته باشند. این نیروهای داخلی را به $\mathbf{F}_{ij}$ نشان می‌دهیم، و مراد از آن نیرویی است که از جهت ذرهٔ j بر ذرهٔ i وارد می‌آید، به این معنا که $\mathbf{F}_{ii} = 0$. به این ترتیب، معادلهٔ حرکت ذرهٔ iام عبارت است از

$$\mathbf{F}_i + \sum_{j=1}^{n} \mathbf{F}_{ij} = m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \dot{\mathbf{p}}_i \qquad (۵.۱.۷)$$

$\mathbf{F}_i$ نیروی خارجی کل است که بر ذرهٔ i وارد می‌آید. جملهٔ دوم در معادلهٔ (۵.۱.۷) جمع برداری تمام نیروهای داخلی وارد بر ذرهٔ i از سوی تمام ذرات دیگر سیستم به‌شمار می‌آید. با مجموعیابی معادلهٔ (۵.۱.۷) برای n ذره، داریم

$$\sum_{i=1}^{n} \mathbf{F}_i + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \mathbf{F}_{ij} = \sum_{i=1}^{n} \dot{\mathbf{p}}_i \qquad (۶.۱.۷)$$

در مجموعیابی دوگانهٔ بالا، به‌ازای هر نیروی $\mathbf{F}_{ij}$ یک نیروی $\mathbf{F}_{ji}$ نیز یافت می‌شود و این دو نیرو مساوی و مختلف‌الجهت‌اند (بنا بر قانون کنش و واکنش، یا قانون سوم نیوتون).

$$\mathbf{F}_{ij} = -\mathbf{F}_{ji} \qquad (۷.۱.۷)$$

در نتیجه، نیروهای داخلی جفت‌جفت حذف می‌شوند و مجموعیابی دوگانه صفر می‌شود. بنابراین، می‌توان معادلهٔ (۷.۱.۷) را به‌صورت زیر نوشت

$$\sum_i \mathbf{F}_i = \dot{\mathbf{p}} = m\mathbf{a}_{cm} \qquad (۸.۱.۷)$$

به بیان دیگر: شتاب مرکز جرم سیستم ذرات با شتاب یک تک‌ذره که جرمش برابر جرم کل سیستم و تحت تأثیر برایند نیروهای خارجی باشد، مساوی است.

مثلاً، تعداد ذرات متحرک در میدان گرانشی یکنواخت را در نظر می‌گیریم. از آنجا که برای هر ذره $\mathbf{F}_i = m_i\mathbf{g}$، بنابراین

$$\sum_i \mathbf{F}_i = \sum_i m_i\mathbf{g} = m\mathbf{g} \qquad (۹.۱.۷)$$

جملهٔ آخری در نتیجهٔ ثابت‌بودن $\mathbf{g}$ است. از این رو،

$$\mathbf{a}_{cm} = \mathbf{g} \qquad (۱۰.۱.۷)$$

که با معادلهٔ یک تک‌ذره یا پرتابه یکسان است. به این ترتیب، مرکز جرم گلولهٔ توپ بعد از انفجار همان مسیر سهموی را در فضا می‌پیماید که گلولهٔ در حالت منفجرنشده می‌پیمود (تا زمانی که هر قطعهٔ آن به چیزی اصابت نکرده است).

در حالت خاصی که هیچ نیروی خارجی بر سیستم وارد نیاید (یا اگر $\sum \mathbf{F}_i = ۰$)، $\mathbf{a}_{cm} = ۰$ و ثابت$= \mathbf{v}_{cm}$. بنابراین، تکانهٔ خطی سیستم بدون تغییر باقی می‌ماند:

$$\sum_i \mathbf{p}_i = \mathbf{p} = m\mathbf{v}_{cm} = \text{ ثابت} \qquad (۱۱.۱.۷)$$

این عبارت بیان اصل پایستگی تکانهٔ خطی است. در مکانیک نیوتونی پایستگی تکانهٔ خطی هر سیستم منزوی با قانون سوم نیوتون مستقیماً مربوط می‌شود و در حقیقت نتیجه‌ای از این قانون است. اما حتی در مواردی که نیروهای بین ذرات مستقیماً از قانون کنش و واکنش پیروی نمی‌کنند، نظیر نیروهای مغناطیسی بین ذرات باردار متحرک در حالتی که تکانهٔ خطی کل ذرات و میدان مغناطیسی به‌حساب آید، باز هم اصل پایستگی تکانهٔ خطی برقرار است.[۱]

مثال ۱.۱.۷

موشکی پرتابی به جرم m در نقطه‌ای از مسیرش منفجر و به سه تکه، هر تکه به جرم $m/۳$، تقسیم می‌شود. یکی از این قطعه‌ها با سرعت اولیه‌ای برابر با نصف سرعت موشک، $\mathbf{v}_۰$، درست قبل از انفجار، به حرکت ادامه می‌دهد. دو قطعهٔ دیگر با سرعتهای مساوی در دو راستای عمود بر هم حرکت می‌کنند. سرعتهای اولیهٔ این دو قطعهٔ اخیر را برحسب $v_۰$ به‌دست آورید.

حل:

در دو نقطهٔ انفجار پایستگی تکانهٔ خطی به‌صورت زیر بیان می‌شود

$$m\mathbf{v}_{cm} = m\mathbf{v}_۰ = \frac{m}{۳}\mathbf{v}_۱ + \frac{m}{۳}\mathbf{v}_۲ + \frac{m}{۳}\mathbf{v}_۳$$

---

۱. مثلاً ر.ک.

P. M. Fishbane, S. Gasiorowicz, S. T. Thornton, *Physics for Scientists and Engineers*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1993.

شرایط مفروض عبارت‌اند از $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_0/2$، $\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_3 = 0$، و $v_2 = v_3$. از اولی با حذف m داریم: $3\mathbf{v}_0 = (\mathbf{v}_0/2) + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3$، یا

$$\frac{5}{2}\mathbf{v}_0 = \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3$$

با ضرب نقطه‌ای هر طرف این عبارت در خودش، می‌رسیم به

$$\frac{25}{4}v_0^2 = (\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3) \cdot (\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3) = v_2^2 + 2\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_3 + v_3^2 = 2v_2^2$$

از این‌رو،

$$v_2 = v_3 = \frac{5}{2\sqrt{2}}v_0 = 1.77v_0$$

۲.۷ تکانهٔ زاویه‌ای و انرژی جنبشی سیستم

قبلاً گفتیم که تکانهٔ زاویه‌ای هر ذره، بنا به تعریف، عبارت است از ضرب برداری $\mathbf{r} \times m\mathbf{v}$. بنابراین تکانهٔ زاویه‌ای، $\mathbf{L}$، سیستمی از ذرات به‌صورت جمع برداری تکانه‌های زاویه‌ای هر یک از آنها تعریف می‌شود، یعنی،

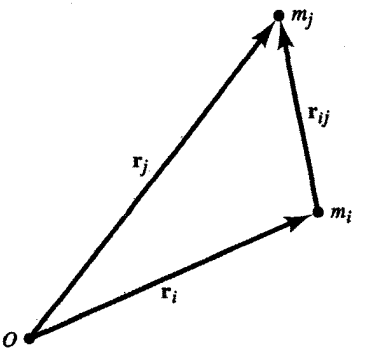
$$\mathbf{L} = \sum_{i=1}^{n} (\mathbf{r}_i \times m_i\mathbf{v}_i) \qquad (۱.۲.۷)$$

مشتق زمانی تکانهٔ زاویه‌ای را محاسبه می‌کنیم. با بهره‌گیری از قاعدهٔ مشتق‌گیری ضرب برداری، می‌رسیم به

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \sum_{i=1}^{n} (\mathbf{v}_i \times m_i\mathbf{v}_i) + \sum_{i=1}^{n} (\mathbf{r}_i \times m_i\mathbf{a}_i) \qquad (۲.۲.۷)$$

حال جملهٔ اول سمت راست صفر می‌شود، زیرا $\mathbf{v}_i \times \mathbf{v}_i = 0$، و چون $m_i\mathbf{a}_i$ با نیروی کلی وارد بر ذره مساوی است، می‌توان نوشت،

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{L}}{dt} &= \sum_{i=1}^{n} \left[\mathbf{r}_i \times \left(\mathbf{F}_i + \sum_{j=1}^{n} \mathbf{F}_{ij} \right) \right] \\ &= \sum_{i=1}^{n} \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{ij} \end{aligned} \qquad (۳.۲.۷)$$



شکل ۱.۲.۷ تعریف بردار $\mathbf{r}_{ij}$.

که مانند بخش ۱.۷، $\mathbf{F}_i$ نیروی خارجی کل وارد بر ذرهٔ i را نشان می‌دهد، و $\mathbf{F}_{ij}$ نیروی (داخلی) وارد بر ذرهٔ i از سوی ذرهٔ دیگر j است. اکنون مجموعیابی دوگانهٔ سمت راست شامل جفت جمله‌هایی است به‌صورت زیر

$$(\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{ij}) + (\mathbf{r}_j \times \mathbf{F}_{ji}) \qquad (۴.۲.۷)$$

اگر بردار جابه‌جایی ذرهٔ j نسبت به ذرهٔ i را با $\mathbf{r}_{ij}$ نشان دهیم، از مثلث شکل ۱.۲.۷ مشاهده می‌کنیم که

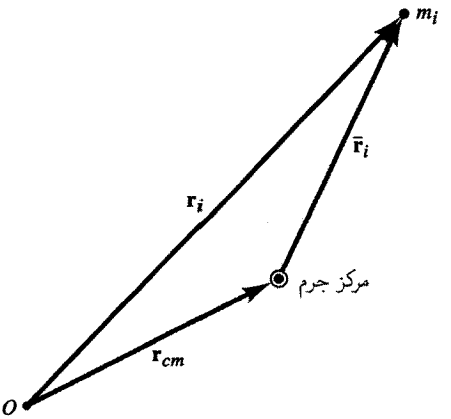
$$\mathbf{r}_{ij} = \mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i \qquad (۵.۲.۷)$$

بنابراین، چون $\mathbf{F}_{ji} = -\mathbf{F}_{ij}$، عبارت (۴.۲.۷) تبدیل می‌شود به

$$-\mathbf{r}_{ij} \times \mathbf{F}_{ij} \qquad (۶.۲.۷)$$

که اگر نیروهای داخلی مرکزی باشند، یعنی اگر در امتداد خطوط اتصال‌دهندهٔ زوج ذرات وارد آیند، بدیهی است که این مقادیر صفر می‌شوند. بنابراین، مجموعیابی دوگانه در معادلهٔ (۳.۲.۷) صفر می‌شود. حال حاصلضرب برداری $\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i$ عبارت است از گشتاور نیروی خارجی $\mathbf{F}_i$. از این‌رو، جمع $\sum \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i$ گشتاور کل تمام نیروهای خارجی وارد بر سیستم است. اگر این گشتاور خارجی کل را با $\mathbf{N}$ نشان دهیم، معادلهٔ (۳.۲.۷) به شکل زیر درمی‌آید

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{N} \qquad (۷.۲.۷)$$



شکل ۲.۲.۷ تعریف بردار $\mathbf{r}_i$.

یعنی، آهنگ زمانی تغییر تکانهٔ زاویه‌ای سیستم با گشتاور کل تمام نیروهای خارجی وارد بر آن برابر است.

اگر سیستمی منزوی باشد، در این صورت $\mathbf{N} = 0$ و تکانهٔ زاویه‌ای هم از لحاظ بزرگی و هم جهت ثابت باقی می‌ماند:

$$\mathbf{L} = \sum_i \mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}_i = \text{بردار ثابت} \qquad (۸.۲.۷)$$

که بیانی از اصل پایستگی تکانهٔ زاویه‌ای به‌شمار می‌آید. این بیان تعمیمی برای یک تک‌ذره در میدان مرکزی است. تکانهٔ زاویه‌ای هر سیستم منزوی نیز، در حالتی که شامل بارهای متحرک باشد، نظیر ثابت‌بودن تکانهٔ خطی، که در بخش قبلی درخصوص آن بحث کردیم، ثابت و این در صورتی است که تکانهٔ زاویه‌ای میدان الکترومغناطیسی در نظر گرفته شود.

گاهی بهتر است تکانهٔ زاویه‌ای برحسب حرکت مرکز جرم بیان شود. مطابق شکل ۲.۲.۷، می‌توانیم هر بردار مکان $\mathbf{r}_i$ را از این قرار بیان کنیم:

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_{cm} + \bar{\mathbf{r}}_i \qquad (۹.۲.۷)$$

که $\bar{\mathbf{r}}_i$ مکان ذرهٔ i نسبت به مرکز جرم است. با مشتق‌گرفتن نسبت به t، می‌رسیم به

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_{cm} + \bar{\mathbf{v}}_i \qquad (۱۰.۲.۷)$$

در اینجا، $\mathbf{v}_{cm}$ سرعت مرکز جرم و $\overline{\mathbf{v}}_i$ سرعت ذرهٔ i نسبت به مرکز جرم است. بنابراین، عبارت مربوط به $\mathbf{L}$ را می‌توان به‌صورت زیر نوشت

$$\begin{aligned}\mathbf{L} &= \sum_i (\mathbf{r}_{cm} + \overline{\mathbf{r}}_i) \times m_i(\mathbf{v}_{cm} + \overline{\mathbf{v}}_i) \\ &= \sum_i (\mathbf{r}_{cm} \times m_i \mathbf{v}_{cm}) + \sum_i (\mathbf{r}_{cm} \times m_i \overline{\mathbf{v}}_i) \\ &+ \sum_i (\overline{\mathbf{r}}_i \times m_i \mathbf{v}_{cm}) + \sum_i (\overline{\mathbf{r}}_i \times m_i \overline{\mathbf{v}}_i) \\ &= \mathbf{r}_{cm} \times \left(\sum_i m_i \right) \mathbf{v}_{cm} + \mathbf{r}_{cm} \times \sum_i m_i \overline{\mathbf{v}}_i \\ &+ \left(\sum_i m_i \overline{\mathbf{r}}_i \right) \times \mathbf{v}_{cm} + \sum_i (\overline{\mathbf{r}}_i \times m_i \overline{\mathbf{v}}_i)\end{aligned} \tag{۱۱.۲.۷}$$

اکنون، با توجه به معادلهٔ (۹.۲.۷)، داریم:

$$\sum_i m_i \overline{\mathbf{r}}_i = \sum_i m_i (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_{cm}) = \sum_i m_i \mathbf{r}_i - m\mathbf{r}_{cm} = 0 \tag{۱۲.۲.۷}$$

به همین ترتیب، با مشتق‌گیری نسبت به t خواهیم داشت:

$$\sum_i m_i \overline{\mathbf{v}}_i = \sum_i m_i \mathbf{v}_i - m\mathbf{v}_{cm} = 0 \tag{۱۳.۲.۷}$$

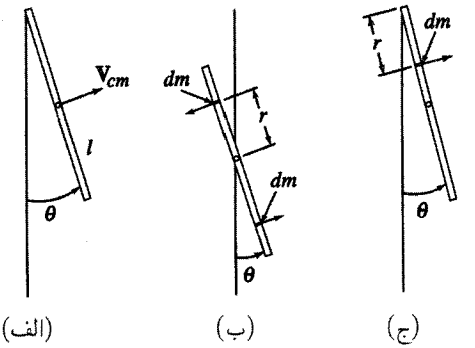
(این دو معادله صرفاً بیانگر این نکته‌اند که مکان و سرعت مرکز جرم، نسبت به مرکز جرم، هر دو صفرند). درنتیجه، مجموع‌یابیهای دوم و سوم در بسط $\mathbf{L}$ صفر می‌شوند و می‌توانیم بنویسیم:

$$\mathbf{L} = \mathbf{r}_{cm} \times m\mathbf{v}_{cm} + \sum_i \overline{\mathbf{r}}_i \times m_i \overline{\mathbf{v}}_i \tag{۱۴.۲.۷}$$

که تکانهٔ زاویه‌ای سیستم را برحسب یک جزء «مداری» (حرکت مرکز جرم) و یک جزء «اسپینی» (حرکت حول مرکز جرم) بیان می‌کند.

مثال ۱.۲.۷

میلهٔ طویل و نازکی به‌طول l و جرم m از نقطه‌ای آویخته و حول آن در صفحهٔ قائمی مانند یک آونگ ساده آزادانه تاب می‌خورد. تکانهٔ زاویه‌ای کل میله را به‌صورت تابعی از سرعت زاویه‌ای



شکل ۳.۲.۷ میله‌ای به جرم m و طول l که آزادانه حول نقطهٔ آویز ثابت در صفحهٔ قائم تاب می‌خورد.

لحظه‌ای آن، ω، محاسبه کنید. نشان دهید که قضیه‌ای که معادلهٔ (۱۴.۲.۷) آن را بیان می‌کند، با مقایسهٔ تکانهٔ زاویه‌ای که از این قضیه به‌دست می‌آید و تکانهٔ زاویه‌ای که به‌طور مستقیم محاسبه می‌کنید، صادق است.

حل:

این میله را در شکل ۳.۲.۷(الف) مشاهده می‌کنید. ابتدا تکانهٔ زاویه‌ای، $\mathbf{L}_{cm}$، مرکز جرم میله را حول نقطهٔ آویز محاسبه می‌کنیم. چون سرعت مرکز جرم، $\mathbf{v}_{cm}$، همیشه بر بردار شعاعی، $\mathbf{r}$، که مکان آن را نسبت به نقطه آویز نشان می‌دهد، عمود است، سینوس زاویهٔ بین این دو بردار واحد است. بنابراین، بزرگی $\mathbf{L}_{cm}$ از رابطه زیر به‌دست می‌آید:

$$L_{cm} = \frac{l}{2} p_{cm} = m\frac{l}{2} v_{cm} = m\frac{l}{2}\left(\frac{l}{2}\omega\right) = \frac{1}{4} m l^2 \omega$$

در شکل ۳.۲.۷(ب) حرکت میله را، آن‌طور که از دیدگاه مرکز جرم دیده می‌شود، ترسیم کرده‌ایم. تکانهٔ زاویه‌ای dL_{rel} از دو عنصر جرمی کوچک، هرکدام به جرم dm که به‌طور متقارن حول مرکز جرم میله قرار دارند، از این قرار بیان می‌شود:

$$dL_{rel} = 2r\,dp = 2rv\,dm = 2r(r\omega)\lambda\,dr$$

λ جرم واحد طول میله است. تکانهٔ زاویه‌ای نسبی کل با انتگرال‌گیری این رابطه از $r = 0$ تا $r = l/2$ به‌دست می‌آید:

$$L_{rel} = 2\lambda\omega \int_0^{l/2} r^2\,dr = \frac{1}{12}(\lambda l) l^2 \omega = \left(\frac{1}{12} m l^2\right)\omega$$

در معادلهٔ قبلی، می‌توانیم ببینیم که تکانهٔ زاویه‌ای میله حول مرکز جرمش مستقیماً با سرعت زاویه‌ای ω میله متناسب است. ثابت تناسب، $ml^2/12$، گشتاور لختی میله حول مرکز جرم آن، I_{cm}، است. گشتاور لختی در حرکت چرخشی سهیم است، و نقش جرم لختی را در حرکت انتقالی بازی می‌کند، این مطلب را در فصل بعد خواهیم دید.

سرانجام، تکانهٔ زاویه‌ای کل میله عبارت است از

$$L_{tot} = L_{cm} + L_{rel} = \frac{1}{3}ml^2\omega$$

در اینجا نیز، تکانهٔ زاویه‌ای کل میله با سرعت زاویه‌ای میله، ω، نسبت مستقیم دارد. اگر در اینجا ثابت تناسب گشتاور لختی میله حول نقطهٔ آویز در انتهای میله باشد، این گشتاور لختی از گشتاور لختی حول مرکز جرم بزرگتر است. علت این امر آن است که قسمت اعظم جرم میله از انتهای آن دورتر توزیع می‌شود تا از مرکز جرمش؛ به‌این اعتبار، چرخش میله حول انتهایش دشوارتر است.

تکانهٔ زاویه‌ای کل را نیز می‌توان با انتگرال‌گیری از بالا تا پایین میله با شروع از نقطهٔ آویز و به‌دست‌آوردن سهم هر عنصر جرمی dm، مطابق شکل ۳.۲.۷(ج)، به‌دست آورد

$$dL_{tot} = rdp = r(vdm) = r(r\omega)\lambda dr$$
$$L_{tot} = \lambda\omega\int_0^l r^2 dr = \frac{1}{3}ml^2\omega$$

و، درواقع، این دو روش به نتیجه‌ای یکسان می‌انجامند.

انرژی جنبشی سیستم

انرژی جنبشی کل سیستمی از ذرات، T، از جمع هر یک از انرژیها به‌دست می‌آید،

$$T = \sum_i \frac{1}{2}m_i v_i^2 = \sum_i \frac{1}{2}m_i(\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_i) \qquad (۱۵.۲.۷)$$

مانند قبل، می‌توانیم سرعتها را نسبت به مرکز جرم بیان کنیم

$$\begin{aligned} T &= \sum_i \frac{1}{2}m_i(\mathbf{v}_{cm} + \overline{\mathbf{v}}_i)\cdot(\mathbf{v}_{cm} + \overline{\mathbf{v}}_i) \\ &= \sum_i \frac{1}{2}m_i v_{cm}^2 + \sum_i m_i(\mathbf{v}_{cm}\cdot\overline{\mathbf{v}}_i) + \sum_i \frac{1}{2}m_i\overline{v}_i^2 \qquad (۱۶.۲.۷) \\ &= \frac{1}{2}v_{cm}^2\sum_i m_i + \mathbf{v}_{cm}\cdot\sum_i m_i\overline{\mathbf{v}}_i + \sum_i \frac{1}{2}m_i\overline{v}_i^2 \end{aligned}$$

چون مجموعیابی دوم، $\sum_i m_i\overline{\mathbf{v}}_i$، صفر می‌شود، می‌توان انرژی جنبشی را به این صورت بیان کرد:

$$T = \frac{1}{2}mv_{cm}^2 + \sum_i \frac{1}{2}m_i\overline{v}_i^2 \qquad (۱۷.۲.۷)$$

جملهٔ اول انرژی جنبشی انتقالی کل سیستم و جملهٔ دوم انرژی جنبشی حرکت آن نسبت به مرکز جرم است.

تفکیک تکانهٔ زاویه‌ای و انرژی جنبشی به یک جزء مرکز جرم و یک جزء نسبت به مرکز جرم، در فیزیک اتمی و مولکولی، و نیز اخترفیزیک کاربردهای چشمگیری یافته است. این دو قضیه در مطالعهٔ اجسام صلب در فصلهای بعدی به دردمان خواهد خورد.

مثال ۲.۲.۷

انرژی جنبشی کل میله در مثال ۱.۲.۷ را محاسبه کنید. قضیه‌ای به‌کارگیرید که با معادلهٔ (۱۷.۲.۷) بیان شده است. مانند مثال ۱.۲.۷، نشان دهید که انرژی کل به‌دست‌آمده برای میله، طبق این قضیه با انرژیی که با محاسبهٔ مستقیم به‌دست می‌آید، معادل است.

حل:

انرژی جنبشی انتقالی مرکز جرم میله عبارت است از

$$T_{cm} = \frac{1}{2}m\mathbf{v}_{cm}\cdot\mathbf{v}_{cm} = \frac{1}{2}m\left(\frac{l}{2}\omega\right)^2 = \frac{1}{8}ml^2\omega^2$$

انرژی جنبشی دو عنصر جرمی مساویِ dm که به‌طور متقارن حول مرکز جرم قرار دارند، عبارت‌اند از

$$dT_{rel} = \frac{1}{2}(2dm)\mathbf{v}\cdot\mathbf{v} = \lambda dr(r\omega)^2 = \lambda\omega^2 r^2 dr$$

که در اینجا نیز λ جرم واحد طول است. انرژی کل نسبت به مرکز جرم را می‌توان با انتگرال‌گیری رابطهٔ قبل، از $r = 0$ تا $r = \frac{l}{4}$، به‌دست آورد:

$$T_{rel} = \lambda\omega^2\int_0^{\frac{l}{4}} r^2 dr = \frac{1}{24}\lambda\omega^2 l^3 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{12}ml^2\right)\omega^2 = \frac{1}{2}I_{cm}\omega^2$$

(**گوشزد:** مانند مثال ۱.۲.۷، جملهٔ گشتاور لختی I_{cm} به‌صورت ثابت تناسب با ω^2 در رابطهٔ قبلی انرژی جنبشی چرخشی میله حول مرکز جرمش ظاهر می‌شود. در اینجا نیز، جملهٔ گشتاور لختی را که در رابطه انرژی جنبشی چرخشی ظاهر می‌شود می‌توان به‌طور کامل مشابه جملهٔ جرم لختی در رابطهٔ مربوط به انرژی جنبشی انتقالی ذره در نظر گرفت.)

بنابراین، انرژی جنبشی کل میله عبارت است از

$$T = T_{cm} + T_{rel} = \frac{1}{8}ml^2\omega^2 + \frac{1}{24}ml^2\omega^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}ml^2\right)\omega^2 = \frac{1}{2}I\omega^2$$

که نتیجهٔ نهایی را، دقیقاً مانند مثال ۱.۲.۷، برحسب گشتاور لختی میله حول نقطهٔ انتهاییش بیان کردیم.

محاسبهٔ انرژی جنبشی از طریق مستقیم اثبات اینکه کمیتی که به‌دست می‌آید با مقدار به‌دست آمدهٔ قبلی مساوی است، برای تمرین برعهدهٔ خواننده گذاشته می‌شود. محاسبه، کاملاً مشابه روش به کاررفته در مثال ۱.۲.۷، انجام می‌شود.

۳.۷ حرکت دو جسم برهم‌کنش‌کننده: جرم کاهش‌یافته

حرکت سیستمی متشکل از دو جسم را، که در اینجا آنها را ذره تلقی می‌کنیم، و به واسطهٔ نیروی مرکزی با هم برهم‌کنش دارند، در نظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم سیستم منزوی باشد، و از این‌رو مرکز جرم با سرعت ثابت حرکت کند. به‌منظور ساده‌شدن مراحل محاسبه و بررسی، مرکز جرم را مبدأ مختصات می‌گیریم. در این صورت،

$$m_1\overline{\mathbf{r}}_1 + m_2\overline{\mathbf{r}}_2 = 0 \qquad (۱.۳.۷)$$

در فرمول بالا، مطابق شکل ۱.۳.۷ بردارهای $\mathbf{r}_1$ و $\mathbf{r}_2$، به‌ترتیب، نمایانگر مکان ذرات m_1 و m_2 نسبت به مرکز جرم‌اند. حال اگر $\mathbf{R}$ بردار مکان ذرهٔ ۱ به ذرهٔ ۲ باشد، در این صورت

$$\mathbf{R} = \overline{\mathbf{r}}_1 - \overline{\mathbf{r}}_2 = \overline{\mathbf{r}}_1\left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right) \qquad (۲.۳.۷)$$

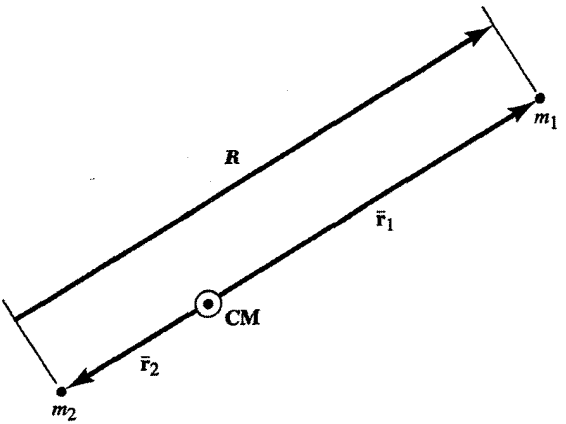
در مرحلهٔ آخر از معادلهٔ (۱.۳.۷) بهره گرفته شده است.

معادلهٔ دیفرانسیل حرکت ذرهٔ ۱ نسبت به مرکز جرم عبارت است از

$$m_1\frac{d^2\overline{\mathbf{r}}_1}{dt^2} = \mathbf{F}_1 = f(R)\frac{\mathbf{R}}{R} \qquad (۳.۳.۷)$$

که در آن $|f(R)|$ بزرگی نیروی متقابل بین دو ذره است. با بهره‌گیری از معادلهٔ (۲.۳.۷)، می‌توانیم بنویسیم

$$\mu\frac{d^2\mathbf{R}}{dt^2} = f(R)\frac{\mathbf{R}}{R} \qquad (۴.۳.۷)$$



شکل ۱.۳.۷ بردار مکان نسبی $\mathbf{R}$ برای مسئلهٔ دو جسم.

که

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \tag{۵.۳.۷}$$

کمیت μ را جرم کاهش‌یافته (یا جرم کاهیده) می‌گویند. این معادلهٔ جدید حرکت (معادلهٔ ۴.۳.۷)، بیانگر حرکت ذرهٔ ۱ نسبت به ذرهٔ ۲ است، و معادله‌ای دقیقاً شبیه به آن، حرکت ذرهٔ ۲ را نسبت به ذرهٔ ۱ به‌دست می‌دهد. این معادله دقیقاً مانند معادلهٔ معمولی حرکت یک تک‌ذره به جرم μ است که در میدان نیروی مرکزی $f(R)$ حرکت می‌کند. از این رو، این نکته که هر دو ذره نسبت به مرکز جرم حرکت می‌کنند با نشاندن جرم کاهش‌یافتهٔ μ به‌جای m_1، خودبه‌خود منظور می‌شود. اگر جرم این دو جسم مساوی و برابر m باشد، در این صورت $\mu = m/2$. از سوی دیگر، اگر m_2 خیلی از m_1 بزرگتر باشد، به‌طوری که m_1/m_2 خیلی کوچک شود، در این صورت μ تقریباً برابر m_1 است.

در مورد دو جسمی که با نیروی گرانشی یکدیگر را می‌ربایند،

$$f(R) = -\frac{Gm_1 m_2}{R^2} \tag{۶.۳.۷}$$

در این حالت، معادلهٔ حرکت عبارت است از

$$\mu \ddot{\mathbf{R}} = -\frac{Gm_1 m_2}{R^2} \mathbf{e}_R \tag{۷.۳.۷}$$

یا، معادل آن،

$$m_1\ddot{\mathbf{R}} = -\frac{G(m_1+m_2)m_1}{R^2}\mathbf{e}_R \qquad (۸.۳.۷)$$

که $\mathbf{e}_R = \mathbf{R}/R$ بردار یکه در راستای $\mathbf{R}$ است.

در بخش ۶.۶، معادله‌ای برای زمان تناوب حرکت مداری سیاره‌ای به جرم m، که در میدان گرانشی خورشید حرکت می‌کرد، به‌دست آوردیم، یعنی، $\tau = 2\pi(GM_\odot)^{-1/2}a^{3/2}$، که $M_\odot$ جرم خورشید و a نیم‌قطر بزرگ بیضی مدار سیاره به دور خورشید است. در طی این محاسبه، فرض شد که خورشید ثابت و مبدأ دستگاه مختصات ما در مرکز خورشید واقع است. با احتساب حرکت خورشید حول مرکز جرم مشترک، معادلهٔ درست همان معادلهٔ (۸.۳.۷) است که در آن $m = m_1$ و $M_\odot = m_2$. به این ترتیب، ثابت نیرو، k، که در بحث قبلی $GM_\odot m$ گرفته شده بود باید به‌جای $G(M_\odot + m)m$ بنشیند. به‌طوری که معادلهٔ صحیح برای زمان تناوب عبارت است از

$$\tau = 2\pi[G(M_\odot + m)]^{-1/2}a^{3/2} \qquad (۹.۳.۷ \text{ الف})$$

یا، برای هر دستگاه متشکل از دو جسم که تحت تأثیر گرانی به هم وابسته باشند، زمان تناوب مداری عبارت است از

$$\tau = 2\pi[G(m_1 + m_2)]^{-1/2}a^{3/2} \qquad (۹.۳.۷ \text{ ب})$$

اگر m_1 و m_2 برحسب یکایی از جرم خورشید و a برحسب یکای نجومی (فاصلهٔ متوسط زمین تا خورشید) بیان شوند، در این صورت زمان تناوب برحسب سال از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید

$$\tau = (m_1 + m_2)^{-1/2}a^{3/2} \qquad (۹.۳.۷ \text{ ج})$$

در مورد اکثر سیارات منظومهٔ شمسی، جملهٔ جرمی که در عبارت بالا برای زمان تناوب اضافه شد، اختلافی جزئی ایجاد می‌کند؛ جرم زمین فقط ۱/۳۳۰۰۰۰ جرم خورشید است. جرم مشتری، پرجرمترین سیارهٔ منظومه شمسی، حدود $\frac{1}{1000}$ جرم خورشید است؛ بنابراین اثر فرمول جرم کاهش‌یافته این است که محاسبهٔ قبلی، مثلاً برای زمان تناوب حرکت مداری مشتری به دور خورشید، را به‌میزان ۹۹۹۵ر۰ $= (1.001)^{-1/2}$ تغییر دهد.

ستاره‌های مزدوج: کوتوله‌های سفید و سیاهچاله‌ها

حدود نیمی از ستارگان موجود در کهکشان مجاور خورشید، مزدوج یا دوتایی‌اند؛ یعنی، به‌صورت زوج و تحت تأثیر ربایش گرانشی متقابل خود به هم وابسته‌اند، که هر عضو از این زوج حول مرکز جرم

مشترکشان می‌چرخد. بنا بر تحلیلهای پیشین می‌توانیم استنباط کنیم که هر عضو از یک دستگاه مزدوج در مداری بیضوی حول عضو دیگر می‌گردد و زمان تناوب این حرکت مداری از معادلات (۹.۳.۷ ب و ج) به‌دست می‌آید. در این معادلات، a نیم‌قطر بزرگ بیضی و m_1 و m_2 جرمهای این دو ستاره‌اند. مقادیر a برای دستگاههای مزدوج شناخته‌شده از کمترین مقدار (مزدوجهای مماس که در آنها ستاره‌ها با یکدیگر در تماس‌اند) تا مقادیر خیلی زیاد که زمان تناوبشان به میلیونها سال می‌رسد، امتداد دارند. ازجمله نمونه‌های متداول این ستارگان، می‌توان از درخشانترین ستارهٔ آسمان شب، یعنی شعرای یمانی یاد کرد که مشتمل است بر یک ستارهٔ خیلی نورانی به جرم $۲٫۱M_\odot$ و یک ستارهٔ کم‌نور خیلی کوچک به‌نام کوتولهٔ سفید که می‌توان آن را فقط به‌کمک تلسکوپهای بزرگ مشاهده کرد. جرم این همدم کوچک $۱٫۰۵M_\odot$ ولی اندازهٔ آن تقریباً به‌اندازهٔ یک سیارهٔ بزرگ است؛ از این رو چگالی آن فوق‌العاده زیاد (۳۰۰۰۰ برابر چگالی آب) است. مقدار a برای منظومهٔ شعرای یمانی تقریباً $۲۰\,\mathrm{AU}$ (در حدود فاصلهٔ سیارهٔ اورانوس تا خورشید) است، و زمان تناوبش، که از معادلهٔ (۹.۳.۷ ج) محاسبه می‌شود، باید تقریباً از این قرار باشد،

$$\tau = (۲٫۱ + ۱٫۰۵)^{-۱/۲}(۲۰)^{۳/۲}\mathrm{y} = ۵۰\mathrm{y}$$

که همان مقدار مشاهده‌شده است.

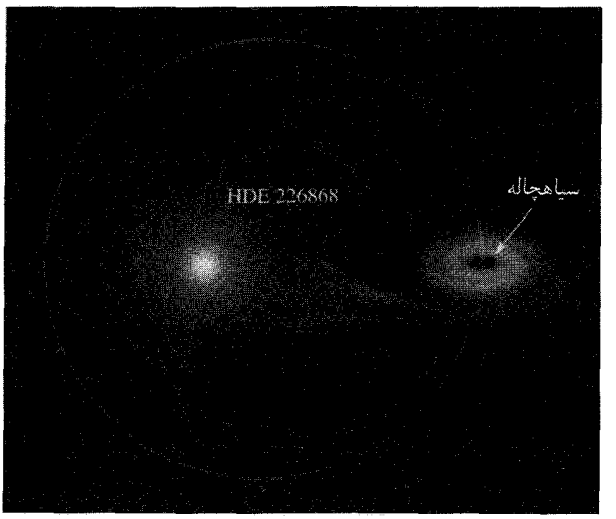
منظومه‌ای مزدوج که اعتقاد بر این است که یکی از مؤلفه‌هایش سیاهچاله باشد، دجاجهٔ X-۱ نام دارد.[1] مؤلفهٔ مرئی آن ستارهٔ معمولی HDE 226868 است. مشاهدهٔ طیفی این ستاره نشان می‌دهد که زمان تناوب و نیم‌قطر بزرگ مدار آن، به‌ترتیب، ۵٫۶ روز و حدود ۳۰×۱۰^۶ کیلومتر است. همدم نامرئی اپتیکی چشمهٔ شار پرتو x است که اُفت‌وخیزهایی را بروز می‌دهد که به‌سرعت هر یک‌میلی‌ثانیه تغییر می‌کند، و حاکی از آن است که ستارهٔ همدم نمی‌تواند بیشتر از $۳۰۰\,\mathrm{km}$ قطر داشته باشد. این مشاهدات، و نیز مشاهداتی دیگر، نشان می‌دهند که جرم HDE 226868 دست‌کم به بزرگی $۲۰M_\odot$ است، حال آنکه همدم آن احتمال دارد تا بزرگی $۱۶M_\odot$ باشد، ولی قطعاً از $۷M_\odot$ بزرگتر است. مشکل بتوان نتیجه‌گیری کرد که این شیء فشرده و پرجرم بتواند چیزی غیر از سیاهچاله باشد. سیاهچاله‌ها، اشیائی‌اند که در شعاع معین[2] حاوی جرمی زیادند که هیچ

1. A. P. Cowley, *Ann. Rev. Astron. Astrophys.* 30, 287 (1992).

۲. بنا بر نظریهٔ نسبیت عام، هر جسم ناچرخان، و متقارن کروی به‌جرم m، اگر تا شعاع r_s، به‌نام شعاع شوارتس‌شیلد، متراکم شود به‌طوری که

$$r_s = \frac{۲Gm}{c^۲}$$

به سیاهچالهٔ شوارتس‌شیلد تبدیل می‌شود؛ که c سرعت نور است. هرگاه زمین تا ابعاد یک تیلهٔ کوچک متراکم شود، در این صورت، به سیاهچاله تبدیل خواهد شد. خورشید به سیاهچاله تبدیل می‌شود، اگر تا شعاعی حدود $۳\,\mathrm{km}$ متراکم شود که از کوتولهٔ سفید شعرای یمانی خیلی کوچکتر است.



شکل ۲.۳.۷ منظومهٔ مزدوج دجاجه ۱ـX.

چیز، حتی نور نمی‌تواند از میدان گرانشی آنها بگریزد. اما، اگر سیاهچاله‌ها در منظومه‌های مزدوج جای داشته باشند، جرم می‌تواند از ستارهٔ همدم بزرگ «به خارج نشت کند» و قرص افزایشی حول سیاهچاله را تشکیل دهد. چون ماده در این قرص سیاهچاله را دور می‌زند، می‌تواند از طریق گرم‌شدن اصطکاکی انرژی از دست بدهد و برخورد در داخل آن صورت گیرد، و سرانجام تا دماهایی متجاوز از ده‌ها میلیون درجه گرم می‌شود. این مادهٔ داغ قبل از آنکه به‌طور کامل به داخل سیاهچاله فرو افتد، پرتوهای X گسیل می‌کند (شکل ۲.۳.۷). وجود سیاهچاله‌ها از لحاظ ریاضی در نظریهٔ نسبیت عام پیشگویی شده است و برهان صریح و روشنی از وجود آنها یکی از سنگ‌بناهای علم اخترفیزیک را تشکیل می‌دهد.

مثال ۱.۳.۷

هر منظومهٔ ستاره‌ای مزدوج معینی هم باید به روش گرفتگی هم به روش طیف‌شناختی رؤیت شود. منظور این است که این منظومه از زمین با صفحهٔ مداریش روی لبه دیده می‌شود و سرعتهای مداری v_1 و v_2 دو ستاره که این سیستم را تشکیل می‌دهند از اندازه‌گیریهای جابه‌جایی دوپلر خطوط طیفی مشاهده‌شده تعیین می‌شوند. ضرورتی ندارد جزئیات این گزارهٔ اخیر را به‌دقت بدانید. نکتهٔ مهم آن است که سرعتهای مداری را بدانیم. این سرعتها، برحسب یکاهای مربوطه، عبارت‌اند از $v_1 = ۱٫۲۵۷\text{AU/y}$ و $v_2 = ۵٫۰۲۷\text{AU/y}$. زمان تناوب گردش هر ستاره حول مرکز جرمش

عبارت است از $\tau = 5\text{y}$. (که می‌تواند از بسامد گرفتگیهای رؤیت‌شده معلوم شود.) جرم هر ستاره را (به یکای جرم خورشیدی، $M_\odot$) محاسبه کنید. فرض کنید مدارها دایره‌ای‌اند.

حل:
شعاع مدار هر ستاره حول مرکز جرم مشترکشان را می‌توان با توجه به سرعت و زمان تناوب آن محاسبه کرد:

$$r_1 = \frac{1}{2\pi} v_1 \tau = 1\text{AU} \qquad r_2 = \frac{1}{2\pi} v_2 \tau = 4\text{AU}$$

بنابراین، نیم‌قطر بزرگ مدار، a، عبارت است از

$$a = r_1 + r_2 = 5\text{AU}$$

مجموع جرمها را می‌توان از معادلهٔ (۹.۳.۷ج) به‌دست آورد

$$m_1 + m_2 = \frac{a^3}{\tau^2} = 5M_\odot$$

نسبت جرمها را می‌توان با مشتق‌گیری از معادلهٔ (۱.۳.۷) تعیین کرد:

$$m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2 = 0 \qquad \frac{m_2}{m_1} = \left|\frac{\mathbf{v}_1}{\mathbf{v}_2}\right| = \frac{1}{4}$$

ترکیب این دو رابطهٔ آخری مقادیری برای هر جرم به‌دست می‌دهد: $m_1 = 4M_\odot$ و $m_2 = 1M_\odot$.

۴.۷* مسئلهٔ سه جسم مقید[1]

در فصل ۶، حرکت تک‌ذره‌ای تحت تأثیر نیروی مرکزی را ملاحظه کردیم. حرکت سیاره‌ای در میدان گرانشی خورشید به‌کمک چنین نظریه‌ای به‌خوبی توصیف می‌شود، زیرا جرم خورشید در مقایسه با جرم سیاره چندان بزرگ است که از حرکت خود آن می‌توان چشم پوشید. در بخش قبلی، این شرط را چندان جدی نگرفتیم و پی بردیم که هنوز می‌توانیم روشهای تحلیل نیوتونی را در حالتهای

۱. تجزیه و تحلیل ما از مسئلهٔ سه جسم مقید بر مبنای کتاب زیر استوار است:

P. Hellings, *Astrophysics with a PC, An Introduction to Computational Astrophysics*, Willman-Bell, Inc., Richmond, VA (1994).

نیز ر.ک.

V. Szebehely, *Theory of Orbits*, Academic Press, New York (1967).

کلیتری به‌کارگیریم و جوابی تحلیلی برای حرکت آنها بیاوریم. اما، اگر فقط یک جسم دیگر، جسم سوم، به مسئله اضافه کنیم، حل آن بسی دشوار می‌شود. مسئلهٔ کلی سه جسم، یعنی محاسبهٔ حرکت سه جسم با جرم، مکان اولیه، و سرعتهای اولیهٔ متفاوت، تحت تأثیر میدان گرانشی مرکب از میدان گرانشی جرمهای دیگر، بعضی از بزرگترین اذهان را در عصر بعد از نیوتون مغلوب خود کرده است. حل تحلیلی این مسئله به‌علت دشواریهای ریاضی حل‌نشدنی ناممکن است. درواقع، این مسئله از طریق دستگاهی متشکل از نه معادلهٔ دیفرانسیل مرتبهٔ دوم توصیف می‌شود: یعنی، سه جسم متحرک در سه بعد. حتی بعد از ساده‌کردن ریاضی که با انتخاب خردمندانهٔ دستگاه مختصات و با استمداد از قوانین پایستگی برای یافتن ناورداییهای حرکت صورت می‌گیرد و با توجه به ناتوانی تکنیکهای تحلیلی جدید، این مسئله حل‌نشدنی است.

خوشبختانه، حل حالت ساده‌شده‌ای از مسئلهٔ کلی، که با همهٔ این احوال، تنوع گسترده‌ای از پدیده‌ها را توصیف می‌کند، ممکن است. این حالت خاص را مسئلهٔ سه جسم مقید می‌گویند. ساده‌سازیها هم فیزیکی‌اند و هم ریاضی: فرض می‌کنیم دو تا از جسمها (که اجسام اولیه[1] نامیده شده‌اند) جرمی بیشتر از جرم سوم (که جسم سوم نامیده می‌شود) داشته باشند و در یک صفحه، در مدارهای دایره‌ای حول مرکز جرمشان حرکت کنند. جرم جسم سوم در مقایسه با جرم هر یک از اجسام اولیه، چشم‌پوشیدنی است، و در صفحهٔ مداری آنها حرکت می‌کند و اثری گرانشی بر هیچ‌کدام از آنها ندارد.

هیچ سیستم فیزیکی یافت نمی‌شود که این شرایط را دقیقاً برآورده کند. جسم سوم همیشه مدار اجسام اولیه را مختل می‌کند. مدارهای دایره‌ای کامل هرگز تشکیل نمی‌شوند، هرچند اکثر مدارهای اجسام در منظومهٔ شمسی به‌استثنای ستاره‌های دنباله‌دار خیلی به دایره نزدیک می‌شوند. مدار جسم سوم هرگز با مدارهای اجسام ابتدایی هم‌صفحه نیست، گرچه تخطی از حالت هم‌صفحگی اغلب خیلی اندک است. دستگاههای گرانشی با جرم مرکزی غالب، گرایش چشمگیری به هم‌صفحه‌ای‌بودن بروز می‌دهند. در اینجا نیز، با استثناکردن ستاره‌های دنباله‌دار، سایر اعضای منظومهٔ شمسی به‌میزان زیادی هم‌صفحگی را بروز می‌دهند، مانند تک‌منظومه‌های سیارات برجیسی بزرگ و مجموعهٔ اقمار آنها که از این ویژگیها برخوردارند.

مسئلهٔ سه جسم مقید به‌صورت مدلی عالی برای محاسبهٔ حرکت مداری جسم سوم کوچک در میدان گرانشی دو ستارهٔ دیگر به‌کار می‌آید. نگریستن به دو جواب ممکن توصیف‌کنندهٔ دو موقعیت فرین (انتهایی) نسبتاً آسان است. یکی از این دو جواب وقتی پیش می‌آید که جسم سوم کم‌وبیش حول مرکز جرم دو ستارهٔ دیگر در چنین فاصلهٔ زیادی می‌گردد که دو سیارهٔ اولیه یکدیگر

۱. معمولاً، پرجرمترین جسم از این زوج را اولیه، و کم‌جرمترین آنها را ثانویه می‌نامند. در اینجا ما آنها را در کنار هم دوتایی اولیه می‌گیریم، زیرا حرکت آنها حرکتی فرعی است و حرکت جسم سوم بیشتر منظور اصلی ما را تشکیل می‌دهد.

به‌صورت یک تک‌منبع گرانشی در یکدیگر ادغام شوند. جواب دوم وقتی پیدا می‌شود که جسم سوم در فاصلهٔ بسیار نزدیک به یکی از اجسام اولیه مقید شود و به روش کپلری آن را دور بزند، که ظاهراً حضور جسم اولیهٔ دوم در آن آشکار است. این هر دو امکان در طبیعت تمیز داده می‌شوند. اما، در این بخش تلاش می‌کنیم جواب سوم و «مانایی»، نه‌چندان آشکار، را بیابیم؛ یعنی، جوابی که جسم سوم در آن به‌وسیلهٔ دو جسم دیگر «ثابت نگه داشته» می‌شود و در حرکت چرخشی کلی آنها مشارکت می‌کند. به بیان دیگر، ستاره یا جسم سوم نسبت به دو جسم اولیه کم‌وبیش ساکن باقی می‌ماند؛ سمتگیری کل این سیستم یا منظومه در فضا با سرعت زاویه‌ای ثابت می‌چرخد، اما پیکربندی نسبی سیستم با گذشت زمان ثابت باقی می‌ماند. ژوزف لویی لاگرانژ (۱۸۱۳ـ۱۷۳۶) ریاضیدان بزرگ قرن هجدهم، این مسئله را حل کرد و نشان داد که وجود چنین مداری ممکن است.

معادلات حرکت مسئلهٔ سه جسم مقید

مسئلهٔ مقید عبارت است از مسئلهٔ دوبعدی: تمام مدارها در یک تک‌صفحهٔ ثابت در فضا قرار می‌گیرند. مدار هر یک از دو ستارهٔ اولیه، دایره‌ای با سرعت زاویه‌ای مشترک ω حول مرکز جرم آنهاست. فرض می‌کنیم که مرکز جرم دو ستارهٔ اولیه در فضا ثابت باقی بماند و جهت چرخش حرکت مداری آنها که از بالا مشاهده می‌شود، مطابق شکل ۱.۴.۷، پادساعتگرد باشد.

جرم پرجرمترین ستارهٔ اولیه را به M_1، جرم ستارهٔ اولیه باکمترین جرم را به M_2، و جرم کوچک ستارهٔ سوم را که می‌خواهیم مدارش را محاسبه کنیم به m نشان می‌دهیم. دستگاه مختصات x'ـy' را که با دو ستارهٔ اولیه می‌چرخد و مبدأ آن در مرکز جرم آنها واقع است، اختیار می‌کنیم. جهت محور $x+$ را به‌سوی پرجرمترین ستاره اولیهٔ M_1 می‌گیریم. شعاع مدارهای دایره‌ای M_1 و M_2 را، به‌ترتیب، با a و b علامت‌گذاری می‌کنیم. این فواصل در طول محور x' در دستگاه مختصات چرخان ثابت می‌مانند.

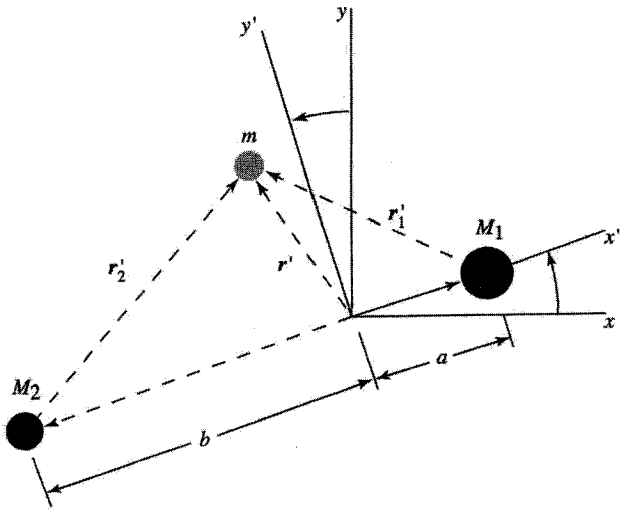
مختصات ستارهٔ سوم را (x', y') می‌گیریم؛ فاصلهٔ بین آن و هر کدام از ستاره‌های اولیه از این قرار است:

$$r'_1 = \sqrt{(x'-a)^2 + y'^2} \qquad \text{(الف ۱.۴.۷)}$$

$$r'_2 = \sqrt{(x'+b)^2 + y'^2} \qquad \text{(ب ۱.۴.۷)}$$

بنابراین، نیروی گرانشی خالص وارد بر m (معادلهٔ ۱.۱.۶) عبارت است از

$$\mathbf{F} = -m\frac{GM_1}{r'^2_1}\left(\frac{\mathbf{r}'_1}{r'_1}\right) - m\frac{GM_2}{r'^2_2}\left(\frac{\mathbf{r}'_2}{r'_2}\right) \qquad (۲.۴.۷)$$



شکل ۱.۴.۷ دستگاه مختصات برای مسئلهٔ سه جسم مقید.

که $\mathbf{r}_1'$ و $\mathbf{r}_2'$ مکانهای برداری m نسبت به M_1 و M_2 هستند. این نیرو تنها نیروی واقعی است که بر m وارد می‌آید، اما چون حرکت دو ستارهٔ اولیه را با اقدام به محاسبهٔ حرکت در دستگاه مرجعی که با آنها می‌چرخد عملاً لغو کرده‌ایم، باید اثر نیروهای نالَخت را که به‌علت این اقدام، وارد می‌شوند، منظور کنیم.

معادلهٔ کلی حرکت برای ذره‌ای در دستگاه مرجع چرخان به‌کمک معادلهٔ (۲.۳.۵) بیان می‌شود. چون مبدأ دستگاه مختصات چرخان در فضا ثابت باقی می‌ماند، $\mathbf{A}_0 = 0$، و چون آهنگ چرخش ثابت است، $\dot{\boldsymbol{\omega}} = 0$، معادلهٔ (۲.۳.۵) به‌این صورت درمی‌آید:

$$\mathbf{F}' = m\mathbf{a}' = \mathbf{F} - 2m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}' - m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') \qquad (۳.۴.۷)$$

چون m در همهٔ جمله‌های معادلهٔ (۳.۴.۷) مشترک است، می‌توانیم این معادله را برحسب جمله‌های شتاب بازنویسی کنیم:

$$\mathbf{a}' = \frac{\mathbf{F}}{m} - 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}' - \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') \qquad (۴.۴.۷)$$

اکنون در موقعیتی هستیم که دو شتاب نالَخت اخیر در معادلهٔ (۴.۴.۷)، شتابهای کوریولیس و مرکزگریز، را محاسبه کنیم:

$$2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}' = 2\omega\mathbf{k}' \times (\mathbf{i}'\dot{x}' + \mathbf{j}'\dot{y}') = -\mathbf{i}'2\omega\dot{y}' + \mathbf{j}'2\omega\dot{x}' \qquad (۵.۴.۷)$$

و

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}') &= \omega\mathbf{k}'\times[\omega\mathbf{k}'\times(\mathbf{i}'x'+\mathbf{j}'y')]\\ &= -\mathbf{i}'\omega^{۲}x'-\mathbf{j}'\omega^{۲}y'\end{aligned} \qquad (۶.۴.۷)$$

حالا معادلات (۱.۴.۷ الف و ب)، (۲.۴.۷)، (۵.۴.۷)، و (۶.۴.۷) را در معادلهٔ (۴.۴.۷) وارد می‌کنیم تا معادلات حرکت جرم m در مختصات x' و y' را به‌دست آوریم:

$$\ddot{x}' = -GM_{۱}\frac{x'-a}{[(x'-a)^{۲}+y'^{۲}]^{۳/۲}} - GM_{۲}\frac{x'+b}{[(x'+b)^{۲}+y'^{۲}]^{۳/۲}} + \omega^{۲}x' + ۲\omega\dot{y}' \qquad (۷.۴.۷\text{ الف})$$

$$\ddot{y}' = -GM_{۱}\frac{y'}{[(x'-a)^{۲}+y'^{۲}]^{۳/۲}} - GM_{۲}\frac{y'}{[(x'+b)^{۲}+y'^{۲}]^{۳/۲}} + \omega^{۲}y' - ۲\omega\dot{x}' \qquad (۷.۴.۷\text{ ب})$$

پتانسیل مؤثر: پنج نقطهٔ لاگرانژی

قبل از حل معادلات (۷.۴.۷ الف و ب) می‌خواهیم دربارهٔ جوابهای ممکنی که می‌توانیم به‌دست آوریم تأمل کنیم. برای انجام این کار، توجه می‌کنیم که سه جملهٔ اول در هرکدام از آن معادلات را می‌توان به‌صورت گرادیان یک تابع پتانسیل مؤثر $V(r')$ در مختصات قطبی بیان کرد،

$$V(r') = -\frac{GM_{۱}}{|\mathbf{r}'-\mathbf{a}|} - \frac{GM_{۲}}{|\mathbf{r}'-\mathbf{b}|} - \frac{۱}{۲}\omega^{۲}\mathbf{r}'^{۲} \qquad (۸.۴.۷\text{ الف})$$

یا $V(x',y')$ در مختصات دکارتی

$$V(x',y') = -\frac{GM_{۱}}{\sqrt{(x'-a)^{۲}+y'^{۲}}} - \frac{GM_{۲}}{\sqrt{(x'+b)^{۲}+y'^{۲}}} - \frac{۱}{۲}\omega^{۲}(x'^{۲}+y'^{۲}) \qquad (۸.۴.۷\text{ ب})$$

جملهٔ آخر در معادلات (۷.۴.۷ الف و ب) به سرعت بستگی دارند و نمی‌توانند به‌صورت گرادیان پتانسیل مؤثر بیان شوند. بنابراین، باید جملهٔ کوریولیس را به شکل جملهٔ اضافی، در هر معادله که نیرو از پتانسیل مؤثر به‌دست می‌آید، منظور کرد. مثلاً، معادلهٔ (۳.۴.۷) به‌صورت زیر درمی‌آید

$$\mathbf{F}' = -\boldsymbol{\nabla}V(x',y') - ۲m\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v} \qquad (۹.۴.۷)$$

با بیان جرم، طول، و زمان در یکاهایی که $V(x',y')$ را به شکلی ناوردا تبدیل کند تا آن را به تمام موقعیتهای سه جسم مقید، مستقل از مقادیر جرمشان، کاربردپذیر کند، در تمام محاسبات

بعدی می‌توان به ساده‌سازی چشمگیری دست یافت. اولاً، تمام فواصل را به جداسازی کل دو ستارهٔ اولیه، مقیاس‌بندی می‌کنیم، یعنی $a+b$ را معادل یکای طول قرار می‌دهیم. این عمل مشابه با قراردادی است که در آن یکای نجومی، یا AU، میانگین فاصلهٔ زمین و خورشید اختیار شد و از آن برای بیان فاصلهٔ سایر سیارات، در منظومهٔ شمسی بهره می‌گیرند. سپس، ضریب $G(M_۱+M_۲)$ را یکای جرم «گرانشی» می‌گیریم. در این صورت، جرمهای «گرانشی» GM_i هر جسم را می‌توان برحسب مضرب کسری α_i از این یکا بیان کرد. سرانجام، زمان تناوب مداری ستاره‌های اولیه، τ، را مساوی ۲π برابر یکاهای زمان قرار می‌دهیم. این کار حاکی از آن است که سرعت ω با عکس یکای زمانی ($\omega = ۱$) برابر است. بهره‌گیری از این یکاهای مقیاس‌بندی برای ما امکان مشخص‌کردن معادلات حرکت را با تک‌پارامتر α، $۰ < \alpha < ۰٫۵$، فراهم می‌آورد. به‌علاوه، فایدهٔ دیگر کاربرد آنها از این قرار است که روابط ما از شر ضریب نامطلوب G خلاص می‌شود.

در این صورت، فاصلهٔ هر ستارهٔ اولیه تا مرکز جرمش برحسب α عبارت است از

$$\alpha = \frac{a}{a+b} \qquad \beta = \frac{b}{a+b} = ۱ - \alpha \tag{۱۰.۴.۷}$$

بنابراین، مختصات ستارهٔ اولیهٔ نخست عبارت است از $(\alpha, ۰)$، و برای ستارهٔ اولیهٔ دوم عبارت خواهد بود از $(-\alpha, ۰ ۱)$. به‌علاوه، چون مبدأ دستگاه مختصات مرکز جرم است، از معادلهٔ (۱.۳.۷) داریم،

$$M_۱ a = M_۲ b \tag{۱۱.۴.۷}$$

و در این صورت، جرمهای «گرانشی» هر ستارهٔ اولیه نیز برحسب ضریب α بیان می‌شود:

$$\alpha_۱ = \frac{GM_۱}{G(M_۱+M_۲)} = \frac{b}{a+b} = ۱ - \alpha \tag{۱۲.۴.۷ الف}$$

$$\alpha_۲ = \frac{GM_۲}{G(M_۱+M_۲)} = \frac{b}{a+b} = \alpha \tag{۱۲.۴.۷ ب}$$

$M_۱$ جرم ستارهٔ اولیهٔ بزرگتر، و $M_۲$ جرم ستارهٔ اولیهٔ کوچکتر است؛ از این‌رو، $۰ < \alpha < ۰٫۵$ و $۰٫۵ < ۱ - \alpha < ۱$.

مثال ۱.۴.۷

با بهره‌گیری از یکاهایی که قبلاً در خصوص آنها صحبت کردیم، خواص کلی منظومهٔ ستارهٔ مزدوج در مثال ۱.۳.۷ را توصیف کنید. جرم خورشید عبارت است از $M_\odot = ۱٫۹۹ \times ۱۰^{۳۰}\,\mathrm{kg}$. یکای نجومی برابر است با $۱\mathrm{AU} = ۱٫۴۹۶ \times ۱۰^{۱۱}\,\mathrm{m}$.

حل:

جرم دو ستارهٔ اولیه: M_i	به‌ترتیب، $4M_\odot$ و $1M_\odot$
پارامتر α:	$1/(1+4) = 0.2$
جرمهای مقیاس‌بندی‌شدهٔ دو ستارهٔ اولیهٔ α_i:	$\alpha = 0.2$؛ $1-\alpha = 0.8$
مختصات (x_i', y_i') دو ستارهٔ اولیه:	$(-0.8, 0)$، $(0.2, 0)$
یکای جرم «گرانشی» $G(M_1+M_2)$:	$6.6 \times 10^{20}\,\mathrm{m^3/s^2}$
زمان تناوب مداری: یکای زمانی $\tau = 5y = 2\pi$	$1.58 \times 10^{8}\,\mathrm{s}$
یکای زمانی: $\tau/2\pi$	$2.51 \times 10^{7}\mathrm{s}(0.796\mathrm{y})$
سرعت زاویه‌ای: (معکوس یکای زمانی ۱ =) $\omega = 2\pi/\tau$	$3.98 \times 10^{-8}\,\mathrm{s^{-1}}$
یکای طول: $a+b = 5\mathrm{AU}$	$7.48 \times 10^{11}\mathrm{m}$

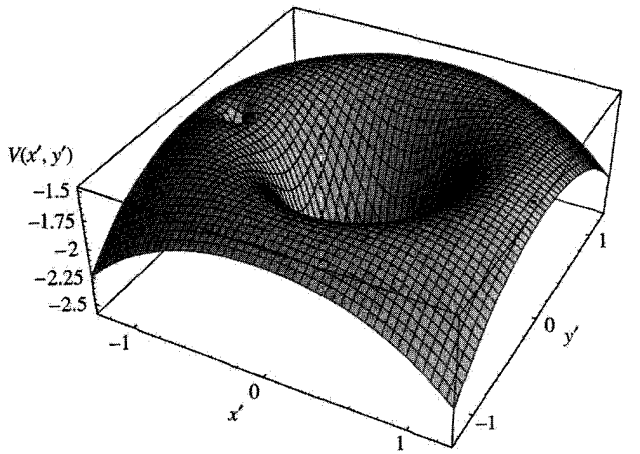
برحسب این یکاهای جدید، تابع پتانسیل مؤثر معادلهٔ (۸.۴.۷ ب) به‌صورت زیر در می‌آید:

$$V(x',y') = -\frac{1-\alpha}{\sqrt{(x'-\alpha)^2+y'^2}} - \frac{\alpha}{\sqrt{(x'+1-\alpha)^2+y'^2}} - \frac{x'^2+y'^2}{2} \qquad (۱۳.۴.۷)$$

منحنی نمایش تغییرات پتانسیل مؤثر $V(x',y')$ را در شکل ۲.۴.۷ برای دستگاه اولیهٔ زمین و ماه، که $\alpha = 0.012$، مشاهده می‌کنید. نمودارهای پتانسیل مؤثر دستگاههای مزدوج (دوتایی) دیگر، نظیر ستاره‌های مزدوج که در آنها پارامتر α به‌ندرت کمتر از ۲۰٪ است، یا در وضعیت انتهایی دیگر منظومهٔ خورشید–مشتری که در آن $\alpha = 0.000953875$، از نظر کیفی یکسان‌اند.

برای بررسی دقیق این نمودار می‌ارزد که وقت صرف کنیم زیرا جنبه‌هایی چند به نمایش می‌گذارد که بینشی از مدارهای ممکن جسم سوم به ما می‌دهد.

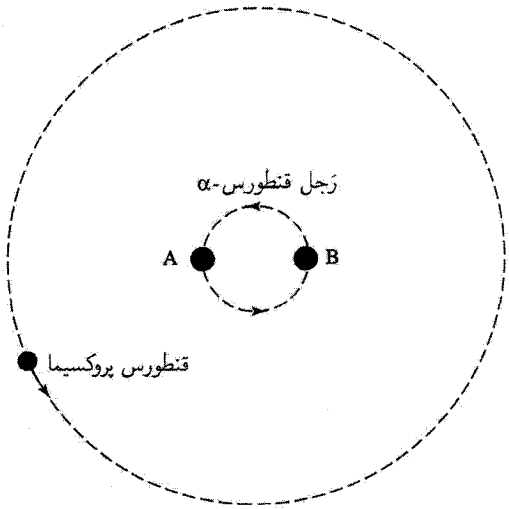
- در مکان این دو جسم (ستارهٔ) اولیه، $V(x',y') \to -\infty$ این نقاط تکینگی‌اند. این امر پیامد این نکته است که هر جسم یا ستارهٔ اولیه چنان بیان شده که گویی نقطهٔ جرمی است. می‌توانیم فرض کنیم که، اگر ستارهٔ سوم در جایی داخل یکی از این «حفره‌های» پتانسیل جای گیرد، ممکن است حول یک ستارهٔ اولیه چنان بچرخد که گویی ستارهٔ اولیهٔ دیگر حتی وجود ندارد. مثلاً، منظومهٔ خورشید–مشتری را در نظر بگیرید: هر ستارهٔ اولیه منبع تجهیزات «قمرها»ست؛ مشتری قمرهای خود را دارد و خورشید دارای چهار سیارهٔ داخلی نزدیک به خودش است. هیچ اولیه‌ای در ضمایم و پیوستهای اولیهٔ دیگر دخالت نمی‌کند (دست‌کم، نه دخالت خیلی زیادی). هر چند، توجه کنید که سرعت زاویه‌ای تمام این «قمرها» حول ستارهٔ اولیهٔ مربوطهٔ خود خیلی



شکل ۲.۴.۷ پتانسیل مؤثر $V(x', y')$ برای دستگاه زمین و ماه.

بیشتر از سرعت زاویه‌ای دو ستارهٔ اولیه حول مرکز جرمشان است. به‌علاوه، ستاره‌های سوم را در چنین مدارهایی ستارهٔ اولیه در مدار خودش همراه با خود می‌کشد.

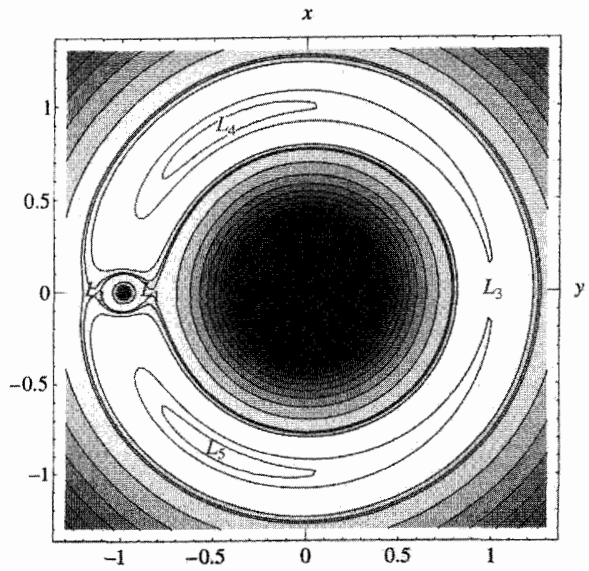
- $V(x', y') \to -\infty$، هرگاه x' یا y' به بینهایت میل کند. این امر پیامد چرخش دستگاه مختصات $x'y'$ است. علی‌الاصول، هر ستارهٔ سومی در ابتدا نسبت به این دستگاه چرخان ساکن است، اما در فاصلهٔ دور از مرکز جرم این دو ستارهٔ اولیه نیروی مرکزگریز بزرگی بر آن وارد می‌آید و سبب می‌شود حتی دورتر از مبدأ حرکت کند. سرانجام، چنین جسمی ممکن است خود را در فاصلهٔ خیلی دور $[r' > (a+b)]$ در مداری پایدار حول مرکز جرم دو ستاره اولیه بیابد، اما نه ساکن در دستگاه مرجع چرخان. سرعت زاویه‌ای چنین ستارهٔ سومی باید از سرعت زاویه‌ای دو ستارهٔ اولیه خیلی کمتر باشد که مداری پیشرونده، پادساعتگرد، و پایدار در دستگاه مرجع ثابت به‌صورت مداری رجوعی، ساعتگرد و پایدار در دستگاه چرخان، با سرعت زاویه‌ای منفی سرعت زاویه‌ای ستاره‌های اولیه، ظاهر می‌شود. مثال و نمونه‌ای از این مورد نزدیکترین همسایهٔ ستاره‌ای ما، منظومهٔ ستاره‌ای رجل قنطورس، است که از دو ستارهٔ اولیهٔ، رجلِ قنطورس A و B و یک ستارهٔ سوم، قنطورس پروکسیما (شکل ۳.۴.۷) تشکیل می‌شود.
- در پنج مکان $\nabla V(x', y') = 0$ ؛ به بیان دیگر در این مکانها نیروی وارد بر ذره‌ای ساکن در دستگاه مرجع $x'y'$ صفر می‌شود. این نقاط راه به نام ژوزف لویی لاگرانژ نقاط لاگرانژی می‌گویند. به افتخار وی، این نقاط را L_1 تا L_5 نشانگذاری کرده‌اند. سه نقطه از این نقاط همخط، و در



شکل ۳.۴.۷ منظومهٔ رجل قنطورس. جرم ستاره‌های اولیهٔ $1M_\odot$ر۱ و $88M_\odot$ر۰ هستند. جرم قنطورس پروکسیما عبارت است از $1M_\odot$ر۰. A و B به‌فاصلهٔ ۲۵AU از هم قرار دارند. قنطورس پروکسیما در فاصلهٔ ۵۰,۰۰۰AU از آن، زوج ستاره را دور می‌زند.

امتداد محور x' قرار می‌گیرند. L_1 بین دو ستارهٔ ابتدایی قرار می‌گیرد. L_2 در سمت مقابل ستارهٔ اولیه با جرم کمتر، و L_3 در سمت مقابل ستارهٔ اولیه با جرم بیشتر قرار می‌گیرد. این سه‌نقطه را نقاط زینی $V(x', y')$ می‌گویند. این نقاط در امتداد محور X' بیشینه‌های موضعی، اما در امتداد محور y' کمینه‌های موضعی‌اند.

- دو ستارهٔ اولیه قاعدهٔ مشترک دو مثلث متساوی‌الاضلاع را تشکیل می‌دهند که رأس آنها در نقاط L_4 و L_5، بیشینه‌های مطلق تابع $v(x', y')$، قرار دارند. در حالی‌که ستاره‌های اولیه حول مرکز جرمشان می‌چرخند، L_4 به اندازهٔ ۶۰° جلوتر از ستارهٔ اولیه کم‌جرمتر (در جهت $+y'$)، و L_5 به‌اندازهٔ ۶۰° پشت سر آن (در جهت $-y'$) باقی می‌ماند. موضع این پنج نقطه با بررسی نمودار پربندی تابع انرژی پتانسیل مؤثر، مطابق شکل ۴.۴.۷، آسانتر رؤیت می‌شود.
- هر خط در نمودار پربندی یک هم‌پتانسیل است؛ یعنی، خطی که شرط $V(x_i', y_i') = V_i$ را تأمین می‌کند، که V_i مقداری ثابت است. معمولاً خطوط هم‌پتانسیل در نمودار پربندی «ارتفاعهای» V_i را نمایش می‌دهند که اختلاف آنها با یکدیگر مقداری مساوی است. منظور این است که نواحی نمودار، در جایی که گرادیان، $\nabla V(x', y')$، «شیبدار» (یا نیرو بزرگ) است، خطوط پربندی تنگِ هم را به نمایش می‌گذارند. در مناطقی که گرادیان «تخت» باشد (یا نیرو به صفر



شکل ۴.۴.۷ نمودار پربندی پتانسیل مؤثر $V(x', y')$ برای منظومهٔ زمین-ماه.

نزدیک شود)، خطوط پربندی جدا از یکدیگر نمایش خواهند داد. در شکل ۴.۴.۷ این قرارداد را رعایت نکرده‌ایم. «اندازهٔ گام» بین ارتفاعهای پربندی را که از نزدیک پنج نقطهٔ لاگرانژی عبور می‌کنند کاهش داده‌ایم تا مکانهای آنها را روشنتر و واضحتر کنیم.

شاید حدس بزنید که ممکن است ستاره‌ای (جسمی) سوم در هر یک از این پنج نقطه قرار گیرد، در حالی که هم‌گام با دو ستارهٔ اولیه که حول مرکز جرمشان می‌چرخند، قفل شده باشد. معلوم می‌شود که هرگز در طبیعت برای ستارهٔ سوم پیش نمی‌آید که در L_1 و L_3 قرار گیرد؛ این نقاط تعادل ناپایدارند. اگر جسمی در یکی از این نقاط قرار گیرد، هرگاه به‌طور جزئی مغشوش شود به سمت یکی از ستاره‌های ابتدایی حرکت می‌کند و از دیگری یا از هر دوی آنها دور می‌شود.

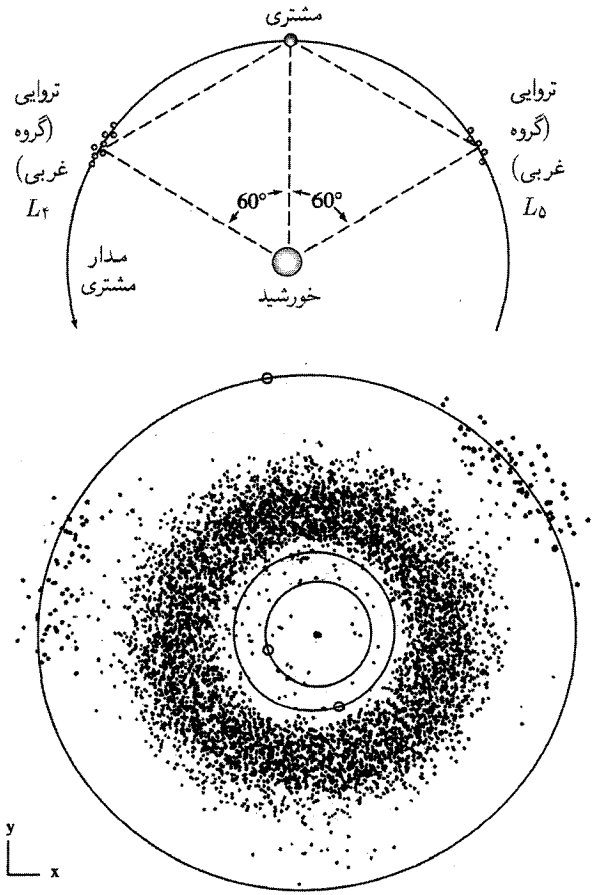
از بررسی دقیق شکلهای ۳.۴.۷ و ۴.۴.۷ نتیجه می‌گیریم که پتانسیل نسبتاً تخت است و اطراف L_4 و L_5 پهن می‌شود و بیانگر این نکته است که ناحیه‌ای نسبتاً گسترده، و تقریباً فاقد نیرو وجود دارد که ستارهٔ سوم باید به‌راحتی در آنجا قرار گیرد و کم و بیش با واکنش مخالف نیروهای گرانشی و مرکزگریز به‌حال موازنه درآید. اما، چون L_4 و L_5 مواضع بیشینهٔ مطلق‌اند، این حدس را نیز می‌توان زد که وجود مدار هم‌گام و پایداری در این نقاط ممکن نیست. اگرچه به یاد می‌آورید که تمام نیروهای وارد بر ستارهٔ سوم از گرادیان $V(x', y')$ به‌دست نمی‌آیند. نیروی کوریولیس وابسته به

سرعت را باید در نظر گرفت و اثر آن چشم‌پوشیدنی نیست، به‌خصوص در هر ناحیه‌ای که این نیرو غالب باشد، و در آنجا تحت شرایطی در ناحیهٔ محاط بر L_4 و L_5 این وضعیت می‌تواند برقرار باشد. نیروی کوریولیس همواره در جهت عمود بر سرعت ذره وارد می‌آید. به این ترتیب، انرژی جنبشی آن را تغییر نمی‌دهد زیرا $\mathbf{F}\cdot\mathbf{v}=0$. اگر ستارهٔ سومی به‌کندی در جهت مناسبی در نزدیکی L_4 و L_5 حرکت، در دستگاه مرجع $x'y'$ ساکن باشد، نیروی کوریولیس باید بر نیروهای گرانشی و مرکز گریز که تقریباً به حال موازنه در آمده‌اند غلبه و جهت سرعتش را دوباره تعیین کند که به این علت ستارهٔ سوم حرکت دایره‌ای پیرامون L_4 یا L_5 اجرا کند. در واقع، این اتفاق در طبیعت رخ می‌دهد. نیروی کوریولیس یک سد مؤثر و شبه‌بیضیوار پیرامون نقاط L_4 و L_5 برقرار می‌کند و به این ترتیب، بیشینهٔ پتانسیل مؤثر را به «چاههای» کوچک پایداری برمی‌گرداند. با فرض برقراری شرایط صحیح، باید انتظار داشته باشیم که ستارهٔ سوم دقیقاً یکی از پربندهای هم‌پتانسیل پیرامون L_4 و L_5 را دنبال کند، که هم انرژی جنبشی آن و هم انرژی پتانسیلش در سراسر حرکت نسبتاً ثابت باقی بمانند.

وضعیتی که هم اکنون توصیف شد مشابه گردش هواست که پیرامون سامانه‌های پرفشار، یا «ناهمواریها» در جو زمین پیش می‌آید. نیروی گرانشی بر آن است که هوا را به سمت داخل زمین بکشاند؛ نیروی مرکزگریز آن را به خارج پرتاب می‌کند؛ هنگامی که هوا از بالا به پایین می‌ریزد، نیروی کوریولیس سبب می‌شود هوا پیرامون ناهمواریهای پرفشار، در جهت ساعتگرد در نیمکرهٔ شمالی بگردد. چنین سامانه‌های گردش‌کننده‌ای در جو زمین فقط به‌طور موقتی پایدارند. ابتدا تشکیل و سپس پراکنده می‌شوند. اما، لکهٔ قرمز بزرگ روی سیارهٔ مشتری، توفان پرفشاری است که عارضهٔ دائمی جو آن به شمار می‌آید؛ دائمی به این معنی که این لکه از زمانی که گالیله تا حدود ۴۰۰ سال پیش، آن را با تلسکوپ خود دیده بود، تاکنون در همان جاست! توجه کنید که این نمونه‌های چرخشی نسبت به دستگاه چرخان «ثابت»اند. همین وضعیت درست برای مدار ستارهٔ سوم اطراف L_4 و L_5 برقرار است.

سیارکهای تروایی

سیارکهای تروایی گروه خاصی از سیارکها در تشدید مداری ۱:۱ با مشتری‌اند که مرکز جرم آنها روی مدار مشتری ۶۰° در جلو و ۶۰° در پشت سر آن قرار می‌گیرد (شکل ۵.۴.۷). اینها نقاط L_4 و L_5 در منظومهٔ ستاره‌های اولیهٔ خورشید-مشتری‌اند. توجه کنید که سیارکهای تروایی به نحوی پراکنده پیرامون نقاط L_4 و L_5 پخش می‌شوند. هر عضو از گروه همراه با مشتری در دستگاه مرجع ثابت خورشید را دور می‌زند، اما چنان‌که در دستگاه مرجع $x'y'$ از بالا دیده می‌شود، به‌کندی در جهت ساعتگرد به دور L_4 و L_5 می‌چرخد. در این بخش، برخی نمونه‌های مدارهای این سیارکها را محاسبه می‌کنیم.



شکل ۵.۴.۷ (الف) سیارکهای ترواییِ. (ب) سیارکهای ترواییِ و کمربند سیارکی که با مدارهای مشتری مریخ و زمین نشان داده شده است.

ابتدا، معادلات حرکت (معادلات ۷.۴.۷ الف و ب) را با بهره‌گیری از مختصات مقیاس‌بندی‌شده که قبل از این معرفی کردیم، بازنویسی می‌کنیم، قرار می‌دهیم:

$$r'_1 = \sqrt{(x'-\alpha)^2 + y'^2} \qquad r'_2 = \sqrt{(x'+1-\alpha)^2 + y'^2} \qquad (۱۴.۴.۷)$$

معادلات (۷.۴.۷ الف و ب) به‌صورت زیر در می‌آیند:

$$\ddot{x}' = -(1-\alpha)\frac{(x'-\alpha)}{r'^3_1} - \alpha\frac{(x'+1-\alpha)}{r'^3_2} + x' + 2\dot{y}' \qquad (۱۵.۴.۷ \text{ الف})$$

$$\ddot{y}' = -(1-\alpha)\frac{y'}{r'^3_1} - \alpha\frac{y'}{r'^3_2} + y' - 2\dot{x}' \qquad (۱۵.۴.۷ \text{ ب})$$

در مثال ۲.۳.۴، حل‌کنندهٔ معادلهٔ دیفرانسیل عددی متماتیکا، $NDSolve$، را برای حل‌کردن مجموعه‌ای از دستگاه معادلات دیفرانسیل مرتبهٔ دوم، نظیر معادلات (۱۵.۴.۷ الف و ب)، را به کار گرفتیم. در اینجا، روش مشابهی را با اختلاف اندکی به‌کار می‌بریم: دو متغیر اضافی v' و u' را وارد می‌کنیم،

$$\dot{x}' = u' \qquad \text{(۱۶.۴.۷ الف)}$$

$$\dot{y}' = v' \qquad \text{(۱۶.۴.۷ ب)}$$

تا زوج معادلات دیفرانسیل در معادلات (۱۵.۴.۷ الف و ب) را به دو معادلهٔ مرتبهٔ اول تبدیل کنیم:

$$\dot{u}' = -(۱-\alpha)\frac{(x'-\alpha)}{r_۱'^۳} - \alpha\frac{(x'+۱-\alpha)}{r_۲'^۳} + x' + ۲v' \qquad \text{(۱۶.۴.۷ ج)}$$

$$\dot{v}' = -(۱-\alpha)\frac{y'}{r_۱'^۳} - \alpha\frac{y'}{r_۲'^۳} + y' - ۲u' \qquad \text{(۱۶.۴.۷ د)}$$

این همان شگردی بود که در بخش ۸.۳ به اعتبار آن حرکت نوسانگر خودمحدودکننده را حل کردیم. این شگرد دستاویزی استاندارد است که برای تبدیل n معادلهٔ دیفرانسیل مرتبهٔ دوم به $۲n$ معادلهٔ دیفرانسیل مرتبهٔ اول به‌کار برده می‌شود، و امکان بهره‌گیری از روشهای رونج‌ـکوتا را برای حل معادلات حاصل فراهم می‌آورد. در اکثر حل‌کننده‌های عددی معادلات دیفرانسیل از این روش سود جسته می‌شود. متکد نیازمند آن است که کاربر $۲n$ معادله را در قالب مرتبهٔ اول وارد کند. این عمل از استلزامات متماتیکا نیست، هر چند هنوز هم یکی از انتخابها به شمار می‌آید. ما به این جهت از این روش بهره می‌گیریم که کاربردی بسیار عمومی دارد. در بخش زیر، فراخوان ویژه‌ای را که برای $NDSolve$ داده‌ایم مطرح می‌کنیم. این برنامه شبیه همان است که در مثال ۲.۳.۴ درخصوص آن بحث کردیم. پریمهایی که برای مشخص‌کردن مختصات چرخان به‌کار بردیم حذف می‌کنیم، زیرا در متماتیکا به جای نقطه‌ها از پریمها بهره می‌گیرند تا مراحل مشتق‌گیری را نشان دهد، یعنی x' به معنی $\dot{x}$ است. از شما می‌خواهیم تا به یاد بسپارید که متغیرهای x، y، u، و v که در فراخوان $NDSolve$ متماتیکا به‌کاررفته، برای دستگاه مختصات چرخان استفاده شده است، و تعداد پریمها درکنار متغیر به مرتبهٔ مشتق مربوط می‌شود.

$$NDSolve\,[\{\text{معادلات، شرایط اولیه}\}, \{u, v, x, y\}, \{t, t_{\min}, t_{\max}\}]$$

- {معادلات، شرایط اولیه}

چهار معادلهٔ دیفرانسیل عددی و شرایط اولیه را با بهره‌گیری از فَرمت (قالب‌بندی) زیر وارد کنید

$$\{x'[t]==u[t],$$
$$y'[t]==v[t],$$
$$u'[t]==-(۱-\alpha)(x[t]-\alpha)/r_۱(x[t],y[t])^۳-\alpha(x[t]+۱-\alpha)/r_۲(x[t],y[t])^۳$$
$$+x[t]+۲v[t],$$
$$v'[t]==-(۱-\alpha)y[t]/r_۱(x[t],y[t])^۳$$
$$-\alpha y[t]/r_۲(x[t],y[t])^۳+y[t]-۲u[t],$$
$$x[۰]==x_۰,y[۰]==y_۰,u[۰]==u_۰,v[۰]==v_۰\}$$

- $\{x,y,u,v\}$

چهار متغیر وابسته را، که حل آنها موردنظر است، وارد کنید

$$\{x,y,u,v\}$$

- $\{t,t_{\min},t_{\max}\}$

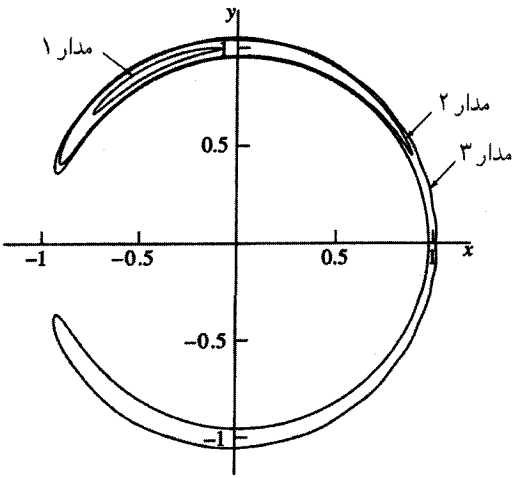
متغیر ناوابسته و دامنهٔ آن را که جواب در این دامنه ارزیابی می‌شود $\{t,۰,t_{\max}\}$ وارد کنید.

توجه کنید که دو تابع $r_۱[x,y]$ و $r_۲[x,y]$ (معادلهٔ ۱۴.۵.۷) باید قبل از فراخواندن $NDSolve$ در متماتیکا تعریف شوند. این نیز برای شرایط اولیهٔ $x_۰$، $y_۰$، $u_۰$، و $v_۰$ و مقدار α صادق است. مقدار α برای منظومهٔ خورشید–مشتری عبارت است از ۰٫۰۰۰۹۵۳۸۷۵.

مدارها را برای پنج مجموعه از شرایط اولیه محاسبه کرده‌ایم، که در هر حالت ستارهٔ سوم از نزدیکی $L_۴$ آغاز می‌شود. شرایط شروع و زمان تناوب مدار حاصل (اگر نتیجه یک مدار پایدار باشد) در جدول ۱.۴.۷ نشان داده شده است.

جدول ۱.۴.۷ شرایط شروع و زمان تناوب مدارهای پیرامون $L_۴$

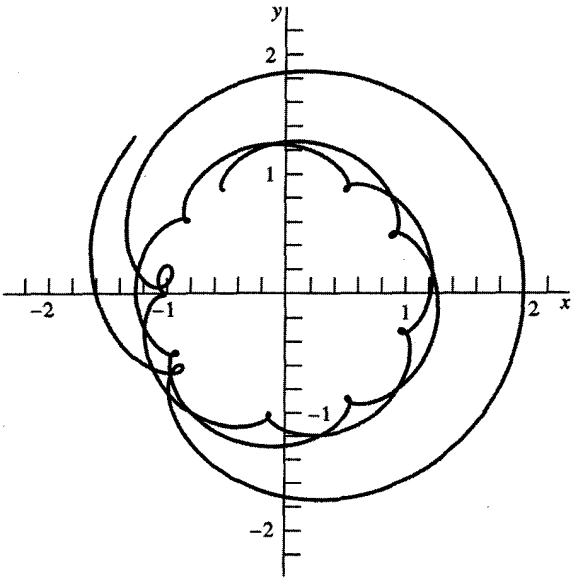
پارامتر	مدار ۱	مدار ۲	مدار ۳	مدار ۴	مدار ۵
$x_۰$	−۰٫۵۰۹	−۰٫۵۲۴	−۰٫۵۲۴	−۰٫۵۰۹	−۰٫۵۳۲
$y_۰$	۰٫۸۸۳	۰٫۹۰۹	۰٫۹۲۰	۰٫۸۸۳	۰٫۹۲۰
$u_۰$	۰٫۰۲۵۹	۰٫۰۶۴۷	۰٫۰۷۸۰	−۰٫۰۲۵۹	۰٫۰۷۸۰
$v_۰$	۰٫۰۱۴۹	۰٫۰۳۶۷	۰٫۰۴۳۰	−۰٫۰۴۹	۰٫۰۴۳۰
T (یکا)	۸۰٫۳	۱۱۸	۲۱۰٫۵	۸۰٫۳*	—
T (سال)	۱۵۲	۲۲۳	۳۹۷	۱۵۲*	—



شکل ۶.۴.۷ مدارهای ۱ و ۲ و ۳ سیارکهای تروایی مطابق با شرایط مذکور در جدول ۱.۴.۷.

مانند قبل (مثال ۲.۳.۴) نمودار پارامتری متناتیکا را به کار برده‌ایم تا نمودار هر یک از مدارها را که شرایط اولیه آنها در جدول ۱.۴.۷ درج شده است، ترسیم کنیم. نمودار سه مدار اول را در شکل ۶.۴.۷ مشاهده می‌کنید.

یکای طول فاصلهٔ متوسط بین مشتری و خورشید، $a + b = ۵٫۲۰۳\text{AU}$، یا حدود $۷٫۸ \times ۱۰^{۱۱}\text{m}$ است. یکای زمان چنان تعریف شده که دورهٔ تناوب چرخش منظومهٔ ستاره‌های اولیه، یعنی دورهٔ تناوب مداری مشتری $(T_J = ۱۱٫۸۶\text{y})$، ۲π برابر یکای زمان باشد. به این ترتیب، یک یکای زمانی برابر است با ۱٫۸۸۸ سال $(T_J/۲\pi = ۱٫۸۸۸)$. ستارگان سوم که مدارهای ۱ و ۲ را دنبال می‌کنند به‌آهستگی در سوی ساعتگرد $L_۴$ را دور می‌زنند. زمان تناوب محاسبه‌شدهٔ آنها، به‌ترتیب، ۳٫۸۰ و ۱۱۸ برابر یکای زمانی‌اند. بهره‌گیری از ضریب تبدیل، زمان تناوب مدار آنها را برحسب سال به ما می‌دهد که در آخرین ردیف جدول ۱.۴.۷ درج شده است. مدار ۳ بخصوص جالب است. ستارهٔ سوم نسبت به دو ستارهٔ دیگر به مشتری نزدیکتر و به‌آهستگی برفراز $L_۴$ حرکت می‌کند و بار دیگر کم‌وبیش در امتداد مسیر مداری مشتری، به پیرامون خورشید برمی‌گردد. این منظومه سپس به‌کندی به سوی مشتری می‌رود، از زیر $L_۵$ عبور و وقتی شروع به نزدیک‌شدن به $L_۴$ می‌کند، هر چه بیشتر به مشتری نزدیک می‌شود. سپس حلقهٔ پیرامون $L_۵$ را تکمیل می‌کند، برمی‌گردد و خورشید را دور می‌زند، و دوباره به سوی مشتری می‌رود، در حالی که دقیقاً به زیر $L_۴$، نقطهٔ شروع حرکتش، برمی‌گردد و از آنجا عبور می‌کند. زمان تناوب این مدار ۳۹۷ سال است.



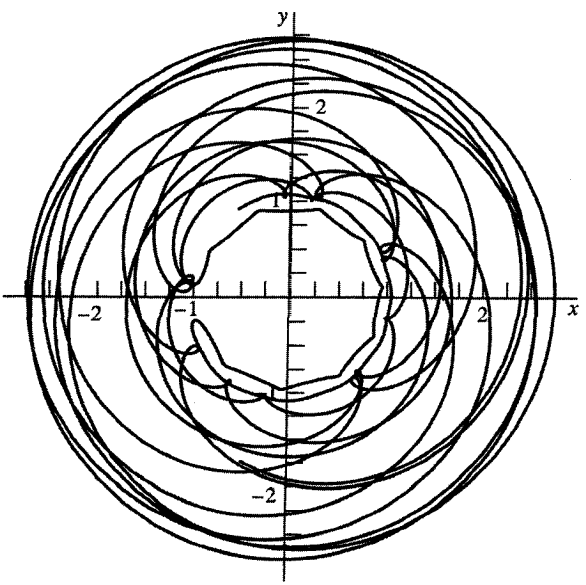
شکل ۷.۴.۷ مدار ۴ سیارکهای تروایی (جدول ۱.۴.۷).

توجه کنید که این مدارها دقیقاً مسیر پربندهای هم‌پتانسیل را دنبال می‌کنند (شکل ۴.۴.۷). این اتفاق عجیبی نیست، زیرا همان‌طور که قبلاً هم گفتیم، نیروی کوریولیس انرژی جنبشی ستارهٔ سوم را تغییر نمی‌دهد. بنابراین، چون نیروهای گرانشی و مرکزگریز کم‌وبیش یکدیگر را موازنه می‌کنند، مدارها باید پربندهای هم‌پتانسیل را نسبتاً به‌طور دقیقی پی گیرند. پربندها L_4 و L_5 را تک‌تک دور می‌زنند، همان‌طور که مدارهای ۱ و ۲ چنین‌اند، و چند پربند همراه با یکدیگر L_4 و L_5 را دور می‌زنند، مانند مدار ۳. با معلوم‌شدن شکل این مدارها، پی‌بردن به اینکه چرا سیارکهای تروایی ظاهراً خوشه پراکنده و شل و ولی است که در شکل ۵.۴.۷ مشاهده می‌کنید، آسان است.

در تمام موارد، جهت گردش مدارها ساعتگرد است، شبیه به گردش هوا که پرفشارهای نیم‌کرهٔ شمالی زمین را دور می‌زنند. نیروی کوریولیس به اعتبار علامت $\mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega}$ برای چرخش ساعتگرد «به سمت داخل» و برای چرخش پادساعتگرد «به سمت خارج» متوجه است. مدار ۴، مطابق شکل ۷.۴.۷، پیامدهای علامت معکوس در $\mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega}$ را منعکس می‌کند، در صورتی که بکوشیم یک گردش پادساعتگرد حول L_4 برقرار کنیم. این مدار با همان پارامترهای مدار ۱ ایجاد شد، فقط علامت سرعت اولیه عکس شده است. ستارهٔ سوم، بعد از حرکت در چندین مسیر حلقه در حلقه، پس از کوتاه مدتی از ناحیهٔ بین مشتری و خورشید به بیرون انداخته می‌شود. معکوس‌شدن

سرعت به این طریق، بر شکل مدار کپلری حول یک تک نیروی گرانشی مرکزی اثری نمی‌گذارد. مدار پایدار حاصل باید صرفاً مداری رجوعی و در جهت معکوس باشد. هر چند اکثر مدارها در منظومهٔ شمسی پیش‌رونده‌اند (در جهت پادساعتگرد، آن‌طور که از بالای صفحهٔ بیضی دیده می‌شود)، مدارهای برگشت به عقب (ساعتگرد) نیز، مثلاً، مانند مدار تریتون، قمر بزرگ نپتون، تشکیل می‌شود. برقرارشدن مدارهای معکوس در پیرامون L_4 و L_5 ناممکن است.

شرایط پایداری این مدارهای ساعتگرد حول L_4 و L_5 به‌طور خیلی مشروحتر از آنکه بتواند در اینجا ارائه شود، مورد بررسی قرار گرفته‌اند. خوانندهٔ علاقه‌مند می‌تواند به کتاب V. Szebehely که در پانوشت صفحات قبلی معرفی شد، مراجعه کند. امکان وجود مدارهای پایدار فقط به‌ازای مقادیری از پارامتر جرمی معادل $\alpha_c = ۰٫۰۳۸۵۲$ پیش می‌آید. منظومهٔ مشتری-خورشید این شرط را کاملاً تأمین می‌کند، اما مدار برخی سیارکهای تروایی فقط اندکی پایدارند. این حکم به‌خصوص برای مدارهایی نظیر مدار ۳ صادق است. اختلالها، اگر به‌قدر کافی پردامنه باشند، می‌توانند برای ستارهٔ سوم در چنین مدارهایی پیامدهای ناگواری به بار آورند. شرایط شروع مدار ۵ را بررسی می‌کنیم، که عملاً با شرایط مربوط به مدار ۳، جز در مورد مختصهٔ x' اولیه، که حدود ۲٪ تغییر کرد، یکسان‌اند. «مدار» حاصل را در شکل ۸.۴.۷ مشاهده می‌کنید. مسیر ستارهٔ سوم



شکل ۸.۴.۷ سیارکهای تروایی مدار ۵ (جدول ۱.۴.۷).

برای ۳۰۰ یکای زمان، یا حدود ۵۶۶ سال، پیگیری شده است. سرانجام، مانند مورد مدار ۴، که سیارک به‌طورکامل از ناحیهٔ $L_4 - L_5$ بیرون افتاده بود، نهایتاً در مداری حول هر دو ستارهٔ اولیه، در فاصلهٔ حدود ۳ واحد، یا ۱۵AU، جایی بین زحل و نپتون، مستقر می‌شود. در واقع، عقیده بر این است که مشتری باید این اثر را بر بسیاری از سیارکهایی گذاشته باشد که در طی مراحل تکوینی منظومهٔ شمسی در نزدیکی آن واقع بوده‌اند.

آیا مثالهای دیگری از اجسامی با مدارهای ستارگان اولیه در نقاط L_4 و L_5 یافت می‌شوند؟ یکی از نمونه‌های عمده مربوط به تعدادی از حامیان بزرگ اقمار زحل است، تِلِستو و کالیپسو، دو قمری که با مأموریت وویجر کشف شدند، در یک مدار با تیتوس شریک‌اند. زحل و تیتوس ستاره‌های اولیه‌اند، و تِلستو در L_4 و کالیپسو در L_5 واقع است. هِلن و دیون در مدار دیگری شریک‌اند که در مقایسه با مداری که به‌وسیلهٔ تیتوس، تِلستو و کالیپسو اشغال شده است، در فاصله‌ای ۱٫۲۸ برابر دورتر از زحل قرار دارد. هِلن در نقطهٔ L_4 این مدار قرار گرفته است. و دیون ستارهٔ اولیه است. هیچ قمری برای این مدار در L_5 یافت نشده است.

تعدادی از هواداران کُلنیهای (مستعمرات) فضایی استدلال کرده‌اند که یک مستعمرهٔ فضایی بزرگ در مدار پایداری در L_5 منظومهٔ ستارگان اولیهٔ زمین و ماه، مستقر می‌شود.[1] پارامتر جرمی برای منظومهٔ زمین‌ـماه عبارت است از $\alpha = ۰٫۰۱۲۱۴۰۹$، که قطعاً از مقدار بحرانی α_c کمتر است، از این‌رو می‌توان حدس زد که مدارهای پیرامون L_5 باید پایدار باشند. اما، خورشید باید اغتشاشاتی بر مستعمره‌ای که پیرامونش می‌گردد وارد آورد و روشن نیست که مدارش برای مدت طولانی پایدار بماند. این مسئلهٔ چهار جسمی مقید خاص فقط در سالهای اخیر، در ۱۹۶۸، حل شده است. معلوم شده است مدارهای شبه‌بیضیوار حول L_5، با گردشهایی که تا یک دهم فاصلهٔ زمین و ماه محدود می‌شوند، پایدارند.[2] اما، اگر آثار مشتری به این مسئله اضافه شود، پایداری طولانی‌مدت دشوار و پیچیده خواهد شد. دانشجویان سخت‌کوش می‌توانند به حل عددی این مسئله مبادرت ورزند.

مثال ۲.۴.۷

مختصات L_1ـL_3 همخط نقاط لاگرانژی را برای منظومهٔ زمین‌ـماه و مقادیر تابع پتانسیل مؤثر در آن نقاط محاسبه کنید.

---

1. G. K. O'Neill, "The Colonization of Space," *phys. Today*, pp. 32-40 (September, 1974).

2. R. Kolenkiewicz, L. Carpenter, "Stable Periodic Orbits About the Sun-Perturbed Earth-Moon Triangular Points," *AIAAJ.* 6, 7, 1301 (1968).

حل:

این سه نقطهٔ لاگرانژی همخط جملگی در طول محور x' قرار می‌گیرند که $y' = ۰$. این نقاط بیشینه‌های تابع پتانسیل مؤثر $V(x', y')$ را نشان می‌دهند. معمولاً، باید این نقاط را با جستجوی جوابهای معادلهٔ زیر بیابیم:

$$\frac{\partial}{\partial x'} V(x', y')\Big|_{y'=۰} = ۰$$

اما، متماتیکا ابزار تابع $FindMinimum$ (کمینه‌یاب) را در اختیار دارد، که این امکان را برای ما فراهم می‌آورد تا، بدون آنکه ابتدا مشتقات آنها را محاسبه کنیم، مستقیماً مکان مینیممهای تابع را تعیین کنیم. متماتیکا عملاً با گرفتن این مشتقات مقدار زیادی کار برای ما صرفه‌جویی می‌کند. اما، نقاط لاگرانژی، $L_۱ - L_۳$، در بیشینه‌های $V(x', y' = ۰)$ قرار دارند و از این‌رو، برای استفاده از کمینه‌یاب متماتیکا[1]، لازم است آن را به تابع $f(x') = -V(x', y' = ۰)$ تبدیل کنیم که کمینه‌های آن مواضع $L_۱ - L_۳$ هستند

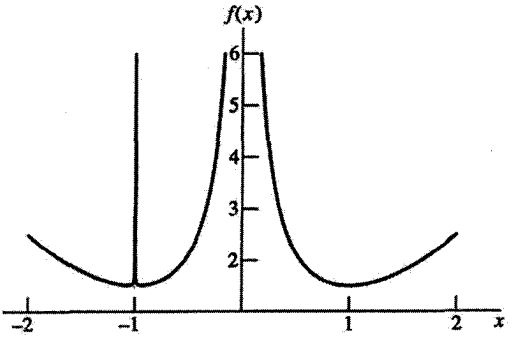
$$f(x') = -V(x', y')\Big|_{y'=۰} = \frac{۱ - \alpha}{|x' - \alpha|} + \frac{\alpha}{|x' - (\alpha - ۱)|} + \frac{x'^۲}{۲}$$

ما مخرجها را در معادلهٔ بالا به‌صورت مقادیر قدرمطلق نوشته‌ایم تا بر مثبت‌بودن کمیتهای معین مستقل از مقادیر x' نسبت به مقادیر بحرانی α و $۱ - \alpha$ تأکید ورزیده باشیم. وقتی $f(x')$ را به تابع کمینه‌یاب تابع متماتیکا تبدیل می‌کنیم، باید مطمئن شویم که: (۱) کمینه‌یاب می‌تواند مشتقات $f(x')$ را محاسبه کند، زیرا این عمل یکی از کارهایی است که هنگام تعیین موضع کمینه‌ها باید انجام شود و (۲) مقادیر قدرمطلق در مخرج بدون توجه به هر عملی که کمینه‌یاب روی $f(x')$ انجام می‌دهد، مثبت معین باقی بماند. بنابراین، لازم است قدرمطلقها در مخرجهای $f(x')$ را برداریم تا هر آسیبی در فرایند مشتق‌گیری از میان برداشته شود، ولی بعد باید اثر آنها جانشین شود، مثلاً، با ضرب‌کردن دو جملهٔ اولِ عبارت در تابع "پله‌ای" تعریف شده تا بسته به مقدار x' نسبت به α و $۱ - \alpha$، مقادیر ± ۱ را بگیرد. ما این تابع "پله‌ای" را $\mathrm{sgn}(x)$ می‌نامیم و آن‌را به‌ازای شناسهٔ $x < ۰$ برابر -۱ و به‌ازای شناسهٔ $x > ۰$ برابر $+۱$ تعریف می‌کنیم.

با واردکردن این تابع در عبارت بالا می‌رسیم به

$$f(x') = \mathrm{sgn}(x' - \alpha)\frac{۱ - \alpha}{x' - \alpha} + \mathrm{sgn}(x' - (\alpha - ۱))\frac{\alpha}{x' - (\alpha - ۱)} + \frac{x'^۲}{۲}$$

1. *Mathematica's FindMinimum*



شکل ۹.۴.۷ نواحی ممکن برای توابع sgn.

اکنون می‌توانیم تابع بالا را به کمینه‌یاب منتقل کنیم. تابع sgn مقداری می‌گیرد که تضمین کند جمله‌های این معادله، مستقل از ناحیه‌ای که در طول محور x' برای کمینهٔ $f(x')$ جستجو می‌شود، همیشه مثبت باقی بماند. نیز باید مقادیر اولیهٔ x' را برای شروع جستجو به کمینه‌یاب منتقل کنیم. منحنی نمایش تغییرات $f(x')$ را در شکل ۹.۴.۷ ترسیم کرده‌ایم، تا مواضع تقریبی سه کمینه را بیابیم که به‌صورت نقاط شروع به‌کار می‌بریم. $L_۲$ کمینه‌ای است که در طرف خارج تکینگی در $x' = -۱$ قرارگرفته است و موضع مشتری را نشان می‌دهد. به این ترتیب، $L_۲ \approx -(۱ + \epsilon)$. $L_۱$ در طرف داخلی تکینگی واقع می‌شود. به این ترتیب، $L_۱ \approx -(۱ - \epsilon)$ و $L_۳$ درست بر فراز تصویر آیینه‌ای تکینگی در $x' = +۱$ روبه‌روی خورشید قرار می‌گیرد. به این ترتیب، $L_۳ \approx +(۱ + \epsilon)$. ϵ مقداری کوچک و اندازه‌ای نامعلوم را نشان می‌دهد. اکنون سه فراخوان به کمینه‌یاب تشکیل می‌دهیم تا مکان هر یک از سه نقطهٔ لاگرانژی همخط را تعیین کند.

هر فراخوان به شکل $FindMinimum\,[function, \{x, x_۰\}]$ است که در آن شناسهٔ $function$ به معنای $f(x)$، مطابق تعریف قبلی، است. در اینجا نیز، نماد پریم را حذف می‌کنیم x متغیر مستقل تابع است، و $x_۰$ مقداری است که برای شروع جستجو به‌کار برده می‌شود. در جدول ۲.۴.۷ ورود پارامترها به هر فراخوان را درج کرده‌ایم. خروجیهای فراخوان مواضع $x_{\min}$ نقاط

جدول ۲.۴.۷

فراخوان	نقطهٔ لاگرانژ	$x_۰$	$\mathrm{sgn}(x-\alpha)$	$\mathrm{sgn}(x-(\alpha-۱))$	$x_{\min}$	$f(x_{\max})$
۱	$L_۲$	$-۱٫۲$	-۱	-۱	$-۱٫۰۶۸۸۳$	$۱٫۵۱۸۷۴$
۲	$L_۱$	$-۰٫۸$	-۱	$+۱$	$-۰٫۹۳۲۳۶۶$	$۱٫۵۱۹۳۸$
۳	$L_۳$	$۱٫۰$	$+۱$	$+۱$	$۱٫۰۰۰۴$	$۱٫۵۰۰۴۸$

لاگرانژی و مقادیر متناظر $f(x_{\min})$ هستند. مقادیر x_0 اختیار شده‌اند تا تضمین شود که جستجو در ناحیه‌ای شروع می‌شود که نقطهٔ لاگرانژی مطلوب در آن قرار می‌گیرد و نسبتاً به آن نزدیک است.

۵.۷ برخوردها

هرگاه دو جسم با یکدیگر برخورد کنند، در صورتی که با هم یک تک سیستم تلقی شوند، نیرویی که هر کدام در خلال تماس بر دیگری وارد می‌آورد، نیرویی داخلی است. تکانهٔ خطی کل ثابت (بدون تغییر) باقی می‌ماند. بنابراین، می‌توان نوشت:

$$\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = \mathbf{p}'_1 + \mathbf{p}'_2 \qquad \text{(الف ۱.۵.۷)}$$

یا به بیانی معادل:

$$m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2 = m_1\mathbf{v}'_1 + m_2\mathbf{v}'_2 \qquad \text{(ب ۱.۵.۷)}$$

اندیسهای پایین ۱ و ۲ به این دو جسم اشاره دارند و پریمها، به‌ترتیب، بر تکانه و سرعت بعد از برخورد دلالت می‌کنند. معادلات (۱.۵.۷ الف و ب) کاملاً عمومی‌اند. این معادلات، مستقل از شکل، صلب‌بودن، و جز اینها، در مورد هر دو جسمی، برقرارند.

با توجه به پایستگی انرژی، می‌توانیم بنویسیم

$$\frac{p_1^2}{2m_1} + \frac{p_2^2}{2m_2} = \frac{p'^2_1}{2m_1} + \frac{p'^2_2}{2m_2} + Q \qquad \text{(الف ۲.۵.۷)}$$

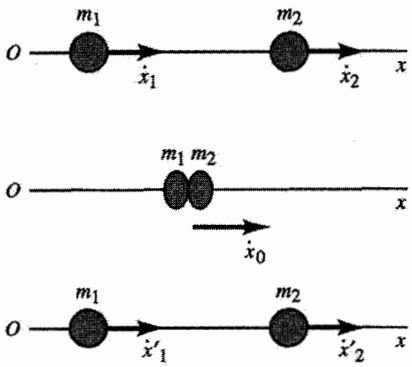
یا

$$\frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 = \frac{1}{2}m_1v'^2_1 + \frac{1}{2}m_2v'^2_2 + Q \qquad \text{(ب ۲.۵.۷)}$$

در اینجا، کمیت Q وارد شده است تا برکاهش یا افزایش خالص انرژی جنبشی، ناشی از برخورد، دلالت کند.

در حالت برخورد کشسان، انرژی جنبشی کل تغییر نمی‌کند، از این‌رو $Q = 0$. اگر کاهش انرژی پیش بیاید، در این صورت Q مثبت است. این برخورد را انرژی‌زا (گرمازا) می‌گویند. ممکن است اتفاقاً براثر برخورد انرژی تولید شود. مثلاً، هرگاه برخوردی انفجاری روی یکی از این اجسام پیش بیاید. در این حالت Q منفی خواهد بود و برخورد را انرژی‌گیر (گرماگیر) می‌گویند.

بررسی برخوردها بخصوص در حوزهٔ فیزیک اتمی، هسته‌ای و انرژی بالا، از اهمیت خاصی برخوردار است. در اینجا، اجسام دستخوش برخورد می‌توانند اتمها، هسته‌ها، یا ذرات بنیادی گوناگون نظیر الکترونها و کوارکها باشند.



شکل ۱.۵.۷ برخورد رودرروی دو ذره.

برخوردهای مستقیم

حالت خاص برخورد رودرروی (شاخ به شاخ) دو جسم، یا ذره، را که در آن حرکت کاملاً بر یک خط مستقیم، محور x، صورت می‌گیرد، مطابق شکل ۱.۵.۷، در نظر می‌گیریم. در این حالت، معادلهٔ پایستگی تکانهٔ خطی (معادلهٔ ۱.۵.۷ ب) را می‌توان از این قرار نوشت

$$m_1\dot{x}_1 + m_2\dot{x}_2 = m_1\dot{x}'_1 + m_2\dot{x}'_2 \qquad (۳.۵.۷)$$

جهت در امتداد خط حرکت را علامت $\dot{x}$ها تعیین می‌کند.

برای محاسبهٔ مقدار سرعتها بعد از برخورد، در صورتی‌که مقادیر سرعت قبل از برخورد معلوم باشند، می‌توانیم معادلهٔ تکانهٔ خطی بالا را همراه با معادلهٔ پایستگی انرژی (معادلهٔ ۲.۵.۷ ب) به‌کار بریم، و این در صورتی است که مقدار Q را بدانیم. در این‌گونه مسائل اغلب اوقات بهتر است که با پارامتر دیگر، ϵ، به‌نام ضریب بازگشت، آشنا شویم.

این کمیت، بنابر تعریف، عبارت است از نسبت سرعت جداشدن، v'، به سرعت نزدیک‌شدن، یعنی v. بنابر نمادگذاری ما، ϵ را می‌توان از این قرار نوشت:

$$\epsilon = \frac{|\dot{x}'_2 - \dot{x}'_1|}{|\dot{x}_2 - \dot{x}_1|} = \frac{v'}{v} \qquad (۴.۵.۷)$$

مقدار عددی ϵ عمدتاً به ترکیب و ساختار فیزیکی دو جسم بستگی دارد. تحقیق درستی این نکته که در برخورد کشسان $\epsilon = 1$، آسان است. برای انجام این کار، در معادلهٔ ۲.۵.۷ ب قرار می‌دهیم $Q = 0$، و برای به‌دست‌آوردن سرعتهای بعد از برخورد، این معادله را همراه با معادلهٔ ۳.۵.۷ حل می‌کنیم. مراحل این عملیات جبری برای تمرین به خواننده واگذار می‌شود.

در حالت برخورد کاملاً ناکشسان، این دو جسم بعد از برخورد به هم می‌چسبند، به‌طوری که $\epsilon = ۰$. در مورد اکثر اجسام حقیقی، مقدار ϵ بین دو مقدار فرین ۰ و ۱ است. در مورد گویهای بیلیارد عاجی، ϵ حدود ۹۵ر۰ است. مقدار ضریب بازگشت نیز می‌تواند به سرعت نزدیک‌شدن بستگی داشته باشد. این امر به‌خصوص در مورد یکی از ترکیبهای سیلیسیم با نام تجاری «سیلی پوتی» کاملاً واضح است. یک گوی از جنس این ماده وقتی با سرعت زیاد به سطحی سخت برخورد کند وا می‌جهد، ولی در سرعت کم مانند گلولهٔ بطانه‌ای عادی عمل می‌کند.

می‌توانیم مقادیر سرعت نهایی را از معادلهٔ (۳.۵.۷)، همراه با تعریف ضریب بازگشت (معادلهٔ ۴.۵.۷) محاسبه کنیم. نتیجه عبارت خواهد بود از

$$\begin{aligned} \dot{x}'_۱ &= \frac{(m_۱ - \epsilon m_۲)\dot{x}_۱ + (m_۲ + \epsilon m_۲)\dot{x}_۲}{m_۱ + m_۲} \\ \dot{x}'_۲ &= \frac{(m_۱ - \epsilon m_۱)\dot{x}_۱ + (m_۲ - \epsilon m_۱)\dot{x}_۲}{m_۱ + m_۲} \end{aligned} \qquad (۵.۵.۷)$$

اگر با قراردادن $\epsilon = ۰$ حالت کاملاً ناکشسان را اختیارکنیم، همان‌طورکه انتظار می‌رود $\dot{x}'_۱ = \dot{x}'_۲$؛ یعنی، واجهش پیش نمی‌آید. از سوی دیگر، در حالت خاصی که جرم دو جسم مساوی، $m_۱ = m_۲$ و برخورد کاملاً کشسان باشد، $\epsilon = ۱$، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \dot{x}'_۱ &= \dot{x}_۲ \\ \dot{x}'_۲ &= \dot{x}_۱ \end{aligned} \qquad (۶.۵.۷)$$

بنابراین، این دو جسم بر اثر برخورد، دقیقاً سرعت خود را مبادله می‌کنند.

در حالت کلی برخورد ناکشسان مستقیم، به‌آسانی محقق می‌شود که بین اتلاف انرژی، Q، و ضریب بازگشت معادلهٔ زیر رابطه برقرار می‌کند:

$$Q = \frac{۱}{۲}\mu v^۲(۱ - \epsilon^۲) \qquad (۷.۵.۷)$$

که در آن $\mu = m_۱m_۲/(m_۱ + m_۲)$ عبارت است از جرم کاهیده و $v = |\dot{x}_۲ - \dot{x}_۱|$ عبارت است از سرعت نسبی دو جسم قبل از برخورد. به‌دست‌آوردن این رابطه را برای تمرین به خواننده وامی‌گذاریم (مسئلهٔ ۹.۷).

ضربه در برخوردها

نیروهایی با طول دوام فوق‌العاده کوتاه‌مدت، همچون نیروهایی که اجسام تحت برخورد وارد می‌آورند، نیروهای ضربه‌ای نامیده می‌شوند. اگر توجه خود را به یک جسم یا ذره محدود کنیم، معادلهٔ

دیفرانسیل حرکت عبارت خواهد بود از $d(m\mathbf{v})/dt = \mathbf{F}$ یا در قالب دیفرانسیلی عبارت می‌شود از $d(m\mathbf{v}) = \mathbf{F}dt$. در بازهٔ زمانی $t = t_1$ تا $t = t_2$، از این معادلهٔ انتگرال زمانی می‌گیریم. این بازهٔ زمانی عبارت است از مدت‌زمانی که در خلال آن نیروی موردنظر وارد می‌آید. در این صورت داریم

$$\Delta(m\mathbf{v}) = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}dt \qquad \text{(الف ۸.۵.۷)}$$

انتگرال زمانی نیرو همان ضربه است. معمولاً آن را با علامت $\mathbf{P}$ نشان می‌دهند. بنابراین معادلهٔ (الف ۸.۵.۷) چنین بیان می‌شود

$$\Delta(m\mathbf{v}) = \mathbf{P} \qquad \text{(ب ۸.۵.۷)}$$

می‌توان ضربهٔ آرمانی را چنان تصور کرد که از طریق نیرویی نامتناهی تولید شده است، اما در بازه‌ای زمانی چنان به صفر نزدیک می‌شود که انتگرال $\int \mathbf{F}dt$ متناهی باقی بماند. چنین ضربه‌ای آرمانی تغییری لحظه‌ای در تکانه و سرعت جسم ایجاد می‌کند، بدون آنکه هیچ جابه‌جایی صورت گرفته باشد.

مثال ۱.۵.۷ تعیین سرعت گلوله

تفنگی در راستای افق در قلب هدف به یک قطعهٔ چوب شلیک می‌کند، که این قطعهٔ چوب در ابتدا بر یک سطح افقی در حال سکون قرار دارد. گلوله در داخل این قطعه فرو می‌رود و ضربه باعث می‌شود که سیستم قبل از رسیدن به حالت سکون به اندازهٔ معین s بلغزد. اگر m جرم گلوله، M جرم قطعهٔ چوب، و μ_k ضریب اصطکاک لغزشی بین قطعه چوب و سطح افقی باشد، سرعت اولیهٔ (سرعت در دهانهٔ لوله تفنگ) گلوله را به‌دست آورید.

حل:
اولاً، بنابر پایستگی تکانهٔ خطی، می‌توانیم بنویسیم

$$m\dot{x}_\circ = (M+m)\dot{x}'_\circ$$

که $\dot{x}_\circ$ سرعت اولیهٔ گلوله و $\dot{x}'_\circ$ سرعت سیستم (قطعه چوب + گلوله) بلافاصله بعد از برخورد است. (توجه کنید که ضریب بازگشت ϵ در این حالت صفر است.) ثانیاً، می‌دانیم که بزرگی نیروی اصطکاک ترمزی عبارت است از $(M+m)\mu_k g = (M+m)a$ که از آن $a = -\ddot{x}$ شتاب کندکنندهٔ سیستم بعد از برخورد است و بنابراین $a = \mu_k g$. حال، با توجه به مطالب فصل ۲ به یاد می‌آوریم

که برای حالت شتاب یکنواخت در یک بعد، $s = v_0^2/2a$. به این ترتیب، در این مسئله می‌رسیم به:

$$s = \frac{\dot{x}_0'^2}{2\mu_k g} = \left(\frac{m\dot{x}_0}{M+m}\right)^2 \left(\frac{1}{2\mu_k g}\right)$$

با حل این معادله به ازای $\dot{x}_0$، سرعت اولیهٔ گلوله را برحسب کمیتهای معلوم به‌صورت زیر به‌دست می‌آوریم

$$\dot{x}_0 = \left(\frac{M+m}{m}\right)(2\mu_k g s)^{1/2}$$

در مثالی عددی، جرم قطعه چوب را 4kg و جرم گلوله را 0.01kg $g = 10$ (حدود گلولهٔ کالیبر ۰٫۳۸) می‌گیریم. ضریب اصطکاک (چوب روی چوب) عبارت است از $\mu_k = 0.4$. اگر قطعهٔ چوب به اندازهٔ 0.15m = 15cm بلغزد، در این صورت

$$\dot{x}_0 = \frac{4.01}{0.01}(2 \times 0.4 \times 9.8\text{ms}^{-2} \times 0.15\text{m})^{1/2} = 435\text{m/s}$$

۶.۷ برخوردهای مایل و پراکندگی: مقایسهٔ مختصات آزمایشگاه و مرکز جرم

اکنون توجه خود را به حالت کلیتر برخوردهایی معطوف می‌کنیم که در آنها حرکت به تک‌خطی مستقیم محدود نمی‌شود. در اینجا باید از صورت برداری معادلهٔ تکانهٔ خطی بهره گرفت. حالت خاصی را بررسی می‌کنیم که ذره‌ای به جرم m_1 با سرعت اولیهٔ $\mathbf{v}_1$ (ذرهٔ فرودی) به ذره‌ای به جرم m_2 (ذرهٔ هدف)، ابتدا در حال سکون، برخورد می‌کند. این گزاره مسئله‌ای معمولی است که در فیزیک هسته‌ای با آن مواجه می‌شویم. معادلات خطی در این حالت عبارت‌اند از

$$\mathbf{p}_1 = \mathbf{p}_1' + \mathbf{p}_2' \qquad \text{(الف ۱.۶.۷)}$$

$$m_1\mathbf{v}_1 = m_1\mathbf{v}_1' + m_2\mathbf{v}_2' \qquad \text{(ب ۱.۶.۷)}$$

شرط تعادل انرژی از این قرار است:

$$\frac{p_1^2}{2m_1} = \frac{p_1'^2}{2m_1} + \frac{p_2'^2}{2m_2} + Q \qquad \text{(الف ۲.۶.۷)}$$

یا

$$\frac{1}{2}m_1 v_1^2 = \frac{1}{2}m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2'^2 + Q \qquad \text{(ب ۲.۶.۷)}$$

در اینجا، مانند پیش، پریمها نمایانگر سرعتها و تکانه‌های بعد از برخوردند. و Q انرژی خالصی است که بر اثر برخورد تلف می‌شود یا پدید می‌آید. کمیت Q در فیزیک اتمی و هسته‌ای از اهمیت خاصی برخوردار است. زیرا انرژی آزادشده یا جذب‌شده را در برخوردهای اتمی و هسته‌ای نشان می‌دهد. در موارد بسیاری، ذرهٔ هدف بر اثر برخورد شکسته می‌شود یا تغییر می‌کند. در چنین حالتهایی، ذراتی که بر اثر برخورد حاصل می‌شوند با ذراتی که ابتدا با هم برخورد کرده‌اند، فرق دارند. با نسبت‌دادن جرمهای مختلف، مثلاً m_3 و m_4، به ذراتی که از صحنهٔ برخورد بیرون می‌آیند، می‌توان این حالت را به‌آسانی بررسی کرد. در هر حالت، قانون پایستگی تکانهٔ خطی همواره برقرار فرض می‌شود.

حالت خاصی را در نظر بگیرید که طی آن جرم ذرات فرودی و هدف یکسان‌اند. در این صورت، معادلهٔ پایستگی انرژی (معادلهٔ ۲.۶.۷ الف) را می‌توان از این قرار نوشت:

$$p_1^2 = p_1'^2 + p_2'^2 + 2mQ \qquad (۳.۶.۷)$$

که $m = m_1 = m_2$. حال اگر حاصلضرب اسکالر (نرده‌ای) را از هر طرف معادلهٔ تکانهٔ خطی (معادلهٔ ۱.۶.۷ الف) با خودش به‌دست آوریم، می‌رسیم به

$$p_1^2 = (\mathbf{p}'_1 + \mathbf{p}'_2) \cdot (\mathbf{p}'_1 + \mathbf{p}'_2) = p_1'^2 + p_2'^2 + 2\mathbf{p}'_1 \cdot \mathbf{p}'_2 \qquad (۴.۶.۷)$$

با مقایسهٔ معادلات (۳.۶.۷) و (۴.۶.۷)، خواهیم دید

$$\mathbf{p}'_1 \cdot \mathbf{p}'_2 = mQ \qquad (۵.۶.۷)$$

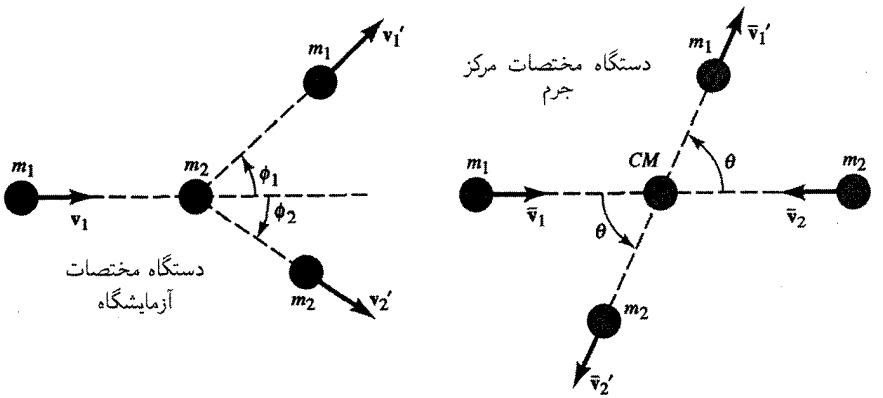
بنابراین، در برخورد کشسان ($Q = 0$) می‌رسیم به:

$$\mathbf{p}'_1 \cdot \mathbf{p}'_2 = 0 \qquad (۶.۶.۷)$$

از این‌رو، دو ذره بعد از برخورد در دو امتداد عمود برهم خارج می‌شوند.

مختصات مرکز جرم

اغلب اوقات در فیزیک هسته‌ای محاسبات نظری برحسب کمیتهایی انجام و در دستگاه مختصاتی سنجیده می‌شوند که در آن مرکز جرم ذرات برخوردکننده ساکن است. از سوی دیگر، مشاهدات آزمایشی در مورد پراکندگی ذرات برحسب مختصات آزمایشگاهی صورت می‌گیرد. بنابراین، مسئلهٔ تبدیل از یک دستگاه مختصات به دستگاه دیگر را اجمالاً بررسی می‌کنیم.



شکل ۱.۶.۷ مقایسهٔ مختصات آزمایشگاهی و مرکز جرم.

نمودار برداری سرعت در دستگاه آزمایشگاهی و در دستگاه مرکز جرم را در شکل ۱.۶.۷ مشاهده می‌کنید. در این شکل، ϕ_1 زاویهٔ انحراف ذرهٔ فرودی بعد از برخورد به ذرهٔ هدف و ϕ_2 زاویه‌ای است که امتداد حرکت ذرهٔ هدف با حرکت ذرهٔ فرودی قبل از برخورد تشکیل می‌دهد. ϕ_1 و ϕ_2 هر دو در دستگاه آزمایشگاهی اندازه‌گیری می‌شوند. در دستگاه مرکز جرم، چون مرکز جرم باید همواره روی خط واصل بین دو ذره قرار گیرد، هر دو ذره به مرکز جرم نزدیک می‌شوند، باهم برخورد می‌کنند و سپس از مرکز جرم در جهتهای مخالف دور می‌شوند. زاویهٔ θ، مطابق شکل، زاویهٔ انحراف ذرهٔ فرودی در دستگاه مرکز جرم را مشخص می‌کند.

بنابر تعریف مرکز جرم، تکانهٔ خطی در دستگاه مرکز جرم قبل و بعد از برخورد صفر است. از این‌رو، می‌توانیم بنویسیم

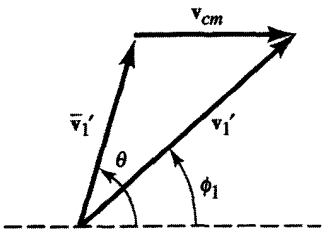
$$\bar{\mathbf{p}}_1 + \bar{\mathbf{p}}_2 = 0 \qquad \text{(الف ۷.۶.۷)}$$

$$\bar{\mathbf{p}}'_1 + \bar{\mathbf{p}}'_2 = 0 \qquad \text{(ب ۷.۶.۷)}$$

خطوط تیره روی حروف نشان آن است که کمیت موردنظر در دستگاه مرکز جرم سنجیده می‌شود. معادلهٔ پایستگی انرژی عبارت است از

$$\frac{\bar{p}_1^2}{2m_1} + \frac{\bar{p}_2^2}{2m_2} = \frac{\bar{p}'^2_1}{2m_1} + \frac{\bar{p}'^2_2}{2m_2} + Q \qquad (۸.۶.۷)$$

با بهره‌گیری از روابط تکانه در معادلات ۷.۶.۷ الف و ب)، می‌توانیم $\bar{p}_2$ و $\bar{p}'_2$ را از معادلهٔ



شکل ۲.۶.۷ بردارهای سرعت در دستگاه آزمایشگاهی و در دستگاه مرکز جرم.

(۸.۶.۷) حذف کنیم. نتیجه، که به راحتی برحسب جرم کاهیده بیان می‌شود، عبارت است از

$$\frac{\bar{p}_1^2}{2\mu} = \frac{\bar{p}_1'^2}{2\mu} + Q \qquad (۹.۶.۷)$$

روابط تکانه، معادلات (۷.۶.۷ الف و ب) که برحسب سرعت بیان شوند، از این قرار خواهد شد

$$m_1\bar{\mathbf{v}}_1 + m_2\bar{\mathbf{v}}_2 = 0 \qquad (۱۰.۶.۷ \text{ الف})$$

$$m_1\bar{\mathbf{v}}'_1 + m_2\bar{\mathbf{v}}'_2 = 0 \qquad (۱۰.۶.۷ \text{ ب})$$

سرعت مرکز جرم عبارت است از (معادلات ۳.۱.۷ و ۴.۱.۷)

$$\mathbf{v}_{cm} = \frac{m_1\mathbf{v}_1}{m_1 + m_2} \qquad (۱۱.۶.۷)$$

بنابراین، داریم

$$\bar{\mathbf{v}}_1 = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_{cm} = \frac{m_2\mathbf{v}_1}{m_1 + m_2} \qquad (۱۲.۶.۷)$$

رابطهٔ بین بردارهای سرعت، $\mathbf{v}_{cm}$، $\mathbf{v}'_1$، و $\bar{\mathbf{v}}'_1$، را در شکل ۲.۶.۷ مشاهده می‌کنید. از این شکل، پی می‌بریم که

$$\begin{aligned} v'_1 \sin\phi_1 &= \bar{v}'_1 \sin\theta \\ v'_1 \cos\phi_1 &= \bar{v}'_1 \cos\theta + v_{cm} \end{aligned} \qquad (۱۳.۶.۷)$$

از این‌رو، با تقسیم طرفین این دو عبارت بر یکدیگر، معادلهٔ رابطهٔ بین زوایای پراکندگی را می‌یابیم و می‌رسیم به:

$$\tan\phi_1 = \frac{\sin\theta}{\gamma + \cos\theta} \qquad (۱۴.۶.۷)$$

در این معادله، γ پارامتر عددی است که مقدارش از این عبارت به‌دست می‌آید:

$$\gamma = \frac{v_{cm}}{\bar{v}'_{1}} = \frac{m_{1}v_{1}}{\bar{v}'_{1}(m_{1}+m_{2})} \qquad (۱۵.۶.۷)$$

مرحلهٔ آخر این عبارت از معادلهٔ (۱۱.۶.۷) نتیجه شده است.

اکنون به‌آسانی می‌توانیم از معادلهٔ انرژی (معادلهٔ ۹.۶.۷) مقدار $\bar{v}'_{1}$ را برحسب انرژی اولیهٔ ذرهٔ فرودی محاسبه کنیم. از اینجا اطلاعات ضروری را به‌دست می‌آوریم تا γ را بیابیم و رابطهٔ بین زوایای پراکندگی را تعیین کنیم. مثلاً، در حالت برخورد کشسان $Q = 0$، و از معادلهٔ انرژی پی‌می‌بریم که $\bar{p}_{1} = \bar{p}'_{1}$ یا $\bar{v}_{1} = \bar{v}'_{1}$. این نتیجه همراه با معادلهٔ (۱۲.۶.۷)، برای برخورد کشسان، به مقدار انرژی زیر می‌انجامد

$$\gamma = \frac{m_{1}}{m_{2}} \qquad (۱۶.۶.۷)$$

توجه به دو حالت خاصی از این دست برخوردهای کشسان آموزنده است. اولاً، اگر جرم ذرهٔ هدف، m_{2}، از جرم ذرهٔ فرودی، m_{1}، خیلی بزرگتر باشد، در این صورت γ خیلی کوچک است. از این‌رو، $\phi_{1} \approx \tan\theta$ یا $\phi_{1} \approx \theta$، یعنی، زوایای پراکندگی در دستگاه آزمایشگاه و دستگاه مرکز جرم تقریباً با هم مساوی‌اند.

حالت خاص دوم از این قرار است که جرمهای ذرهٔ فرودی و ذرهٔ هدف با هم مساوی باشند: $m_{1} = m_{2}$. در این حالت $\gamma = 1$، و رابطهٔ پراکندگی به‌صورت زیر ساده می‌شود:

$$\tan\phi_{1} = \frac{\sin\theta}{1+\cos\theta} = \tan\frac{\theta}{2}$$
$$\phi_{1} = \frac{\theta}{2} \qquad (۱۷.۶.۷)$$

یعنی، زاویهٔ انحراف در دستگاه آزمایشگاه درست نصف زاویهٔ انحراف در دستگاه مرکز جرم است. به‌علاوه، چون مطابق شکل ۱.۶.۷، زاویهٔ انحراف ذرهٔ هدف در دستگاه مرکز جرم عبارت است از $\pi - \theta$، پس همین زاویه در دستگاه آزمایشگاه عبارت است از $\pi/2 - (\pi - \theta)$. بنابراین، این دو ذره نقطهٔ برخورد را عمود بر هم، از دید دستگاه آزمایشگاه، ترک می‌کنند که با معادلهٔ (۶.۶.۷) سازگار است.

حالت کلی برخوردهای ناکشسان را به خواننده واگذار می‌کنیم تا نشان دهد که γ از این قرار قابل بیان است:

$$\gamma = \frac{m_{1}}{m_{2}}\left[1 - \frac{Q}{T}\left(1 + \frac{m_{1}}{m_{2}}\right)\right]^{-1/2} \qquad (۱۸.۶.۷)$$

در این رابطه T انرژی جنبشی ذرهٔ فرودی است که در دستگاه آزمایشگاه اندازه گرفته می‌شود.

مثال ۱.۶.۷

در یک آزمایش پراکندگی هسته‌ای، یک باریکهٔ ذرات آلفا (هستهٔ هلیم) با انرژی ۴MeV به هدفی متشکل از گاز هلیم برخورد می‌کند، به‌طوری که جرم ذرات فرودی و هدف برابر است. اگر ذرهٔ آلفای فرودی معینی به اندازهٔ ۳۰° در دستگاه آزمایشگاه پراکنده شود، انرژی جنبشی آن و نیز انرژی جنبشی پس‌زنی ذرهٔ هدف را به‌صورت کسری از انرژی جنبشی اولیهٔ ذرهٔ آلفای فرودی، T، به‌دست آورید. (فرض کنید ذرهٔ هدف در حال سکون و برخورد کشسان باشد.)

حل:

برای برخوردهای کشسان با جرمهای مساوی، با توجه به معادلهٔ (۶.۶.۷) پی می‌بریم که $\phi_1 + \phi_2 = 90°$ (شکل ۱.۶.۷). از این‌رو، اگر مؤلفه‌های موازی با، و عمود بر، تکانهٔ ذرهٔ فرودی را در نظر بگیریم، معادلهٔ پایستگی تکانه (معادلهٔ ۱.۶.۷ الف) به‌صورت زیر در می‌آید:

$$p_1 = p'_1 \cos\phi_1 + p'_2 \sin\phi_1$$
$$0 = p'_1 \sin\phi_1 - p'_2 \cos\phi_1$$

که در آنها $\phi_1 = 30°$. اگر زوج معادلات بالا را برای دستیابی به مؤلفه‌های پریم‌دار حل کنیم، خواهیم داشت:

$$p'_1 = p_1 \cos\phi_1 = p_1 \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2} p_1$$

$$p'_2 = p_1 \sin\phi_1 = p_1 \sin 30° = \frac{1}{2} p_1$$

بنابراین، انرژیهای جنبشی بعد از برخورد عبارت‌اند از

$$T'_1 = \frac{p'^2_1}{2m_1} = \frac{3}{4}\frac{p_1^2}{2m_1} = \frac{3}{4}T = 3\text{MeV}$$

$$T'_2 = \frac{p'^2_2}{2m_2} = \frac{1}{4}\frac{p_1^2}{2m_1} = \frac{1}{4}T = 1\text{MeV}$$

مثال ۲.۶.۷

زاویهٔ پراکندگی در دستگاه مرکز جرم مثال ۱.۶.۷ چقدر است؟

حل:

در اینجا، معادلهٔ ۱۷.۶.۷ مستقیماً پاسخ را می‌دهد، یعنی

$$\theta = 2\phi_1 = 60°$$

مثال ۳.۶.۷

(الف) نشان دهید که در حالت کلی پراکندگی کشسان باریکه‌ای از ذرات به جرم m_1 توسط هدف ثابتی از ذرات به جرم m_2، زاویهٔ باز ψ در دستگاه آزمایشگاه از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$\psi = \phi_1 + \phi_2 = \frac{\pi}{2} + \frac{\phi_1}{2} - \frac{1}{2}\sin^{-1}\left(\frac{m_1}{m_2}\sin\phi_1\right)$$

(ب) فرض کنید باریکهٔ ذرات شامل پروتونها و هدف شامل هستهٔ هلیم است. زاویهٔ باز را برای پروتونی محاسبه کنید که به‌طور کشسان در دستگاه آزمایشگاه در زاویهٔ $\phi_1 = 30^\circ$ پراکنده می‌شود.

حل:

(الف) چون ذره در دستگاه آزمایشگاه ساکن است، سرعتش در دستگاه مرکز جرم، $\bar{v}_2$، از لحاظ بزرگی مساوی (و در جهت مخالف) با v_{cm} است. برای برخوردهای کشسان در دستگاه مرکز جرم، می‌توان پایستگی تکانه و انرژی را از این قرار نوشت:

$$\bar{\mathbf{p}}_1 + \bar{\mathbf{p}}_2 = \bar{\mathbf{p}}'_1 + \bar{\mathbf{p}}'_2 = 0$$

$$\frac{\bar{p}_1^2}{2m_1} + \frac{\bar{p}_2^2}{2m_2} = \frac{\bar{p}'^2_1}{2m_1} + \frac{\bar{p}'^2_2}{2m_2}$$

با حل این معادلات برحسب بزرگی تکانهٔ مرکز جرم ذرهٔ ۱ برحسب تکانهٔ مرکز جرم ذرهٔ ۲، می‌رسیم به:

$$\bar{p}_1 = \bar{p}_2 \qquad \bar{p}'_1 = \bar{p}'_2$$

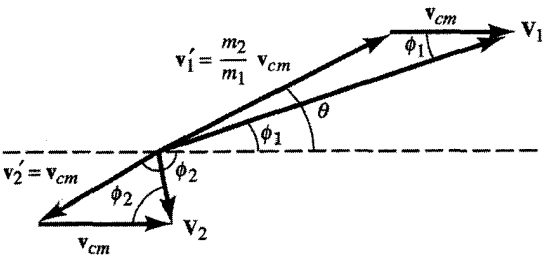
این روابط را می‌توان در معادلهٔ پایستگی انرژی وارد کرد و رسید به:

$$\frac{\bar{p}_2^2}{2\mu} = \frac{\bar{p}'^2_2}{2\mu} \qquad \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

$$\therefore \bar{v}'_2 = \bar{v}_2 = v_{cm}$$

به این ترتیب، در برخورد کشسان، سرعت مرکز جرم ذرهٔ ۲ قبل و بعد از برخورد یکسان است و هر دو با سرعت مرکز جرم برابرند. به‌علاوه، سرعتهای ذرهٔ ۱ در دستگاه مرکز جرم نیز قبل و بعد از برخورد با هم مساوی‌اند و با توجه به پایستگی تکانه در مرکز جرم، این کمیتها عبارت‌اند از

$$\bar{v}'_1 = \bar{v}_1 = \frac{m_2}{m_1}\bar{v}'_2 = \frac{m_2}{m_1}v_{cm}$$



شکل ۳.۶.۷ بردارهای سرعت در دستگاههای مختصات آزمایشگاهی و مرکز جرم برای پراکندگی کشسان.

در شکل ۳.۶.۷، نموداری برداری را مشاهده می‌کنید که بین پارامترهای پراکندگی کشسان در دستگاههای مرجع آزمایشگاهی و مرکز جرم ارتباط برقرار می‌کند. با توجه به هندسهٔ شکل ۳.۶.۷ می‌رسیم به

$$\psi = \phi_1 + \phi_2$$
$$2\phi_2 = \pi - \theta$$
$$\phi_2 = \frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}$$

حال، با به کاربردن قانون سینوسها در مورد مثلث بالایی این شکل، می‌رسیم به:

$$\frac{(m_2/m_1)v_{cm}}{\sin\phi_1} = \frac{v_{cm}}{\sin(\theta - \phi_1)}$$
$$\sin(\theta - \phi_1) = \frac{m_1}{m_2}\sin\phi_1$$
$$\therefore \theta = \phi_1 + \sin^{-1}\left(\frac{m_1}{m_2}\sin\phi_1\right)$$

سرانجام، با نشاندن رابطهٔ آخر برای θ در داخل رابطهٔ قسمت قبلی برای ϕ_2 و حل آن برای به‌دست‌آوردن زاویهٔ باز ψ، داریم

$$\psi = \phi_1 + \phi_2 = \phi_1 + \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}\right)$$
$$= \frac{\pi}{2} + \frac{\phi_1}{2} - \frac{1}{2}\sin^{-1}\left(\frac{m_1}{m_2}\sin\phi_1\right)$$

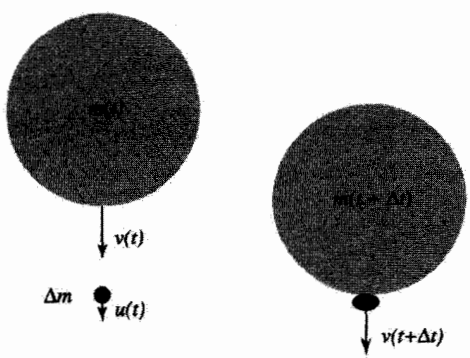
(ب) برای پروتونهایی که از طریق هستهٔ اتم هلیم به‌طور کشسان در زاویهٔ $\phi_1 = 30^\circ$ پراکنده می‌شوند، $m_1/m_2 = \frac{1}{4}$ و $\psi \approx 101^\circ$.

(**گوشزد:** در حالت $m_1 = m_2$، همان‌طور که در متن به‌دست آوردیم، $\psi = 90^\circ$.)

۷.۷ حرکت جسم با جرم متغیر: حرکت موشک

تاکنون، فقط راجع به وضعیتهایی بحث کردیم که در آنها جرم اشیاء موردنظر در خلال حرکت ثابت باقی می‌ماند. در بسیار موارد، چنین نیست. قطرات باران که در هوا فرو می‌بارند، در حین سقوط قطره‌های ریزتر را جمع می‌کنند، که به افزایش جرمشان می‌انجامد. موشکها با سوزاندن انفجاری سوخت خود و با بیرون‌دادن گازهای حاصل با سرعت خروجی زیاد، خودشان را به جلو می‌رانند. به این ترتیب، موشکها در حین شتاب‌گرفتن جرم از دست می‌دهند. در هر یک از این حالتها، جرم به‌طور پیوسته به جسم موردنظر اضافه شده یا از آن برداشته می‌شود و این تغییر جرم بر حرکتش تأثیر می‌گذارد. در اینجا معادلهٔ دیفرانسیلی عمومی را به‌دست می‌آوریم که حرکت چنین اشیائی را توصیف می‌کند.

برای اینکه در علامتها اشتباه نکنیم، با ملاحظهٔ حالتی این معادله را استخراج می‌کنیم که در حین حرکت جسم، جرمش افزوده می‌شود. این معادلهٔ حرکت در مورد موشکها نیز صادق است، اما در این حالت آهنگ تغییر جرم کمیتی منفی است. شکل ۱.۷.۷ را در نظر می‌گیریم. جرم بزرگی در محیطی حرکت می‌کند که ذراتی کوچک به آن هجوم برده‌اند و وقتی به جرم یادشده برخورد می‌کنند، به آن می‌چسبند. به این ترتیب، جسم بزرگتر در حینی که در این محیط حرکت



شکل ۱.۷.۷ جرم m که حین حرکت در محیط، جرم کوچک Δm را جمع می‌کند.

می‌کند، پیوسته جرم گردآوری می‌کند. در زمان معین t، جرم آن $m(t)$ و سرعتش $\mathbf{v}(t)$ است. در حالت کلی، ذرات کوچک نه تنها ساکن نیستند بلکه در آن محیط با سرعتی که فرض می‌کنیم $\mathbf{u}(t)$ باشد، حرکت می‌کنند. در لحظهٔ $t+\Delta t$، جسم بزرگ متحرک به چند تایی از ذرات کوچکتر برخورد و مقدار کوچکی جرم اضافی به اندازهٔ Δm جمع‌آوری می‌کند. بنابراین، اکنون جرم آن عبارت است از $m(t+\Delta t)=m(t)+\Delta m$ و سرعتش به $\mathbf{v}(t+\Delta t)$ تغییر یافته است. در بازهٔ زمانی کوتاه Δt، تغییر (در صورت وجود) در تکانهٔ خطی کل سیستم عبارت است از

$$\Delta\mathbf{P}=(\mathbf{p}_{\text{کل}})_{t+\Delta t}-(\mathbf{p}_{\text{کل}})_t \qquad (۱.۷.۷)$$

این تغییر را می‌توان برحسب جرمها و سرعتهای قبل و بعد از برخورد بیان کرد

$$\Delta\mathbf{P}=(m+\Delta m)(\mathbf{v}+\Delta\mathbf{v})-(m\mathbf{v}+\mathbf{u}\Delta m) \qquad (۲.۷.۷)$$

چون سرعت Δm نسبت به m عبارت است از $\mathbf{V}=\mathbf{u}-\mathbf{v}$، معادلهٔ (۲.۷.۷) می‌تواند به این قرار بیان شود:

$$\Delta\mathbf{P}=m\Delta\mathbf{v}+\Delta m\Delta\mathbf{v}-\mathbf{V}\Delta m \qquad (۳.۷.۷)$$

طرفین را بر Δt تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{\Delta\mathbf{P}}{\Delta t}=(m+\Delta m)\frac{\Delta\mathbf{v}}{\Delta t}-\mathbf{V}\frac{\Delta m}{\Delta t} \qquad (۴.۷.۷)$$

در حد $\Delta t\to 0$، داریم

$$\mathbf{F}_{ext}=\dot{\mathbf{P}}=m\dot{\mathbf{v}}-\mathbf{V}\dot{m} \qquad (۵.۷.۷)$$

نیروی $\mathbf{F}_{ext}$ حاکی از هر نیروی خارجی، مانند گرانی، مقاومت هوا، و مانند آنهاست که بر سیستم اثر می‌گذارد و علاوه بر نیروی ضربه‌ای است که از برهم‌کنش بین جرمهای m و Δm حاصل می‌شود. اگر $\mathbf{F}_{ext}=0$، در این صورت تکانهٔ کل، $\mathbf{P}$، سیستم عبارت است از ثابت حرکت و خالص آن صفر است. این حالتی برای موشکی در عمق فضاست که فراتر از اثر نیروی گرانشی بر سیاره یا ستاره است و در آن $\mathbf{F}_{ext}$ لزوماً صفر است.

اکنون این معادلهٔ حرکت را در دو حالت خاص اعمال می‌کنیم که جرم به جسم متحرک اضافه یا از آن کم می‌شود. اولاً، همچنان که قبلاً توصیف کردیم، فرض کنید جسمی در مه یا غبار چنان سقوط می‌کند که در خلال حرکت، جرم گردآوری می‌کند، اما فرض می‌کنیم قطره‌های کوچک ماده

در هوا چنان معلق‌اند که سرعت اولیهٔ آنها قبل از چسبیدن به جسم صفر باشد. به‌طور کلی، این تقریب خوبی خواهد بود. بنابراین، $\mathbf{V} = -\mathbf{v}$، و معادلهٔ حرکت را به‌صورت زیر به‌دست می‌آوریم:

$$\mathbf{F}_{ext} = m\dot{\mathbf{v}} + \mathbf{v}\dot{m} = \frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) \qquad (۶.۷.۷)$$

این معادله فقط در صورتی به کار می‌آید که سرعت اولیهٔ ماده‌ای که قرار است ماده را جارو کند صفر باشد. وگرنه، باید معادلهٔ کلی (۵.۷.۷) را به کار گرفت.

برای حالت دوم، حرکت موشک را در نظر بگیرید. در این حالت، علامت $\dot{m}$ منفی است، زیرا موشک جرم را به‌صورت سوخت پرتاب‌شده از دست می‌دهد. جملهٔ $\mathbf{V}\dot{m}$ در معادلهٔ (۵.۷.۷)، نیروی پیشران موشک نامیده می‌شود، و جهتش در خلاف جهت سرعت نسبی سوخت پرتاب‌شده، $\mathbf{V}$ است. در اینجا، معادلهٔ حرکت را برای ساده‌ترین حالت حرکت موشک حل می‌کنیم که در آن نیروی خارجی وارد بر سیستم صفر است؛ یعنی موشک تحت‌تأثیر نیروی گرانشی، مقاومت هوا، و غیره قرار ندارد. به این ترتیب، در معادلهٔ (۵.۷.۷)، $\mathbf{F}_{ext} = 0$، و داریم

$$m\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{V}\dot{m} \qquad (۷.۷.۷)$$

حال می‌توانیم متغیرها را جدا کنیم و برای دستیابی به $\mathbf{v}$ به‌صورت زیر انتگرال بگیریم:

$$\int d\mathbf{v} = \int \frac{\mathbf{V}dm}{m} \qquad (۸.۷.۷)$$

اگر $\mathbf{V}$ ثابت فرض شود، می‌توانیم بین دو حد انتگرال بگیریم و سرعت را به‌صورت تابعی از m به‌دست آوریم:

$$\int_{v_0}^{v} dv = -V\int_{m_0}^{m}\frac{dm}{m}$$
$$v = v_0 + V\ln\frac{m_0}{m} \qquad (۹.۷.۷)$$

در اینجا، m_0 جرم اولیهٔ موشک به‌اضافهٔ سوخت مصرف‌نشده، m جرم در هر زمان، و V سرعت سوخت پرتاب‌شده نسبت به موشک است. به دلیل ماهیت تابع لگاریتمی، لازم است نسبت جرم سوخت به جرمی که موشک حمل می‌کند خیلی بزرگ باشد تا به سرعت زیادی برسد که برای پرتاب ماهواره‌ها ضروری است.

مثال ۱.۷.۷ پرتاب ماهواره به دور زمین از پایگاه کِیپ کاناورال

با توجه به مثال ۳.۵.۶، می‌دانیم که سرعت ماهواره در مداری دایره‌ای در نزدیکی زمین حدود 8km/s است. ماهواره‌ها به سمت شرق پرتاب می‌شوند تا از چرخش زمین حول محور خودش

بهره گرفته شود. برای نقطه‌ای واقع بر زمین در نزدیکی خط استوا، سرعت چرخشی تقریباً عبارت است از $\omega_{\text{زمین}} R_{\text{زمین}}$ که مقدار عددی آن حدود ۰٫۵km/s است. برای اکثر سوختهای موشکی، سرعت پرتاب مؤثر از مرتبهٔ ۲km/s تا ۴km/s است. مثلاً، اگر بگیریم $V = ۳\text{km/s}$، در این صورت، نسبت جرمی محاسبه‌شده به کمک معادلهٔ (۹.۷.۷)، برای اینکه موشک بعد از پرتاب از زمین به سرعت مداری لازم برسد، عبارت است از

$$\frac{m_\circ}{m} = \exp\left(\frac{v - v_\circ}{V}\right) = \exp\left(\frac{۸٫۰ - ۰٫۵}{۳}\right) = e^{۲٫۵} = ۱۲٫۲$$

به این ترتیب، فقط حدود ۸٪ از جرم کل اولیهٔ $m_\circ$، را موشک حمل می‌کند.

موشکهای چندمرحله‌ای

در مثال ۱.۷.۷ ملاحظه می‌شود که مقدار زیادی سوخت لازم است تا محمولهٔ کوچکی در مدار زمینی پایین (LEO) قرارگیرد، حتی اگر آثارگرانشی و مقاومت هوا وجود نداشته باشند. چشم‌پوشی از مقاومت هوا تقریب بدی نیست، زیرا شکل دقیق و مناسب موشکها می‌تواند به مقدار زیادی اثر آنها را کاهش دهد. اما، همان‌طور که به احتمال قوی شما هم بر این باور هستید، نمی‌توانیم از اثر گرانشی چشم بپوشیم، زیرا در این صورت پیچیدگی مسئلهٔ قراردادن جسمی در مدار را دوچندان می‌کند.

معادلهٔ حرکت موشک در حالت واردآمدن نیروی گرانشی به کمک معادلهٔ (۵.۷.۷) به‌دست می‌آید:

$$m\frac{d\mathbf{v}}{dt} - \mathbf{V}\frac{dm}{dt} = m\mathbf{g} \qquad (۱۰.۷.۷)$$

جهت روبه بالا را مثبت می‌گیریم و جملات را مرتب می‌کنیم تا برسیم به:

$$\frac{dv}{V} = -\frac{dm}{m} - \frac{g}{V}dt \qquad (۱۱.۷.۷)$$

برای اینکه موشک به مرحلهٔ خیزش برسد، جملهٔ اول سمت راست معادلهٔ (۱۱.۷.۷) باید از جملهٔ دوم زیادتر شود (به یاد آورید که، dm منفی است)؛ به بیان دیگر، موشک باید مقدار زیادی ماده، dm، را با سرعت زیاد V به بیرون پرتاب کند. عکس ثابت g/V در جملهٔ دوم عبارت است از «پارامتر تناسب» برای نوع خاصی موشک و نام خاص، ضربهٔ مخصوص τ_s موتور موشک، به آن داده شده است

$$\tau_s = \frac{V}{g} \qquad (۱۲.۷.۷)$$

بعد این کمّیت از جنس زمان است و مقدارش به سرعت خروج گاز از موشک بستگی دارد. این سرعت خروج نیز، به نوبهٔ خود، عمدتاً به شرایط ترمودینامیکی آن چیزی بستگی دارد که در داخل اتاقک احتراق موشک می‌گذرد و به شکل شیپورهٔ (اگزوز) موشک بستگی دارد. موشکی با طراحی مناسب از لحاظ شیمیایی که از طریق اکسایش سریع سوخت کار می‌کند، نوعاً دارای سرعت خروج گازی حدود $V = ۳۰۰۰\,\mathrm{m/s}$ است که متوسط وزن مولکولی مواد قابل سوخت حدود ۳۰ است. به این ترتیب، $\tau_s = V/g \approx ۳۰۰\,\mathrm{s}$.

اکنون از معادلهٔ (۱۱.۷.۷) در خلال سوختن سوخت تا زمان اتمام سوخت، τ_B، انتگرال می‌گیریم تا سرعت نهایی موشک را بیابیم

$$\frac{۱}{V}\int_{۰}^{v} dv = -\int_{m_۰}^{m_f} \frac{dm}{m} - \frac{۱}{\tau_s}\int_{۰}^{\tau_B} dt \qquad (۱۳.۷.۷\text{ الف})$$

با تکمیل‌کردن انتگرال‌گیری، می‌رسیم به

$$\frac{v_f}{V} = \ln\left[\frac{m_R + m_p + m_F}{m_R + m_p}\right] - \frac{\tau_B}{\tau_s} \qquad (۱۳.۷.۷\text{ ب})$$

جرمها در معادلهٔ بالا عبارت‌اند از m_R =جرم موشک؛ m_p =جرم محموله؛ و m_F =جرم سوخت (به‌اضافهٔ اکساینده).

با حل معادلهٔ (۱۳.۷.۷ الف) برحسب نسبت جرمها، می‌رسیم به

$$\left[\frac{m_R + m_p + m_F}{m_R + m_p}\right] = e^{\left(\frac{\tau_B}{\tau_s} + \frac{v_f}{V}\right)} \qquad (۱۴.۷.۷)$$

مسئلهٔ مورد توجه در اینجا از این قرار است که چه مقدار سوخت لازم است تا موشک و محمولهٔ آن را در مدار زمینی پایین (LEO) به پیش ببرد؟ سرعت نهایی موشک باید حدود $۸\,\mathrm{km/s}$ باشد. با حل این معادله برحسب جرم سوخت نسبت به جرم موشک و محمولهٔ آن خواهیم داشت:

$$\frac{m_F}{m_R + m_p} = e^{\left(\frac{v_f}{V} + \frac{\tau_B}{\tau_s}\right)} - ۱ \qquad (۱۵.۷.۷)$$

زمان پایان‌یافتن سوخت موشکی که محموله را در مدار (LEO) قرار می‌دهد، حدود $۶۰۰\,\mathrm{s}$ است. با قراردادن اعداد مربوطه در معادلهٔ (۱۵.۷.۷) به این نتیجه می‌رسیم:

$$\frac{m_F}{m_R + m_p} = e^{(۲٫۶۷ + ۲٫۰۰)} - ۱ \approx ۱۰۵$$

به بیان دیگر، ۱۰۵ کیلوگرم سوخت لازم است تا ماده‌ای به جرم ۱kg در مدار قرارگیرد! این نسبت بزرگتر از نسبتی است که نوعاً لازم می‌شود. مثلاً، وزن خیزش ساترن V حدود ۳٫۲ کیلوگرم بود و این موشک توانست ۱۰۰,۰۰۰ کیلوگرم را در مدار قرار دهد. این نسبت ۳۲ کیلوگرم سوخت به‌ازای هر کیلوگرم ماده است که در مدار قرارگیرد. چرا نتیجهٔ ما با یک ضریب ۳ بزرگتر است؟

در ساترن V از یک موشک دو مرحله‌ای و کارآمدتر، برای قراردادن محموله در مدار LEO بهره گرفته شد. مخزنهایی که سوخت مرحلهٔ اول در آنها جای داده شده بود، پس از اینکه احتراق مرحلهٔ اول کامل شد از موشک جدا شدند؛ به این ترتیب، جرمی که دیگر بی‌استفاده است در مدار قرار داده نمی‌شود که این خود تا مقدار زیادی سوخت کل لازم را کاهش می‌دهد. حال به معادلهٔ (۱۴.۷.۷) نگاهی می‌اندازیم تا ببینیم این عمل چگونه صورت می‌گیرد. نسبت جرمی را با نماد μ نشان می‌دهیم:

$$\left[\frac{m_R + m_p + m_F}{m_R + m_p}\right] = \mu \qquad (۱۶.۷.۷)$$

فرض می‌کنیم نسبت جرمی مرحلهٔ اول، μ_1، با نسبت جرمی مرحلهٔ دوم، μ_2، برابر باشد. دراین‌صورت می‌توانیم سرعتهای نهایی را که هر مرحله به آن می‌رسد، از معادلهٔ (۱۳.۷.۷ ب) محاسبه کنیم:

$$\frac{v_{f1}}{V} = \ln\mu - \frac{\tau_B}{\tau_s} \qquad (۱۷.۷.۷)$$

و

$$\frac{v_{f2} - v_{f1}}{V} = \ln\mu - \frac{\tau_B}{\tau_s} \qquad (۱۸.۷.۷)$$

با حل‌کردن این معادله برحسب v_{f2}، می‌رسیم به

$$\frac{v_{f2}}{V} = 2\ln\mu - 2\frac{\tau_B}{\tau_s} \qquad (۱۹.۷.۷)$$

این معادله را برای به‌دست‌آوردن نسبت جرم سوخت به جرم موشک و محموله، مانند قبل، حل می‌کنیم:

$$\frac{m_F}{m_R + m_p} = e^{\left[\frac{v_{f2}}{2V} + \frac{\tau_B}{\tau_s}\right]} - 1 \qquad (۲۰.۷.۷)$$

عددگذاری می‌کنیم،

$$\frac{m_F}{m_R + m_p} \approx 27 \qquad (۲۱.۷.۷)$$

به این ترتیب، با بهره‌گیری از موشک دو مرحله‌ای فقط ۲۷ کیلوگرم سوخت لازم است تا یک کیلوگرم ماده در مدار قرارگیرد. بدیهی است که مرحله‌بندی‌کردن موشک، همان‌طور که در مورد ساترن V نشان داده شد، از مزایای زیادی برخوردار است.

موشک یونی

موشکهای شیمیایی از انرژی گرمایی استفاده می‌کنند که در عمل اکسایش انفجاری سوخت در اتاقک موتور موشک آزاد می‌شود و محصولات واکنش‌دهنده از عقب موشک به بیرون پرتاب می‌شوند و موشک را به جلو می‌رانند. در موشک یونی، مانند *Deep Space1* ناسا[1]، اتمهای گاز زنون از یکی از الکترونهایشان کنده می‌شوند و یونهای مثبت حاصل، Xe^+، به وسیلهٔ میدان الکتریکی در موتور موشک شتاب داده می‌شوند. این یونهای پرتاب‌شده به بیرون، دقیقاً همان‌گونه که به کمک معادلهٔ (۷.۷.۷) توصیف شد، تکانهٔ روبه جلویی به موشک می‌دهند. دو اختلاف اساسی بین موشکهای یونی و شیمیایی برقرار است:

- سرعت خروج یونها از انتهای موشک ۱۰ برابر خروج گازها از موشک شیمیایی است که ضربهٔ ویژهٔ بزرگتری را به موشک وارد می‌آورد (معادلهٔ ۱۲.۷.۷).
- جرم پرتاب‌شده به بیرون در واحد زمان، $\dot{m}$، در موشک یونی خیلی کوچکتر است که نیروی پیشران (جملهٔ $V\dot{m}$ در معادلهٔ (۷.۷.۷) کوچکتری می‌دهد).

این اختلافها از آنجا ناشی می‌شوند که، هر چند شتاب الکتروستاتیکی یونها خیلی کارآمدتر از شتاب گرمایی حاصل از انفجارهای شیمیایی است، چگالی یونهای پرتابی به بیرون خیلی کمتر از چگالی گازهای پرتاب‌شده به بیرون است. پرتاب به بالا در موشک یونی خیلی کارآمدتر از موشک شیمیایی است، به این معنی که موشک یونی جرم سوخت کمتری برای جلو راندن موشک تا رسیدن به سرعت دلخواه لازم دارد، اما شتاب موشک خیلی ملایم است، به این طریق که به زمان بیشتری برای رسیدن به سرعت دلخواه نیاز دارد. این خصوصیت موشک یونی، آن را برای مأموریتها در اعماق فضا، مثلاً رفتن به سوی ستاره‌های دنباله‌دار و سیارکها، و شاید، سرانجام رفتن به منظومه‌های ستاره‌ای نزدیک، مناسبتر می‌کند. در واقع، یکی از هدفهای مأموریت «دیپ اسپیس ۱» ناسا این است که این فرضها را بیازماید. در اینجا دربارهٔ سیستم پیشران آن بحث می‌کنیم تا ببینیم این فناوری جدید تا کنون چه دستاوردهایی به بار آورده است.

پتانسیل الکتروستاتیکی Φ_e که از طریق آن یونهای Xe^+ شتاب داده شده‌اند، ۱۲۸۰ ولت بود. یونها از پیشرانش ۳ر۰ متری از طریق یک زوج شبکهٔ مولیبدن کانونی‌ساز به بیرون رانده می‌شوند. با توجه‌کردن به این نکته که ذرات باردار در پتانسیل الکتروستاتیکی Φ_e شتاب می‌گیرند و با از دست‌دادن انرژی پتانسیل الکتروستاتیکی، $e\Phi_e$، انرژی جنبشی کسب می‌کنند که e بار الکتریکی

۱. برای توضیحی در زمینهٔ مأموریت *Deep Space1* رک. به وبگاه:
http:// nmp.jpl.nasa.gov/ds1/tech/ionpropfaq.html

آنهاست، می‌توانیم بیشینهٔ سرعت ممکن قرار این یونها را برآورد کنیم. انرژی پتانسیل الکتروستاتیکی ذرهٔ باردار در میدان الکتریکی مشابه است با انرژی پتانسیل گرانشی $m\Phi$ (معادلهٔ ۶.۷.۶) ذره در میدان گرانشی. بنابراین، داریم

$$\frac{۱}{۲}mV^{۲} = e\Phi_e \qquad (۲۲.۷.۷)$$

که m جرم یک یون Xe^{+} است. با حل‌کردن این معادله برحسب سرعت فرار می‌رسیم به:

$$V = \sqrt{\frac{۲e\Phi_e}{m}} \qquad (۲۳.۷.۷)$$

با جایگذاریهای عددی،[۱] خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} m &\approx ۱۳۱\text{AMU} = ۱۳۱ \times ۱٫۶۶ \times ۱۰^{-۲۷}\text{kg} = ۲٫۱۷ \times ۱۰^{-۲۵}\text{kg} \\ e &= ۱٫۶ \times ۱۰^{-۱۹}\text{C} \\ V &= ۴٫۳ \times ۱۰^{۴}\text{m/s} \end{aligned} \qquad (۲۴.۷.۷)$$

به این ترتیب، ضربهٔ مخصوص ممکن بیشینهٔ موشک یونی عبارت است از

$$\tau = \frac{V}{g} = \frac{۴٫۳ \times ۱۰^{۴}\text{m/s}}{۹٫۸\text{m/s}^{۲}} = ۴٫۴ \times ۱۰^{۳}\text{s} \qquad (۲۵.۷.۷)$$

در واقع، دامنهٔ ضربهٔ مخصوص «دیپ اسپیس ۱» بسته به توان دریچهٔ کنترل یون، از ۱۹۰۰s تا ۳۲۰۰s تغییر می‌کند. در اینجا با بیشینهٔ حساب‌شده فرض بر این است که تمام توان موجود، یونها را با ۱۰۰٪ بازده شتاب می‌دهد و آنها را دقیقاً به سمت عقب رو به انتهای عقبی موشک به بیرون پرتاب می‌کند، که در واقع انجام آن ناممکن است. ضربهٔ مخصوص «دیپ اسپیس ۱» ده برابر ضربهٔ مخصوص ساترن V است.

اکنون پیشران «دیپ اسپیس ۱» را محاسبه می‌کنیم، و در اینجا نیز فرض می‌کنیم تمام توان موجود به باریکهٔ یونی پرتاب‌شده به بیرون با بازده ۱۰۰٪ تبدیل شود. توان موجود بیشینه در «دیپ اسپیس ۱» عبارت است از $P = ۲٫۵\text{kW}$. به این ترتیب، آهنگ، $\dot{N}$، را که با آن یونهای Xe^{+} به بیرون پرتاب می‌شوند می‌توان از رابطهٔ زیر محاسبه کرد

$$P = \dot{E} = \dot{N}e\Phi_e \qquad (۲۶.۷.۷)$$

۱. AMU یک یکای جرم اتمی است. این کمیت عبارت است از $۱٫۶۶ \times ۱۰^{-۲۷}\text{kg}$. یکای بار الکتریکی کولن (C)، و بار الکترون $-۱٫۶ \times ۱۰^{-۱۹}\text{C}$ است؛ بنابراین باریک یون تک بار مثبت عبارت است از $+۱٫۶ \times ۱۰^{-۱۹}\text{C}$.

از آنجاکه $e\Phi_e$ عبارت است از انرژی پتانسیل اتلافی در شتاب‌دادن به یک تک‌یون، توان مصرف‌شده برابر است با اتلاف انرژی پتانسیل هر یکای زمان برای تمام یونهای شتاب‌داده‌شده. آهنگ پرتاب جرم، $\dot{m}$، برابر است با جرم هر یون ضربدر $\dot{N}$. بنابراین

$$\dot{m} = m\dot{N} = \frac{mP}{e\Phi_e} = \frac{(۲٫۱۷ \times ۱۰^{-۲۵}\text{kg})(۲۵۰۰\text{J/s})}{(۱٫۶ \times ۱۰^{-۱۹}\text{C})(۱۲۸۰\text{V})} = ۲٫۶ \times ۱۰^{-۶}\text{kg/s} \tag{۲۷.۷.۷}$$

و از این واقعیت بهره برده‌ایم که $۱\text{C} \times ۱\text{V} = ۱\text{J}$. به این ترتیب، نیروی پیشران بیشینهٔ موشک یونی عبارت است از

$$\text{نیروی پیشران} = V\dot{m} = (۴٫۳ \times ۱۰^{۴}\text{m/s})(۲٫۶ \times ۱۰^{-۶}\text{kg/s}) = ۰٫۱۱۴\text{N}$$

در واقع، نیروی پیشران که در «دیپ اسپیس ۱» عمل کرد، عبارت بود از ۰٫۰۹۲N. می‌توانیم این کمیت را با نیروی پیشران بهره‌برداری‌شده در ساترن V مقایسه کنیم. ساترن V حدود ۱۱۷۰۰kg/s جرم به بیرون پرتاب کرد. به این ترتیب،

$$\frac{\text{نیروی پیشران (ساترن V)}}{\text{نیروی پیشران (دیپ اسپیس ۱)}} = \frac{V\dot{m}(\text{ساترن V})}{V\dot{m}(\text{دیپ اسپیس ۱})} = \frac{(۳۰۰۰\text{m/s})(۱۱۷۰۰\text{kg/s})}{۰٫۰۹۲\text{N}}$$
$$= ۳٫۸ \times ۱۰^{۸}$$

نتیجه می‌گیریم که موشکهای یونی برای پرتاب محموله‌ها از زمین مفید نیستند ولی برای مأموریتهایی در اعماق فضا مناسب‌اند که از مدار زمین شروع شده و در آن باید سیستمهای پیش‌برندهٔ ملایم و کارآمد به کار گرفته شوند.

مسائل

۱.۷ سیستمی متشکل از سه ذره، هر یک به جرم واحد، و بردارهای مکان و سرعت از این قرار است:

$$\mathbf{r}_۱ = \mathbf{i} + \mathbf{j} \quad \mathbf{v}_۱ = ۲\mathbf{i}$$
$$\mathbf{r}_۲ = \mathbf{j} + \mathbf{k} \quad \mathbf{v}_۲ = \mathbf{j}$$
$$\mathbf{r}_۳ = \mathbf{k} \quad \mathbf{v}_۳ = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$$

بردارهای مکان و سرعت مرکز جرم را بیابید. نیز، تکانهٔ خطی سیستم را پیدا کنید.

۲.۷ (الف) انرژی جنبشی سیستم مسئلهٔ ۱.۷ را بیابید.

(ب) مقدار $m\frac{v_{cm}^2}{2}$ را پیدا کنید.

(ج) تکانهٔ زاویه‌ای حول مبدأ را بیابید.

۳.۷ از تفنگی به جرم M گلوله‌ای به جرم m شلیک می‌شود. اگر تفنگ بتواند آزادانه پس‌زنی کند و سرعت اولیهٔ گلوله (سرعت نسبت به تفنگ، هنگامی که از دهانهٔ لوله خارج می‌شود) v_0 باشد، نشان دهید که سرعت واقعی گلوله نسبت به زمین $\frac{v_0}{1+\gamma}$، و سرعت پس‌زنی تفنگ $\frac{-\gamma v_0}{(1+\gamma)}$ است که $\gamma = m/M$.

۴.۷ قطعه‌چوبی روی میز صاف و افقی در حال سکون است. با تفنگی به‌طور افقی به این قطعه‌چوب شلیک می‌شود و گلوله از این قطعه عبور می‌کند و با نصف سرعت اولیه‌اش، درست قبل از ورود به قطعه، از آن خارج می‌شود. نشان دهید که کسری از انرژی جنبشی اولیهٔ گلوله که به‌صورت گرما تلف می‌شود عبارت است از $\frac{1}{4}\gamma - \frac{3}{4}$. γ عبارت است از نسبت جرم گلوله به جرم قطعه‌چوب ($\gamma < 1$).

۵.۷ یک گلولهٔ توپ نسبت به سطح افق با زاویهٔ 60° و سرعت اولیهٔ v_0 شلیک می‌شود. این گلوله در بالاترین بخش مسیرش منفجر و به دو جزء مساوی تقسیم می‌شود؛ یکی از آنها با سرعت اولیهٔ $v_0/2$ نسبت به زمین، مستقیماً به سمت بالا حرکت می‌کند. جهت و سرعت حرکت جزء دیگر گلولهٔ توپ بلافاصله بعد از انفجار چگونه خواهد بود؟

۶.۷ توپی از ارتفاع h روی سنگفرش افقی سقوط می‌کند. اگر ضریب بازگشت ϵ باشد، نشان دهید که مسافت کل پیموده‌شدهٔ توپ در حرکت قائم، قبل از آنکه از واجهش باز ایستد، عبارت است از $h(1+\epsilon^2)/(1-\epsilon^2)$. همچنین مدت‌زمانی را بیابید که توپ در حال واجهیدن است.

۷.۷ اتومبیل کوچکی به جرم m و سرعت اولیهٔ v_0 روی جاده‌ای یخ‌زده با کامیونی به جرم $4m$ که با سرعت $\frac{1}{4}v_0$ از سوی مقابل می‌آید شاخ به شاخ برخورد می‌کند. اگر ضریب بازگشت در این برخورد $\frac{1}{4}$ باشد، سرعت و جهت حرکت هر کدام از این دو وسیلهٔ نقلیه را بلافاصله بعد از برخورد بیابید.

۸.۷ نشان دهید که انرژی جنبشی یک سیستم دو ذره‌ای عبارت است از $\frac{1}{2}mv_{cm}^2 + \frac{1}{2}\mu v^2$، که $m = m_1 + m_2$، v سرعت نسبی، و μ جرم کاهیده است.

۹.۷ اگر دو جسم دستخوش برخورد مستقیم قرار گیرند، نشان دهید اتلاف انرژی عبارت است از

$$\frac{1}{2}\mu v^2(1-\epsilon^2)$$

که μ جرم کاهیده، v سرعت نسبی قبل از برخورد، و ϵ ضریب بازگشت است.

۱۰.۷ ذره‌ای متحرک به جرم m_1 با ذرهٔ هدف به جرم m_2، که ابتدا ساکن است به‌طور کشسان برخورد می‌کند. اگر برخورد رو در رو باشد، نشان دهید ذرهٔ فرودی کسر $4\mu/m$ را از انرژی جنبشی اصلی خود از دست می‌دهد؛ μ جرم کاهیده است و $m = m_1 + m_2$.

۱۱.۷ نشان دهید که تکانهٔ زاویه‌ای یک سیستم دوذره‌ای عبارت است از

$$\mathbf{r}_{cm} \times m\mathbf{v}_{cm} + \mathbf{R} \times \mu\mathbf{v}$$

که $m = m_1 + m_2$، μ جرم کاهیده، $\mathbf{R}$ بردار مکان نسبی و $\mathbf{v}$ سرعت نسبی دو ذره است.

۱۲.۷ زمان تناوب مشاهده‌شدهٔ ستارهٔ مزدوج دجاجه X-1 که به احتمال زیاد از یک ستارهٔ روشن و یک سیاهچاله تشکیل شده، ۵٫۶ روز است. اگر جرم مؤلفهٔ مرئی $20M_\odot$ و جرم سیاهچاله $16M_\odot$ باشد، نشان دهید که نیم‌قطر بزرگ مدار سیاهچاله نسبت به ستارهٔ مرئی تقریباً یک‌پنجم فاصلهٔ زمین تا خورشید است.

۱۳.۷ (الف) با بهره‌گیری از مختصاتی که در بخش ۴.۷ برای مسئلهٔ سه‌جسمی مقید بیان شد، مختصات (x', y') دو نقطهٔ لاگرانژی L_4 و L_5 را بیابید.

(ب) نشان دهید که گرادیان تابع پتانسیل مؤثر $V(x', y')$ در L_4 و L_5 صفر می‌شود.

۱۴.۷ پروتونی به جرم m_p و با بردار سرعت اولیهٔ $\mathbf{v}_0$ به اتم هلیم، به جرم $4m_p$، که ابتدا ساکن است، برخورد می‌کند. اگر پروتون نقطهٔ برخورد را در حالی ترک کند که با امتداد اولیهٔ حرکتش زاویهٔ $45°$ می‌سازد، سرعت نهایی هر ذره را بیابید؛ فرض کنید که برخورد کاملاً کشسان باشد.

۱۵.۷ مسئلهٔ ۱۴.۷ را برای حالتی که برخورد ناکشسان و Q مساوی یک‌چهارم انرژی اولیهٔ پروتون باشد، حل کنید.

۱۶.۷ در مسئلهٔ ۱۴.۷، زاویهٔ پراکندگی پروتون را در دستگاه مرکز جرم بیابید.

۱۷.۷ در مسئلهٔ ۱۵.۷ زاویهٔ پراکندگی پروتون را در دستگاه مرکز جرم به‌دست آورید.

۱۸.۷ ذره‌ای به جرم m با تکانهٔ خطی اولیهٔ p_1 به ذرهٔ ساکن دیگری به همان جرم برخورد می‌کند. اگر بزرگی تکانه‌های خطی نهایی دو ذره به ترتیب p'_1 و p'_2 باشد، نشان دهید که اتلاف انرژی در این برخورد از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$Q = \frac{p'_1 p'_2}{m} \cos\psi$$

که Q زاویهٔ بین مسیرهای دو ذره بعد از برخورد است.

۱۹.۷ ذره‌ای به جرم m_1 با انرژی جنبشی اولیهٔ T_1 با ذره‌ای به جرم m_2 که ابتدا در حال سکون است، برخورد کشسان می‌کند. m_1، مطابق شکل ۱.۶.۷، از جهت اصلیش با انرژی جنبشی

$T'_۱$ تحت زاویهٔ $\phi_۱$ منحرف می‌شود. با قراردادن $\alpha = m_۲/m_۱$ و $\gamma = \cos\phi_۱$، نشان دهید که کسری از انرژی جنبشی که توسط $m_۱$ از دست می‌رود، $\Delta T_۱/T_۱ = (T_۱ - T'_۱)/T_۱$، از این قرار به‌دست می‌آید:

$$\frac{\Delta T_۱}{T_۱} = \frac{۲}{۱+\alpha} - \frac{۲\gamma}{(۱+\alpha)^۲}\left(\gamma + \sqrt{\alpha^۲ + \gamma^۲ - ۱}\right)$$

۲۰.۷ معادلهٔ (۱۸.۶.۷) را به‌دست آورید.

۲۱.۷ ذره‌ای به جرم $m_۱$ را ذره‌ای به جرم $m_۲$ که در ابتدا ساکن است، مطابق توصیف مسئلهٔ ۱۹.۷، به‌طورکشسان پراکنده می‌کند. منحنی $r(\phi_۱)$ را چنان بیابید که زمان رفتن ذرهٔ پراکنده‌شده از نقطهٔ برخورد به هر نقطه از این منحنی، مقداری ثابت باشد.

۲۲.۷ زنجیر یکنواختی به‌صورت انباشته و کپه‌ای روی میز قرار دارد. اگر یک سر آن با سرعت یکنواخت v به‌طور قائم بالا کشیده شود، نشان دهید نیرویی بالاسو که باید بر سر زنجیر وارد آید، مساوی وزن طول $z + (v^۲/g)$ از زنجیر است که z طول زنجیر حلقه‌نشده در هر لحظه به شمار می‌آید.

۲۳.۷ معادلهٔ دیفرانسیل حرکت یک قطرهٔ باران را به‌دست آورید که در درون مه سقوط و در ضمن سقوط خود جرم گردآوری می‌کند. فرض کنید قطره کروی باقی بماند و آهنگ افزایش جرم با سطح مقطع قطره ضربدر سرعت سقوطی متناسب باشد. نشان دهید اگر قطره در حالی که بینهایت کوچک است از حال سکون شروع به حرکت کرده باشد، در این صورت شتاب آن ثابت و به میزان $\frac{g}{۷}$ ثابت بماند.

۲۴.۷ زنجیر سنگین یکنواختی به طول a مفروض است. ابتدا قسمتی از آن به طول b از لبهٔ میزی آویزان است. قسمت باقی‌مانده، به طول $a - b$، روی لبهٔ میز حلقه شده است. اگر زنجیر رها شود، نشان دهید که سرعتش وقتی آخرین بند آن از لبهٔ میز جدا می‌شود، عبارت است از $[۲g(a^۳ - b^۳)/۳a^۲]^{\frac{۱}{۲}}$.

۲۵.۷ بالنی به جرم M و حاوی کیسه‌ای از شن به جرم $m_۰$ را با هوای داغ پر می‌کنند، تا اینکه به قدرکافی شناور شود و از زمین اندکی به بالا برود، و در آنجا در وضعیت تعادل باقی بماند. در این حالت شن با آهنگ ثابت رها می‌شود، به‌طوری که تمامی آن در مدت زمان $t_۰$ فرو می‌ریزد. پیدا کنید: (الف) ارتفاع بالن، و (ب) سرعت آن وقتی تمام شنها فرو ریخته شده‌اند. فرض کنید نیروی شناوری به طرف بالا ثابت باقی بماند و از مقاومت هوا چشم بپوشید. (ج) فرض کنید $\epsilon = m_۰/M$ خیلی کوچک است، و بسط سری توانی جوابتان را برای بندهای (الف) و (ب) برحسب این نسبت پیدا کنید. (د) بگیرید $M = ۵۰۰\,\text{kg}$ و $m_۰ = ۱۰\,\text{kg}$، و $t_۰ = ۱۰۰\,\text{s}$.

و فقط جملهٔ مرتبهٔ اول در بسط سری را، که در قسمت (ج) به‌دست آورده‌اید، نگهدارید. مقدار عددی ارتفاع و سرعت بالن را در هنگامی که تمام شنها فرو ریخته شده است، بیابید.

۲۶.۷ موشکی به جرم کل m_0 حاوی مقداری سوخت به جرم ϵm_0 ($0 < \epsilon < 1$) است. فرض کنید در هنگام اشتعال، سوخت با آهنگ جرمی ثابت k می‌سوزد و گازهای حاصل از احتراق با سرعت ثابت V نسبت به موشک به بیرون پرتاب می‌شوند. فرض کنید موشک در محیطی بدون واردآمدن هیچ نیرویی قرار دارد. (**الف**) پیدا کنید تا لحظه‌ای که تمام سوخت می‌سوزد، موشک چه فاصله‌ای را پیموده است. (**ب**) بیشینهٔ فاصلهٔ ممکن که موشک در مرحلهٔ سوختن می‌پیماید، چقدر است؟ فرض کنید موشک از حال سکون شروع به حرکت کرده باشد.

۲۷.۷ بر موشکی که در داخل جو حرکت می‌کند مقاومت خطی هوای $-kv$ وارد می‌آید. معادلهٔ دیفرانسیل حرکت را، وقتی نیروهای خارجی دیگر چشم‌پوشیدنی باشند، بیابید. از این معادله انتگرال بگیرید و نشان دهید که اگر موشک از حال سکون شروع به حرکت کرده باشد، سرعت نهایی آن از رابطهٔ

$$v = V\alpha[1 - (m/m_0)^{1/\alpha}]$$

به‌دست می‌آید که V سرعت نسبی سوخت خروجی، ثابت$= \alpha = [\dot{m}/k]$، m_0 جرم اولیهٔ موشک به‌اضافهٔ سوخت، و m جرم نهایی آن است.

۲۸.۷ معادلهٔ حرکت موشکی را به‌دست آورید که به‌طور قائم و بالاسو شلیک می‌شود؛ g را ثابت فرض می‌کنیم. نسبت جرم سوخت به جرمی که موشک حمل می‌کند چه مقدار باشد تا سرعت نهایی با سرعت گریز از سطح زمین، v_e، مساوی شود در صورتی که سرعت گاز خروجی kv_e باشد، که k ثابتی معلوم و آهنگ سوختن $|\dot{m}|$ است. مقدار عددی نسبت جرم سوخت به جرمی را که موشک حمل کند به ازای $k = \frac{1}{4}$ و $|\dot{m}|$ برابر یک درصد جرم سوخت بر ثانیه، محاسبه کنید.

۲۹.۷ رِجل قنطورس نزدیکترین ستاره به زمین با فاصلهٔ حدود ۴ سال نوری است. فرض کنید که یک موشک یونی برای مسافرت به رِجلِ قنطورس ساخته شده باشد. فرض کنید سرعت خروج یونها یک‌دهم سرعت نور باشد. جرم اولیهٔ سوخت را دو برابر جرم محموله بگیرید (از جرم خود موشک چشم بپوشید). همچنین، فرض کنید که حدود ۱۰۰ ساعت طول می‌کشد تا تمام سوخت موشک از انتهای آن خارج شود. چقدر طول می‌کشد تا موشک به رجل قنطورس برسد؟ (سرعتها چندان کم‌اند که می‌توانید از اثرات نسبیت خاص چشم بپوشید.)

۳۰.۷ موشک یونی را در نظر بگیرید که در مسئلهٔ ۲۹.۷ شرح دادیم. این موشک را با موشک شیمیایی، که سرعت خروج گازهای آن 3km/s باشد، مقایسه کنید. در مورد موشک یونی، 1kg سوخت 1kg محموله را تا سرعت نهایی v_f شتاب می‌دهد. چه جرم سوختی لازم است تا با

موشک شیمیایی همان محموله به همان سرعت نهایی رسانده شود؟ (در هر دو مورد از جرم موشک چشم بپوشید).

مسائل کامپیوتری

ک۱.۷ دو ذره ($m_۱ = m_۲ = ۱\text{kg}$) را در نظر بگیرید که یکدیگر را با نیروهای مساوی و مختلف‌الجهت، بنابر رابطهٔ زیر، می‌رانند:

$$\mathbf{F}_{۱۲} = k\frac{b^۲}{r^۲}\mathbf{r}_{۱۲} = -\mathbf{F}_{۲۱}$$

که در آن $b = ۱\text{m}$ و $k = ۱\text{N}$. فرض کنید مکانهای اولیهٔ $m_۱$ و $m_۲$ با روابط $(x_۱, y_۱)_۰ = (-۱۰, ۰ر۵)\text{m}$ و $(x_۲, y_۲)_۰ = (۰, -۰ر۵)\text{m}$ داده شوند. سرعت اولیهٔ $m_۱$ برابر $۱۰\,\text{m/s}$ در جهت $+x$ و $m_۲$ ابتدا در حال سکون است. معادلات حرکت این دو ذره را، که «برخورد» دوبعدی انجام می‌دهند، به‌طور عددی انتگرال‌گیری کنید.

(الف) مسیرهایشان را تا نقطه‌ای که فاصلهٔ آنها $۱۰\,\text{m}$ است، ترسیم کنید.

(ب) زاویهٔ پراکندگی ذرهٔ فرودی و زاویهٔ پس‌رانش ذرهٔ هدف را اندازه بگیرید. آیا جمع این دو زاویه ۹۰° است؟

(ج) بردار حاصل‌جمع تکانه‌های نهایی چگونه است؟ آیا با تکانهٔ اولیهٔ ذرهٔ فرودی برابر است؟

ک۲.۷ با بهره‌گیری از ابزار بهینه‌سازی عددی مانند تابع کمینه‌یاب متماتیکا، مختصات (x', y') نقطهٔ لاگرانژی $L_۴$ را در مسئلهٔ سه‌جسمی مقید بیابید. برخلاف فرضی که احتمالاً در مسئلهٔ ۱۳.۷ انجام دادید، فرض نکنید $L_۴$ در یکی از رأسهای مثلث متساوی‌الاضلاع باشد که قاعدهٔ مقابلش از دو ستارهٔ ابتدایی تشکیل شده است. ولی، باید با به‌کاربردن نقطه‌ای نزدیک مکان جوابی که گمان برده می‌شود، شروع به جستجو برای $L_۴$ کنید.

ک۳.۷ جرم کل موشک آزمایشی جدید، همراه با محموله‌اش عبارت است از $۲ \times ۱۰^۶\text{kg}$، و ۹۰٪ جرم آن سوخت است. موشک سوخت را با آهنگ ثابت ۱۸۰۰۰kg/s می‌سوزاند و گازهای مصرف‌شده را با سرعت ۳۰۰۰m/s به خارج پرتاب می‌کند. فرض کنید موشک به‌طور قائم پرتاب می‌شود. از چرخش زمین چشم بپوشید.

(الف) از مقاومت هوا چشم بپوشید، و فرض کنید شتاب گرانشی، g، ثابت است. بیشینهٔ ارتفاعی را که موشک پرتابی به آن می‌رسد محاسبه کنید.

(ب) قسمت (الف) را تکرار کنید، اما اثر مقاومت هوا و تغییر g با ارتفاع را به حساب بیاورید.

فرض کنید موشک سطح مقاومی مقابل هوا ارائه کند که معادل با کره‌ای به قطر ۰٫۵m است. فرض کنید نیروی مقاومت هوا به‌صورت درجهٔ دوم برحسب سرعت تغییر کند و با رابطهٔ زیر بیان شود:

$$F(v) = -c_2 v|v|$$

و نیز فرض کنید c_2 برحسب ارتفاع y بالای سطح زمین به‌صورت زیر مقیاس‌بندی شده باشد

$$c_2(y) = c_2(0)\exp^{-y/H}$$

که $c_2(0) = 0.22\text{D}^2$، همان‌طور که در فصل ۲ داده شد. $H(= 8\text{km})$ مقیاس ارتفاع جو است، و تغییر g با ارتفاع به‌صورت زیر است:

$$g(y) = \frac{9.8}{(1 + y/R_E)^2}\text{m/s}$$

همان‌طور که در مسئلهٔ کامپیوتری داده شد.

۸

مکانیک اجسام صلب: حرکت در صفحه

«...مرکز گرانی (گرانیگاه) بر مفهوم محدودتر جسم جامدی دلالت می‌کند که فقط سنگین است، در حالی‌که مرکز لختی فقط به‌واسطهٔ لختی تعریف می‌شود، از نیروهایی که بر جسم جامد وارد می‌آیند چشم‌پوشی می‌شود...اویلر گشتاورهای لختی را نیز تعریف می‌کند ــ مفهومی که هویگنس فاقد آن بود و استفاده از آن زبانها را به‌نحو چشمگیری ساده می‌کند ــ و این گشتاورها را برای اجسام همگن محاسبه می‌کند.»[1]

جسم صلب را می‌توان سیستمی از ذرات تلقی کرد که مواضع نسبی یا به بیان دیگر، فاصلهٔ بین هر دو ذره ثابت باشد. این تعریف جسم صلب آرمانی است. اولاً، همان‌طورکه قبلاً در تعریف ذره اشاره شد، در طبیعت ذرهٔ واقعی وجود ندارد. ثانیاً، اجسام گستردهٔ واقعی دقیقاً صلب نیستند؛ یعنی وقتی نیروهای خارجی بر آنها وارد می‌آیند کم و بیش تغییر شکل می‌دهند (کشیده، متراکم،

1. Rene Dugas, *A History of Mechanics,* Editions du Griffon, Neuchatel, Switzerland, 1955; synopsis of Leonhard Euler's comments in Theoria motus corporum solidorum seu rigidorum, 1760.

یا خم می‌شوند). با همهٔ اینها، فعلاً از چنین تغییر شکلهایی چشم می‌پوشیم. در این فصل حرکت جسم صلب را در حالتی که جهت محور چرخش تغییر نمی‌کند مطالعه می‌کنیم. حالت کلی را که محاسبهٔ جامعتری لازم دارد، در فصل بعد مطالعه خواهیم کرد.

۱.۸ مرکز جرم جسم صلب

مرکز جرم سیستمی از ذرات را قبلاً (بخش ۱.۷) به‌صورت نقطهٔ (x_{cm}, y_{cm}, z_{cm}) تعریف کرده‌ایم، که

$$x_{cm} = \frac{\sum_i x_i m_i}{\sum_i m_i} \qquad y_{cm} = \frac{\sum_i y_i m_i}{\sum_i m_i} \qquad z_{cm} = \frac{\sum_i z_i m_i}{\sum_i m_i} \tag{۱.۱.۸}$$

در مورد جسم گسترده، می‌توانیم مجموعیابی را به انتگرال‌گیری روی حجم جسم تبدیل کنیم، یعنی،

$$x_{cm} = \frac{\int_v \rho x dv}{\int_v \rho dv} \qquad y_{cm} = \frac{\int_v \rho y dv}{\int_v \rho dv} \qquad z_{cm} = \frac{\int_v \rho z dv}{\int_v \rho dv} \tag{۲.۱.۸}$$

که در آن ρ چگالی و dv عنصر حجم است.

اگر جسم صلب به‌صورت پوسته‌ای نازک باشد، معادلات مرکز جرم به‌صورت زیر در می‌آیند،

$$x_{cm} = \frac{\int_s \rho x ds}{\int_s \rho ds} \qquad y_{cm} = \frac{\int_s \rho y ds}{\int_s \rho ds} \qquad z_{cm} = \frac{\int_s \rho z ds}{\int_s \rho ds} \tag{۳.۱.۸}$$

که در آن ds عنصر مساحت و ρ جرم واحد مساحت است؛ انتگرال روی تمام مساحت انجام می‌گیرد.

به همین ترتیب، اگر جسم به‌صورت سیمی نازک باشد، داریم

$$x_{cm} = \frac{\int_l \rho x dl}{\int_l \rho dl} \qquad y_{cm} = \frac{\int_l \rho y dl}{\int_l \rho dl} \qquad z_{cm} = \frac{\int_l \rho z dl}{\int_l \rho dl} \tag{۴.۱.۸}$$

در این حالت، ρ جرم واحد طول و dl عنصر طول است.

در مورد اجسام یکنواخت و همگن، ضرایب چگالی ρ در هر حالت ثابت‌اند و بنابراین می‌توان آنها را در هر کدام از معادلات بالا حذف کرد.

اگر جسمی مرکب، یعنی شامل دو یا چند جزء با مرکز جرمهای معلوم، باشد در این صورت، بنا به تعریف مرکز جرم، بدیهی است که می‌توانیم x_{cm} را چنین بنویسیم:

$$x_{cm} = \frac{x_۱ m_۱ + x_۲ m_۲ + \dots}{m_۱ + m_۲ + \dots} \tag{۵.۱.۸}$$

و معادلاتی مشابه نیز برای y_{cm} و z_{cm} داریم. در اینجا $(x_۱, y_۱, z_۱)$ مرکز جرم جزئی به جرم $m_۱$ است و الی آخر.

ملاحظات مربوط به تقارن

اگر جسمی تقارن داشته باشد، می‌توان از آن تقارن در تعیین مکان مرکز جرم سود جست. به این ترتیب، اگر جسم دارای صفحهٔ تقارن باشد، یعنی اگر هر ذرهٔ m_i نسبت به صفحه‌ای تصویری آینه‌ای مانند m_i' از خودش داشته باشد، مرکز جرم در این صفحه قرار خواهد داشت. برای اثبات این ادعا، فرض کنید صفحهٔ xy همان صفحهٔ تقارن باشد. در این صورت داریم،

$$z_{cm} = \frac{\sum_i (z_i m_i + z_i' m_i')}{\sum_i (m_i + m_i')} \qquad (۶.۱.۸)$$

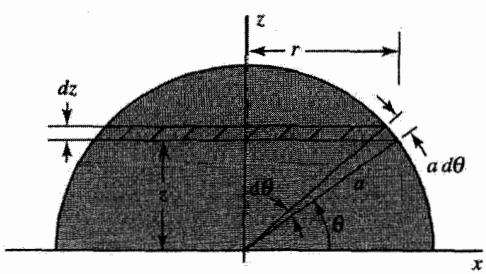
اما $m_i = m_i'$ و $z_i = -z_i'$. از این‌رو، جمله‌های واقع در صورت کسر بالا دو به دو حذف می‌شوند و از این‌رو $z_{cm} = ۰$؛ یعنی، مرکز جرم در صفحهٔ xy قرار دارد.

به همین ترتیب، اگر جسم نسبت به یک خط متقارن باشد، می‌توان به‌آسانی نشان داد که مرکز جرم آن روی این خط واقع است. اثبات این مطلب را برای تمرین به خواننده وامی‌گذاریم.

نیم‌کرهٔ صلب

برای یافتن مرکز جرم نیم‌کرهٔ همگن صلبی به شعاع a، با توجه به تقارن می‌دانیم مرکز جرم بر شعاع عمود بر وجه مسطح نیم‌کره واقع است. محورهای مختصات را مانند شکل ۱.۱.۸ اختیار می‌کنیم، می‌بینیم که مرکز جرم روی محور z قرار دارد. برای محاسبهٔ z_{cm}، یک عنصر دایره‌ای حجم به ضخامت dz و به شعاع $(a^۲ - z^۲)^{۱/۲}$، مطابق شکل، در نظر می‌گیریم. به این ترتیب،

$$dv = \pi(a^۲ - z^۲)dz \qquad (۷.۱.۸)$$



شکل ۱.۱.۸ مختصات مربوط به محاسبهٔ مرکز جرم نیم‌کره.

پس،

$$z_{cm} = \frac{\int_{\circ}^{a} \rho\pi z(a^{۲} - z^{۲})dz}{\int_{\circ}^{a} \rho\pi(a^{۲} - z^{۲})dz} = \frac{۳}{۸}a \qquad (۸.۱.۸)$$

پوستهٔ نیم‌کره‌ای

برای تعیین مرکز جرم پوسته‌ای به شکل نیم‌کره و به شعاع a، همان محورهای شکل ۱.۱.۸ را به‌کار می‌گیریم. در اینجا نیز، از تقارن جسم نتیجه می‌گیریم که مرکز جرمش روی محور z قرار دارد. برای عنصر سطح dsمان، نواری دایره‌ای به پهنای $dl = ad\theta$ را عنصر سطح اختیار می‌کنیم. از این‌رو،

$$ds = ۲\pi r dl = ۲\pi(a^{۲} - z^{۲})^{۱/۲} a d\theta$$
$$\theta = \sin^{-۱}\left(\frac{z}{a}\right) \quad d\theta = (a^{۲} - z^{۲})^{-۱/۲} dz \qquad (۹.۱.۸)$$
$$\therefore ds = ۲\pi a dz$$

به همین ترتیب، مکان مرکز جرم از این قرار به‌دست می‌آید:

$$z_{cm} = \frac{\int_{\circ}^{a} \rho ۲\pi a z dz}{\int_{\circ}^{a} \rho ۲\pi a dz} = \frac{۱}{۲}a \qquad (۱۰.۱.۸)$$

نیم‌دایره

برای تعیین مرکز جرم سیمی نازک که به‌صورت نیم‌دایره‌ای به شعاع a در آمده است، از محورهایی مطابق شکل ۲.۱.۸ بهره می‌گیریم. داریم

$$dl = ad\theta \qquad (۱۱.۱.۸)$$

و

$$z = a\sin\theta \qquad (۱۲.۱.۸)$$

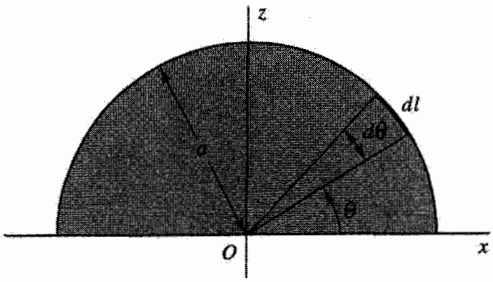
از این‌رو،

$$z_{cm} = \frac{\int_{\circ}^{\pi} \rho(a\sin\theta)ad\theta}{\int_{\circ}^{\pi} \rho a d\theta} = \frac{۲a}{\pi} \qquad (۱۳.۱.۸)$$

پوستهٔ نیم‌دایره‌ای

در مورد پوستهٔ نیم‌دایره‌ای یکنواخت، مرکز جرم روی محور z واقع است (شکل ۲.۱.۸). برای تمرین، دانشجو باید درستی رابطهٔ زیر را تحقیق کند:

$$z_{cm} = \frac{۴a}{۳\pi} \qquad (۱۴.۱.۸)$$



شکل ۲.۱.۸ مختصات مربوط به محاسبهٔ مرکز جرم سیمی که خم شده و به‌صورت نیم‌دایره درآمده است.

مخروط توپر با چگالی متغیر: انتگرال‌گیری عددی

گاهی با چشم‌انداز ناخوشایند اجبار یافتن مرکز جرم جسمی با چگالی نایکنواخت مواجه می‌شویم. در چنین مواردی، باید به انتگرال‌گیری عددی متوسل شویم. در اینجا حالت نسبتاً پیچیده‌ای ارائه می‌دهیم که آن‌را به‌طور عددی حل خواهیم کرد هر چند می‌توان آن را به‌طور تحلیلی نیز حل کرد. ما این کار را انجام می‌دهیم تا نشان دهیم با بهره‌گیری از ابزارهای موجود در متماتیکا چگونه می‌توان چنین محاسبه‌ای را انجام داد.

«واحد» مخروط محدود به سطح مخروطی $z^۲ = x^۲ + y^۲$ و صفحهٔ $z = ۱$ را مطابق شکل ۳.۱.۸ در نظر می‌گیریم، که تابع چگالی جرمی آن از این قرار بیان می‌شود:

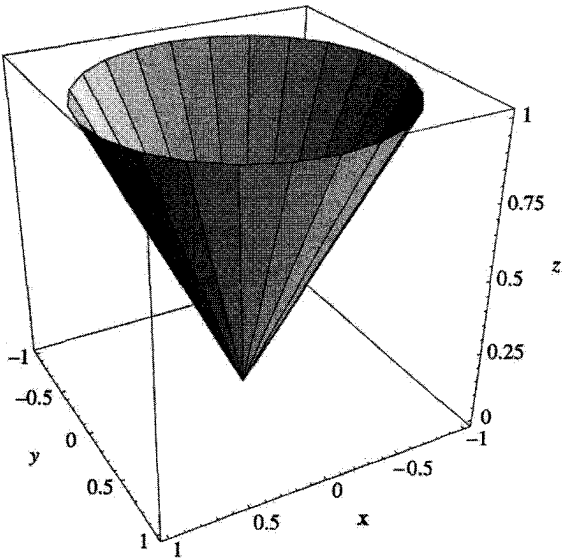
$$\rho(x, y, z) = \sqrt{x^۲ + y^۲} \qquad (۱۵.۱.۸)$$

مرکز جرم این مخروط را می‌توان با حل‌کردن انتگرالهای بیان‌شده در قالب معادلهٔ (۲.۱.۸) محاسبه کرد. جرم مخروط را این عبارت به‌دست می‌دهد:

$$M = \int_{-۱}^{۱} \int_{-\sqrt{۱-x^۲}}^{\sqrt{۱-x^۲}} \int_{\sqrt{x^۲+y^۲}}^{۱} \sqrt{x^۲ + y^۲}\, dz dy dx \qquad (۱۶.۱.۸)$$

توجه کنید که حدود انتگرال‌گیری روی متغیر y به x بستگی دارد و حدود انتگرال‌گیری روی z هم به x و هم به y بستگی دارد. چون این انتگرال حول هر دو محور x و y متقارن است، به‌صورت زیر ساده می‌شود

$$M = ۴ \int_{۰}^{۱} \int_{۰}^{\sqrt{۱-x^۲}} \int_{\sqrt{x^۲+y^۲}}^{۱} \sqrt{x^۲ + y^۲}\, dz dy dx \qquad (۱۷.۱.۸)$$



شکل ۳.۱.۸ مخروط توپر که رویهٔ آن با منحنی $z^۲ = x^۲ + y^۲$ و $z = ۱$ بیان می‌شود.

نخستین گشتاورهای جرم به کمک انتگرالهای مشروح زیر بیان می‌شوند

$$M_{yz} = \int_{-۱}^{۱} \int_{-\sqrt{۱-x^۲}}^{\sqrt{۱-x^۲}} \int_{\sqrt{x^۲+y^۲}}^{۱} x\sqrt{x^۲ + y^۲}\,dzdydx \qquad (۱۸.۱.۸ \text{ الف})$$

$$M_{xz} = \int_{-۱}^{۱} \int_{-\sqrt{۱-x^۲}}^{\sqrt{۱-x^۲}} \int_{\sqrt{x^۲+y^۲}}^{۱} y\sqrt{x^۲ + y^۲}\,dzdydx \qquad (۱۸.۱.۸ \text{ ب})$$

$$M_{xy} = \int_{-۱}^{۱} \int_{-\sqrt{۱-x^۲}}^{\sqrt{۱-x^۲}} \int_{\sqrt{x^۲+y^۲}}^{۱} z\sqrt{x^۲ + y^۲}\,dzdydx \qquad (۱۸.۱.۸ \text{ ج})$$

بنابراین، مکان مرکز جرم عبارت است از

$$(x_{cm}, y_{cm}, z_{cm}) = \left(\frac{M_{yz}}{M}, \frac{M_{xz}}{M}, \frac{M_{xy}}{M}\right) \qquad (۱۹.۱.۸)$$

نخستین گشتاورهای جرم حول x و y باید صفر شود، زیرا، در اینجا نیز، توزیع جرم حول آن محورها متقارن است. این نکته، انعکاس این واقعیت است که در معادلات (۱۸.۱.۸ الف و ب) توابعی فردند و بنابراین صفر می‌شوند. به این ترتیب، فقط انتگرالهایی که باید محاسبه شوند، انتگرالهایی‌اند که در معادلات (۱۷.۱.۸) و (۱۸.۱.۸ج) آمده‌اند.

ما این انتگرال‌گیریها را با استمداد از تابع $NIntegrate$ در متماتیکا اجرا می‌کنیم. فراخوان این تابع برای انتگرال سه‌بعدی عبارت است از

$$M(M_{xy}) = NIntegrate[Integrand, \{x, x_{min}, x_{max}\},$$
$$\{y, y_{min}, y_{max}\}, \{z, z_{min}, z_{max}\}]$$

که متغیرهای مستقل برای M و M_{xy} مناسب‌اند و باید روشن و بی‌نیاز از توضیح باشند. خروجی این دو فراخوان ضروری مقادیر $M = ۰٫۵۲۳۵۹۹$ و $M_{xy} = ۰٫۴۱۸۸۸۸$ را می‌دهد. به این ترتیب، مختصات مرکز جرم عبارت‌اند از

$$(x_{cm}, y_{cm}, z_{cm}) = (۰, ۰, ۰٫۸۰۰۰۱۷) \qquad (۲۰.۱.۸)$$

حل تحلیلی این مسئله را برای تمرین برای دانشجویان صاحب انگیزه می‌گذاریم.

۲.۸ چرخش جسم صلب حول محور ثابت: گشتاور لختی

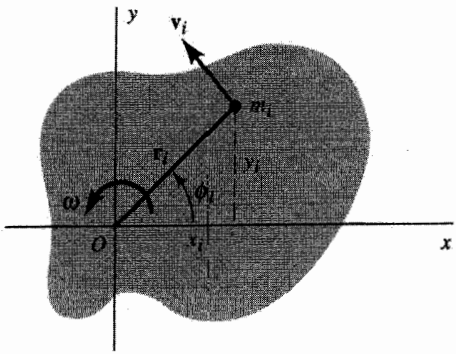
ساده‌ترین نوع حرکت جسم صلب، غیر از انتقال صرف، حرکتی است که در آن جسم مقید به چرخش حول محور ثابتی باشد. محور z متعلق به یک دستگاه مختصات مناسب را محور چرخش اختیار می‌کنیم. مسیر ذره‌ای نمونه به جرم m_i واقع در نقطهٔ (x_i, y_i, z_i) عبارت است از دایره‌ای به شعاع $(x_i^۲ + y_i^۲)^{۱/۲} = r_i$ که مرکزش بر محور z قرار دارد. در شکل ۱.۲.۸، مقطعی از جسم موازی با صفحهٔ xy را مشاهده می‌کنید.

سرعت ذرهٔ i، یعنی v_i، از این قرار به‌دست می‌آید:

$$v_i = r_i\omega = (x_i^۲ + y_i^۲)^{۱/۲}\omega \qquad (۱.۲.۸)$$

که ω سرعت زاویه‌ای چرخش است. با بررسی شکل ۱.۲.۸، پی می‌بریم که مؤلفه‌های سرعت عبارت‌اند از

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= -v_i \sin\phi_i = -\omega y_i \\ \dot{y}_i &= v_i \cos\phi_i = \omega x_i \\ \dot{z}_i &= ۰ \end{aligned} \qquad (۲.۲.۸)$$



شکل ۱.۲.۸ مقطع جسم صلبی که حول محور z می‌چرخد (محور z به سوی خارج از صفحهٔ کاغذ است).

که ϕ_i، مطابق شکل ۱.۲.۸، تعریف می‌شود. معادلات (۲.۲.۸) را می‌توان از مؤلفه‌های بردار

$$\mathbf{v}_i = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i \qquad (۳.۲.۸)$$

نیز به‌دست آورد، که در آن $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{k}\omega$.

اکنون انرژی جنبشی چرخشی جسم را محاسبه می‌کنیم. می‌رسیم به

$$T_{rot} = \sum_i \frac{۱}{۲} m_i v_i^۲ = \frac{۱}{۲}\left(\sum_i m_i r_i^۲\right)\omega^۲ = \frac{۱}{۲} I_z \omega^۲ \qquad (۴.۲.۸)$$

که

$$I_z = \sum_i m_i r_i^۲ = \sum_i m_i (x_i^۲ + y_i^۲) \qquad (۵.۲.۸)$$

کمیت I_z را، که به کمک معادلهٔ (۵.۲.۸) تعریف می‌شود، گشتاور لختی حول محور z نامیده می‌شود.

برای اینکه نشان دهیم چگونه گشتاور لختی در محاسبات وارد می‌شود، تکانهٔ زاویه‌ای را حول محور چرخش محاسبه می‌کنیم. چون تکانهٔ زاویه‌ای یک تک ذره، بنابر تعریف، عبارت است از $\mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}_i$، بنابراین مؤلفهٔ z آن از این قرار خواهد بود:

$$m_i(x_i \dot{y}_i - y_i \dot{x}_i) = m_i(x_i^۲ + y_i^۲)\omega = m_i r_i^۲ \omega \qquad (۶.۲.۸)$$

برای رسیدن به این عبارت از معادلات (۲.۲.۸) بهره گرفته‌ایم. به این ترتیب، مؤلفهٔ z کل تکانهٔ

زاویه‌ای، که آن را L_z می‌نامیم، از جمع‌کردن مؤلفه‌های تمام ذرات به‌دست می‌آید، یعنی،

$$L_z = \sum_i m_i r_i^2 \omega = I_z \omega \qquad (۷.۲.۸)$$

در بخش ۲.۷ پی بردیم که آهنگ تغییر تکانهٔ زاویه‌ای هر سیستم برابر است با گشتاور کل نیروهای خارجی. به این ترتیب، در مورد جسمی مقید به چرخش حول محوری ثابت، که در اینجا آن را z اختیار می‌کنیم، داریم

$$N_z = \frac{dL_z}{dt} = \frac{d(I_z\omega)}{dt} \qquad (۸.۲.۸)$$

که N_z گشتاور کل نیروهای واردشده حول محور چرخش (مؤلفهٔ $\mathbf{N}$ در امتداد محور z) است. اگر جسم صلب باشد، پس I_z ثابت است و می‌توانیم بنویسیم

$$N_z = I_z \frac{d\omega}{dt} \qquad (۹.۲.۸)$$

نشانهٔ بین معادلات حرکت انتقالی و معادلات حرکت چرخشی را حول محور ثابت در جدول زیر درج کرده‌ایم:

انتقال در امتداد محور x		چرخش حول محور z
تکانهٔ خطی	$p_x = mv_x$	تکانهٔ زاویه‌ای $L_z = I_z\omega$
نیرو	$F_x = m\dot{v}_x$	گشتاور $N_z = I_z\dot{\omega}$
انرژی جنبشی	$T = \frac{1}{2}mv^2$	انرژی جنبشی $T_{rot} = \frac{1}{2}I_z\omega^2$

به این ترتیب، گشتاور لختی مشابه جرم است؛ گشتاور لختی عبارت است از معیار لختی چرخشی جسم نسبت به یک محور ثابت، درست به همان ترتیب که جرم معیار لختی انتقالی جسم است.

۳.۸ محاسبهٔ گشتاور لختی

در محاسبات عملی گشتاور لختی، $\sum m_i r_i^2$، اجسام گسترده می‌توانیم مجموعیابی را به انتگرال‌گیری در جسم تبدیل کنیم، درست به همان ترتیب که در محاسبهٔ مرکز جرم انجام دادیم. به‌این ترتیب، برای هر محور داریم

$$I = \int r^2 dm \qquad (۱.۳.۸)$$

که dm عنصر جرم است که از حاصلضرب عامل چگالی در عنصر دیفرانسیلی مناسب (حجم، سطح، یا طول) به‌دست می‌آید و r فاصلهٔ عمودی بین عنصر جرم و محور چرخش است.[۱]

۱. در فصل ۹، که در خصوص حرکت چرخشی سه‌بعدی اجسام بحث می‌کنیم، فاصلهٔ بین عنصر جرمی dm و محور چرخش را با r_i نمایش می‌دهیم تا به ما یادآور شود که فاصلهٔ مربوطه، فاصلهٔ عمودی تا محور چرخش است.

در مورد جسم مرکب، بنابر تعریف گشتاور لختی، می‌توان نوشت:

$$I = I_۱ + I_۲ + \dots \qquad (۲.۳.۸)$$

که $I_۱$، $I_۲$، و . . . گشتاورهای لختی اجزاء مختلف جسم حول محور خاص انتخاب‌شده به‌شمار می‌آیند. گشتاورهای لختی را در برخی حالتهای مهم خاص محاسبه می‌کنیم.

میلهٔ نازک

میله‌ای نازک و یکنواخت به طول a و جرم m را در نظر می‌گیریم، گشتاور لختی این میله حول محوری واقع در یک سر آن و عمود بر میله (شکل ۱.۳.۸ الف) عبارت است از

$$I_z = \int_۰^a x^۲ \rho dx = \frac{۱}{۳}\rho a^۳ = \frac{۱}{۳} m a^۲ \qquad (۳.۳.۸)$$

جملهٔ آخر از رابطهٔ $m = \rho a$ نتیجه می‌شود.

اگر محور در مرکز میله اختیار شود (شکل ۱.۳.۸ ب)، داریم

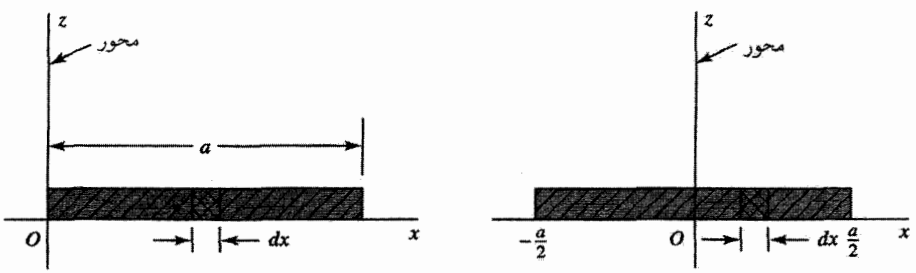
$$I_z = \int_{-a/۲}^{a/۲} x^۲ \rho dx = \frac{۱}{۱۲}\rho a^۳ = \frac{۱}{۱۲} m a^۲ \qquad (۴.۳.۸)$$

حلقه یا پوستهٔ استوانه‌ای

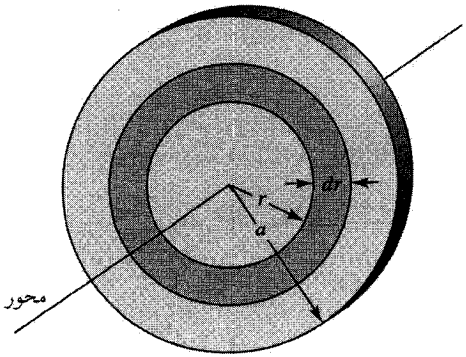
در حالت حلقهٔ دایره‌ای نازک یا پوستهٔ استوانه‌ای، تمام ذرات نسبت به محور مرکزی یا محور تقارن به یک فاصله قرار دارند. بنابراین،

$$I_{\text{محور}} = m a^۲ \qquad (۵.۳.۸)$$

که a شعاع حلقهٔ دایره‌ای یا پوستهٔ استوانه‌ای و m جرم آنهاست.



شکل ۱.۳.۸ مختصات مربوط به محاسبهٔ گشتاور لختی میله (الف) حول یک سر خودش؛ و (ب) حول مرکز میله.



شکل ۲.۳.۸ مختصات مربوط به یافتن گشتاور لختی قرص دایره‌ای.

قرص دایره‌ای یا استوانه‌ای

برای محاسبهٔ گشتاور لختی قرص دایره‌ای یکنواختی به شعاع a و جرم m، از مختصات قطبی بهره می‌گیریم. عنصر جرم را حلقهٔ نازکی به شعاع r و ضخامت dr می‌گیریم، بنابراین

$$dm = \rho ۲\pi r dr \qquad (۶.۳.۸)$$

که ρ جرم واحد مساحت است. گشتاور لختی حول محوری که از مرکز قرص و عمود بر آن می‌گذرد (شکل ۲.۳.۸)، عبارت است از

$$I_{\text{محور}} = \int_{۰}^{a} r^{۲}\rho ۲\pi r dr = ۲\pi\rho\frac{a^{۴}}{۴} = \frac{۱}{۲}ma^{۲} \qquad (۷.۳.۸)$$

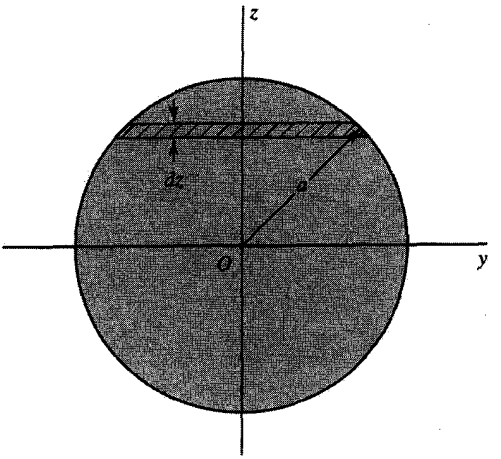
جملهٔ آخر از رابطهٔ $m = \rho\pi a^{۲}$ نتیجه شده است.

معادلهٔ (۷.۳.۸) در مورد استوانهٔ قائم یکنواختی به شعاع a و جرم m که محور چرخش آن همان محور مرکزی استوانه باشد، نیز به‌کار می‌آید.

کره

گشتاور لختی کرهٔ توپر یکنواختی به شعاع a و جرم m را حول محوری که از مرکزش می‌گذرد (محور z) محاسبه می‌کنیم. کره را، مطابق شکل ۳.۳.۸، به قرصهای دایره‌ای باریک تقسیم می‌کنیم. گشتاور لختی یکی از قرصهای دایره‌ای به شعاع y، بنابر معادلهٔ (۳.۳.۸)، عبارت است از $\frac{۱}{۲}y^{۲}dm$. اما $dm = \rho\pi y^{۲}dz$؛ از این‌رو،

$$I_z = \int_{-a}^{a}\frac{۱}{۲}\pi\rho y^{۴}dz = \int_{-a}^{a}\frac{۱}{۲}\pi\rho(a^{۲}-z^{۲})^{۲}dz = \frac{۸}{۱۵}\pi\rho a^{۵} \qquad (۸.۳.۸)$$



شکل ۳.۳.۸ مختصات مربوط به یافتن گشتاور لختی کره.

جملهٔ آخر در معادلهٔ (۸.۳.۸) را خواننده خود محاسبه کند. چون جرم از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$m = \frac{۴}{۳}\pi a^۳ \rho \qquad (۹.۳.۸)$$

گشتاور لختی کرهٔ یکنواخت توپر عبارت است از

$$I_z = \frac{۲}{۵} m a^۲ \qquad (۱۰.۳.۸)$$

همچنین واضح است که $I_x = I_y = I_z$.

پوستهٔ کروی

گشتاور لختی پوستهٔ نازک کروی یکنواختی را می‌توان، با بهره‌گیری از معادلهٔ (۸.۳.۸)، به آسانی پیدا کرد. اگر از آن معادله نسبت به a دیفرانسیل بگیریم، یعنی،

$$dI_z = \frac{۸}{۳}\pi \rho a^۴ da \qquad (۱۱.۳.۸)$$

نتیجه عبارت خواهد بود از گشتاور لختی پوستهٔ کروی به ضخامت da و شعاع a. جرم پوستهٔ $۴\pi a^۲ \rho da$ است. از این‌رو، می‌توانیم بنویسیم:

$$I_z = \frac{۲}{۳} m a^۲ \qquad (۱۲.۳.۸)$$

که گشتاور لختی پوستهٔ نازک کروی به شعاع a و جرم m است. خواننده باید درستی نتیجهٔ بالا را از طریق انتگرال‌گیری مستقیم تحقیق کند.

مثال ۱.۳.۸

در شکل ۴.۳.۸ زنجیری یکنواخت به طول $l = ۲\pi R$ و جرم $m = M/۲$ را مشاهده می‌کنید که در ابتدا دور یک قرص دایره‌ای نازک به شعاع R و جرم M پیچیده شده است. یک تکهٔ نازک این زنجیر، ابتدا به‌طور آزاد عمود بر محور افقی آویزان است. وقتی قرص رها می‌شود، زنجیر سقوط می‌کند و گشوده می‌شود. قرص حول محور ثابتش، z بدون اصطکاک هر چه سریعتر شروع به چرخش می‌کند. (الف) سرعت زاویه‌ای قرص را در لحظه‌ای بیابید که زنجیر به‌طور کامل باز شده است؛ (ب) این مسئله را برای حالتی حل کنید که زنجیر دور چرخی پیچیده شده که جرمش با جرم قرص یکسان ولی بر لبهٔ نازک چرخ متمرکز شده است.

حل:

(الف) شکل ۴.۳.۸ قرص و زنجیر را در لحظه‌ای نشان می‌دهد که زنجیر باز شده است. سرعت زاویه‌ای نهایی قرص ω است. همچنان که زنجیر باز می‌شود، انرژی پایسته باقی می‌ماند. چون مرکز جرم زنجیر اصولاً بر مرکز جرم قرص منطبق است، زنجیر فاصلهٔ $l/۲ = \pi R$ را سقوط می‌کند. داریم:

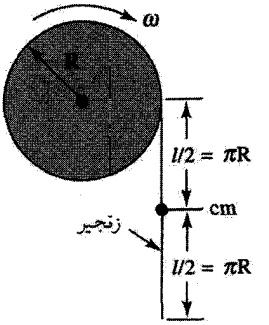
$$mg\frac{l}{۲} = \frac{۱}{۲}I\omega^۲ + \frac{۱}{۲}mv^۲$$
$$\frac{l}{۲} = \pi R \qquad v = \omega R \qquad I = \frac{۱}{۲}MR^۲$$

با حل‌کردن آنها و به‌دست‌آوردن $\omega^۲$، می‌رسیم به

$$\omega^۲ = \frac{mg(l/۲)}{\left[\left(\frac{۱}{۲}\right)(M/۲) + \left(\frac{۱}{۲}\right)(m)\right]R^۲} = \frac{mg\pi R}{\left[\left(\frac{۱}{۲}\right)m + \left(\frac{۱}{۲}\right)m\right]R^۲}$$
$$= \pi\frac{g}{R}$$

(ب) گشتاور لختی چرخ عبارت است از $I = MR^۲$. با جاگذاری آن در معادلهٔ قبلی می‌رسیم به:

$$\omega^۲ = \pi\frac{۲g}{۳R}$$



شکل ۴.۳.۸ زنجیر افتان متصل به قرصی که آزاد است حول محور z بچرخد.

حتی اگر جرم چرخ با جرم قرص یکسان باشد، گشتاور لختی آن بزرگتر است، چون تمام جرم چرخ در طول لبهٔ آن متمرکز شده است. بنابراین، شتاب زاویه‌ای و سرعت زاویه‌ای نهاییش کمتر از مقادیر مربوط به قرص است.

قضیهٔ محورهای متعامد مربوط به پوستهٔ تخت

جسم صلبی را به‌صورت پوستهٔ نازک تخت و با شکل دلخواه در نظر بگیرید. این پوسته را در صفحهٔ xy قرار می‌دهیم (شکل ۵.۳.۸). گشتاور لختی حول محور z از این رابطه به‌دست می‌آید:

$$I_z = \sum_i m_i(x_i^2 + y_i^2) = \sum_i m_i x_i^2 + \sum_i m_i y_i^2 \qquad (۱۳.۳.۸)$$

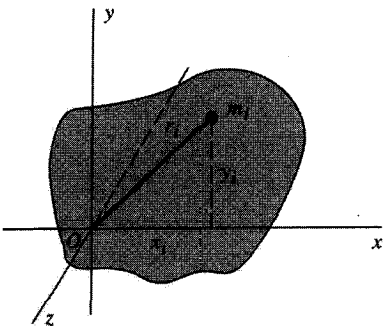
اما مجموع $\sum_i m_i x_i^2$ دقیقاً همان گشتاور لختی I_y، حول محور y است، زیرا z_i برای تمام ذرات صفر است. به همین ترتیب، $\sum_i m_i y_i^2$ گشتاور لختی، I_x، حول محور x است. بنابراین، معادلهٔ بالا را می‌توان از این قرار نوشت:

$$I_z = I_x + I_y \qquad (۱۴.۳.۸)$$

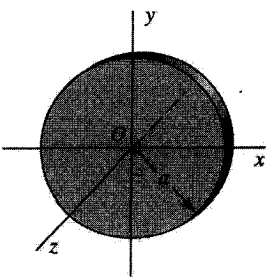
این عبارت، قضیهٔ محورهای متعامد را بیان می‌کند. به بیانی دیگر:

گشتاور لختی هر پوستهٔ تخت حول محوری عمود بر صفحهٔ پوسته برابر است با مجموع گشتاورهای لختی حول هر دو محور متقابلاً عمودی که از محور مفروض بگذرند و در صفحهٔ پوسته واقع باشند.

در مثالی از کاربرد این قضیه، قرص دایره‌ای نازکی در صفحهٔ xy (شکل ۶.۳.۸) را در نظر



شکل ۵.۳.۸ قضیهٔ محورهای متعامد برای پوستهٔ تخت.



شکل ۶.۳.۸ قرص دایره‌ای.

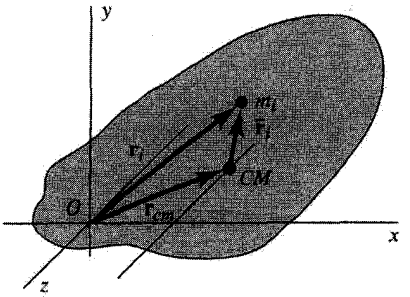
می‌گیریم. از معادلهٔ (۷.۳.۸)، داریم،

$$I_z = \frac{1}{2}ma^2 = I_x + I_y \qquad (۱۵.۳.۸)$$

اما در اینجا، از تقارن شکل نتیجه می‌گیریم که $I_x = I_y$. از این‌رو، باید داشته باشیم:

$$I_x = I_y = \frac{1}{4}ma^2 \qquad (۱۶.۳.۸)$$

برای گشتاور لختی حول هر محوری در صفحهٔ قرص که از مرکزش می‌گذرد. نتیجهٔ بالا را می‌توان به کمک انتگرال‌گیری مستقیم به‌دست آورد.



شکل ۷.۳.۸ قضیهٔ محورهای موازی برای جسم صلب.

قضیهٔ محورهای موازی مربوط به جسم صلب

معادلهٔ گشتاور لختی حول محوری، مثلاً محور z، را در نظر بگیرید،

$$I_z = \sum_i m_i(x_i^2 + y_i^2) \qquad (۱۷.۳.۸)$$

حالا می‌توانیم x_i و y_i را برحسب مختصات مرکز جرم $(x_{cm},\ y_{cm},\ z_{cm})$ و مختصات نسبت به مرکز جرم $(\bar{x}_i,\ \bar{y}_i,\ \bar{z}_i)$ (شکل ۷.۳.۸) به‌صورت زیر بیان کنیم:

$$x_i = x_{cm} + \bar{x}_i \qquad y_i = y_{cm} + \bar{y}_i \qquad (۱۸.۳.۸)$$

بنابراین، بعد از جایگذاری جملات و جمع‌کردن آنها،

$$I_z = \sum_i m_i(\bar{x}_i^2 + \bar{y}_i^2) + \sum_i m_i(x_{cm}^2 + y_{cm}^2) + 2x_{cm}\sum_i m_i\bar{x}_i + 2y_{cm}\sum_i m_i\bar{y}_i \qquad (۱۹.۳.۸)$$

نخستین جمع در سمت راست گشتاور لختی حول محوری است موازی با محور z که از مرکز جرم عبور می‌کند. این گشتاور لختی را I_{cm} می‌نامیم. جملهٔ دوم به‌وضوح مساوی جرم جسم ضربدر مجذور فاصلهٔ بین مرکز جرم و محور z است. این فاصله را l می‌نامیم؛ یعنی، $l^2 = x_{cm}^2 + y_{cm}^2$.

حال، بنابر تعریف مرکز جرم داریم،

$$\sum_i m_i\bar{x}_i = \sum_i m_i\bar{y}_i = 0 \qquad (۲۰.۳.۸)$$

به این ترتیب، دو جمع آخر سمت راست معادلهٔ (۱۹.۳.۸)، صفر می‌شوند. نتیجهٔ نهایی برای هر محور به‌صورت کلی زیر نوشته می‌شود

$$I = I_{cm} + ml^2 \qquad (۲۱.۳.۸)$$

این عبارت را قضیهٔ محورهای موازی می‌گویند. این قضیه را در مورد هر جسم صلب، چه جامد و چه پوسته‌ای، می‌توان به‌کار برد.

این قضیه، عملاً بیان می‌دارد که:

گشتاور لختی هر جسم صلب حول هر محور برابر است با گشتاور لختی حول محوری که از مرکز جرم می‌گذرد به اضافهٔ حاصلضرب جرم جسم در مجذور فاصلهٔ بین این دو محور.

می‌توانیم قضیهٔ محورهای موازی را برای محاسبهٔ گشتاور لختی یک قرص یکنواخت دایره‌ای حول محوری عمود بر صفحه‌اش که از لبهٔ آن می‌گذرد، (شکل ۸.۳.۸ الف) به‌کار بریم. با بهره‌گیری از معادلات (۷.۳.۸) و (۲۱.۳.۸) می‌رسیم به

$$I = \frac{۱}{۲}ma^۲ + ma^۲ = \frac{۳}{۲}ma^۲ \qquad (۲۲.۳.۸)$$

همچنین می‌توانیم قضیهٔ محورهای موازی را برای محاسبهٔ گشتاور لختی قرص حول محوری که در صفحه‌اش قرار دارد و بر لبهٔ آن مماس است (شکل ۸.۳.۸ ب)، به کار بریم. می‌رسیم به

$$I = \frac{۱}{۴}ma^۲ + ma^۲ = \frac{۵}{۴}ma^۲ \qquad (۲۳.۳.۸)$$

در مثال دوم، گشتاور لختی استوانهٔ دایره‌ای یکنواختی را به طول b و شعاع a، حول محوری که از مرکز آن می‌گذرد و بر محور مرکزیش عمود باشد، یعنی I_x یا I_y در شکل ۹.۳.۸، به‌دست می‌آوریم. عنصر انتگرال‌گیری را قرصی دایره‌ای به ضخامت dz اختیار می‌کنیم که در فاصلهٔ z از صفحهٔ xy قرار داشته باشد. در این صورت، از نتیجهٔ قبلی مربوط به قرص دایره‌ای نازک (معادلهٔ ۱۶.۳.۸)، همراه با قضیهٔ محورهای موازی داریم

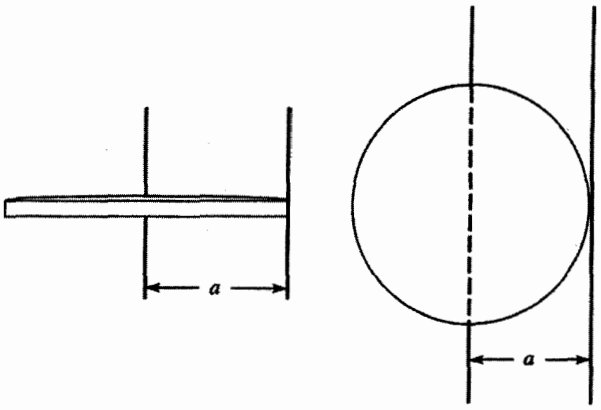
$$dI_x = \frac{۱}{۴}a^۲dm + z^۲dm \qquad (۲۴.۳.۸)$$

که در آن $dm = \rho\pi a^۲dz$. به این ترتیب،

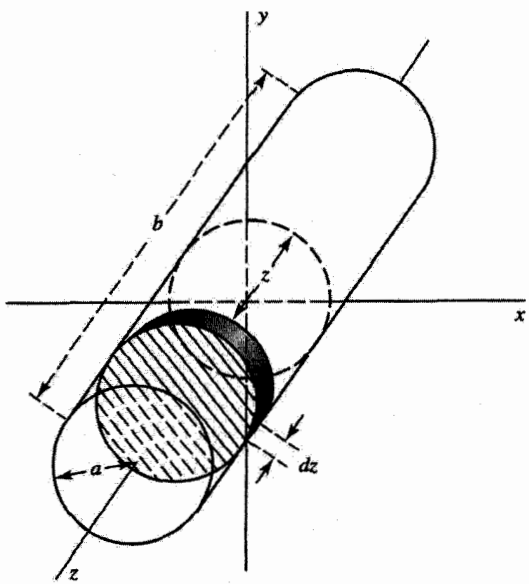
$$I_x = \rho\pi a^۲\int_{-b/۲}^{+b/۲}\left(\frac{۱}{۴}a^۲ + z^۲\right)dz = \rho\pi a^۲\left(\frac{۱}{۴}a^۲b + \frac{۱}{۱۲}b^۳\right) \qquad (۲۵.۳.۸)$$

اما جرم استوانه عبارت است از $m = \rho\pi a^۲b$، و بنابراین،

$$I_x = I_y = m\left(\frac{۱}{۴}a^۲ + \frac{۱}{۱۲}b^۲\right) \qquad (۲۶.۳.۸)$$



شکل ۸.۳.۸ گشتاور لختی قرص نازک یکنواخت حول محور. (الف) عمود بر صفحهٔ قرص و گذرنده از لبهٔ آن و (ب) در صفحهٔ قرص و مماس بر لبهٔ آن.



شکل ۹.۳.۸ مختصات مربوط به یافتن گشتاور لختی استوانه‌ای دایره‌ای.

شعاع چرخش (ژیراسیون)

به شباهت معادلهٔ (۵.۲.۸)، عبارت مربوط به گشتاور لختی I_z جسم صلب حول محور z، با رابطهٔ مرکز جرم که در بخش ۱.۸ مطرح شد، توجه کنید. اگر قرار بود معادلهٔ (۵.۲.۸) را بر جرم کل جسم صلب تقسیم کنیم، میانگین وزنی-جرمی مجذور مکانهای تمام عناصر جرمی دور از محور z را به‌دست می‌آوردیم. به این ترتیب، علی‌الاصول، گشتاور لختی میانگین مربعات فواصل شعاعی دور از محور z تمام عناصر جرمی است که جسم صلب را تشکیل می‌دهند. از دیدگاه فیزیکی می‌توانید درک کنید که چرا گشتاور لختی باید به مربع (یا، دست‌کم، توان زوج) فواصل دور از محور چرخش بستگی داشته باشد و نمی‌تواند با میانگین خطی روی تمام عناصر جرمی (یا هر میانگین توان فرد فاصله) نمایش داده شود. در این صورت، آنگاه جسمی که جرمش به‌طور متقارن حول محور چرخش آن توزیع شده بود، مانند چرخ دوچرخه، به علت حذف جملات مثبت و منفی عناصر وزنی-جرمی در توزیع متقارن، می‌بایست گشتاور لختی صفر می‌داشت. واردآمدن کمترین گشتاور نیرو بر چرخ دوچرخه چرخش این چرخ را به پیچ و تاب لحظه‌ای تبدیل خواهد کرد، که حالتی است که هر دوچرخه‌سوار می‌داند ناممکن است.

اگر فاصلهٔ k، به نام شعاع چرخش (یا ژیراسیون)، را میانگینی به‌صورت زیر تعریف کنیم، این بحث را می‌توانیم در قالب فرمول بنویسیم:

$$k^2 = \frac{I}{m} \qquad k = \sqrt{\frac{I}{m}} \tag{۲۷.۳.۸}$$

معلوم‌بودن شعاع چرخش هر جسم صلب معادل است با معلوم‌بودن گشتاور لختی آن، اما شعاع ژیراسیون ماهیت فرایند میانگین‌گیری را که مفهوم گشتاور لختی بر آن پایه‌گذاری می‌شود، بهتر مشخص می‌کند.

مثلاً، برای شعاع چرخش یک میلهٔ نازک حول محوری که از یک سرش بگذرد (معادلهٔ ۳.۳.۸) داریم

$$k = \sqrt{\frac{\left(\frac{1}{3}\right) ma^2}{m}} = \frac{a}{\sqrt{3}} \tag{۲۸.۳.۸}$$

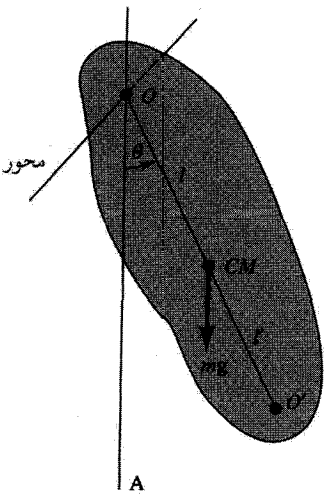
گشتاور لختی برای اشیاء مختلف را می‌توان صرفاً با فهرست‌کردن مجذور شعاع چرخش آنها، به‌صورت جدول درج کرد (جدول ۱.۳.۸).

جدول ۱.۳.۸ مقادیر k^2 در اجسام گوناگون ($k^2 \times$ جرم = گشتاور لختی)

جسم	محور	k^2
میلهٔ نازک، به طول a	عمود بر میله در مرکز آن	$\frac{a^2}{12}$
	عمود بر میله در یک سر آن	$\frac{a^2}{3}$
پوستهٔ مستطیلی شکل نازک، به اضلاع a و b	گذرا از مرکز و موازی با ضلع b	$\frac{a^2}{12}$
	گذرا از مرکز و عمود بر پوسته	$\frac{a^2+b^2}{12}$
قرص دایره‌ای نازک، به شعاع a	گذرا از مرکز، واقع بر صفحهٔ قرص دایره‌ای	$\frac{a^2}{4}$
	گذرا از مرکز، عمود بر صفحهٔ دایره‌ای	$\frac{a^2}{2}$
تسمهٔ (یا حلقهٔ) نازک، به شعاع a	گذرا از مرکز، واقع بر صفحهٔ حلقه	$\frac{a^2}{2}$
	گذرا از مرکز، عمود بر سطح حلقه	a^2
پوستهٔ استوانه‌ای نازک، به شعاع a و طول b	گذرا از مرکز استوانه، واقع در امتداد محور استوانه	a^2
استوانه دایره‌ای قائم توپر یکنواخت، به شعاع a و طول b	گذرا از مرکز استوانه، واقع بر امتداد محور استوانه	$\frac{a^2}{2}$
	گذرا از مرکز استوانه، عمود بر محور طولی استوانه	$\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{12}$
پوستهٔ کروی نازک، به شعاع a	هر کدام از قطرها	$\frac{2}{3}a^2$
کرهٔ توپر یکنواخت، به شعاع a	هر کدام از قطرها	$\frac{2}{5}a^2$
مکعب مستطیلی توپر یکنواخت، به اضلاع a، b، و c	گذرا از مرکز، عمود بر وجه ab، و موازی با لبهٔ c	$\frac{a^2+b^2}{12}$

۴.۸ آونگ فیزیکی

هر جسم صلبی را که تحت‌تأثیر وزن خودش حول یک محور چرخش افقی ثابت نوسان آزاد اجرا می‌کند، آونگ فیزیکی یا آونگ مرکب می‌گویند. آونگ فیزیکی را در شکل ۱.۴.۸ مشاهده



شکل ۱.۴.۸ آونگ فیزیکی.

می‌کنید. در این شکل CM مرکز جرم، و O نقطه‌ای روی محور چرخش است، که این محور در صفحهٔ قائم مسیر دایره‌ای مرکز جرم واقع است.

اگر زاویهٔ بین خط OCM و خط قائم OA را با θ نشان دهیم، بزرگی گشتاور نیروی گرانشی (وارد بر CM) حول محور چرخش عبارت است از

$$mgl\sin\theta$$

معادلهٔ بنیادی حرکت، $N = I\dot{\omega}$، به‌صورت $-mgl\sin\theta = I\ddot{\theta}$ یا به‌صورت زیر در می‌آید:

$$\ddot{\theta} + \frac{mgl}{I}\sin\theta = ۰ \qquad (۱.۴.۸)$$

معادلهٔ (۱.۴.۸) با معادلهٔ حرکت آونگ ساده یکسان است. به ازای نوسانهای کم‌دامنه، به همان ترتیبی که در مورد آونگ ساده عمل شد، می‌توانیم θ را به جای $\sin\theta$ قرار دهیم:

$$\ddot{\theta} + \frac{mgl}{I}\theta = ۰ \qquad (۲.۴.۸)$$

جواب این معادله، به اعتبار مطالب فصل ۳، به‌صورت زیر نوشته می‌شود

$$\theta = \theta_۰\cos(۲\pi f_۰ t - \delta) \qquad (۳.۴.۸)$$

که θ_0 دامنه و δ زاویهٔ فاز است. بسامد نوسان به این قرار بیان می‌شود:

$$f_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{mgl}{I}} \qquad (۴.۴.۸)$$

بنابراین، دورهٔ تناوب عبارت است از

$$T_0 = \frac{1}{f_0} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgl}} \qquad (۵.۴.۸)$$

(برای احتراز از اشتباه، از بسامد f_0 به جای بسامد زاویه‌ای ω_0 برای مشخص‌کردن نوسان آونگ بهره برده‌ایم.) همچنین، زمان تناوب را می‌توان برحسب شعاع چرخش، k، بیان کرد؛ یعنی،

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{k^2}{gl}} \qquad (۶.۴.۸)$$

به این ترتیب، این دورهٔ تناوب با دورهٔ تناوب آونگ ساده‌ای به طول k^2/l یکی است.

مثلاً، میلهٔ یکنواخت نازکی به طول a را در نظر بگیرید که به‌صورت آونگی فیزیکی حول یک انتهایش می‌چرخد: $k^2 = a^2/3$، $l = a/2$. در این صورت، دورهٔ تناوب آونگ یادشده عبارت است از

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{a^2/3}{ga/2}} = 2\pi\sqrt{\frac{2a}{3g}} \qquad (۷.۴.۸)$$

که با دورهٔ تناوب آونگ ساده‌ای به طول $\frac{2}{3}a$، یکی است.

مرکز نوسان

با استفاده از قضیهٔ محورهای موازی می‌توان شعاع چرخش، k، را برحسب شعاع چرخش حول مرکز جرم، k_{cm}، از این قرار به‌دست آورد:

$$I = I_{cm} + ml^2 \qquad (۸.۴.۸)$$

یا

$$mk^2 = mk_{cm}^2 + ml^2 \qquad (۹.۴.۸ \text{ الف})$$

که با حذف m، می‌رسیم به:

$$k^2 = k_{cm}^2 + l^2 \qquad (۹.۴.۸ \text{ ب})$$

بنابراین، معادلهٔ (۶.۴.۸) را می‌توان از این قرار نوشت:

$$T_{\circ} = ۲\pi\sqrt{\frac{k_{cm}^{۲} + l^{۲}}{gl}} \qquad (۱۰.۴.۸)$$

فرض کنید، مطابق شکل ۱.۴.۸، محور چرخش آونگ فیزیکی به مکان دیگری، O'، به فاصلهٔ l' از مرکز جرم انتقال یابد. دورهٔ تناوب نوسان، $T'_{\circ}$، حول محور جدید از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$T'_{\circ} = ۲\pi\sqrt{\frac{k_{cm}^{۲} + l'^{۲}}{gl'}} \qquad (۱۱.۴.۸)$$

دوره‌های تناوب نوسان حول O و O' در صورتی برابرند که

$$\frac{k_{cm}^{۲} + l^{۲}}{l} = \frac{k_{cm}^{۲} + l'^{۲}}{l'} \qquad (۱۲.۴.۸)$$

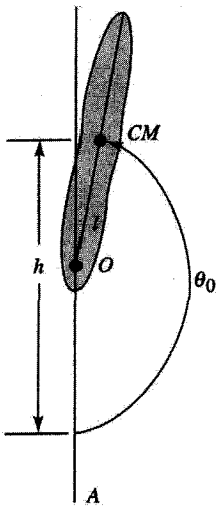
این معادله به آسانی تبدیل می‌شود به:

$$ll' = k_{cm}^{۲} \qquad (۱۳.۴.۸)$$

نقطهٔ O'، که معادلهٔ (۱۳.۴.۸) بین آن و نقطهٔ O رابطه برقرار می‌کند، مرکز نوسان نقطهٔ O نامیده می‌شود. O نیز مرکز نوسان O' است. بنابراین، برای میله‌ای به طول a که حول یک انتهایش نوسان می‌کند، داریم: $k_{cm}^{۲} = a^{۲}/۱۲$ و $l = a/۲$. بنابراین، از معادلهٔ (۱۳.۴.۸) می‌رسیم به $l' = a/۶$، و از این‌رو وقتی میله‌ای حول محوری نوسان می‌کند که در فاصلهٔ $a/۶$ از مرکزش واقع است، دورهٔ تناوبش با دورهٔ تناوب نوسان این میله حول محوری که از یک سرش می‌گذرد، یکی است.

«آونگ وارونه»: انتگرالهای بیضوی

وقتی دامنهٔ نوسان آونگ چندان زیاد باشد که تقریب $\sin\theta = \theta$ دیگر صادق نباشد، فرمول دورهٔ تناوب (معادلهٔ ۵.۴.۸) هم دیگر برقرار نیست. در مثال ۱.۷.۳، با بهره‌گیری از روش تقریبهای متوالی فرمول بهبودیافته‌ای را برای دورهٔ تناوب آونگ ساده به‌دست آوردیم. این نتیجه‌گیری در مورد آونگ فیزیکی نیز در صورتی صادق است، که I/ml را به جای l قرار دهیم؛ اما باز هم تقریبی است و وقتی دامنه به ۱۸۰° نزدیک می‌شود (وضعیت قائم) (شکل ۲.۴.۸)، نتیجه‌ای کاملاً غلط خواهد بود.



شکل ۲.۴.۸ آونگ سربالا.

برای یافتن دورهٔ تناوب نوسان بزرگ دامنه، بررسی خود را با معادلهٔ انرژی آونگ فیزیکی آغاز می‌کنیم:

$$\frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 + mgh = E \qquad (۱۴.۴.۸)$$

h فاصلهٔ عمودی مرکز جرم از وضعیت تقارن آن، یعنی $h = l(1 - \cos\theta)$، است. دامنهٔ نوسان آونگ را با θ_0 نشان می‌دهیم. در این صورت، هرگاه $\theta = \theta_0$ آنگاه $\dot{\theta} = 0$، از این‌رو، $E = mgl(1 - \cos\theta_0)$. بنابراین، معادلهٔ انرژی را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$\frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 + mgl(1 - \cos\theta) = mgl(1 - \cos\theta_0) \qquad (۱۵.۴.۸)$$

با حل این معادله، $\dot{\theta}$ به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\frac{d\theta}{dt} = \pm\left[\frac{2mgl}{I}(\cos\theta - \cos\theta_0)\right]^{1/2} \qquad (۱۶.۴.۸)$$

بنابراین، با انتخاب ریشهٔ مثبت، می‌توان نوشت:

$$t = \sqrt{\frac{I}{2mgl}}\int_0^{\theta}\frac{d\theta}{(\cos\theta - \cos\theta_0)^{1/2}} \qquad (۱۷.۴.۸)$$

که علی‌الاصول، از آنجا می‌توانیم t را به‌صورت تابعی از θ بیابیم. نیز، به این نکته توجه می‌کنیم که θ در یک ربع چرخهٔ کامل از ۰ تا θ_0 افزایش پیدا می‌کند. از این‌رو، دورهٔ تناوب T را می‌توان به این قرار بیان کرد:

$$T = ۴\sqrt{\frac{I}{۲mgl}} \int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{(\cos\theta - \cos\theta_0)^{۱/۲}} \quad . \qquad (۱۸.۴.۸)$$

متأسفانه، انتگرالهای معادلات (۱۷.۴.۸) و (۱۸.۴.۸) را نمی‌توان به کمک توابع مقدماتی محاسبه کرد. ولی، آنها را می‌توان برحسب توابع خاص، به نام انتگرالهای بیضوی بیان کرد. به این منظور، بهتر است متغیر جدید انتگرال‌گیری، ϕ، را که به طریق زیر تعریف می‌شود، معرفی کنیم:

$$\sin\phi = \frac{\sin(\theta/۲)}{\sin(\theta_0/۲)} = \frac{۱}{k}\sin\left(\frac{\theta}{۲}\right) \qquad (۱۹.۴.۸)$$

که در آن[۱]

$$k = \sin\left(\frac{\theta_0}{۲}\right)$$

به این ترتیب، به ازای $\theta = \theta_0$، داریم $\sin\phi = ۱$، و از این‌رو $\phi = \pi/۲$. با نشاندن مقادیر بالا در معادلات (۱۷.۴.۸) و (۱۸.۴.۸)، می‌رسیم به:

$$t = \sqrt{\frac{I}{mgl}} \int_0^{\phi} \frac{d\phi}{(۱ - k^۲\sin^۲\phi)^{۱/۲}} \qquad (۲۰.۴.۸ \text{ الف})$$

$$T = ۴\sqrt{\frac{I}{mgl}} \int_0^{\pi/۲} \frac{d\phi}{(۱ - k^۲\sin^۲\phi)^{۱/۲}} \qquad (۲۰.۴.۸ \text{ ب})$$

برای تمرین، عملیات جبری مربوط به عبارتهای بالا را با بهره‌گیری از اتحاد $\cos\theta = ۱ - ۲\sin^۲\left(\frac{\theta}{۲}\right)$ انجام دهید.

مقدار انتگرالهای موجود در روابط بالا در جدولهایی درج شده‌اند که آنها را می‌توان در کتابهای مرجع و جدولهای ریاضی گوناگون یافت. انتگرال اول، یعنی

$$\int_0^{\phi} \frac{d\phi}{(۱ - k^۲\sin^۲\phi)^{۱/۲}} = F(k,\phi) \qquad (۲۱.۴.۸)$$

---

۱. توجه کنید که k مطابق تعریفی که در اینجا از آن شده پارامتری است که انتگرالهای بیضوی را مشخص می‌کند. این کمیت همان k نیست که قبلاً به‌صورت شعاع چرخش (ژیراسیون) از آن یاد کردیم.

را انتگرال بیضوی ناکامل از نوع اول می‌نامند. در مسئلهٔ مورد نظر ما، یعنی آونگ وارونه، با معلوم‌بودن مقدار دامنهٔ θ_0، از طریق یک رشته عملیات شامل تعریفهای k و ϕ، می‌توانیم رابطه‌ای بین θ و t به‌دست آوریم. ما بیشتر به یافتن زمان تناوب آونگ علاقه‌مندیم، که انتگرال دوم، یعنی

$$\int_0^{\pi/2} \frac{d\phi}{(1-k^2\sin^2\phi)^{1/2}} = F\left(k, \frac{\pi}{2}\right) \qquad (۲۲.۴.۸)$$

را در بر دارد و این انتگرال را انتگرال بیضوی کامل از نوع اول می‌گویند. (در بسیاری از جدولها، این انتگرال را به‌صورت $K(k)$ یا $F(k)$ نیز فهرست کرده‌اند.) برحسب این انتگرال، زمان تناوب عبارت است از

$$T = 4\sqrt{\frac{I}{mgl}}F\left(k, \frac{\pi}{2}\right) \qquad (۲۳.۴.۸)$$

مقادیر برگزیدهٔ $F(k, \pi/2)$ در جدول ۱.۴.۸ درج شده‌اند. همچنین، دورهٔ تناوب T به‌صورت حاصلضرب یک عامل‌ضرب در زمان تناوب برای حرکت با دامنهٔ صفر، $T_0 = 2\pi(I/mgl)^{1/2}$، در این جدول درج شده است.

با نظری سطحی به این جدول معلوم می‌شود که وقتی دامنه به 180° نزدیک می‌شود، انتگرال بیضوی واگرا، و زمان تناوب بینهایت می‌شود. به تعبیر نظری، معنی این حرف آن است که آونگ فیزیکی، مانند میلهٔ صلب، اگر به‌طور دقیق در مکان قائم و با سرعت زاویه‌ای اولیهٔ مطلقاً صفر قرار داده شود، باید به‌طور نامحدودی در همان مکان ناپایدار باقی بماند.

مثال ۱.۴.۸

آونگی فیزیکی، مطابق شکل ۱.۴.۸، به‌طور قائم در حال سکون آویخته است. ضربه‌ای ناگهانی چنان بر آن وارد می‌آید که بعد از واردآمدن ضربه، انرژی کل آن عبارت خواهد بود از $E = 2mgl$، که m جرم آونگ و l فاصلهٔ نقطهٔ آویز تا مرکز جرم آن است. (الف) زاویهٔ انحراف از حالت قائم، θ، را به‌صورت تابعی از زمان محاسبه کنید. (ب) آیا آونگ به پیکربندی «وارونه»، $\theta = \pi$، می‌رسد؟ در این صورت، نتیجه‌ای که از بند (الف) به‌دست آورده‌اید، برای محاسبهٔ مدت‌زمان دوام این حرکت به‌کار برید.

حل:

(الف) با نوشتن انرژی کل آونگ به‌صورت معادلهٔ (۱۵.۴.۸)، محاسبات خود را شروع می‌کنیم

$$\frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 + mgl(1-\cos\theta) = 2mgl$$

جدول ۱.۴.۸ مقادیر برگزیدهٔ انتگرال بیضوی کامل و زمان تناوب نوسان متناظر با آونگ فیزیکی[۱]

دامنه، θ_0	$k = \sin\left(\frac{\theta_0}{2}\right)$	$F\left(k, \frac{\pi}{2}\right)$	زمان تناوب، T
۰°	۰	۱٫۵۷۰۸ $= \frac{\pi}{2}$	T_0
۱۰°	۰٫۰۸۷۲	۱٫۵۷۳۸	۱٫۰۰۱۹T_0
۴۵°	۰٫۳۸۲۷	۱٫۶۳۳۶	۱٫۰۴۰۰T_0
۹۰°	۰٫۷۰۷۱	۱٫۸۵۴۱	۱٫۱۸۰۴T_0
۱۳۵°	۰٫۹۲۳۴	۲٫۴۰۰۳	۱٫۵۲۸۱T_0
۱۷۸°	۰٫۹۹۹۸۵	۵٫۴۳۴۹	۳٫۵۲۳۶T_0
۱۷۹°	۰٫۹۹۹۹۶	۵٫۲۶۶۰	۴٫۶۰۰۲T_0
۱۸۰°	۱	∞	∞

۱. برای دستیابی به جدولهای جامعتر و اطلاعات بیشتر در زمینهٔ انتگرالهای بیضوی به مقالاتی در خصوص توابع بیضوی رجوع کنید، از جمله:

(1) H. B. Dwight, *Tables of Integrals and Other Mathematical Data,* The Macmillan Co., New York, 1961; and (2) M. Abramowitz and A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions*, Dover Publishing, New York, 1972.

این معادله را برحسب $\dot{\theta}^2$ حل می‌کنیم:

$$\dot{\theta}^2 = \frac{2mgl}{I}(1 + \cos\theta) = \frac{4mgl}{I}\cos^2\frac{\theta}{2}$$

جانشانی $y = \sin\theta/2$ را معرفی می‌کنیم تا انتگرالهای شامل توابع مثلثاتی را حذف کنیم و جواب تحلیلی نسبتاً ساده‌ای به‌دست آوریم.

چون θ از ۰ تا π تغییر می‌کند، y از ۰ تا ۱ تغییر خواهد کرد. حال $\dot{y}$ را محاسبه می‌کنیم:

$$\dot{y} = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{\theta}{2}\right)\dot{\theta} = \frac{1}{2}(1 - y^2)^{1/2}\dot{\theta}$$

که از جانشانی $\cos\frac{\theta}{2} = (1 - y^2)^{1/2}$ بهره برده‌ایم.

اکنون معادلهٔ بالا را به‌ازای $\dot{\theta}$ برحسب y و $\dot{y}$ حل می‌کنیم:

$$\dot{\theta} = \frac{2\dot{y}}{(1 - y^2)^{1/2}} = 2\left(\frac{mgl}{I}\right)^{1/2}(1 - y^2)^{1/2}$$

حال می‌توانیم معادلهٔ دیفرانسیل مرتبهٔ اولی را بیابیم که حرکت را برحسب y توصیف می‌کند

$$\dot{y} = \left(\frac{mgl}{I}\right)^{1/2}(1 - y^2)$$

و جواب این معادله عبارت است از

$$y = \tanh\left(\frac{mgl}{I}\right)^{1/2} t$$

(ب) به‌ازای $t \to \infty$، آنگاه $y \to 1$ و $\theta \to \pi$؛ و آونگ سرانجام «وارونه» می‌شود. این نتیجه را با آخرین سطر جدول ۱.۴.۸ مقایسه کنید.

۵.۸ تکانهٔ زاویه‌ای جسم صلب در حرکت پوسته‌ای

حرکت پوسته‌ای وقتی پیش می‌آید که تمام ذرات جسم صلب موازی با صفحهٔ ثابتی حرکت کنند. در حالت کلی، جسم صلب دارای هم شتاب انتقالی و هم شتاب چرخشی است. چرخش حول محوری رخ می‌دهد که جهتش، اما نه لزوماً مکانش، در فضا ثابت باقی می‌ماند. چرخش جسم صلب حول یک محور ثابت، حالت خاصی از حرکت پوسته‌ای است، مانند آونگ فیزیکی که در بخش قبلی دربارهٔ آن بحث کردیم. غلتیدن استوانه به پایین سطح شیبدار، مثال دیگری از حرکت پوسته‌ای است. دربارهٔ هر یک از این نوع حرکتها در بخش بعد بحث خواهیم کرد، اما در پیش‌درآمدی بر این تجزیه و تحلیلها، ابتدا قضیهٔ تکانهٔ زاویه‌ای جسم صلب در حرکت پوسته‌ای را بسط می‌دهیم.

در بخش ۲.۷ نشان دادیم که آهنگ تغییر تکانهٔ زاویه‌ای هر سیستمی از ذرات برابر است با گشتاور نیروی خالص وارد بر آن:

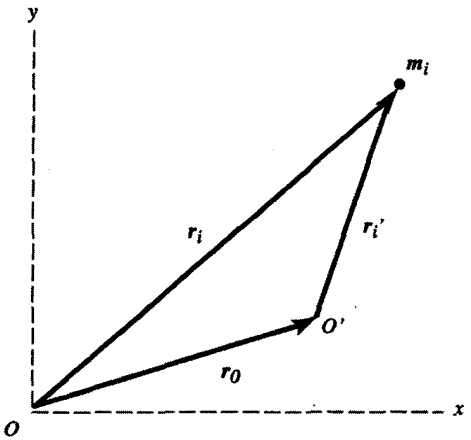
$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{N} \qquad (۱.۵.۸)$$

یا

$$\frac{d}{dt}\sum_i \mathbf{r}_i \times m_i\mathbf{v}_i = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i \qquad (۲.۵.۸)$$

در اینجا تمام کمیتها نسبت به دستگاه مختصات لخت سنجیده می‌شوند.

اما، چه می‌شود اگر بخواهیم چرخش جسمی صلب را (که عبارت است از سیستمی از ذرات که موضع نسبیشان ثابت است) حول محوری توصیف کنیم که ممکن است شتاب نیز داشته باشد، مانند اتفاقی که هنگام غلتیدن توپی به پایین سطح شیبدار رخ می‌دهد؟ برای اینکه چنین



شکل ۱.۵.۸ بردار مکان ذره‌ای در جسم صلب با حرکت پوسته‌ای.

امکانی را به حساب آوریم، در اینجا نیز سیستمی از ذرات را در نظر می‌گیریم، مانند آنچه در بخش ۲.۸ آمد، یعنی سیستمی که حول محوری می‌چرخد که جهتش در فضا ثابت است. اما، در اینجا این امکان را نیز بررسی می‌کنیم که محور شتاب داشته باشد. با نمایاندن مکان ذره، m_i، نسبت به مبدأ، O، دستگاه مرجع لخت (شکل ۱.۵.۸) بررسی خود را شروع می‌کنیم. نقطهٔ O' را مبدأ محوری می‌گیریم که می‌خواهیم چرخش سیستم ذرات را حول آن بررسی کنیم. بردارهای $\mathbf{r}_i$ و $\mathbf{r}'_i$، به ترتیب، مکان ذرهٔ iام را نسبت به نقاط O و O' نشان می‌دهند. اکنون گشتاور نیروی کل، $\mathbf{N}'$، حول محور O' را محاسبه می‌کنیم:

$$\mathbf{N}' = \sum_i \mathbf{r}'_i \times \mathbf{F}_i \qquad (۳.۵.۸)$$

با توجه به شکل ۱.۵.۸ می‌رسیم به

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_0 + \mathbf{r}'_i \qquad (۴.۵.۸)$$

و

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}'_i \qquad (۵.۵.۸)$$

در دستگاه مرجع لخت داریم،

$$\mathbf{F}_i = \frac{d}{dt}(m\mathbf{v}_i) \qquad (۶.۵.۸)$$

به این ترتیب، معادلهٔ (۴.۵.۸) به‌صورت زیر در می‌آید

$$\mathbf{N}' = \sum_i \mathbf{r}'_i \times \mathbf{F}_i = \sum_i \mathbf{r}'_i \times \frac{d}{dt} m_i(\mathbf{v}_\circ + \mathbf{v}'_i) \qquad (۷.۵.۸ \text{ الف})$$

$$= -\dot{\mathbf{v}}_\circ \times \sum_i m_i \mathbf{r}'_i + \sum_i \mathbf{r}'_i \times \frac{d}{dt} m_i \mathbf{v}'_i \qquad (۷.۵.۸ \text{ ب})$$

$$= -\dot{\mathbf{v}}_\circ \times \sum_i m_i \mathbf{r}'_i + \frac{d}{dt} \sum_i \mathbf{r}'_i \times m_i \mathbf{v}'_i \qquad (۷.۵.۸ \text{ ج})$$

مرحلهٔ عملیات از معادلهٔ (۷.۵.۸ الف) تا (۷.۵.۸ ب) به این ترتیب دنبال می‌شود، چون روی $\dot{\mathbf{v}}_\circ$ جمع بسته نمی‌شود و بنابراین ممکن است از مجموعیابی بدون ایجاد اشکال استخراج شود. علت ظهور علامت منها این است که ترتیب ضرب برداری وارونه شده است. بیرون‌آوردن مشتق زمانی از داخل مجموعیابی معادلهٔ (۷.۵.۸ ب) و انتقال آن به مکانی در بیرون مجموعیابی معادلهٔ (۷.۵.۸ ج) مجاز است، زیرا این عمل جمله‌ای، $\sum_i \dot{\mathbf{v}}'_i \times m_i \mathbf{v}'_i$، ایجاد می‌کند یعنی حاصلضرب بردار در خودش را که صفر است.

جملهٔ آخر در سمت راست معادلهٔ (۷.۵.۸ ج) آهنگ تغییر تکانهٔ زاویه‌ای، $\mathbf{L}'$، حول محور O' است. بنابراین، ممکن است این معادله را به‌صورت زیر بازنویسی کرد:

$$\mathbf{N}' = -\ddot{\mathbf{r}}_\circ \times \sum_i m_i \mathbf{r}'_i + \frac{d}{dt}\mathbf{L}' \qquad (۸.۵.۸)$$

که در آن $\ddot{\mathbf{r}}_\circ$ را به جای $\dot{\mathbf{v}}_\circ$ نشانده‌ایم.

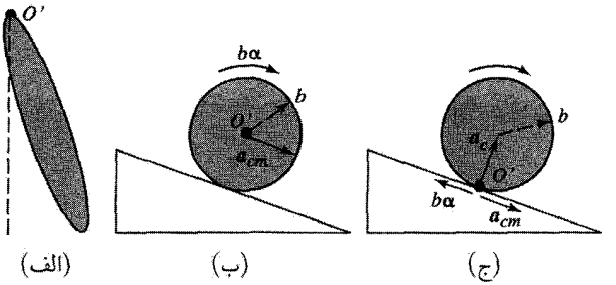
به این ترتیب، معادلهٔ گشتاور نیرو (۱.۵.۸) نمی‌تواند به این صورت متعارفش در مورد سیستمی که حول محوری شتاب‌دار می‌چرخد، مستقیماً به کار برده شود. معادلهٔ صحیح (۸.۵.۸) با معادلهٔ (۱.۵.۸) به علت حضور جملهٔ اضافی در طرف چپ آن، تفاوت دارد.

اما، وقتی هر یک از سه شرط ممکن زیر برقرار شوند، مطابق تصویرهای شکلهای ۲.۵.۸ الف، ب، و ج این جملهٔ اضافی صفر می‌شود:

۱. شتاب، $\ddot{\mathbf{r}}_\circ$، محور چرخش، O'، صفر می‌شود (شکل ۲.۵.۸ الف).

۲. این نقطهٔ، O'، مرکز جرم سیستم ذراتی است که جسم صلب را تشکیل می‌دهند. تحت این شرط، بنابر تعریف آن جمله عبارت است از $\sum_i m_i \mathbf{r}'_i = 0$ (شکل ۲.۵.۸ ب).

۳. محور O' از نقطهٔ تماس بین استوانه و صفحه عبور می‌کند. برداری که با مجموع $\sum_i m_i \mathbf{r}'_i$ نمایش داده شده است، از مرکز جرم عبور می‌کند. این معنا را می‌توانیم با توجه به



شکل ۲.۵.۸ (الف) آونگی فیزیکی که حول محور ثابت O' تاب می‌خورد. شتاب محور $\ddot{\mathbf{r}}_\circ$ صفر است. (ب) استوانهٔ غلتان روبه پایین سطح شیبدار. محور O' که از مرکز جرمش می‌گذرد شتاب دارد، اما می‌توان از معادلهٔ (۹.۵.۸) برای توصیف حرکت چرخشی آن سود جست. (ج) همان استوانهٔ بند (ب) اما محور O' که از نقطهٔ تماس بین استوانه و سطح می‌گذرد شتاب‌دار است؛ اگر چه به‌طور لحظه‌ای در حال سکون است (نمی‌لغزد). (شتاب مماسی خالص محور صفر است زیرا $\boldsymbol{a}_{cm} = b\boldsymbol{\alpha}$، که $\boldsymbol{\alpha}$ شتاب زاویه‌ای استوانه و b شعاع آن است. بنابراین، شتاب خالص محور، شتاب مرکزی، $\mathbf{a}_c$، است که متوجه به سمت مرکز است.)

$M = \sum_i m_i$ که $\sum_i m_i \mathbf{r}'_i = M\mathbf{r}'_{cm}$ جرم کل و $\mathbf{r}'_{cm}$ بردار مکان مرکز جرم نسبت به O' است، ملاحظه کنیم. بنابراین، اگر بردار $\ddot{\mathbf{r}}_\circ$ نیز از مرکز جرم بگذرد، در این صورت حاصلضرب برداری آنها صفر خواهد شد (شکل ۲.۵.۸ ج).

در بخش بعدی خواهیم دید که این شرط آخر وقتی مفید از کار در می‌آید که مسائل مربوط به اجسام صلبی را حل کنیم که می‌غلتند اما نمی‌لغزند!

باید بر شرط ۲ در بالا تأکید شود. معادلهٔ گشتاور نیروی جسم صلبی که حرکت پوسته‌ای انجام می‌دهد، در صورتی همیشه به شکل معادلهٔ (۱.۵.۸) بیان می‌شود که گشتاورها و تکانهٔ زاویه‌ای را حول محوری که از مرکز جرم عبور می‌کند محاسبه کنیم. این معادله را در اینجا با بهره‌گیری از نمادگذاری مناسب می‌نویسیم تا تأکید کنیم که باید آن را با جمع بستن گشتاور نیروها حول محوری که از مرکز جرم جسم صلب می‌گذرد به کار برد

$$\mathbf{N}_{cm} = \frac{d}{dt}\mathbf{L}_{cm} = I_{cm}\boldsymbol{\omega} \qquad (۹.۵.۸)$$

اگر در این مورد تردیدی دارید، از این معادله استفاده کنید!

۶.۸ مثالهایی از حرکت پوسته‌ای جسم صلب

جمعبندی مطالب بالا از این قرار است که اگر جسم صلبی دستخوش حرکت پوسته‌ای شود، بیشتر اوقات حرکتش را می‌توان به‌صورت انتقال مرکز جرم و چرخش حول محوری که از مرکز جرم

می‌گذرد و راستای آن در فضا ثابت است، مشخص کرد. هر چند گاهی انتخاب محوری دیگر مناسبتر است. معمولاً چنین موقعیتهایی واضح‌اند، مانند آونگ فیزیکی که حرکت آن چرخش حول محور ثابتی است که از نقطهٔ آویزش می‌گذرد.

معادلهٔ بنیادی حاکم بر انتقال جسم صلب عبارت است از

$$\mathbf{F} = m\ddot{\mathbf{r}}_{cm} = m\dot{\mathbf{v}}_{cm} = m\mathbf{a}_{cm} \qquad (۱.۶.۸)$$

که $\mathbf{F}$ مجموع نیروهای خارجی وارد بر جسم، m جرم جسم، و $\mathbf{a}_{cm}$ شتاب مرکز جرم آن است.

معادلهٔ اساسی حاکم بر چرخش جسم حول محور O' که یکی از شرایط بیان‌شدهٔ ۱ تا ۳ در بخش ۵.۸ را تأمین می‌کند، عبارت است از

$$\mathbf{N}_{O'} = \frac{d}{dt}\mathbf{L}_{O'} = I_{O'}\dot{\boldsymbol{\omega}} \qquad (۲.۶.۸)$$

اگر یک محور چرخش، غیر از آنکه از مرکز جرم می‌گذرد، برای توصیف حرکت چرخشی انتخاب شود، باید توجه شود که آیا شرط ۱ تا ۳ برآورده می‌شود یا خیر. در غیر این صورت (یعنی این شرط برآورده نشود) شکل کلیتر معادلهٔ گشتاور نیرو که در قالب معادلهٔ (۸.۵.۸) بیان شده، باید به‌جای آن به‌کار گرفته شود.

جسمی که روی سطح شیبدار به پایین می‌غلتد

برای نمایش حرکت پوسته‌ای، حرکت جسمی گرد (استوانه، گوی، و مانند آن) را که بر سطح شیبداری به پایین می‌غلتد، بررسی می‌کنیم. طبق شکل ۱.۶.۸، بر این جسم سه نیرو وارد می‌آید. این نیروها عبارت‌اند از (۱) نیروی گرانشی روبه پایین، (۲) نیروی واکنش، $\mathbf{F}_N$، عمود بر سطح و (۳) نیروی اصطکاک $\mathbf{F}_P$ موازی با سطح. هرگاه محورها را مطابق شکل اختیار کنیم، معادلات مؤلفه‌ای انتقال مرکز جرم از این قرار بیان می‌شوند:

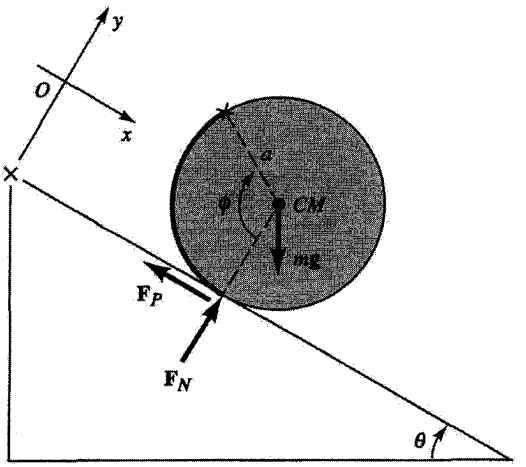
$$m\ddot{x}_{cm} = mg\sin\theta - F_P \qquad (۳.۶.۸)$$

$$m\ddot{y}_{cm} = -mg\cos\theta + F_N \qquad (۴.۶.۸)$$

که θ زاویهٔ شیب سطح نسبت به سطح افق است. چون جسم با سطح همچنان در تماس باقی می‌ماند، داریم

$$y_{cm} = \text{ثابت} \qquad (۵.۶.۸ \text{ الف})$$

از این‌رو



شکل ۱.۶.۸ جسمی که روی سطح شیبدار به پایین می‌غلتد.

$$\ddot{y}_{cm} = 0 \qquad \text{(۵.۶.۸ ب)}$$

بنابراین، با توجه به معادلهٔ ۴.۶.۸ می‌رسیم به:

$$F_N = mg\cos\theta \qquad (۶.۶.۸)$$

تنها نیرویی که گشتاور حول مرکز جرم برقرار می‌کند، نیروی اصطکاک، $\mathbf{F}_P$، است. بزرگی این گشتاور عبارت خواهد بود از $F_P a$، که a شعاع جسم است. بنابراین، معادلهٔ چرخشی (معادلهٔ ۲.۶.۸) به‌صورت زیر بیان می‌شود:

$$I_{cm}\dot{\omega} = F_P a \qquad (۷.۶.۸)$$

برای بحث بیشتر در خصوص این مسئله، باید با توجه به تماس بین سطح و جسم، چند فرض را در نظر بگیریم. معادلات حرکت را در دو حالت حل خواهیم کرد.

حرکت بدون لغزش

اگر سطح تماس خیلی ناصاف باشد، به‌طوری که لغزش رخ ندهد، یعنی اگر $F_P \leq \mu_s F_N$، که μ_s ضریب اصطکاک ایستاست، خواهیم داشت

$$\dot{x}_{cm} = a\dot{\phi} = a\omega \qquad \text{(۸.۶.۸ الف)}$$

$$\ddot{x}_{cm} = a\ddot{\phi} = a\dot{\omega} \qquad \text{(۸.۶.۸ ب)}$$

که ϕ زاویهٔ چرخش است. بنابراین، می‌توان معادلهٔ (۷.۶.۸) را به صورت زیر نوشت:

$$\frac{I_{cm}}{a^2}\ddot{x}_{cm} = F_P \qquad (۹.۶.۸)$$

با نشاندن مقدار بالا به جای F_P در معادلهٔ (۳.۶.۸)، می‌رسیم به

$$m\ddot{x}_{cm} = mg\sin\theta - \frac{I_{cm}}{a^2}\ddot{x}_{cm} \qquad (۱۰.۶.۸)$$

از این رابطه $\ddot{x}_{cm}$ به‌دست می‌آید:

$$\ddot{x}_{cm} = \frac{mg\sin\theta}{m + (I_{cm}/a^2)} = \frac{g\sin\theta}{1 + (k_{cm}^2/a^2)} \qquad (۱۱.۶.۸)$$

که k_{cm} شعاع چرخش حول مرکز جرم است. بنابراین، جسم با شتاب خطی ثابت، و نیز بر طبق معادلات (۸.۶.۸ الف و ب)، با شتاب زاویه‌ای ثابت به پایین سطح می‌غلتد.

مثلاً، شتاب استوانهٔ یکنواخت $(k_{cm}^2 = a^2/2)$ عبارت است از

$$\ddot{x}_{cm} = \frac{g\sin\theta}{1 + \left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{2}{3}g\sin\theta \qquad (۱۲.۶.۸)$$

ولی شتاب کرهٔ یکنواخت $(k_{cm}^2 = 2a^2/5)$ عبارت است از

$$\ddot{x}_{cm} = \frac{g\sin\theta}{1 + \left(\frac{2}{5}\right)} = \frac{5}{7}g\sin\theta \qquad (۱۳.۶.۸)$$

مثال ۱.۶.۸

شتاب مرکز جرم استوانهٔ غلتان به پایین سطح شیبدار شکل ۱.۶.۸ را در حالتی محاسبه کنید که لغزش نداشته باشد. محوری، O'، را اختیار کنید که از نقطهٔ تماس در شکل ۲.۵.۸ (ج) عبور می‌کند.

حل:

همان‌طور که قبلاً توضیح داده شد، انتخاب این محور شرط سوم مطرح‌شده در بخش ۵.۸ را تأمین می‌کند و می‌توانیم معادلهٔ (۲.۶.۸) را مستقیماً به‌کار بریم. گشتاور نیروی وارد حول O' عبارت است از

$$N_{O'} = mga\sin\theta$$

گشتاور لختی استوانه حول این نقطه (معادلهٔ ۲۲.۳.۸) عبارت است از

$$I_{O'} = \frac{۳}{۲}ma^۲$$

چون لغزشی وجود ندارد، رابطهٔ بین سرعت زاویه‌ای استوانه حول O' و سرعت مرکز جرم عبارت است از

$$\dot{x}_{cm} = a\dot{\phi}$$

(**گوشزد:** این همان رابطه است که بین سرعت زاویه‌ای استوانه با سرعت مماسی هر نقطه روی سطحش نسبت به مرکز جرم ارتباط برقرار می‌کند.)

بنابراین، معادلهٔ حرکت چرخشی منجر می‌شود به

$$mga\sin\theta = \frac{۳}{۲}ma^۲\left(\frac{\ddot{x}_{cm}}{a}\right)$$

که از آن بلافاصله این نتیجه را می‌گیریم:

$$\ddot{x}_{cm} = \frac{۲}{۳}g\sin\theta$$

ملاحظات مربوط به انرژی

نتایج قبلی را نیز می‌توان از روی ملاحظات انرژی به‌دست آورد. در میدان گرانشی یکنواخت انرژی پتانسیل جسم صلب، V، عبارت است از مجموع انرژی پتانسیل تک‌تک ذرات، یعنی

$$V = \sum_i (m_i g h_i) = mgh_{cm} \qquad (۱۴.۶.۸)$$

که h_{cm} فاصلهٔ قائم مرکز جرم تا صفحهٔ مرجع است. حال اگر نیروهای وارد بر جسم، جز نیروی گرانشی، کاری انجام ندهند، در این صورت حرکت پایسته است و می‌توان نوشت:

$$T + V = T + mgh_{cm} = E = \text{ثابت} \qquad (۱۵.۶.۸)$$

که T انرژی جنبشی است.

در مورد جسمی که بر سطح شیبدار به پایین می‌غلتد (شکل ۱.۶.۸) انرژی جنبشی انتقالی $\frac{۱}{۲}m\dot{x}_{cm}^۲$ و انرژی جنبشی چرخشی $\frac{۱}{۲}I_{cm}\omega^۲$ است؛ از این‌رو، معادلهٔ انرژی از این قرار خواهد بود:

$$\frac{۱}{۲}m\dot{x}_{cm}^۲ + \frac{۱}{۲}I_{cm}\omega^۲ + mgh_{cm} = E \qquad (۱۶.۶.۸)$$

اما $\omega = \dot{x}_{cm}/a$ و $h_{cm} = -x_{cm}\sin\theta$. بنابراین،

$$\frac{1}{2}m\dot{x}_{cm}^2 + \frac{1}{2}mk_{cm}^2\frac{\dot{x}_{cm}^2}{a^2} - mgx_{cm}\sin\theta = E \qquad (۱۷.۶.۸)$$

در مورد حرکت غلتشی خالص، نیروی اصطکاک در معادلهٔ انرژی ظاهر نمی‌شود زیرا هیچ انرژی مکانیکی‌ای به گرما تبدیل نمی‌شود، مگر اینکه لغزش رخ دهد. بنابراین، انرژی کل E ثابت است. با مشتق‌گیری نسبت به t و بازآرایی جملات، می‌رسیم به

$$m\dot{x}_{cm}\ddot{x}_{cm}\left(1 + \frac{k_{cm}^2}{a^2}\right) - mg\dot{x}_{cm}\sin\theta = 0 \qquad (۱۸.۶.۸)$$

با حذف عامل مشترک $\dot{x}_{cm}$ (البته، به فرض آنکه $\dot{x}_{cm} \neq 0$) و به‌دست‌آوردن $\ddot{x}_{cm}$، به همان نتیجه می‌رسیم که قبلاً با استفاده از نیروها و گشتاورها به‌دست آوردیم (معادلهٔ ۱۱.۶.۸).

ظهور لغزش

اکنون حالتی را در نظر می‌گیریم که تماس با سطح کاملاً ناصاف نباشد، بلکه دارای ضریب اصطکاک لغزشی، μ_k، است. اگر لغزش رخ دهد، در این صورت بزرگی نیروی اصطکاک $\mathbf{F}_P$، در قالب رابطهٔ زیر بیان می‌شود:

$$F_P = \mu_k F_N = \mu_k mg\cos\theta \qquad (۱۹.۶.۸)$$

بنابراین، معادلهٔ انتقال (معادلهٔ ۳.۶.۸) به این صورت در می‌آید

$$m\ddot{x}_{cm} = mg\sin\theta - \mu_k mg\cos\theta \qquad (۲۰.۶.۸)$$

و معادلهٔ چرخشی (معادلهٔ ۷.۶.۸) عبارت است از

$$I_{cm}\dot{\omega} = \mu_k mga\cos\theta \qquad (۲۱.۶.۸)$$

با توجه به معادلهٔ (۲۰.۶.۸)، در اینجا نیز ملاحظه می‌کنیم که بر مرکز جرم شتاب ثابتی از این قرار وارد می‌آید:

$$\ddot{x}_{cm} = g(\sin\theta - \mu_k\cos\theta) \qquad (۲۲.۶.۸)$$

و، در عین حال، شتاب زاویه‌ای آن ثابت است:

$$\dot{\omega} = \frac{\mu_k mga\cos\theta}{I_{cm}} = \frac{\mu_k ga\cos\theta}{k_{cm}^2} \qquad (۲۳.۶.۸)$$

از این دو معادله نسبت به زمان، t، انتگرال می‌گیریم، و فرض می‌کنیم که جسم از حال سکون شروع به حرکت کرده باشد. در $t = ۰$، داریم $\dot{x}_{cm} = ۰$ و $\dot{\phi} = ۰$ می‌رسیم به:

$$\dot{x}_{cm} = g(\sin\theta - \mu_k \cos\theta)t \qquad (۲۴.۶.۸)$$

$$\omega = \dot{\phi} = g\left(\frac{\mu_k a \cos\theta}{k_{cm}^۲}\right)t \qquad (۲۵.۶.۸)$$

در نتیجه، سرعت خطی و سرعت زاویه‌ای نسبت ثابتی دارند و می‌توانیم بنویسیم:

$$\dot{x}_{cm} = \gamma a \omega \qquad (۲۶.۶.۸)$$

که

$$\gamma = \frac{\sin\theta - \mu_k \cos\theta}{\mu_k a^۲ \cos\theta / k_{cm}^۲} = \frac{k_{cm}^۲}{a^۲}\left(\frac{\tan\theta}{\mu_k} - ۱\right) \qquad (۲۷.۶.۸)$$

حال $a\omega$ نمی‌تواند از $\dot{x}_{cm}$ بزرگتر باشد؛ از این‌رو γ نمی‌تواند کمتر از واحد باشد. حالت حدی، که برای آن غلتش خالص داریم، با عبارت $\dot{x}_{cm} = a\omega$ بیان می‌شود؛ یعنی،

$$\gamma = ۱$$

با قراردادن $\gamma = ۱$ در معادلهٔ (۲۷.۶.۸) و آنگاه حل آن برحسب μ_k، مقدار بحرانی ضریب اصطکاک به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

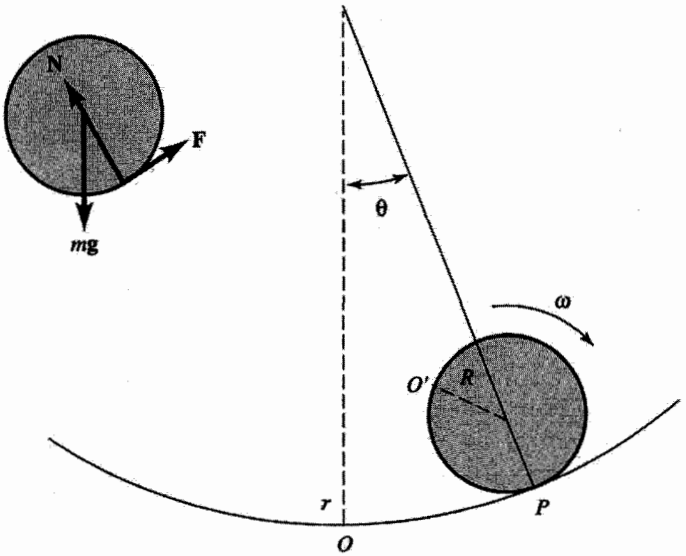
$$\mu_{\text{بحرانی}} = \frac{\tan\theta}{۱ + (a/k_{cm})^۲} \qquad (۲۸.۶.۸)$$

(در واقع، این مقدار بحرانی برای ضریب اصطکاک ایستا عبارت است از μ_s.) اگر μ_s بزرگتر از مقدار بالا باشد، در این صورت جسم بدون لغزش می‌غلتد.

مثلاً، اگر یک گوی روی صفحه‌ای با زاویهٔ شیب $۴۵°$ قرار داده شود، به شرط آنکه μ_s بزرگتر از $(\frac{۵}{۴} + ۱)/\tan ۴۵°$ یا $\frac{۲}{۷}$ باشد، بدون لغزش به پایین می‌غلتد.

مثال ۲.۶.۸

استوانهٔ کوچک یکنواختی به شعاع R بدون لغزش در داخل استوانهٔ بزرگ و ثابتی به شعاع $r > R$ می‌غلتد (شکل ۲.۶.۸). نشان دهید زمان تناوب نوسانات کوچک استوانهٔ غلتان با زمان تناوب آونگ ساده‌ای معادل است که طول آن $۳(r - R)/۲$ باشد.



شکل ۲.۶.۸ استوانهٔ کوچک غلتان بدون اصطکاک در داخل استوانهٔ ثابت بزرگ.

حل:

یک راه حل آسان این مسئله تشخیص‌دادن این نکته است که انرژی کل استوانهٔ غلتان ثابت حرکت است. حرکت نسبی بین دو سطح صورت نمی‌گیرد، زیرا لغزش وجود ندارد. به بیان دیگر، وقتی استوانهٔ کوچک در وضعیت تعادل قرار دارد، O' و O برهم منطبق و طول قوسهای $O'P$ و OP یکسان‌اند. بنابراین، اصطکاک $\mathbf{F}$ از استوانهٔ غلتان انرژی استخراج نمی‌کند و نیروی عمودی $\mathbf{N}$ هم هیچ کاری انجام نمی‌دهد. این نیز هیچ گشتاور نیرویی ایجاد نمی‌کند. زیرا خط کنش آن همیشه از مرکز جرم عبور می‌کند، و بر انرژی جنبشی انتقالی اثری نمی‌گذارد زیرا جهت آن همیشه بر حرکت مرکز جرم عمود است.

نیروی پایستار گرانش، mg، تنها نیرویی است که کار انجام می‌دهد. به این ترتیب، انرژی استوانه پایسته است و می‌توانیم با صفر قراردادن مشتق زمانی انرژی، مسئله را حل کنیم. انرژی کل استوانه عبارت است از

$$E = T + V = \frac{1}{2} I_{cm} \omega^2 + \frac{1}{2} m v_{cm}^2 + mgh$$

که h ارتفاع استوانه بالای مکان تعادلش، v_{cm} سرعت مرکز جرم، و I_{cm} گشتاور لختی استوانه حول مرکز جرمش است (شکل ۲.۶.۸).

با توجه به شکل، می‌بینیم که برای نوسانات کم‌دامنه:

$$h = (r - R)(۱ - \cos\theta) \approx \frac{۱}{۲}(r - R)\theta^۲$$

و چون استوانه بدون لغزش می‌غلتد، داریم

$$\omega = \frac{v_{cm}}{R} = \frac{(r - R)}{R}\dot{\theta}$$

با واردکردن روابط مربوط به h و ω در معادلهٔ انرژی، می‌رسیم به

$$E = \frac{I_{cm}}{۲R^۲}(r - R)^۲\dot{\theta}^۲ + \frac{m}{۲}(r - R)^۲\dot{\theta}^۲ + \frac{m}{۲}g(r - R)\theta^۲$$

از معادلهٔ بالا نسبت به زمان مشتق می‌گیریم و آن را مساوی صفر قرار می‌دهیم، می‌رسیم به

$$\dot{E} = \frac{I_{cm}}{R^۲}(r - R)^۲\ddot{\theta}\dot{\theta} + m(r - R)^۲\ddot{\theta}\dot{\theta} + mg(r - R)\theta\dot{\theta} = ۰$$

جملات مشترک را حذف کنیم:

$$\left(\frac{I_{cm}}{R^۲} + m\right)(r - R)\ddot{\theta} + mg\theta = ۰$$

گشتاور لختی استوانه حول مرکز جرمش عبارت است از $I_{cm} = mR^۲/۲$، و با نشاندن آن در معادلهٔ قبلی، معادلهٔ حرکت استوانه در حرکت کم‌دامنه حول تعادل به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{\left(\frac{۳}{۲}\right)(r - R)}\theta = ۰$$

این معادلهٔ حرکت با معادلهٔ حرکت آونگ ساده‌ای به طول $۳(r - R)/۲$ یکسان، و بنابراین زمان تناوب آنها نیز یکسان است.

(شاید دانشجو بخواهد مسئله را با به‌کاربردن روش نیروها و گشتاور نیروها حل کند. نیروهای مربوطه که بر استوانه وارد می‌آیند، درگوشهٔ شکل ۲.۶.۸ نشان داده شده‌اند.)

۷.۸ ضربه و برخورد در اجسام صلب

در فصل پیش حالتی را از نظر گذراندیم که طی آن نیرویی ضربه‌ای بر ذره وارد می‌آمد. در این بخش مفهوم نیروی ضربه‌ای را به حالت حرکت پوسته‌ای جسم صلب تعمیم می‌دهیم. اولاً،

می‌دانیم که معادلهٔ کلی $\mathbf{F} = md\mathbf{v}_{cm}/dt$ بر حرکت انتقالی جسم صلب، به فرض ثابت‌بودن جرم، حاکم است، از این‌رو اگر $\mathbf{F}$ از نوع نیروی ضربه‌ای باشد تغییر تکانهٔ خطی جسم از این قرار بیان می‌شود

$$\int \mathbf{F}dt = \mathbf{P} = m\Delta\mathbf{v}_{cm} \qquad (۱.۷.۸)$$

به این ترتیب، اثر ضربهٔ $\mathbf{P}$ عبارت است از ایجاد تغییر ناگهانی در سرعت مرکز جرم، که مقدار آن عبارت است از

$$\Delta\mathbf{v}_{cm} = \frac{\mathbf{P}}{m} \qquad (۲.۷.۸)$$

ثانیاً، جزء چرخشی حرکت جسم از معادلهٔ $\mathbf{N} = \dot{\mathbf{L}} = Id\omega/dt$ پیروی می‌کند، به‌طوری که تغییر تکانهٔ زاویه‌ای عبارت است از

$$\int Ndt = I\Delta\omega \qquad (۳.۷.۸)$$

انتگرال $\int Ndt$ را ضربهٔ چرخشی می‌نامند. حال اگر ضربهٔ اولیهٔ $\mathbf{P}$ بر جسم وارد آید، به طریقی که خط کنش آن در فاصلهٔ l از محور مرجعی واقع باشد که تکانهٔ زاویه‌ای حول آن محاسبه می‌شود، در این صورت $N = Fl$ و داریم

$$\int Ndt = Pl \qquad (۴.۷.۸)$$

در نتیجه، تغییر سرعت زاویه‌ای ناشی از ضربهٔ $\mathbf{P}$ وارد بر جسم صلب در حرکت پوسته‌ای از این قرار بیان می‌شود:

$$\Delta\omega = \frac{Pl}{I} \qquad (۵.۷.۸)$$

برای حالت کلی حرکت پوسته‌ای آزاد، محور مرجع از مرکز جرم می‌گذرد و گشتاور لختی عبارت است از $I = I_{cm}$. از سوی دیگر، اگر جسم مقید به چرخش حول محوری ثابت باشد، معادلهٔ چرخشی برای تعیین حرکت به تنهایی کافی است و I گشتاور لختی حول این محور ثابت به شمار می‌آید.

در برخوردهای مربوط به اجسام صلب، نیروها و بنابراین ضربه‌هایی که اجسام هنگام برخورد بر یکدیگر وارد می‌آورند، همواره مساوی و در جهت مخالف یکدیگرند. به این ترتیب، اصول پایستگی تکانهٔ خطی و تکانهٔ زاویه‌ای برقرارند.

مرکز کوبش: «قضیهٔ چوب بیسبال»

برای توصیف مفهوم مرکز کوبش، دربارهٔ برخورد توپی به جرم m، که ذره تلقی می‌شود، با جسم صلبی (چوب بیسبال) به جرم M بحث می‌کنیم. برای سادگی موضوع، فرض می‌کنیم که جسم ابتدا بر یک سطح صاف افقی در حال سکون واقع شده و آزاد است که حرکت پوسته‌ای انجام دهد. ضربه‌ای را که توسط توپ به جسم منتقل می‌شود با $\boldsymbol{P}$ نشان می‌دهیم بنابراین معادلات انتقالی عبارت‌اند از

$$\boldsymbol{P} = M\mathbf{v}_{cm} \tag{۶.۷.۸}$$

$$-\boldsymbol{P} = m\mathbf{v}_1 - m\mathbf{v}_0 \tag{۷.۷.۸}$$

که $\mathbf{v}_0$ و $\mathbf{v}_1$، به‌ترتیب، سرعت اولیه و نهایی توپ‌اند، و $\mathbf{v}_{cm}$ سرعت مرکز جرم بعد از برخورد است. به‌وضوح می‌بینیم که دو معادلهٔ بالا بر پایستگی تکانهٔ خطی دلالت می‌کنند.

چون جسم در ابتدا در حال سکون است، چرخش حول مرکز جرم در اثر برخورد از این قرار بیان می‌شود

$$\omega = \frac{Pl'}{I_{cm}} \tag{۸.۷.۸}$$

که در آن، مطابق شکل ۱.۷.۸، l' فاصلهٔ $O'C$ از مرکز جرم تا خط کنش $\boldsymbol{P}$ است. حال نقطهٔ O را در فاصلهٔ l از مرکز جرم در نظر می‌گیریم، به‌طوری که مطابق شکل، خط CO ادامهٔ $O'C$ باشد. سرعت (اسکالر) O با ترکیب اجزاء انتقالی و چرخشی به‌دست می‌آید، یعنی،

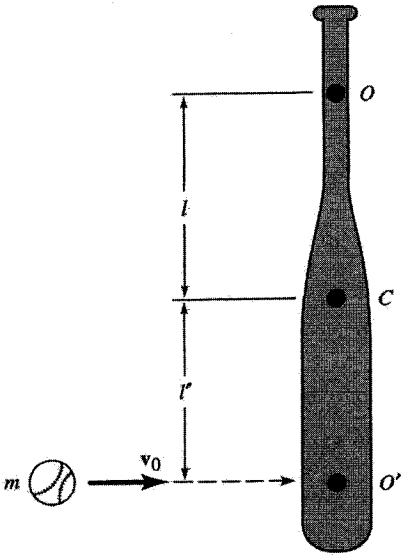
$$v_O = v_{cm} - \omega l = \frac{P}{M} - \frac{Pl'}{I_{cm}}l = P\left(\frac{1}{M} - \frac{ll'}{I_{cm}}\right) \tag{۹.۷.۸}$$

در حالت خاص، اگر کمیت داخل پرانتز صفر شود سرعت O صفر خواهد شد، یعنی اگر

$$ll' = \frac{I_{cm}}{M} = k_{cm}^2 \tag{۱۰.۷.۸}$$

که k_{cm} شعاع چرخش جسم حول مرکز جرم آن است. در این حالت، نقطهٔ O مرکز لحظه‌ای چرخش درست بلافاصله بعد از برخورد است. O' مرکز کوبش حول O نام دارد. این دو نقطه مانند مراکز نوسان، که قبلاً در تجزیه و تحلیل آونگ فیزیکی (معادلهٔ ۱۳.۴.۸) تعریف کردیم، به هم مربوط می‌شوند.

کسی که بیسبال بازی کرده باشد می‌داند که اگر توپ دقیقاً به نقطهٔ صحیح برخورد کند، هیچ «انگیزشی» روی برخورد وجود ندارد. این «نقطهٔ صحیح» درست مرکز کوبش حول نقطه‌ای است که جای دست‌گرفتن چوب بیسبال است.



شکل ۱.۷.۸ برخورد توپ بیسبال با چوگان.

مثال ۱.۷.۸

در شکل ۲.۷.۸ مشاهده می‌کنید میلهٔ نازکی به طول b و جرم m از یک سر به محوری بدون اصطکاک آویخته شده است. به سر دیگر میله ضربهٔ افقی P' وارد می‌شود. ضربهٔ افقی P وارد بر محوری را محاسبه کنید که میله به آن آویخته است.

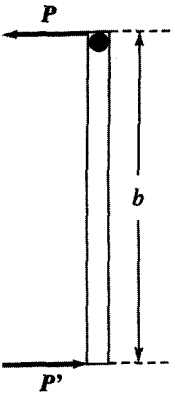
حل:

ابتدا، سرعت مرکز جرم بعد از واردآمدن ضربه را با توجه به اینکه ضربهٔ افقی خالص انتقال‌یافته به میله با تغییر در تکانهٔ خطی آن مساوی است، محاسبه می‌کنیم

$$P' - P = mv_{cm}$$

اکنون، چرخش میله را در نظر می‌گیریم که حول نقطهٔ آویز اجرا می‌شود (انتخاب این محور شرط ۱ را در بخش ۵.۸ تأمین می‌کند). گشتاور لختی میله حول محورگذرا از نقطهٔ آویز به کمک معادلهٔ (۳.۳.۸) به‌صورت زیر بیان می‌شود:

$$I = \frac{۱}{۳}mb^۲$$



شکل ۲.۷.۸ میلهٔ نازک آویزان از محور آویز بدون اصطکاک.

حال، سرعت زاویه‌ای میله را حول محورگذرا از نقطهٔ آویز با بهره‌گیری از معادلهٔ (۸.۷.۸) محاسبه می‌کنیم:

$$P'b = I\omega$$

اما بین سرعت مرکز جرم و سرعت زاویه‌ای رابطهٔ زیر برقرار است:

$$v_{cm} = \frac{b}{۲}\omega$$

بنابراین، می‌توانیم بنویسیم

$$P' - P = m\frac{b}{۲}\omega = m\frac{b}{۲}\left[\frac{P'b}{I}\right] = \frac{۳}{۲}P'$$

از این‌رو

$$P = -\frac{۱}{۲}P'$$

ضربهٔ منتقل‌شده به میله از طرف محور آویز در همان جهت ضربهٔ وارد بر میله با نواخته‌شدن ضربهٔ افقی به طرف راست در شکل ۲.۷.۸ است. ضربهٔ وارد بر محور آویز از طرف میله در جهت مخالف، به طرف چپ در شکل است.

مسائل

۱.۸ مرکز جرم هر یک از اجسام زیر را به‌دست آورید:

(الف) سیم نازکی که به شکل قطعهٔ بلوکی‌شکل «ل» به طول هر ضلع b خم شده باشد

(ب) پوستهٔ نازک یکنواختی به شکل ربع دایره به شعاع b

(ج) مساحتی محدود به سهمی $y = x^2/b$ و $y = b$

(د) حجمی محدود به سهمیوار دوار $z = (x^2 + y^2)/b$ و صفحهٔ $z = b$

(ه) مخروط دوار قائم یکنواخت توپر به ارتفاع b

۲.۸ چگالی خطی میلهٔ نازکی با عبارت $\rho = cx$ بیان می‌شود که c مقداری ثابت و x فاصله‌ای است که از یک سر میله اندازه‌گیری می‌شود. اگر طول میله b باشد، مرکز جرم آن را بیابید.

۳.۸ درکرهٔ یکنواخت توپری به شعاع a حفره‌ای کروی به شعاع $a/2$ حفر شده که مرکز این حفره به فاصلهٔ $a/2$ از مرکز کره قرار دارد. مرکز جرم را بیابید.

۴.۸ گشتاور لختی هر یک از اشیاء مسئلهٔ ۱.۸ را حول محور تقارنشان به‌دست آورید.

۵.۸ گشتاور لختی کرهٔ مسئله ۳.۸ را حول محوری که از مرکز کره و مرکز حفره می‌گذرد، به‌دست آورید.

۶.۸ نشان دهید گشتاور لختی یک هشتم کرهٔ یکنواخت به شعاع a حول محوری در امتداد یکی از لبه‌های راست یکی از این تکه‌ها $(\frac{2}{5})ma^2$ است. (گوشزد: این فرمول عیناً همان فرمول گشتاور لختی کرهٔ توپر با همان شعاع است.

۷.۸ نشان دهید گشتاورهای لختی متوازی‌السطوح قائم (مکعب مستطیل)، استوانه با مقطع بیضی، و بیضیوار که جملگی یکنواخت و توپرند، به‌ترتیب، عبارت‌اند از $(m/3)(a^2 + b^2)$، $(m/4)(a^2 + b^2)$، و $(m/5)(a^2 + b^2)$، که m جرم و $2a$ و $2b$ قطرهای اصلی جسم‌اند که بر محور دوران عمودند. این محور در هر حالت از مرکز می‌گذرد. (در مورد مکعب مستطیل $2a$ و $2b$، به‌ترتیب، طول و عرض‌اند.)

۸.۸ نشان دهید که زمان تناوب آونگ فیزیکی عبارت است از $2\pi(d/g)^{1/2}$، که d فاصلهٔ بین نقطهٔ آویز، O، و مرکز نوسان، O'، است.

۹.۸ (الف) آونگ سادهٔ آرمانی شامل ذره‌ای به جرم M است که به انتهای میلهٔ نازک بدون جرمی به طول a آویزان شده است. فرض کنید آونگ ساده‌ای واقعی شامل میله‌ای نازک به جرم m باشد که بر سر آن گلوله‌ای کروی به جرم $M - m$ متصل شده است. اگر شعاع گلولهٔ کروی b، و طول میلهٔ نازک $a - b$ باشد، نسبت زمان تناوب آونگ واقعی به آونگ آرمانی را محاسبه کنید.

(ب) اگر $m = 10\text{g}$، $M = 1\text{kg}$، $a = 1.27\text{m}$، و $b = 5\text{cm}$، مقدار این نسبت را محاسبه کنید.

۱۰.۸ زمان تناوب آونگی فیزیکی ۲ ثانیه است. (چنین آونگی را آونگ «ثانیه‌ها» گویند.) جرم آونگ M است، و مرکز جرمش 1m زیر محور نوسان قرار دارد. ذره‌ای به جرم m به انتهای آونگ 1.3m زیر محور و همخط مرکز گرانش متصل می‌شود. در این صورت معلوم می‌شود که آونگ با آهنگ ۲۰ ثانیه در هر روز «عقب» می‌افتد. نسبت m به M را پیدا کنید.

۱۱.۸ حلقه‌ای دایره‌ای به شعاع a به‌صورت آونگ فیزیکی حول نقطه‌ای روی محیطش نوسان می‌کند. زمان تناوب نوسان کم دامنه را به‌دست آورید اگر محور چرخش

(الف) عمود بر صفحهٔ حلقه باشد، و

(ب) در صفحهٔ حلقه واقع باشد.

۱۲.۸ بر روی گوی یکنواخت توپری چند دور نخ نازک پیچیده شده است. اگر انتهای نخ ثابت شود و گوی را رها کنند تا تحت‌تأثیر نیروی وزن سقوط کند، شتاب مرکز گوی چقدر است؟ (فرض کنید نخ قائم باقی بماند.)

۱۳.۸ دو مرد دو سر الواری به طول l و جرم m را در دست گرفته‌اند. نشان دهید اگر یکی از آنها ناگهان سر الوار را رها کند، باری که مرد دیگر تحمل می‌کند، ناگهان از $mg/2$ به $mg/4$ افت می‌کند. همچنین نشان دهید شتاب اولیهٔ پایین سوی سر آزاد الوار $\frac{3}{4}g$ است.

۱۴.۸ در مرکز گوی توپر یکنواختی حفره‌ای کروی تعبیه شده و شعاع حفره $\frac{1}{4}$ شعاع گلوله است. نشان دهید شتاب این گلوله هنگام غلتش به پایین روی سطح شیبدار $\frac{98}{101}$ شتاب گوی توپر یکنواخت بدون حفره است. (گوشزد: این مسئله روشی را برای آزمونهای ناویرانگر مطرح می‌کند.)

۱۵.۸ دو وزنه به جرمهای m_1 و m_2 به دو سر ریسمان سبک اتساع‌ناپذیری متصل شده‌اند. ریسمان از روی قرقره‌ای به شعاع a و به گشتاور لختی I عبور می‌کند. با فرض $m_1 > m_2$ و اینکه از اصطکاک در محور قرقره چشم‌پوشی شود، شتاب وزنه‌ها را به‌دست آورید.

۱۶.۸ استوانهٔ قائم یکنواختی، با مقطع دایره‌ای به شعاع a بر بالاترین بخش استوانهٔ ثابت و کاملاً ناصاف دیگری به شعاع $b(b > a)$ در حالت تعادل قرار گرفته است. محور دو استوانه با هم موازی‌اند. اگر تعادل اندکی به هم بخورد نشان دهید وقتی استوانهٔ غلتان از استوانهٔ ثابت جدا می‌شود که خط‌المرکزین آنها با امتداد قائم زاویهٔ $\cos^{-1}(\frac{4}{7})$ بسازد.

۱۷.۸ نردبان یکنواختی بر دیوار صاف قائمی تکیه دارد. اگر کف نیز صاف و زاویهٔ اولیهٔ بین کف و نردبان θ_0 باشد، نشان دهید که نردبان هنگام لغزیدن به پایین وقتی از دیوار جدا می‌شود که زاویهٔ بین کف و نردبان $\sin^{-1}(\frac{2}{3}\sin\theta_0)$ شود.

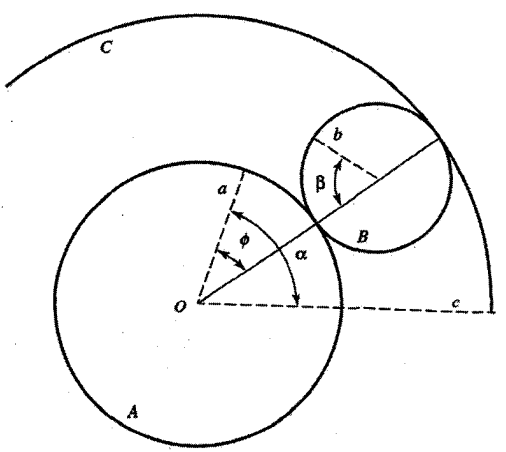
۱۸.۸ درکیپ کاناورال موشک ساترن V در وضعیت قائم آمادهٔ پرتاب است. متأسفانه، قبل از شلیک، یک اختلال جزئی باعث می‌شود که موشک واژگون شود. مؤلفه‌های قائم و افقی نیروی واکنش را

روی سکوی پرتاب به‌صورت تابعی از θ، زاویهٔ بین موشک و خط قائم در هر لحظه، به‌دست آورید. از روی این کمیتها نشان دهید که موشک به ازای $\theta < \cos^{-1}(\frac{2}{3})$ تمایل به لغزیدن به عقب و به ازای $\theta > \cos^{-1}(\frac{2}{3})$ تمایل به لغزیدن به جلو دارد. (فرض کنید موشک میلهٔ نازک یکنواختی است.)

۱۹.۸ توپی ابتدا بدون چرخش با سرعت v_0 روی سطح شیبدار ناصاف به زاویهٔ شیب θ و با ضریب اصطکاک μ_k به بالا پرتاب می‌شود. مکان توپ را به‌صورت تابعی از زمان بیابید و تعیین کنید در چه مکانی غلتش خالص توپ شروع می‌شود. فرض کنید μ_k از $\frac{2}{7}\tan\theta$ بزرگتر باشد.

۲۰.۸ گوی بیلیاردی به شعاع a، ابتدا با سرعت زاویه‌ای ω_0 حول محور افقی و با سرعت روبه جلوی صفر می‌چرخد. اگر ضریب اصطکاک لغزشی بین گوی و میز بیلیارد μ_k باشد، فاصله‌ای را که گوی می‌پیماید تا لغزش قطع شود، به‌دست آورید.

۲۱.۸ شکل م۲۱.۸ دو قرص دایره‌ای به شعاعهای a و b را نشان می‌دهد که در داخل مسیر دایره‌ای غیرمتحرکی به شعاع c سوار شده‌اند، به‌طوری که $c = a + 2b$. قرص مرکزی A روی محور راننده در نقطهٔ O سوار شده است. قرص B بین قرص A و قرص مسیر دایره‌ای C ساندویچ شده است و وقتی می‌تواند بدون لغزش بغلتد که قرص A به وسیلهٔ گشتاور نیروی خارجی واردآمده از طریق محور محرکش رانده شود. در ابتدا سیستم در حال سکون است به‌طوری که خط‌چین سمتگیری فضایی قرصهای A و B را نمایش می‌دهد که در شکل به‌طور افقی در یک ردیف قرار گرفته‌اند. گشتاور نیروی ثابت K برای لحظهٔ t_0 از طریق محور عمل می‌کند و سبب می‌شود که قرص A بچرخد، به‌طوری که در لحظهٔ t_0، خط‌چین نمایشگر سمتگیری فضایی آن با جهت



شکل م۲۱.۸

افقی زاویهٔ α می‌سازد. قرص B بین قرص مسیر دایره‌ای C و قرص A می‌غلتد و سمتگیری آن که با خط‌چین نشان داده شده است، با جهت متوجه به سمت O زاویهٔ β می‌سازد. سرعت زاویه‌ای نهایی دو قرص ω_A و ω_B را محاسبه کنید.

۲۲.۸ الوار یکنواخت نازکی به طول l روی ورقه‌ای افقی از یخ، در حال سکون قرار دارد. اگر به یک سر الوار و عمود بر آن با پا ضربه‌ای زده شود، نشان دهید الوار حول نقطه‌ای واقع در فاصلهٔ $l/۶$ از مرکزش شروع به چرخیدن خواهد کرد.

۲۳.۸ نشان دهید برای اینکه عکس‌العملی بین سطح میز و توپ رخ ندهد، وقتی توپ به لبه اصابت می‌کند باید لبهٔ میز بیلیارد در ارتفاع $\frac{۷}{۱۰}$ قطر توپ بیلیارد واقع باشد.

۲۴.۸ آونگی بالیستیکی از یک الوار طویل به طول l و جرم m تشکیل می‌شود. این آونگ می‌تواند حول یک انتهای خود، O، آزادانه نوسان کند و ابتدا در وضعیت قائم در حال سکون است. گلوله‌ای به جرم m' به‌طور افقی در فاصلهٔ l' در پایین نقطهٔ O به آونگ شلیک می‌شود. این گلوله در داخل الوار به حالت سکون می‌رسد. اگر دامنهٔ نوسان آونگ بر اثر برخورد $\theta_۰$ شود، سرعت گلوله را به‌دست آورید.

۲۵.۸ دو میلهٔ یکنواخت AB و BC به جرمهای مساوی m و طولهای مساوی l در نقطهٔ B بدون اصطکاک به هم متصل شده‌اند. این مجموعه ابتدا روی یک سطح افقی صاف در حال سکون است. نقاط A، B، و C روی یک خط مستقیم واقع‌اند. اگر ضربهٔ $\mathbf{P}$ در نقطهٔ A در جهت عمود بر میله وارد آید، حرکت اولیهٔ سیستم را بیابید. (راهنمایی: هر میله را مجزا در نظر بگیرید.)

مسائل کامپیوتری

ک۱.۸ در جدول زیر چگالی ستاره‌ای به جرم ده برابر جرم خورشید را برحسب فاصله از هستهٔ ستاره درج کرده‌ایم. چگالیها به‌صورت $\log_{۱۰} \rho/\rho_c$ داده می‌شوند، که ρ چگالی در فاصلهٔ r و ρ_c چگالی هستهٔ ستاره است. فاصله‌ها به‌صورت کسرهایی از شعاع ستاره‌ای (r/R_*) داده شده‌اند، که R_* چهار برابر شعاع خورشید است.

جرم و شعاع خورشید به‌ترتیب، عبارت‌اند از $M_\odot = ۱٫۹۸۹ \times ۱۰^{۳۰}\text{kg}$ و $R_\odot = ۶٫۹۶ \times ۱۰^{۵}\text{km}$.

(الف) با بهره‌گیری از داده‌های جدول، چگالی هستهٔ ستاره را با انتگرال‌گیری عددی برآورد کنید.

(ب) فاصلهٔ $R_۳$ را طوری پیدا کنید که جرم موجود در $R_۳$ مساوی $۳M_\odot$ باشد.

(ج) گشتاور لختی قسمت $۳M_\odot$ ستاره در داخل $R_۳$ را برآورد کنید.

فاصله (r/R_*)	$\log(\rho/\rho_\circ)$
۰	۰
۰٫۰۱۱۳۰	−۰٫۰۰۰۷۶۷۶
۰٫۰۲۳۷۳	−۰٫۰۰۳۲۹۷۹
۰٫۰۳۷۴۰	−۰٫۰۰۸۱۱۰۵
۰٫۰۵۲۴۴	−۰٫۰۱۵۹۳۳۲
۰٫۰۶۸۹۸	−۰٫۰۲۷۵۸۳۵
۰٫۰۸۷۱۸	−۰٫۰۴۴۰۰۰۱
۰٫۱۰۷۲۰	−۰٫۰۶۶۶۱۶۸
۰٫۱۲۹۲۱	−۰٫۰۹۶۶۳۷۶
۰٫۱۵۳۴۳	−۰٫۱۳۶۱۱۷
۰٫۱۸۰۰۸	−۰٫۱۸۷۳۰۲
۰٫۲۰۹۳۸	−۰٫۲۵۳۰۸۲
۰٫۲۴۱۶۲	−۰٫۳۳۸۸۷۶
۰٫۲۷۷۰۸	−۰٫۴۶۱۶۷۱
۰٫۳۱۶۰۹	−۰٫۶۰۷۵۳۶
۰٫۳۵۹۰۰	−۰٫۷۸۰۸۵۲
۰٫۴۰۶۲۰	−۰٫۹۴۹۴۶۳
۰٫۴۵۸۱۲	−۱٫۲۰۷۴۶
۰٫۵۱۵۲۳	−۱٫۴۶۸۱۱
۰٫۵۷۸۰۵	−۱٫۷۷۰۷۱
۰٫۶۴۷۱۵	−۲٫۱۲۵۴۳
۰٫۷۲۳۱۶	−۲٫۵۵۷۳۴
۰٫۸۰۶۷۸	−۳٫۱۱۹۶۹
۰٫۸۹۸۷۶	−۳٫۹۵۵۶۲
۱٫۰۰۰۰۰	−۶٫۲۸۵۳۱

(د) با این فرض که ستاره به‌صورت جسم صلب هر ۲۵ روز یک‌بار، یک چرخش اجرا کند، تکانهٔ زاویه‌ای چرخشی قسمت ستاره در داخل R_3 را برآورد کنید.

(ه) فرض کنید این ستاره به‌صورت اَبَرنواختر «منفجر شود» و وقتی این اتفاق افتاد، لایهٔ خارجی $7M_\odot$ آن به بیرون پرتاب شود؛ اما قسمت داخلی $3M_\odot$ در هم فشرده و گلولهٔ کروی جامد، با چگالی یکنواخت به شعاع ۱۰ km تشکیل شود. چگالی و زمان تناوب این شیء ستاره‌ای فشرده را محاسبه کنید.

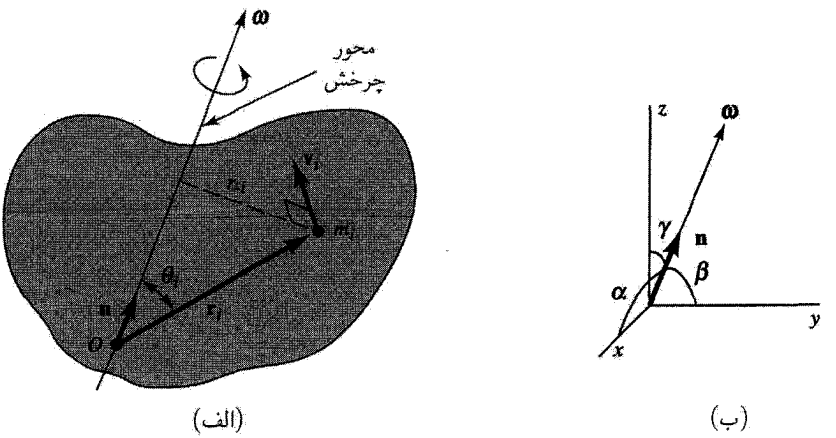
۹

حرکت اجسام صلب در سه بعد

«این جسم دیگر در حرکت شبانه‌روزی که کرهٔ ما را به‌کار می‌اندازد، مشارکت ندارد. در واقع، اگرچه به علت طول کوتاهش، به‌نظر می‌رسد که محورش جهت اصلی و اولیهٔ خود را نسبت به اشیاء زمینی حفظ می‌کند، استفاده از میکروسکوپ کافی است تا حرکت آشکار و پیوسته‌ای را نشان دهد که حرکت کرهٔ سماوی را دقیقاً دنبال می‌کند... همان‌طور که جهت اصلی این محور به دلخواه در تمام زوایای سمتی حول قائم آرایش یافته است، می‌توان به انحرافهای مشاهده‌شده، به دلخواه، تمام مقادیر بین انحراف کل و انحراف کلی که به اعتبار سینوس عرض جغرافیایی کاهش یافته، داده شود... در یک فرود ناگهانی، با انحرافی در جهت دلخواه، آزمایش جدیدی برای چرخش زمین به‌دست می‌آید، که همراه با ابزاری که به ابعاد کوچک تبدیل شده و به آسانی قابل حمل است، حرکت پیوستهٔ زمین را آینه‌وار نشان می‌دهد...»[1]

در حرکت جسم صلبی که یا مقید به چرخش حول یک محور ثابت یا محور متحرکی به موازات یک صفحهٔ ثابت باشد، جهت محور چرخش تغییر نمی‌کند. در حالتهای کلیتر حرکت جسم صلب،

1. J. B. L. Foucault, *Comptes rendus de l' Academie Sciences*, Vol 35, 27-Sep-1852.



شکل ۱.۱.۹ (الف) بردار سرعت ذرهٔ نمایندهٔ جسم صلب چرخان. (ب) α، β، و γ زوایایی‌اند که بردار سرعت زاویه‌ای ω (یا بردار $\mathbf{n}$)، به‌ترتیب، با محورهای x، y، و z می‌سازد.

که در این فصل به آنها می‌پردازیم، ممکن است جهت محور تغییر کند. در مقایسه با فصل پیش، در این فصل به تحلیل بسیار دامنه‌دارتری می‌پردازیم. در واقع، حتی در حالتی که جسم آزادانه می‌چرخد و هیچ نیرویی خارجی برآن وارد نمی‌آید، همان‌طورکه خواهیم دید، حرکت ساده نیست.

۱.۹ چرخش جسم صلب حول محور دلخواه: گشتاورها و حاصلضربهای لختی، تکانهٔ زاویه‌ای، و انرژی جنبشی

مطالعهٔ حرکت کلی جسم صلب را با قدری مقدمات ریاضی آغاز می‌کنیم. اولاً، محاسبهٔ گشتاور لختی را حول محوری با جهت دلخواه انجام خواهیم داد. این محور از نقطهٔ ثابت O، که مبدأ دستگاه مختصات اختیار شده است، می‌گذرد (شکل ۱.۱.۹ الف)، یک تعریف بنیادی را مطرح می‌کنیم:

$$I = \sum_i m_i r_{\perp i}^2 \qquad (۱.۱.۹)$$

که $r_{\perp i}$ فاصلهٔ عمودی ذره به جرم m_i تا محور چرخش است. جهت محور چرخش با بردار یکهٔ $\mathbf{n}$ تعریف می‌شود. بنابراین

$$r_{\perp i} = |r_i \sin\theta_i| = |\mathbf{r}_i \times \mathbf{n}| \qquad (۲.۱.۹)$$

که θ_i زاویهٔ بین $\mathbf{r}_i$ و $\mathbf{n}$ است و بردار مکان ذرهٔ iام عبارت است از

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{i}x_i + \mathbf{j}y_i + \mathbf{k}z_i \qquad (۳.۱.۹)$$

کسینوسهای هادی این محور را $\cos\alpha$، $\cos\beta$، و $\cos\gamma$ اختیار می‌کنیم (شکل ۱.۱.۹ ب). به این ترتیب

$$\mathbf{n} = \mathbf{i}\cos\alpha + \mathbf{j}\cos\beta + \mathbf{k}\cos\gamma \qquad (۴.۱.۹)$$

و از این‌رو

$$r_{\perp i}^{۲} = |\mathbf{r}_i \times \mathbf{n}|^{۲} \qquad (۵.۱.۹ \text{ الف})$$
$$= (y_i\cos\gamma - z_i\cos\beta)^{۲} + (z_i\cos\alpha - x_i\cos\gamma)^{۲} + (x_i\cos\beta - y_i\cos\alpha)^{۲}$$

پس از بازآرایی جملات، می‌توانیم بنویسیم

$$r_{\perp i}^{۲} = (y_i^{۲} + z_i^{۲})\cos^{۲}\alpha + (z_i^{۲} + x_i^{۲})\cos^{۲}\beta + (x_i^{۲} + y_i^{۲})\cos^{۲}\gamma \qquad (۵.۱.۹ \text{ ب})$$
$$- ۲y_iz_i\cos\beta\cos\gamma - ۲z_ix_i\cos\gamma\cos\alpha - ۲x_iy_i\cos\alpha\cos\beta$$

در این صورت گشتاور لختی حول محور کلی چرخش از عبارت نسبتاً طولانی زیر به‌دست می‌آید:

$$I = \sum_i m_i(y_i^{۲} + z_i^{۲})\cos^{۲}\alpha + \sum_i m_i(z_i^{۲} + x_i^{۲})\cos^{۲}\beta$$
$$+ \sum_i m_i(x_i^{۲} + y_i^{۲})\cos^{۲}\gamma - ۲\sum_i m_iy_iz_i\cos\beta\cos\gamma \qquad (۶.۱.۹)$$
$$- ۲\sum_i m_iz_ix_i\cos\gamma\cos\alpha - ۲\sum_i m_ix_iy_i\cos\alpha\cos\beta$$

همان‌طور که بعداً خواهیم دید، این فرمول را می‌توان ساده کرد. اولاً، بلافاصله متوجه می‌شویم که جمعها شامل مجذورهای مختصات به‌صورت گشتاورهای لختی جسم حول سه محور مختصات‌اند. از نمادگذاری اندکی تعدیل‌یافته برای آنها، به شرح زیر بهره می‌گیریم:

$$\sum_i m_i(y_i^{۲} + z_i^{۲}) = I_{xx} \qquad \text{گشتاور لختی حول محور } x \qquad (۷.۱.۹ \text{ الف})$$

$$\sum_i m_i(z_i^{۲} + x_i^{۲}) = I_{yy} \qquad \text{گشتاور لختی حول محور } y \qquad (۷.۱.۹ \text{ ب})$$

$$\sum_i m_i(x_i^{۲} + y_i^{۲}) = I_{zz} \qquad \text{گشتاور لختی حول محور } z \qquad (۷.۱.۹ \text{ ج})$$

جمعهای شامل حاصلضربهای مختصات برای ما تازگی دارند. این جمعها را حاصلضربهای لختی می‌گویند. این کمیتها را به‌صورت زیر نمادگذاری می‌کنیم:

$$-\sum_i m_i x_i y_i = I_{xy} = I_{yx} \qquad xy \text{ حاصلضرب لختی} \qquad (۸.۱.۹ \text{ الف})$$

$$-\sum_i m_i y_i z_i = I_{yz} = I_{zy} \qquad yz \text{ حاصلضرب لختی} \qquad (۸.۱.۹ \text{ ب})$$

$$-\sum_i m_i z_i x_i = I_{zx} = I_{xz} \qquad zx \text{ حاصلضرب لختی} \qquad (۸.۱.۹ \text{ ج})$$

توجه کنید که علامت منها از اجزاء تعریف ما به‌شمار می‌آید. (در برخی کتابهای درسی علامت منها را در تعریف نمی‌گنجانند.) ابعاد فیزیکی حاصلضرب لختی با ابعاد فیزیکی گشتاور لختی، یعنی ^{۲}(طول) × جرم، یکسان است و مقادیرشان با توزیع جرم و سمتگیری جسم نسبت به محورهای مختصات تعیین می‌شود. به‌طورکلی، حاصلضربهای لختی به این علت در اینجا ظاهر می‌شوند که محور چرخش در امتداد جهتی دلخواه قرار می‌گیرد، در حالی که در فصل قبل یکی از محورهای مختصات، محور چرخش انتخاب شده بود. برای اینکه گشتاورها و حاصلضربهای لختی کمیتهای ثابتی باشند، معمولاً لازم است دستگاه مختصات را متصل به جسمی به‌کار ببریم که با آن می‌چرخد.

عملاً، برای محاسبهٔ گشتاورها و حاصلضربهای لختی جسم صلب گسترده، مانند قبل، به جای مجموعیابی علامت انتگرال‌گیری را قرار می‌دهیم

$$I_{zz} = \int (x^{۲} + y^{۲})\, dm \qquad (۹.۱.۹ \text{ الف})$$

$$I_{xy} = -\int xy\, dm \qquad (۹.۱.۹ \text{ ب})$$

می‌توان عبارتهای مشابهی هم برای سایر Iها نوشت. قبلاً گشتاورهای لختی را، در فصل قبل، در چند حالت به‌دست آورده‌ایم. یادآوری این نکته مهم است که مقادیر گشتاورها و حاصلضربهای لختی به انتخاب دستگاه مختصات بستگی دارند.

با بهره‌گیری از نمادگذاری بالا، رابطهٔ کلی گشتاور لختی حول هر محور دلخواه (معادلهٔ ۶.۱.۹) به‌صورت زیر در می‌آید

$$\begin{aligned} I =& I_{xx}\cos^{۲}\alpha + I_{yy}\cos^{۲}\beta + I_{zz}\cos^{۲}\gamma + ۲I_{yz}\cos\beta\cos\gamma \\ &+ ۲I_{zx}\cos\gamma\cos\alpha + ۲I_{xy}\cos\alpha\cos\beta \end{aligned} \qquad (۱۰.۱.۹)$$

هر چند معادلهٔ (۱۰.۱.۹) برای دستیابی به گشتاور لختی قدری دشوار به نظر می‌رسد، برای برخی کاربردها مفید است. به‌علاوه، محاسبات را به این منظور در اینجا می‌آوریم که نشان دهیم چگونه حاصلضربهای لختی در مسئلهٔ کلی دینامیک جسم صلب وارد می‌شوند.

در اینجا، می‌خواهیم گشتاور لختی جسم صلب را به شکل نمادی فشردهٔ تانسورها یا ماتریسهای معادل بیان کنیم. از چنین نمایشی بیشتر برای صرفه‌جویی و ظرافت استفاده می‌شود. عبارتهای مربوط به متغیرهای سینماتیکی معین، آسانتر به یاد می‌مانند، و ما را با تکنیکها و روشهای قدرتمندتری برای حل مسائل پیچیده، در حرکت چرخشی اجسام صلب آماده می‌کنند.

اگر روابطی را بررسی کنیم که برای گشتاور لختی جسم صلب حول محوری دلخواه به‌دست آورده‌ایم، ظاهراً می‌توانیم آنها را به‌صورت مؤلفه‌های I_{ij} ماتریس متقارن ۳×۳ بنویسیم. کمیت I را تانسور گشتاور لختی[1] تعریف می‌کنیم که مؤلفه‌هایش در شکل ماتریسی عبارت‌اند از مقادیری که در معادلات (۷.۱.۹ الف) تا (۱۷.۱.۹ ج) آمده‌اند

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix} \qquad (۱۱.۱.۹)$$

$I_{ij} = I_{ji}$ و ماتریس متقارن است. افزون بر اینها، بردار $\mathbf{n}$ در نماد ماتریسی را می‌توان با بردار ستونی نمایش داد:

$$\mathbf{n} = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \cos\beta \\ \cos\gamma \end{pmatrix} \qquad (۱۲.۱.۹)$$

گشتاور لختی حول محوری که در امتداد $\mathbf{n}$ قرار گرفته باشد در نماد ماتریسی از این قرار است:

$$I = \tilde{\mathbf{n}}\mathbf{I}\mathbf{n}(\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma) \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \cos\beta \\ \cos\gamma \end{pmatrix} \qquad (۱۳.۱.۹)$$

که منظور از $\tilde{\mathbf{n}}$ عبارت است از «ترانهادهٔ $\mathbf{n}$». ترانهادهٔ ماتریس صرفاً از طریق «چرخیدن ماتریس حول قطرش»، یعنی عوض‌شدن جای عناصر سطر با ستون به‌دست می‌آید. در معادلهٔ (۱۳.۱.۹)،

۱. نمادگذاری به‌کاررفته برای تانسورها می‌تواند گیج‌کننده باشد. تانسورها در سراسر این کتاب درسی با حروف سیاه نوشته خواهند شد، همان نوعی که برای نمایش بردار به کار رفته است. تانسورهایی که در این فصل تعریف می‌شوند، تانسورهای درجهٔ دوم‌اند. بردارها تانسورهای درجهٔ اول‌اند. امید می‌رود، که تشخیص بین این دو از متن کتاب واضح شود.

$\tilde{\mathbf{n}}$ ماتریسی سطری است که عناصر آن با عناصر بردار ستونی $\mathbf{n}$ مساوی‌اند. معادلهٔ (۱۳.۱.۹) با معادلهٔ (۱۰.۱.۹) یکسان است. اما، به فشردگی نمادگذاری و ظرافت آن توجه کنید.

بردار تکانهٔ زاویه‌ای

در فصل ۷ نشان دادیم که آهنگ زمانی تغییر تکانهٔ زاویه‌ای سیستمی از ذرات، با گشتاور کل نیروهای خارجی وارد بر سیستم برابر است. این معادلهٔ حرکت چرخشی را می‌توان در قالب معادلهٔ (۷.۲.۷) بیان کرد:

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{N} \qquad (۱۴.۱.۹)$$

تکانهٔ زاویه‌ای سیستمی از ذرات حول مبدأ مختصات معینی در قالب معادلهٔ (۸.۲.۷) بیان شود

$$\mathbf{L} = \sum_i \mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}_i \qquad (۱۵.۱.۹)$$

این معادلات در مورد جسم صلب نیز به‌کار برده می‌شوند، که چیزی نیست مگر سیستمی از ذراتی که مکانهای نسبی آنها ثابت است. ولی قبل از به‌کاربردن معادلهٔ حرکت چرخشی باید بتوانیم تکانهٔ زاویه‌ای را حول محوری دلخواه محاسبه کنیم.

ابتدا، توجه می‌کنیم که سرعت هر ذرهٔ تشکیل‌دهندهٔ جسم صلب به‌صورت ضرب برداری بیان می‌شود

$$\mathbf{v}_i = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i \qquad (۱۶.۱.۹)$$

تکانهٔ زاویه‌ای کل جسم صلب عبارت است از مجموع تکانه‌های زاویه‌ای تمام ذرات حول مبدأ مختصات

$$\mathbf{L} = \sum_i [m_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_i] = \sum_i [m_i \mathbf{r}_i \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i)] \qquad (۱۷.۱.۹)$$

این عبارت حاوی ضرب برداری سه‌گانه است، که می‌تواند تبدیل شود به

$$[\mathbf{r}_i \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i)] = r_i^2 \boldsymbol{\omega} - \mathbf{r}_i (\mathbf{r}_i \cdot \boldsymbol{\omega}) \qquad (۱۸.۱.۹)$$

بنابراین، تکانهٔ زاویه‌ای جسم صلب را می‌توان به‌صورت زیر نوشت

$$\mathbf{L} = \sum_i m_i r_i^2 \boldsymbol{\omega} - \sum_i m_i \mathbf{r}_i (\mathbf{r}_i \cdot \boldsymbol{\omega}) \qquad (۱۹.۱.۹ \text{ الف})$$

با بهره‌گیری از این معادله به آسانی می‌توانیم مؤلفه‌های x، y، z بردار تکانهٔ زاویه‌ای را محاسبه کنیم. ولی با فلسفه‌ای که قبلاً بیان شد، این معادله را به شکل تانسوری، از طریق تعریف یک تانسور در فرایند زیر، در می‌آوریم

$$\begin{aligned}\mathbf{L} &= \left(\sum_i m_i r_i^2\right)\boldsymbol{\omega} - \left(\sum_i m_i \mathbf{r}_i\mathbf{r}_i\right)\cdot\boldsymbol{\omega} \\ &= \left[\left(\sum_i m_i r_i^2 \mathbf{1}\right) - \left(\sum_i m_i \mathbf{r}_i\mathbf{r}_i\right)\right]\cdot\boldsymbol{\omega}\end{aligned} \qquad (۱۹.۱.۹\ \text{ب})$$

که بردار $\boldsymbol{\omega}$ در جملهٔ اول به‌صورت زیر نوشته شده است

$$\mathbf{1}\cdot\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega} \qquad (۲۰.۱.۹)$$

می‌توان آن را تعریف تانسور یکه تلقی کرد

$$\mathbf{1} = \mathbf{ii} + \mathbf{jj} + \mathbf{kk} \qquad (۲۱.۱.۹)$$

می‌توان اتحاد گنجیده‌شده در معادلهٔ (۲۱.۱.۹) را با انجام ضرب اسکالر آن در بردار $\boldsymbol{\omega}$ به‌دست آورد، یعنی

$$\begin{aligned}\mathbf{1}\cdot\boldsymbol{\omega} &= (\mathbf{ii} + \mathbf{jj} + \mathbf{kk})\cdot\boldsymbol{\omega} \\ &= \mathbf{i}(\mathbf{i}\cdot\boldsymbol{\omega}) + \mathbf{j}(\mathbf{j}\cdot\boldsymbol{\omega}) + \mathbf{k}(\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\omega}) \\ &= \mathbf{i}\omega_x + \mathbf{j}\omega_y + \mathbf{k}\omega_z \\ &= \boldsymbol{\omega}\end{aligned} \qquad (۲۲.۱.۹)$$

هم تانسور یکه و هم جملهٔ دوم داخل کروشه‌های معادلهٔ (۱۹.۱.۹ ب) شامل ضرب بردارهایی‌اند که قبلاً هرگز به آنها برنخورده‌ایم. این نوع ضرب برداری (مثلاً، $\mathbf{ab}$) را ضرب دوتایی (ضرب دیاد)[1] می‌گویند. این تانسوری است که با ضرب اسکالرش در بردار دیگر $\mathbf{c}$، به همان طریقی تعریف می‌شود که تانسور یکه را در معادلات (۲۱.۱.۹) و (۲۲.۱.۹) تعریف کردیم

$$(\mathbf{ab})\cdot\mathbf{c} = \mathbf{a}(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}) \qquad (۲۳.۱.۹\ \text{الف})$$

نتیجهٔ این ضرب اسکالر یک بردار است. این عملیات را می‌توان در قالب ماتریسی به شکل زیر بیان کرد

1. dyad product

$$(\mathbf{ab})\cdot\mathbf{c}=\begin{pmatrix}a_xb_x & a_xb_y & a_xb_z\\ a_yb_x & a_yb_y & a_yb_z\\ a_zb_x & a_zb_y & a_zb_z\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_x\\ c_y\\ c_z\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}a_x(b_xc_x+b_yc_y+b_zc_z)\\ a_y(b_xc_x+b_yc_y+b_zc_z)\\ a_z(b_xc_x+b_yc_y+b_zc_z)\end{pmatrix}=\mathbf{a}(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}) \qquad (۲۳.۱.۹\ \text{ب})$$

اگر معادلهٔ (۲۳.۱.۹ الف) را از سمت چپ در بردار دیگر $\mathbf{d}$ «ضرب اسکالر» کنیم، نتیجه یک اسکالر ساده می‌شود؛ یعنی

$$\mathbf{d}\cdot(\mathbf{ab})\cdot\mathbf{c}=(\mathbf{d}\cdot\mathbf{a})(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}) \qquad (۲۴.۱.۹)$$

رسیدن به این نتیجه با بهره‌گیری از ماتریسها را برای تمرین به عهدهٔ خواننده می‌گذاریم.

هر تانسور سه‌بعدی دارای نُه مؤلفه است. مؤلفه‌ها به‌صورت زیر تولید می‌شوند:

$$T_{ij}=\mathbf{i}\cdot\mathbf{T}\cdot\mathbf{j} \qquad (۲۵.۱.۹)$$

می‌توانید خود را متقاعد کنید که مؤلفه‌های ضرب دوتایی $\mathbf{ab}$ را که در ماتریس معادلهٔ (۲۳.۱.۹ ب) ظاهر می‌شوند، می‌شود از طریق عملیاتی که در معادلهٔ (۲۵.۱.۹) آمده‌اند، تولید کرد.

با بهره‌گیری از این تعریفها، می‌توانیم مشاهده کنیم که جملهٔ داخل کروشه در معادلهٔ (۱۹.۱.۹) به‌صورت

$$\mathbf{I}=\sum_i m_ir_i^2\mathbf{1}-\sum_i m_i\mathbf{r}_i\mathbf{r}_i \qquad (۲۶.۱.۹)$$

عبارت است از تانسور گشتاور لختی که پیشتر تعریف شده و مؤلفه‌هایش را در معادلهٔ (۶.۱.۹) داده بودیم. این هم‌ارزی را می‌توان با محاسبهٔ مؤلفه‌ها به‌صورت زیر نشان داد:

$$\mathbf{i}\cdot\mathbf{I}\cdot\mathbf{i}=\mathbf{i}\cdot\left\{\sum_i[m_ir_i^2(\mathbf{ii}+\mathbf{jj}+\mathbf{kk})-m_i\mathbf{r}_i\mathbf{r}_i]\right\}\cdot\mathbf{i}$$

(۲۷.۱.۹ الف)

$$I_{xx}=\sum_i m_ir_i^2-m_ix_i^2=\sum_i m_i(y_i^2+z_i^2)$$

$$\mathbf{i}\cdot\mathbf{I}\cdot\mathbf{j}=\mathbf{i}\cdot\left\{\sum_i[m_i r_i^2(\mathbf{ii}+\mathbf{jj}+\mathbf{kk})-m_i\mathbf{r}_i\mathbf{r}_i]\right\}\cdot\mathbf{j}$$

(۲۷.۱.۹ ب)

$$I_{xy}=-\sum_i m_i x_i y_i$$

به این ترتیب، با بهره‌گیری از نمادگذاری تانسوری، بردار تکانهٔ زاویه‌ای را می‌توان از این قرار نوشت:

$$\mathbf{L}=\mathbf{I}\cdot\boldsymbol{\omega} \qquad (۲۸.۱.۹)$$

اکنون، باید یک واقعیت مهم روشن شده باشد: جهت بردار تکانهٔ زاویه‌ای ضرورتاً با امتداد محور چرخش همخط نیست؛ $\mathbf{L}$ و $\boldsymbol{\omega}$ لزوماً موازی نیستند. مثلاً $\boldsymbol{\omega}$ را در امتداد محور x و هم‌جهت با آن بگیرید ($\omega_x=\omega,\omega_y=۰,\omega_z=۰$). در این حالت رابطهٔ قبلی تبدیل خواهد شد به:

$$\begin{aligned}\mathbf{L}&=\mathbf{I}\cdot\boldsymbol{\omega}\\&=\mathbf{i}(\omega_x I_{xx}+\omega_y I_{xy}+\omega_z I_{xz})+\mathbf{j}(\omega_x I_{yx}+\omega_y I_{yy}+\omega_z I_{yz})\\&\quad+\mathbf{k}(\omega_x I_{zx}+\omega_y I_{zy}+\omega_z I_{zz})\\&=\mathbf{i}\omega I_{xx}+\mathbf{j}\omega I_{xy}+\mathbf{k}\omega I_{xz}\end{aligned} \qquad (۲۹.۱.۹)$$

به این ترتیب، $\mathbf{L}$ امکان دارد از مؤلفه‌هایی عمود بر محور x (محور چرخش) برخوردار باشد. توجه کنید که مؤلفهٔ تکانهٔ زاویه‌ای در امتداد محور چرخش، در توافق با نتایج فصل ۸، عبارت است از $L_x=\omega I_{xx}$.

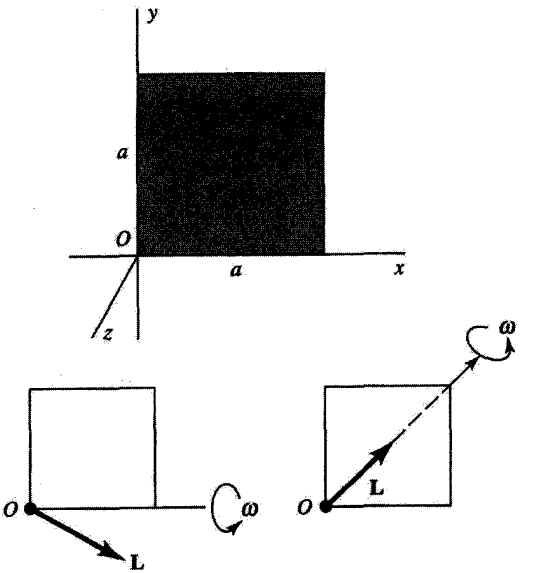
مثال ۱.۱.۹

گشتاور لختی پوستهٔ مربعی یکنواختی به ضلع a و به جرم m را حول یکی از قطرها بیابید.

حل:

محورهای مختصات را مطابق شکل ۲.۱.۹ اختیار می‌کنیم به‌طوری که پوسته در صفحهٔ xy قرار گیرد و مبدأ در رأس مربع واقع باشد. در این صورت، بنا بر مطالب فصل گذشته، داریم: $I_{xx}=I_{yy}=ma^2/۳$ و $I_{zz}=I_{xx}+I_{yy}=۲ma^2/۳$. حال برای تمام نقاطِ پوسته داریم: $z=۰$؛ بنابراین، حاصلضربهای لختی xz و yz صفر می‌شوند: $I_{xz}=I_{yz}=۰$. حاصلضرب xy لختی از طریق انتگرال‌گیری به قرار زیر به‌دست می‌آید:

$$I_{xy}=I_{yx}=-\int_۰^a\int_۰^a xy\rho dxdy=-\rho\int_۰^a\frac{a^2}{۲}ydy=-\rho\frac{a^4}{۴}$$



شکل ۲.۱.۹ پوستهٔ مربعی.

که ρ جرم واحد سطح است؛ یعنی $\rho = m/a^2$. بنابراین، می‌رسیم به

$$I_{xy} = -\frac{1}{4}ma^2$$

اکنون اجزاء اساسی لازم را برای تشکیل تانسور لختی تیغهٔ مربعی مرتبط با دستگاه مختصات xyz، مطابق شکل ۲.۱.۹، در اختیار داریم. تانسور لختی عبارت است از

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} \frac{ma^2}{3} & \frac{-ma^2}{4} & 0 \\ \frac{-ma^2}{4} & \frac{ma^2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2ma^2}{3} \end{pmatrix} = ma^2 \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{4} & 0 \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

برای محاسبهٔ گشتاور لختی این تیغه حول قطرش، مطابق معادلهٔ (۱۳.۱.۹)، به مؤلفه‌های بردار یکهٔ $\mathbf{n}$، هم‌جهت با قطر، نیاز داریم. زوایایی که این بردار با محورهای مختصات می‌سازد، عبارت‌اند از $\alpha = \beta = 45^\circ$ و $\gamma = 90^\circ$. در این صورت، کسینوسهای هادی از این قرارند: $\cos\alpha = \cos\beta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ و $\cos\gamma = 0$. به این ترتیب، معادلهٔ (۱۳.۱.۹) برای گشتاور لختی

حول یکی از قطرها، می‌دهد:

$$I = \tilde{\mathbf{n}}\mathbf{I}\mathbf{n} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{4} & 0 \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} ma^2$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{12\sqrt{2}} \\ \frac{1}{12\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} ma^2 = \frac{1}{12} ma^2$$

می‌توان از طریق انتگرال‌گیری مستقیم هم به این نتیجه رسید. اگر دانشجو بخواهد می‌تواند برای تمرین درستی این عبارت را تحقیق کند. مسئلهٔ ۲.۹ (ج) را نیز ببینید.

مثال ۲.۱.۹

تکانهٔ زاویه‌ای را حول مبدأ تیغهٔ مربعی در مثال ۱.۱.۹ زمانی بیابید که با سرعت زاویه‌ای ω حول (الف) محور x و (ب) قطری که از مبدأ می‌گذرد، می‌چرخد.

حل:

(الف) برای چرخش حول محور x داریم

$$\omega_x = \omega \qquad \omega_y = 0 \qquad \omega_z = 0$$

تکانهٔ زاویه‌ای کل عبارت است از $\mathbf{L} = \mathbf{I} \cdot \boldsymbol{\omega}$، یا در نمادگذاری ماتریسی،

$$\mathbf{L} = \mathbf{I}\boldsymbol{\omega} = ma^2 \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{4} & 0 \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = ma^2\omega \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} \\ 0 \end{pmatrix}$$

که نتیجهٔ نهایی به شکل ماتریسی به‌صورت بردار ستونی بیان شده است.

(ب) برای چرخش حول قطر مؤلفه‌های $\boldsymbol{\omega}$ عبارت‌اند از

$$\omega_x = \omega_y = \omega \cos 45^\circ = \frac{\omega}{\sqrt{2}} \qquad \omega_z = 0$$

بنابراین

$$\mathbf{L} = ma^2 \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{4} & 0 \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\omega}{\sqrt{2}} \\ \frac{\omega}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{ma^2\omega}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \frac{1}{12} \\ \frac{1}{12} \\ 0 \end{pmatrix}$$

توجه کنید که بردار تکانهٔ زاویه‌ای $\mathbf{L}$ در حالت (الف) در همان جهت بردار سرعت زاویه‌ای $\boldsymbol{\omega}$ نیست بلکه، مطابق شکل ۲.۱.۹، پایین است. در حالت (ب) هر دو بردار، مطابق شکل ۲.۱.۹، متوجه یک جهت‌اند.

بزرگی بردار تکانهٔ زاویه‌ای برای حالت (الف) با عبارت $(\mathbf{L}\cdot\mathbf{L})^{\frac{1}{2}}$ بیان می‌شود. با بهره‌گیری از نمادگذاری ماتریسی، می‌رسیم به

$$L^2 = \tilde{\mathbf{L}}\mathbf{L} = (ma^2\omega)^2 \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{4} \\ 0 \end{pmatrix} = (ma^2\omega)^2 \left[\frac{1}{9} + \frac{1}{16}\right]$$

$$= (ma^2\omega)^2 \frac{25}{144} \qquad \therefore L = ma^2\omega\frac{5}{12}$$

و برای حالت (ب)

$$L = ma^2\omega\frac{1}{12}$$

انرژی جنبشی چرخشی جسم صلب

حال انرژی جنبشی چرخشی جسم صلب کلی خود را، مطابق شکل ۱.۱.۹، محاسبه می‌کنیم. همان‌طورکه در محاسبهٔ تکانهٔ زاویه‌ای هم عمل کردیم، از این نکته سود می‌جوییم که سرعت ذرهٔ نمونه به کمک عبارت $\mathbf{v}_i = \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}_i$ بیان شود. بنابراین، انرژی جنبشی چرخشی از مجموعیابی زیر به‌دست می‌آید

$$T_{\text{چرخشی}} = \sum_i \frac{1}{2} m_i \mathbf{v}_i\cdot\mathbf{v}_i = \frac{1}{2}\sum_i (\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}_i)\cdot m_i\mathbf{v}_i \qquad (۳۰.۱.۹)$$

اکنون در هر ضرب اسکالر سه‌گانه می‌توانیم جای نقطه و ضرب خارجی را با هم عوض کنیم: $(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\cdot\mathbf{C} = \mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C})$. (بخش ۷.۱) به این ترتیب،

$$T_{\text{چرخشی}} = \frac{1}{2}\sum_i \boldsymbol{\omega}\cdot(\mathbf{r}_i\times m_i\mathbf{v}_i) = \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}\cdot\sum_i(\mathbf{r}_i\times m_i\mathbf{v}_i) \qquad (۳۱.۱.۹)$$

اما، طبق تعریف، مجموع $\sum_i(\mathbf{r}_i \times m_i\mathbf{v}_i)$ عبارت است از تکانهٔ زاویه‌ای $\mathbf{L}$. از این‌رو می‌توانیم برای انرژی جنبشی چرخشی جسم صلب بنویسیم

$$T_{\text{چرخشی}} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{L} \qquad (۳۲.۱.۹)$$

بنابر مطالب فصل ۷، انرژی جنبشی انتقالی هر سیستم برابر است با عبارت $\frac{1}{2}\mathbf{v}_{cm}\cdot\mathbf{p}$ که در آن $\mathbf{p} = m\mathbf{v}_{cm}$ تکانهٔ خطی سیستم و $\mathbf{v}_{cm}$ سرعت مرکز جرم است. بنابراین، انرژی جنبشی کل جسم صلب عبارت است از

$$T = T_{\text{چرخشی}} + T_{\text{انتقالی}} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{L} + \frac{1}{2}\mathbf{v}_{cm}\cdot\mathbf{p} \qquad (۳۳.۱.۹)$$

که $\mathbf{L}$ تکانهٔ زاویه‌ای حول مرکز جرم است.

با بهره‌گیری از نتایج بخش پیشین، می‌توانیم انرژی جنبشی چرخشی جسم صلب را برحسب تانسور گشتاور لختی از این قرار بیان کنیم:

$$T_{\text{چرخشی}} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{I}\cdot\boldsymbol{\omega} \qquad (۳۴.۱.۹)$$

یا می‌توانیم محاسبه را به‌طور صریح در قالب نمادگذاری ماتریسی انجام دهیم:

$$T_{\text{چرخشی}} = \frac{1}{2}\tilde{\boldsymbol{\omega}}\mathbf{I}\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}\omega_x & \omega_y & \omega_z\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I_{xx} & I_{xy} & I_{xz}\\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz}\\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\omega_x\\ \omega_y\\ \omega_z\end{pmatrix} \qquad (۳۵.۱.۹)$$

$$= \frac{1}{2}(I_{xx}\omega_x^2 + I_{yy}\omega_y^2 + I_{zz}\omega_z^2 + 2I_{xy}\omega_x\omega_y + 2I_{xz}\omega_x\omega_z + 2I_{yz}\omega_y\omega_z)$$

مثال ۳.۱.۹

انرژی جنبشی تیغهٔ مربعی مثال ۲.۱.۹ را به‌دست آورید.

حل:

برای حالت (الف) چرخش حول محور x، داریم

$$T_{\text{چرخشی}} = \frac{1}{2}\tilde{\boldsymbol{\omega}}\mathbf{I}\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2}ma^2\omega^2\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & -\frac{1}{4} & 0\\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{3} & 0\\ 0 & 0 & \frac{2}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 0\end{pmatrix} = \frac{1}{6}ma^2\omega^2$$

برای چرخش حول قطر، حالت (ب)، خواهیم داشت

$$T = \frac{1}{2}ma^2\omega^2 \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{4} & 0 \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}ma^2\omega^2 \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{12\sqrt{2}} \\ \frac{1}{12\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{24}ma^2\omega^2$$

۲.۹ محورهای اصلی جسم صلب

اگر دستگاه مختصاتی به‌کارگیریم که تمام حاصلضربهای لختی صفر شوند، فرمولی ریاضی که در بالا برای حرکت صلب استنتاج کردیم، به نحو چشمگیری ساده خواهد شد. به این نتیجه می‌رسیم که برای هر جسم صلب و هر نقطه‌ای که مبدأ اختیار شود، چنین دستگاه مختصاتی وجود دارد. محورهای این دستگاه مختصات را محور اصلی این جسم صلب در نقطهٔ O، یعنی مبدأ دستگاه مختصات می‌گویند. (غالباً O را در مرکز جرم اختیار خواهیم کرد.)

واضح است که اگر محورهای مختصات محورهای اصلی جسم باشند، پس $I_{xy}=I_{xz}=I_{yz}=0$. در این حالت از نمادگذاری زیر سود خواهیم جست:

$$\begin{aligned} I_{xx} &= I_1 \quad & \omega_x &= \omega_1 \quad & \mathbf{j} &= \mathbf{e}_1 \\ I_{yy} &= I_2 \quad & \omega_y &= \omega_2 \quad & \mathbf{j} &= \mathbf{e}_2 \\ I_{zz} &= I_3 \quad & \omega_z &= \omega_3 \quad & \mathbf{j} &= \mathbf{e}_3 \end{aligned} \tag{۱.۲.۹}$$

این سه گشتاور لختی I_1، I_2، و I_3 گشتاورهای اصلی جسم صلب در نقطهٔ O به‌شمار می‌آیند. در دستگاه مختصاتی که محورهایش در امتداد محورهای اصلی واقع باشند، تانسورگشتاور لختی به شکل قطری فوق‌العاده ساده‌ای در می‌آید

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix} \tag{۲.۲.۹}$$

به این ترتیب، مسئلهٔ یافتن محورهای اصلی جسم صلب معادل مسئلهٔ ریاضی قطری‌کردن ماتریس 3×3 است. تانسورگشتاور لختی را همیشه می‌توان به‌صورت ماتریس مربعی متقارن بیان کرد،

و هر ماتریس با این خصوصیت را همیشه می‌توان قطری کرد. به این ترتیب، در هر نقطه از فضا یک مجموعهٔ محورهای اصلی برای هر جسم صلبی وجود دارد.

گشتاور لختی، تکانهٔ زاویه‌ای، و انرژی جنبشی چرخشی حول هر محور چرخشی دلخواه، جملگی در دستگاه مختصاتی که محورهایش در امتداد محورهای اصلی جسم صلب باشد، به شکل بسیار ساده‌ای در می‌آیند. $\mathbf{n}$ را بردار یکه‌ای بگیرید که جهت محور چرخش جسم صلب را نشان دهد و مؤلفه‌های آن را نسبت به محورهای اصلی، با کسینوسهای هادی $(\cos\alpha\,،\cos\beta\,،\cos\gamma)$ نمایش دهید. گشتاور لختی حول آن محور عبارت است از

$$I=\tilde{\mathbf{n}}\mathbf{I}\mathbf{n}=(\cos\alpha\quad\cos\beta\quad\cos\gamma)\begin{pmatrix}I_1&0&0\\0&I_2&0\\0&0&I_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\alpha\\\cos\beta\\\cos\gamma\end{pmatrix}\qquad(۳.۲.۹)$$

$$=I_1\cos^2\alpha+I_2\cos^2\beta+I_3\cos^2\gamma$$

سرعت زاویه‌ای $\boldsymbol{\omega}$ هم جهت $\mathbf{n}$ است، و مؤلفه‌های آن نسبت به محورهای اصلی عبارت‌اند از $(\omega_1,\omega_2,\omega_3)$. تکانهٔ زاویه‌ای کل، $\mathbf{L}=\mathbf{I}\cdot\boldsymbol{\omega}$، را در این دستگاه مرجع می‌توان در قالب نمادگذاری ماتریسی از این قرار نوشت:

$$\mathbf{L}=\mathbf{I}\boldsymbol{\omega}=\begin{pmatrix}I_1&0&0\\0&I_2&0\\0&0&I_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\omega_1\\\omega_2\\\omega_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}I_1\omega_1\\I_2\omega_2\\I_3\omega_3\end{pmatrix}\qquad(۴.۲.۹)$$

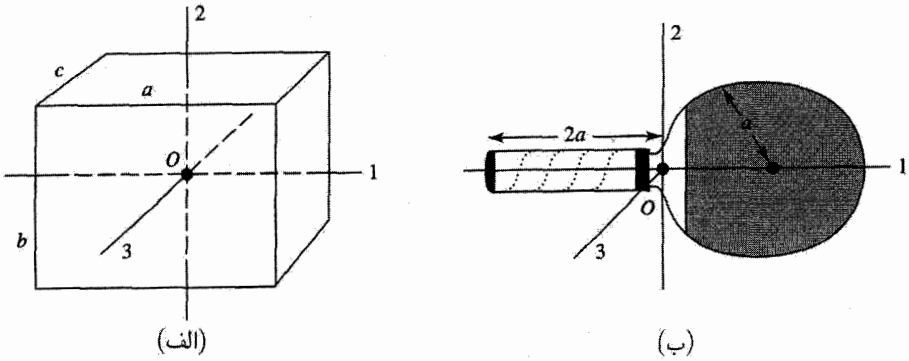
$$=\mathbf{e}_1I_1\omega_1+\mathbf{e}_2I_2\omega_2+\mathbf{e}_3I_3\omega_3$$

و سرانجام، انرژی جنبشی چرخشی، $T_{\text{چرخشی}}$، عبارت است از

$$T_{\text{چرخشی}}=\frac{1}{2}\tilde{\boldsymbol{\omega}}\mathbf{I}\boldsymbol{\omega}=\frac{1}{2}(\omega_1\;\;\omega_2\;\;\omega_3)\begin{pmatrix}I_1&0&0\\0&I_2&0\\0&0&I_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\omega_1\\\omega_2\\\omega_3\end{pmatrix}\qquad(۵.۲.۹)$$

$$=\frac{1}{2}(I_1\omega_1^2+I_2\omega_2^2+I_3\omega_3^2)$$

حال موضوع یافتن محورهای اصلی را می‌کاویم. اولاً، اگر جسم تقارنی داشته باشد، در این صورت معمولاً می‌توان از طریق وارسی، مجموعهٔ محورهای مختصاتی را اختیارکرد که یک یا چند



شکل ۱.۲.۹ محورهای اصلی برای (الف) قطعهٔ مکعب مستطیلی یکنواخت، و (ب) راکت پینگ‌پونگ.

حاصلضرب از سه حاصلضرب لختی شامل دو جزء با بزرگی مساوی ولی با علامت جبری مخالف باشند؛ و بنابراین صفر شوند. مثلاً، قطعه مکعب مستطیلی و جسم پوسته‌ای (راکت پینگ‌پونگ)، مطابق شکل ۱.۲.۹، در نقطهٔ O دارای محورهای اصلی‌اند.

مثال ۱.۲.۹

(الف) برای قطعهٔ مکعب مستطیلی که در شکل (۱.۲.۹ الف) مشاهده می‌کنید و گشتاورهای اصلی در مرکز جرم جسم O آنهایی‌اند که در جدول ۱.۳.۸ نشان داده شده‌اند، یعنی،

$$I_۱ = \frac{m}{۱۲}(b^۲ + c^۲)$$

$$I_۲ = \frac{m}{۱۲}(a^۲ + c^۲)$$

$$I_۳ = \frac{m}{۱۲}(a^۲ + b^۲)$$

که در آنها m جرم قطعه و a، b، و c طول اضلاع آن هستند.

(ب) به منظور یافتن گشتاورهای اصلی راکت پینگ‌پونگ در نقطهٔ O که در شکل (۱.۲.۹ ب) مشاهده می‌کنید، برای سادگی فرض می‌کنیم که راکت پوستهٔ دایره‌ای به شعاع a و جرم $m/۲$ باشد، که میله‌ای باریک به جرم $m/۲$ و طول $۲a$ به‌صورت دسته‌ای به آن متصل شده است. در اینجا، از نتایج بخش ۳.۸ بهره می‌گیریم؛ هر کدام از گشتاورهای اصلی، با افزودن گشتاورهای

حول محور مربوط برای دو قسمت به یکدیگر محاسبه می‌شوند؛ یعنی،

$$I = I_{\text{میله}} + I_{\text{قرص}}$$
$$I_۱ = ۰ + \frac{۱}{۴}\frac{m}{۲}a^۲ = \frac{۱}{۸}ma^۲$$
$$I_۲ = \frac{۱}{۳}\frac{m}{۲}(۲a)^۲ + \frac{۵}{۴}\frac{m}{۲}a^۲ = \frac{۳۱}{۲۴}ma^۲$$
$$I_۳ = \frac{۱}{۳}\frac{m}{۲}(۲a)^۲ + \frac{۳}{۲}\frac{m}{۲}a^۲ = \frac{۱۷}{۱۲}ma^۲$$

توجه می‌کنیم که $I_۳ = I_۱ + I_۲$، زیرا فرض می‌شود این جسم پوسته‌ای است.

مثال ۲.۲.۹

گشتاور لختی حول یکی از قطرهای مکعب یکنواختی به ضلع a را بیابید.

حل:
گشتاور لختی حول هر محور عبوری از مرکز جرم هر قطعهٔ مکعب مستطیل یکنواخت در قالب معادلهٔ (۳.۲.۹) بیان شده است. در حالت خاص، برای مکعبی یکنواخت $(a = b = c)$، گشتاورهای اصلی در نقطهٔ O جملگی با هم مساوی‌اند. به این ترتیب، از معادلهٔ (۳.۲.۹) داریم

$$I = I_۱\cos^۲\alpha + I_۲\cos^۲\beta + I_۳\cos^۲\gamma = I_۱(\cos^۲\alpha + \cos^۲\beta + \cos^۲\gamma) = I_۱ = \frac{۱}{۶}ma^۲$$

چون $\cos^۲\alpha + \cos^۲\beta + \cos^۲\gamma = ۱$، این گشتاور لختی حول هر محوری است که از مرکز جرم مکعب می‌گذرد.

تعادل دینامیکی

فرض کنید جسمی حول یکی از محورهای اصلی‌اش، مثلاً محور ۱، می‌چرخد. در این صورت $\omega = \omega_۱$، $\omega_۲ = \omega_۳ = ۰$. بنابراین، رابطهٔ تکانهٔ زاویه‌ای (معادلهٔ ۴.۲.۹) فقط به یک جمله تبدیل می‌شود، یعنی

$$\mathbf{L} = \mathbf{e}_۱ I_۱ \omega_۱ \qquad \text{(۶.۲.۹ الف)}$$

یا معادل آن

$$\mathbf{L} = I_۱ \boldsymbol{\omega} \qquad \text{(۶.۲.۹ ب)}$$

به این ترتیب، در این وضعیت بردار تکانهٔ زاویه‌ای در همان جهت بردار سرعت زاویه‌ای یا محور دوران است. بنابراین، به این نکتهٔ مهم می‌رسیم که: اگر محور چرخش یکی از محورهای اصلی باشد، بردار تکانهٔ زاویه‌ای در همان جهت و راستای محور چرخش است، در غیر این صورت، بردار تکانه زاویه‌ای جهت دیگری دارد.

مثال ۳.۲.۹

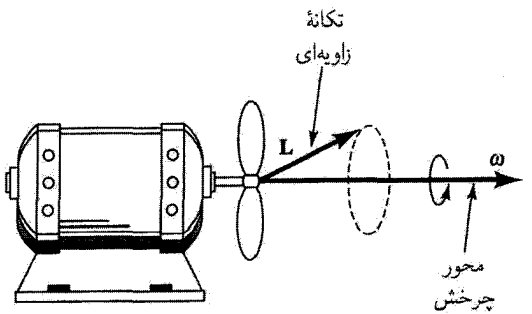
فرض کنید راکت پینگ‌پونگ در مثال ۱.۲.۹ (ب) با سرعت زاویه‌ای $|\boldsymbol{\omega}| = \omega_3$ حول محور اصلی سومش می‌چرخد (شکل ۱.۲.۹ (ب)). در این صورت، تکانهٔ زاویه‌ای $\mathbf{L}$ در قالب معادلهٔ (۶.۲.۹ الف) بیان می‌شود که در آن به‌جای اندیس ۱، اندیس ۳ می‌گذارند

$$\mathbf{L} = \mathbf{e}_3 I_3 \omega_3 = \mathbf{e}_3 \frac{17}{12} m a^2 \omega_3$$

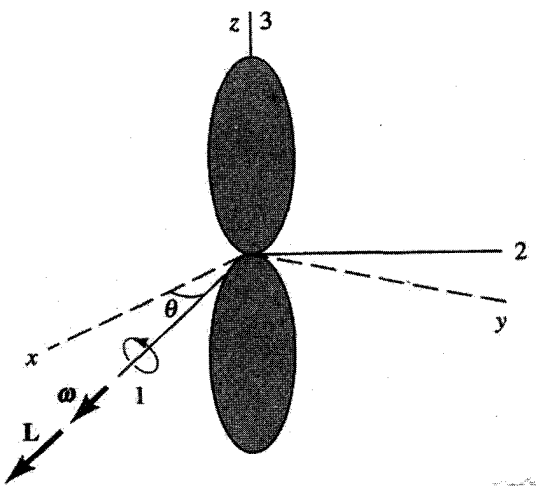
قاعدهٔ بالا در وسیله‌های چرخانی مانند پروانهٔ اتومبیل یا پرهٔ بادبزن کاربرد پیدا می‌کند. اگر این وسیله از لحاظ استاتیکی در وضعیت تعادل باشد، مرکز جرم آن روی محور چرخش قرار می‌گیرد. برای اینکه سیستم از نظر دینامیکی در وضعیت تعادل باشد، محور چرخش نیز باید یکی از محورهای اصلی باشد، به‌طوری که وقتی جسم می‌چرخد بردار تکانهٔ زاویه‌ای $\mathbf{L}$ در امتداد محور چرخش قرار گیرد. در غیر این صورت، اگر محور چرخش محور اصلی نباشد، جهت بردار تکانهٔ زاویه‌ای تغییر می‌کند و همچنان که جسم می‌چرخد، یک مخروط ترسیم می‌کند (شکل ۲.۲.۹). به این ترتیب، چون $d\mathbf{L}/dt$ با گشتاور نیروی واردآمده مساوی است، باید بر جسم گشتاور نیرویی وارد آمده باشد. جهت این گشتاور نیرو عمود بر محور است. نتیجهٔ آن واکنش وارد بر تکیه‌گاهها (یاتاقانها) است. به این ترتیب، در حالتی که پروانه یا چرخاننده از لحاظ دینامیکی در وضعیت تعادل نباشد، ممکن است ارتعاش شدید و لق‌خوردن پدید آید، حتی اگر چرخاننده از نظر استاتیکی در وضعیت تعادل باشد.

تعیین دو محور اصلی دیگر وقتی یک محور اصلی معلوم است

در موارد بسیاری جسم تقارن کافی دارد، به‌طوری که بتوان از طریق بازبینی دقیق دست‌کم یک محور اصلی را پیدا کرد؛ یعنی، می‌توان محورها را چنان اختیار کرد که دو حاصلضرب، از سه حاصلضرب لختی، صفر شوند. اگر چنین وضعی پیش بیاید، دو محور اصلی دیگر را می‌توان به طریق زیر به‌دست آورد. در شکل ۳.۲.۹ دید جلویی پرهٔ بادبزن شکل ۲.۲.۹ را مشاهده می‌کنید. محور z محور تقارن و بر محور اصلی سوم پرهٔ بادبزن منطبق است. بنابراین، برای چنین حالتهایی،



شکل ۲.۲.۹ پرهٔ بادبزن چرخان. اگر پره از لحاظ دینامیکی در وضعیت تعادل نباشد، بردار تکانهٔ زاویه‌ای، **L**، حول محور چرخش یک مخروط ترسیم می‌کند.



شکل ۳.۲.۹ تعیین دو محور اصلی دیگر (۱ و ۲) وقتی محور اصلی سوم (z) معلوم است.

داریم

$$I_{zx} = I_{zy} = 0 \qquad I_{zz} = I_3 \neq 0 \tag{۷.۲.۹}$$

دو محور اصلی دیگر بر z عمودند و از این‌رو باید در صفحهٔ xy واقع باشند. فرض کنید جسم حول یکی از این دو محور اصلی، که هنوز محورهای اصلی ناشناخته‌ای به‌شمار می‌آیند، بچرخد. در این صورت، جسم چرخان از لحاظ دینامیکی به حالت توازن درآمده است، همان‌طور که در شکل ۳.۲.۹ به وسیلهٔ پرهٔ بادبزن نموده شده است. بنابراین، بردار تکانهٔ زاویه‌ای **L** در همان جهت

بردار سرعت زاویه‌ای $\boldsymbol{\omega}$ قرار می‌گیرد:

$$\mathbf{L} = I_1 \boldsymbol{\omega} = I_1 \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (۸.۲.۹)$$

که در آن I_1 یکی از دو گشتاور لختی است که باید تعیین شود. به‌علاوه، در نمادگذاری ماتریسی، تکانهٔ زاویه‌ای $\mathbf{L}$ در دستگاه مرجع xyz، در قالب رابطهٔ زیر بیان می‌شود:

$$\mathbf{L} = \mathbf{I}\boldsymbol{\omega} = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & 0 \\ I_{xy} & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (۹.۲.۹)$$

(به یاد آورید که حاصلضربهای لختی حول محور z صفرند.) به این ترتیب، مؤلفه‌های تکانهٔ زاویه‌ای را که به کمک این دو عبارت بیان شده‌اند، مساوی هم قرار دهیم،

$$I_{xx}\omega_x + I_{xy}\omega_y = I_1\omega_x \qquad (۱۰.۲.۹ \text{ الف})$$

$$I_{xy}\omega_x + I_{yy}\omega_y = I_1\omega_y \qquad (۱۰.۲.۹ \text{ ب})$$

اگر زاویهٔ بین محور x با محور اصلی I_1 را که جسم حول آن می‌گردد، با θ نشان دهیم (شکل ۳.۲.۹)، بنابراین، $\omega_y/\omega_x = \tan\theta$؛ از این‌رو با تقسیم‌کردن طرفین این دو رابطه بر ω_x، می‌رسیم به

$$I_{xx} + I_{xy}\tan\theta = I_1 \qquad (۱۱.۲.۹ \text{ الف})$$

$$I_{xy} + I_{yy}\tan\theta = I_1\tan\theta \qquad (۱۱.۲.۹ \text{ ب})$$

با حذف I_1 بین دو معادلهٔ بالا

$$(I_{yy} - I_{xx})\tan\theta = I_{xy}(\tan^2\theta - 1) \qquad (۱۲.۲.۹)$$

از این عبارت می‌توان θ را به‌دست آورد. در روند این محاسبه باید از اتحاد مثلثاتی

$$\tan 2\theta = 2\tan\theta/(1 - \tan^2\theta)$$

سود جست. می‌رسیم به:

$$\tan 2\theta = \frac{2I_{xy}}{I_{xx} - I_{yy}} \qquad (۱۳.۲.۹)$$

در بازهٔ 0° تا 180° دو مقدار برای θ می‌یابیم که اختلافشان 90° است و در معادلهٔ فوق صدق می‌کنند. این دو مقدار جهتهای دو محور اصلی را در صفحهٔ xy مشخص می‌کنند.

در حالت $I_{xx} = I_{yy}$، داریم $\tan 2\theta = \infty$ و بنابراین دو مقدار θ برابر می‌شوند با 45° و 135°. (این حالتی است برای پوستهٔ مربعی مثال ۱.۱.۹، وقتی مبدأ در یکی از رأسها واقع باشد.) همچنین، اگر $I_{xy} = 0$، دو مقدار $\theta = 0^\circ$ و $\theta = 90^\circ$ در معادله صدق می‌کنند؛ یعنی، محورهای x و y هم اکنون محورهای اصلی‌اند.

مثال ۴.۲.۹ تعادل چرخ تاب‌خورده

فرض کنید محور چرخش (اکسل) یکی از چرخهای اتومبیل به علت نقص فنی یا تصادف نسبت به محور تقارن اندکی کج شده باشد. این نقایص را می‌توان با بهره‌گیری از وزنه‌های ترازمندکننده‌ای جبران کرد که به‌طور مناسبی در محیط چرخ کار می‌گذارند تا محور چرخ (اکسل) یکی از محورهای اصلی سیستم، یعنی چرخ به‌اضافهٔ وزنه‌ها، شود. برای سادگی کار، چرخ را قرص دایره‌ای یکنواختی به شعاع a و جرم m در نظر می‌گیریم (شکل ۴.۲.۹). محورهای $Oxyy$ را چنان اختیار می‌کنیم که قرص دایره‌ای در صفحهٔ yz قرار گیرد، به‌طوری که محور x همان محور تقارن قرص باشد. محور چرخش (اکسل) که با محور x زاویهٔ θ می‌سازد و در صفحهٔ xy قرار می‌گیرد، مطابق شکل، محور ۱ اختیار می‌شود. دو وزنهٔ ترازمندکننده، هر کدام به جرم m'، به وسیلهٔ نگهدارندهٔ سبکی به طول b به چرخ متصل می‌شوند. مطابق شکل، هر دو وزنه در صفحهٔ xy قرار می‌گیرند. اگر محورهای مختصات ۱، ۲، و ۳ محورهای اصلی تمام سیستم باشند، چرخ از لحاظ دینامیکی در وضعیت تعادل قرار می‌گیرد.

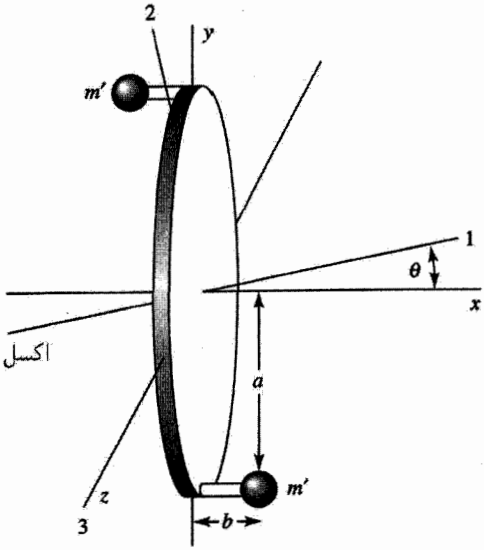
اکنون، با توجه به تقارن سیستم نسبت به صفحهٔ xy، می‌بینیم که محور z برای چرخ به‌اضافهٔ وزنه‌های ترازمندکننده محور اصلی به‌شمار می‌آید: z برای این وزنه‌ها صفر است، و صفحهٔ xy چرخ را به دو قسمت مساوی تقسیم می‌کند که برای حاصلضربهای zx و zy مختلف العلامت‌اند. در نتیجه، برای یافتن رابطهٔ بین θ و سایر پارامترها، می‌توانیم از معادلهٔ (۱۳.۲.۹) بهره بگیریم.

با توجه به مطالب فصل پیش می‌دانیم که گشتاور لختی چرخ به تنهایی حول محورهای x و y، به‌ترتیب، عبارت است از $\frac{1}{2}ma^2$ و $\frac{1}{4}ma^2$. به این ترتیب، برای چرخ به‌اضافهٔ وزنه‌ها داریم:

$$I_{xx} = \frac{1}{2}ma^2 + 2m'a^2$$

$$I_{yy} = \frac{1}{4}ma^2 + 2m'b^2$$

حاصلضرب xy تنها برای چرخ صفر است، از این‌رو لازم است برای یافتن I_{xy} در سیستم فقط



شکل ۴.۲.۹ محورهای اصلی چرخ کج (تاب‌دار) و وزنه‌های تعادلی.

وزنه‌ها را در نظر بگیریم، یعنی

$$I_{xy} = -\sum x_i y_i m_i' = -[(-b)am' + b(-a)m'] = ۲abm'$$

توجه کنید که این کمیت برای محورهای مختصاتی انتخابی ما مثبت است . در این صورت، معادلهٔ (۱۳.۲.۹) شیب محور ۱ را می‌دهد:

$$\tan ۲\theta = \frac{۲I_{xy}}{I_{xx} - I_{yy}} = \frac{۴abm'}{\frac{۱}{۴}ma^۲ + ۲m'(a^۲ - b^۲)}$$

اگر θ خیلی کوچک باشد که نوعاً هم چنین است و m' نیز در مقایسه با m کوچک باشد، در این صورت با چشم‌پوشی از جملهٔ دوم در مخرج کسر و با بهره‌گیری از این نکته که به‌ازای مقادیر کوچک m، داریم $\tan u \approx u$، رابطهٔ بالا را می‌توانیم به شکل تقریبی بیان کنیم. نتیجه عبارت خواهد شد از

$$\theta \approx ۸\frac{bm'}{am}$$

در مثالی عددی می‌گیریم، $\theta = ۱^\circ = ۰٫۰۱۷\text{rad}$، $a = ۱۸\text{cm}$، $b = ۵\text{cm}$، و $m = ۱۰\text{kg}$

و معادله را به‌ازای m' حل می‌کنیم

$$m' = \theta \frac{am}{8b} = ۰٫۰۱۷ \frac{۱۸\text{cm} \times ۱۰\text{kg}}{۸ \times ۵\text{cm}} = ۰٫۰۷۶\text{kg} = ۷۶\text{g}$$

برای وزنه‌های ترازمندکنندهٔ مورد نیاز.

تعیین محورهای اصلی از طریق قطری‌کردن ماتریس گشتاور لختی

فرض کنید جسم صلبی هیچ محور تقارنی نداشته باشد. حتی در این حالت، تانسوری که گشتاورهای لختی چنین جسمی را نشان می‌دهد، به کمک ماتریس متقارن ۳×۳ حقیقی مشخص می‌شود که می‌تواند قطری شود (معادلهٔ ۱۱.۱.۹). عناصر قطری حاصل، مقادیر گشتاورهای لختی جسم صلب به شمار می‌آیند. محورهای دستگاه مختصاتی که در آن این ماتریس قطری است محورهای اصلی جسم‌اند، زیرا تمام حاصلضربهای لختی صفر شده‌اند. بنابراین، یافتن محورهای اصلی مربوط به گشتاورهای لختی هر جسم صلب، متقارن یا نامتقارن معادل است با قطری‌کردن ماتریس گشتاور لختی آن.

چند روش برای قطری‌کردن ماتریس حقیقی متقارن وجود دارد.[۱] در اینجا شیوه‌ای کاملاً استاندارد ارائه می‌کنیم. ابتدا فرض می‌کنیم دستگاه مختصاتی یافته‌ایم که در آن تمام حاصلضربهای لختی صفر می‌شوند و تانسور لختی حاصل، در این حال با ماتریسی قطری نمایش داده می‌شود که عناصر قطری آن گشتاورهای لختی اصلی‌اند. $\mathbf{e}_i$ را بردارهای یکه‌ای در نظر بگیرید که این دستگاه مختصات را نمایش می‌دهند؛ یعنی در امتداد جهت سه محور اصلی جسم صلب باشند. اگر تانسور گشتاور لختی در یکی از این بردارهای یکه ضرب «اسکالر» شود، نتیجهٔ آن معادل ضرب سادهٔ بردار یکه در کمیت اسکالر است

$$\mathbf{I} \cdot \mathbf{e}_i = \lambda_i \mathbf{e}_i \qquad (۱۴.۲.۹)$$

کمیتهای اسکالر λ_i دقیقاً گشتاورهای لختی اصلی حول محورهای اصلی مربوط به خودشان هستند. مسئلهٔ یافتن محورهای اصلی عبارت است از مسئلهٔ یافتن بردارهای $\mathbf{e}_i$ که شرط زیر را تأمین کنند

$$(\mathbf{I} - \lambda \mathbf{1}) \cdot \mathbf{e}_i = ۰ \qquad (۱۵.۲.۹)$$

---

۱. مثلاً، ر. ک.

J. Mathews and R. L. Walker, *Mathematical Methods of Physics* W. A. Benjamin, New york, 1970.

به‌طور کلی، این شرط برای هر مجموعهٔ دلخواه بردارهای یکهٔ راست هنجار $\mathbf{e}_i$ برقرار نمی‌شود. این شرط فقط با مجموعهٔ بردارهای یکه‌ای برقرار می‌شود که در امتداد محورهای اصلی جسم قرار داشته باشند. هر دستگاه مختصات xyz دلخواه همیشه می‌تواند به طریقی چرخانده شود که محورهای آن با محورهای اصلی هم‌راستا شوند. در این صورت، بردارهای یکه‌ای که این محورهای مختصات مشخص می‌کنند، شرط معادلهٔ (۱۵.۲.۹) را تأمین می‌کنند. این شرط معادل است با صفرشدن دترمینان زیر[۱]

$$|\mathbf{I} - \lambda \mathbf{1}| = 0 \qquad (۱۶.۲.۹)$$

به بیان روشنتر، این معادله عبارت است از

$$\begin{pmatrix} (I_{xx} - \lambda) & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & (I_{yy} - \lambda) & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & (I_{zz} - \lambda) \end{pmatrix} = 0 \qquad (۱۷.۲.۹)$$

که معادلهٔ درجهٔ سومی برحسب λ است، یعنی،

$$-\lambda^3 + A\lambda^2 + B\lambda + C = 0 \qquad (۱۸.۲.۹)$$

که در آن A، B، و C توابعی از مقادیر I هستند. سه ریشهٔ λ_1، λ_2، و λ_3 عبارت‌اند از سه گشتاور لختی اصلی.

حال گشتاورهای لختی اصلی را داریم، اما وظیفهٔ مشخص‌کردن مؤلفه‌های بردارهای یکهٔ نمایانگر محورهای اصلی برحسب دستگاه مختصات اولیهٔ ما باقی می‌ماند که باید حل شود. در اینجا، می‌توانیم از این نکته بهره بگیریم که وقتی جسم صلب حول یکی از محورهای اصلیش می‌چرخد، بردار تکانهٔ زاویه‌ای در همان جهت بردار سرعت زاویه‌ای قرار می‌گیرد. زوایای یکی از محورهای اصلی را نسبت به دستگاه مختصات اولیهٔ xyz، α_1، β_1، و γ_1 می‌گیریم و می‌پنداریم که جسم حول این محور می‌چرخد. از این‌رو، بردار یکه‌ای که در جهت محور اصلی باشد، دارای مؤلفه‌های $(\cos\alpha_1, \cos\beta_1, \cos\gamma_1)$ است. تکانهٔ زاویه‌ای در قالب رابطهٔ زیر بیان می‌شود:

$$\mathbf{L} = \mathbf{I} \cdot \boldsymbol{\omega} = \lambda_1 \boldsymbol{\omega} \qquad (۱۹.۲.۹)$$

که در آن λ_1 اولین گشتاور لختی از سه گشتاور لختی (λ_1، λ_2، و λ_3) است که با حل معادلهٔ

۱. همان.

(۱۸.۲.۹) به‌دست می‌آید. معادلهٔ (۱۹.۲.۹)، در نمادگذاری ماتریسی به‌صورت زیر بیان می‌شود:

$$\begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix} \omega \begin{pmatrix} \cos\alpha_1 \\ \cos\beta_1 \\ \cos\gamma_1 \end{pmatrix} = \lambda_1 \omega \begin{pmatrix} \cos\alpha_1 \\ \cos\beta_1 \\ \cos\gamma_1 \end{pmatrix} . \qquad (۲۰.۲.۹)$$

عامل مشترک ω را از هر یک از مؤلفه‌هایش فاکتور گرفته‌ایم، به این ترتیب، بردار یکهٔ محور اصلی موردنظر مستقیماً نمایش داده شده است. معادلهٔ حاصل با شرط یادشده از طریق معادلهٔ (۱۴.۲.۹)، یعنی، ضرب اسکالر (نقطه‌ای) تانسور گشتاور لختی در بردار یکهٔ محور اصلی با حاصلضرب آن بردار در کمیت اسکالر λ_1 برابر است. یعنی،

$$\mathbf{I} \cdot \mathbf{e}_1 = \lambda_1 \mathbf{e}_1 \qquad (۲۱.۲.۹)$$

این معادلهٔ برداری را می‌توان به‌صورت ماتریسی نوشت

$$\begin{pmatrix} (I_{xx} - \lambda_1) & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & (I_{yy} - \lambda_1) & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & (I_{zz} - \lambda_1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\alpha_1 \\ \cos\beta_1 \\ \cos\gamma_1 \end{pmatrix} = 0 \qquad (۲۲.۲.۹)$$

با حل معادلات بالا، می‌توان کسینوسهای هادی را یافت. جوابها به هم وابسته نیستند و در این رابطه صدق می‌کنند.

$$\cos^2\alpha_1 + \cos^2\beta_1 + \cos^2\gamma_1 = 1 \qquad (۲۳.۲.۹)$$

به بیان دیگر، بردار حاصل، $\mathbf{e}_1$، که با این مؤلفه‌ها مشخص می‌شود، برداری یکه است. دو بردار دیگر را با تکرار فرایند قبل برای دو گشتاور اصلی λ_2 و λ_3 می‌توان یافت.

مثال ۵.۲.۹

گشتاورهای لختی اصلی تیغهٔ مربعی را حول یک رأس آن به‌دست آورید.

حل:

همان دستگاه xyz را که در ابتدا در مثال ۱.۱.۹ اختیارشده، برمی‌گزینیم. تمام گشتاورهای لختی نسبت به آن محورها را در اختیار داریم. این کمیتها همان گشتاورهای لختی مثال ۱.۱.۹ هستند.

صفرشدن دترمینان که از طریق معادلهٔ (۱۷.۲.۹) بیان شد، عبارت است از

$$\begin{pmatrix} (\frac{۱}{۳}-\lambda) & -\frac{۱}{۴} & ۰ \\ -\frac{۱}{۴} & (\frac{۱}{۳}-\lambda) & ۰ \\ ۰ & ۰ & (\frac{۲}{۳}-\lambda) \end{pmatrix} ma^۲ = ۰$$

(**گوشزد:** از عامل مشترک $ma^۲$ فاکتورگرفته‌ایم، که فقط ضرایب عددی موردنظر برای هر مقدار λ برای ما باقی می‌ماند. سپس باید عامل $ma^۲$ را به مقادیر نهایی برای گشتاورهای اصلی برگردانیم.)

با محاسبهٔ معادلهٔ دترمینانی بالا، می‌رسیم به

$$\left[\left(\frac{۱}{۳}-\lambda\right)^۲ - \left(\frac{۱}{۴}\right)^۲\right]\left(\frac{۲}{۳}-\lambda\right) = ۰$$

عامل دوم نتیجه می‌دهد:

$$\lambda_۳ = \frac{۲}{۳}(ma^۲)$$

از عامل اول می‌رسیم به:

$$\frac{۱}{۳}-\lambda = \pm\frac{۱}{۴}$$
$$\lambda_۱ = \frac{۱}{۱۲}(ma^۲)$$
$$\lambda_۲ = \frac{۷}{۱۲}(ma^۲)$$

مثال ۶.۲.۹

جهت محورهای اصلی تیغه‌ای مربعی حول یک رأس آن را به‌دست آورید.

حل:

معادلات ۲۲.۲.۹ می‌دهند

$$\left(\frac{۱}{۳}-\lambda\right)\cos\alpha - \frac{۱}{۴}\cos\beta = ۰$$
$$-\frac{۱}{۴}\cos\alpha + \left(\frac{۱}{۳}-\lambda\right)\cos\beta = ۰$$
$$\left(\frac{۲}{۳}-\lambda\right)\cos\gamma = ۰$$

باید حدس بزنیم که دست‌کم یکی از محورهای اصلی (مثلاً محور سوم) عمود بر صفحهٔ تیغه باشد، یعنی $\gamma_3 = 0^\circ$ و $\alpha_3 = \beta_3 = 90^\circ$. ما نیز باید با توجه به معادلهٔ قبل حدس بزنیم که گشتاور اصلی حول این محور باید عبارت باشد از $\lambda_3 = \frac{2}{3}(ma^2)$. چنین گزینشهایی تضمین می‌کنند که معادلهٔ سوم درگروه قبلی مانند دو معادلهٔ اول، خود به خود صفر شود، زیرا $\cos\alpha_3$ و $\cos\beta_3$ هر دو باید صفر شوند. محورهای باقیمانده را با واردکردن دوگشتاور اصلی دیگر در معادلات قبلی می‌توان تعیین کرد. بنابراین، اگر قرار دهیم $\lambda_1 = \frac{1}{12}(ma^2)$، شرایط زیر را به‌دست می‌آوریم:

$$\cos\alpha_1 - \cos\beta_1 = 0 \qquad \cos\gamma_1 = 0$$

این شرایط در صورتی تأمین می‌شوند که $\alpha_1 = \beta_1 = 45^\circ$ و $\gamma_1 = 90^\circ$. حال اگر گشتاور اصلی دیگر، یعنی $\lambda_2 = \frac{7}{12}(ma^2)$، را در معادلهٔ قبلی جایگذاری کنیم به شرایط زیر می‌رسیم

$$\cos\alpha_2 - \cos\beta_2 = 0 \qquad \cos\gamma_2 = 0$$

این شرایط تأمین می‌شوند اگر $\alpha_2 = 135^\circ$، $\beta_2 = 45^\circ$، و $\gamma = 90^\circ$. از این‌رو، دو محور اصلی در صفحهٔ تیغه قرار می‌گیرند که یکی قطر و دیگری عمود بر قطر است. محور سوم بر صفحه عمود است. بنابراین، ماتریس گشتاور لختی در این نمایش مختصاتی عبارت است از

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} \frac{1}{12} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{7}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix} ma^2$$

و محورهای اصلی متناظر در دستگاه مختصات اصلی با بردارهای زیر بیان می‌شوند،

$$\mathbf{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

این محورهای اصلی را می‌توان با چرخش سادهٔ 45° دستگاه مختصات اصلی در جهت پادساعتگرد حول محور z به‌دست آورد.

۳.۹ معادلات اویلر حرکت جسم صلب

حالا به مبحثی می‌رسیم که می‌توان آن را علم فیزیک اساسی این فصل نامید، یعنی، حرکت سه‌بعدی واقعی جسم صلب تحت‌تأثیر نیروهای خارجی. همان‌طورکه در فصل ۷ فراگرفتیم، معادلهٔ

اساسی حاکم بر جزء چرخشی حرکت هر سیستم، نسبت به دستگاه مختصات لختی عبارت است از

$$\mathbf{N} = \frac{d\mathbf{L}}{dt} \qquad (۱.۳.۹)$$

که در آن $\mathbf{N}$ برایند گشتاور واردآمده و $\mathbf{L}$ تکانهٔ زاویه‌ای است. در مورد جسم صلب دیدیم که اگر محورهای مختصات محورهای اصلی جسم باشند، $\mathbf{L}$ خیلی ساده‌تر بیان می‌شود. پس به‌طور کلی، باید از دستگاه مختصاتی سود جوییم که متصل به جسم باشد و با آن بچرخد؛ یعنی، سرعت زاویه‌ای جسم و سرعت زاویه‌ای دستگاه مختصات یکی باشد. (یک استثنا وجود دارد: اگر دو گشتاور از سه گشتاور اصلی $I_۱$، $I_۲$، و $I_۳$ با هم مساوی باشند، در این صورت لازم نیست محورهای مختصات، جسم متصل باشند تا به محورهای اصلی بدل شوند؛ به این حالت بعداً خواهیم پرداخت). در هر حالت، دستگاه مختصات ما لخت نیست.

با مراجعه به نظریهٔ دستگاههای مختصات چرخان که در فصل ۵ مطرح کردیم، پی می‌بریم که آهنگ زمانی تغییر بردار تکانهٔ زاویه‌ای در دستگاه ثابت (لخت) برحسب دستگاه چرخان از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید (معادلات (۹.۲.۵) و (۱۰.۲.۵))،

$$\left(\frac{d\mathbf{L}}{dt}\right)_{\text{ثابت}} = \left(\frac{d\mathbf{L}}{dt}\right)_{\text{چرخشی}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{L} \qquad (۲.۳.۹)$$

بنابراین، معادلهٔ حرکت در دستگاه چرخان عبارت است از

$$\mathbf{N} = \left(\frac{d\mathbf{L}}{dt}\right)_{\text{چرخشی}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{L} \qquad (۳.۳.۹)$$

که

$$\dot{\mathbf{L}} = \mathbf{I} \cdot \boldsymbol{\omega}\mathbf{L} \qquad (۴.۳.۹ \text{ الف})$$

$$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{L} = \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{I} \cdot \boldsymbol{\omega}) \qquad (۴.۳.۹ \text{ ب})$$

ضرب برداری اخیر در معادلهٔ (۴.۳.۹ ب) را می‌توان به‌صورت دترمینانی نوشت

$$\boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{I} \cdot \boldsymbol{\omega}) = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_۱ & \mathbf{e}_۲ & \mathbf{e}_۳ \\ \omega_۱ & \omega_۲ & \omega_۳ \\ I_۱\omega_۱ & I_۲\omega_۲ & I_۳\omega_۳ \end{pmatrix} \qquad (۴.۳.۹ \text{ ج})$$

که مؤلفه‌های ω در امتداد محورهای اصلی انتخاب شده‌اند. به این ترتیب، معادلهٔ (۳.۳.۹) را می‌توان در قالب ماتریسی نوشت

$$\begin{pmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_1\dot{\omega}_1 \\ I_2\dot{\omega}_2 \\ I_3\dot{\omega}_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \omega_2\omega_3(I_3 - I_2) \\ \omega_3\omega_1(I_1 - I_3) \\ \omega_1\omega_2(I_2 - I_1) \end{pmatrix} \qquad (۵.۳.۹)$$

این معادلات را معادلات اویلر حرکت جسم صلب برحسب مؤلفه‌ها در امتداد محورهای اصلی جسم می‌نامند.

جسم مقید به چرخش حول یک محور ثابت

در نخستین کاربرد معادلات اویلر، حالت خاصی از جسم صلب را در نظر می‌گیریم که مقید به چرخش حول یک محور با سرعت زاویه‌ای ثابت باشد. به این ترتیب

$$\dot{\omega}_1 = \dot{\omega}_2 = \dot{\omega}_3 = 0 \qquad (۶.۳.۹)$$

و معادلات اویلر تبدیل می‌شوند به

$$\begin{aligned} N_1 &= \omega_2\omega_3(I_3 - I_2) \\ N_2 &= \omega_3\omega_1(I_1 - I_3) \\ N_3 &= \omega_1\omega_2(I_2 - I_1) \end{aligned} \qquad (۷.۳.۹)$$

این معادلات، مؤلفه‌های گشتاور نیرویی‌اند که باید از سوی تکیه‌گاه مقیدکننده بر جسم وارد آیند.

در حالت خاص، فرض می‌کنیم محور چرخش یک محور اصلی، مثلاً محور ۱، باشد. در این صورت $\omega_2 = \omega_3 = 0$، $\omega = \omega_1$. در این حالت، هر سه مؤلفهٔ گشتاور صفر می‌شوند:

$$N_1 = N_2 = N_3 = 0 \qquad (۸.۳.۹)$$

یعنی، اصلاً گشتاوری وجود ندارد. این موضوع با مطالب بخش پیشین ما، راجع به تعادل دینامیکی، سازگار است.

۴.۹ چرخش آزاد جسم صلب: توصیف هندسی حرکت

حالتی را در نظر می‌گیریم که جسم صلب آزادانه در هر جهت حول نقطهٔ معین O می‌چرخد. در این حالت، هیچ گشتاور نیرویی بر جسم وارد نمی‌آید. این حالت چرخش آزاد است و نمونه‌ای

از آن، مثلاً، حرکت جسمی است که روی پاشنهٔ همواری در مرکز جرمش تکیه کرده است. مثال دیگر، جسم صلبی است که آزادانه و بدون اینکه تحت‌تأثیر نیرویی باشد، حرکت می‌کند یا آزادانه در میدان گرانشی یکنواخت سقوط کند، به‌طوری که هیچ گشتاور نیرویی برقرار نباشد. نقطهٔ O در این حالت مرکز جرم است.

در حالت صفربودن گشتاور نیرو، آن‌طورکه از بیرون دیده می‌شود، طبق اصل کلی بقای تکانهٔ زاویه‌ای، باید تکانهٔ زاویه‌ای جسم از لحاظ جهت و بزرگی ثابت باقی بماند. اما، نسبت به محورهای چرخان متصل به جسم، ممکن است جهت بردار تکانهٔ زاویه‌ای تغییر کند، هر چند بزرگی آن باید ثابت بماند. این نکته را می‌توان در قالب معادلهٔ زیر بیان کرد

$$\mathbf{L}\cdot\mathbf{L} = \text{ثابت} \qquad \text{(الف ۱.۴.۹)}$$

معادلهٔ (الف ۱.۴.۹) در دستگاه مختصاتی که محورهایش محورهای اصلی جسم باشند، برحسب مؤلفه‌ها به‌صورت زیر در می‌آید:

$$I_1^2\omega_1^2 + I_2^2\omega_2^2 + I_3^2\omega_3^2 = L^2 = \text{ثابت} \qquad \text{(ب ۱.۴.۹)}$$

همچنان که جسم می‌چرخد، مؤلفه‌های ω ممکن است تغییر کنند، اما این مؤلفه‌ها همواره باید در معادلهٔ (ب ۱.۴.۹) صدق کنند.

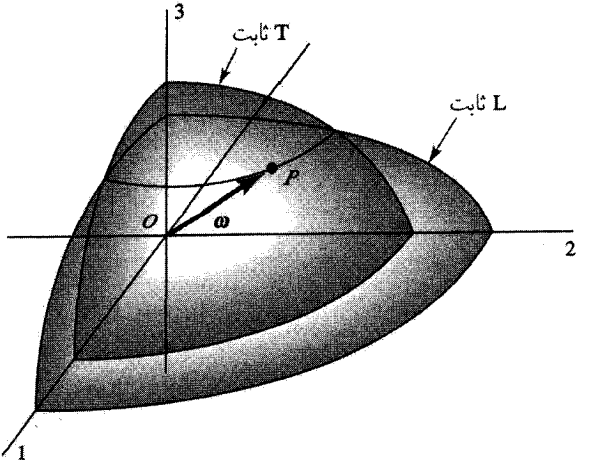
با در نظرگرفتن انرژی جنبشی رابطهٔ دومی به‌دست می‌آید. در اینجا نیز، چون گشتاور صفر است، انرژی جنبشی کل باید ثابت باقی بماند. این موضوع را می‌توان به‌صورت زیر بیان کرد

$$\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{L} = 2T_{\text{چرخشی}} = \text{ثابت} \qquad \text{(الف ۲.۴.۹)}$$

یا، معادل آن برحسب مؤلفه‌ها،

$$I_1\omega_1^2 + I_2\omega_2^2 + I_3\omega_3^2 = 2T_{\text{چرخشی}} = \text{ثابت} \qquad \text{(ب ۲.۴.۹)}$$

اکنون می‌بینیم که مؤلفه‌های ω باید همزمان در دو معادلهٔ مختلف که بیانگر ثابت‌بودن انرژی جنبشی و بزرگی تکانهٔ زاویه‌ای‌اند، صدق کنند. (این دو معادله را نیز می‌توان با بهره‌گیری از معادلات اویلر به‌دست آورد؛ ر. ک. مسئلهٔ ۷.۹.) اینها معادلات دو بیضیوارند که محورهای اصلیشان بر محورهای اصلی جسم منطبق‌اند. نسبت قطرهای اصلی اولین بیضیوار (معادلهٔ ب ۱.۴.۹) عبارت است از $I_1^{-1} : I_2^{-1} : I_3^{-1}$. نسبت قطرهای اصلی دومین بیضیوار (معادلهٔ ب ۲.۴.۹) عبارت

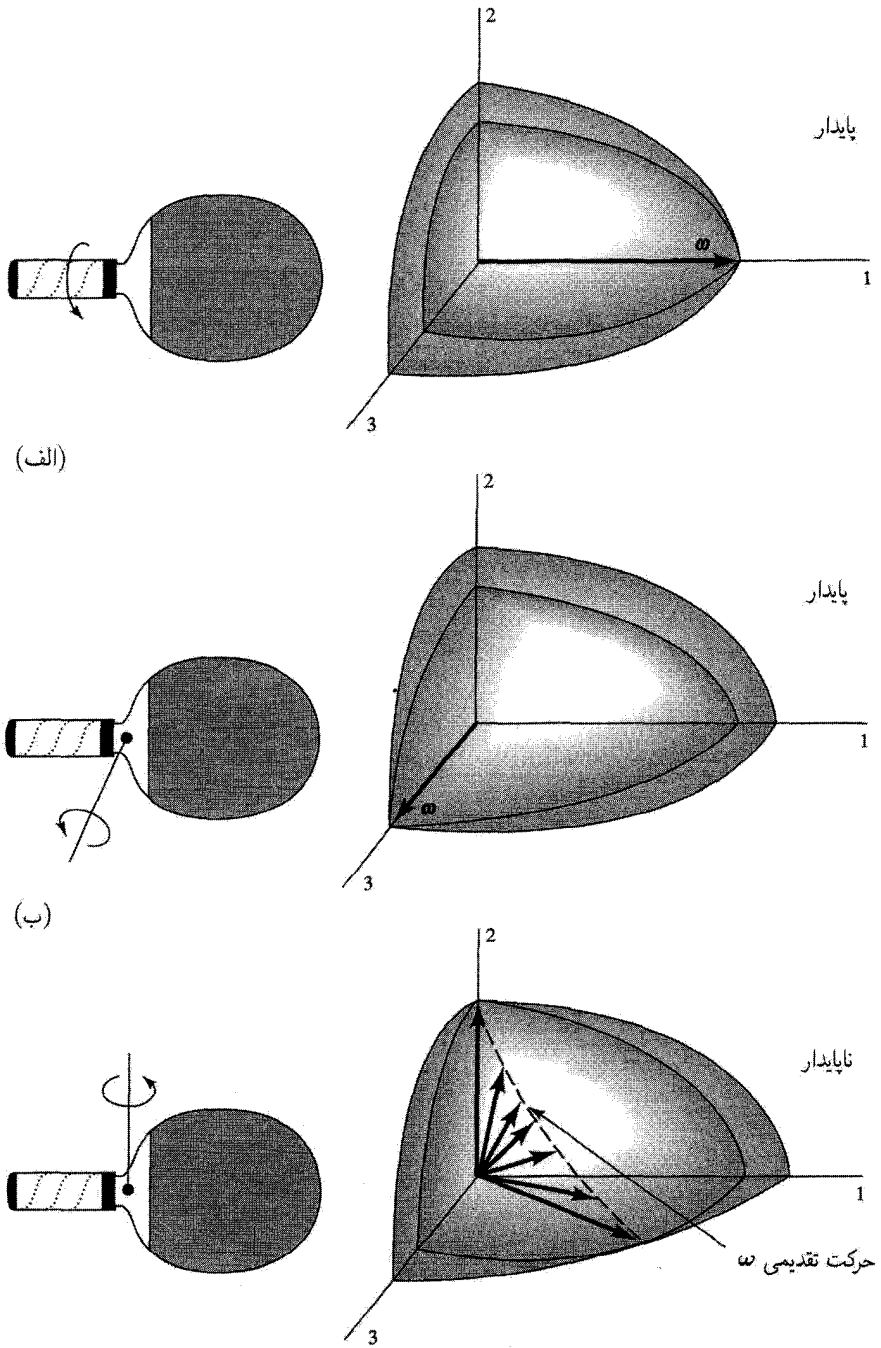


شکل ۱.۴.۹ بیضیوارهای متقاطع با L و T ثابت برای جسم صلبی که دستخوش چرخش بدون گشتاور نیروست. (برای واضح‌بودن مطالب فقط یک هشتم شکل نشان داده شده است.)

خواهد بود از $I_3^{-1/2} : I_2^{-1/2} : I_1^{-1/2}$. این بیضیوار را بیضیوار پوانسو[1] گویند. بنابراین، وقتی جسم می‌چرخد انتهای بردار سرعت زاویه‌ای یک منحنی را ترسیم می‌کند که نقطهٔ تقاطع این دو بیضیوار است. در شکل ۱.۴.۹ این منحنی تقاطع دو سطح بیضوی نشان داده شده است.

با توجه به معادلات بیضیوارهای متقاطع، می‌توان نشان داد که اگر محور اولیهٔ چرخش بر یکی از محورهای اصلی جسم منطبق باشد، منحنی تقاطع دو سطح بیضیوار به نقطه تبدیل می‌شود. به بیان دیگر، این دو بیضیوار درست در یک قطر اصلی با یکدیگر برخورد پیدا می‌کنند و جسم به‌طور پایدار حول این محور می‌چرخد. اما، این موضوع فقط وقتی صادق است که چرخش اولیهٔ حول محور با بزرگترین یا کوچکترین گشتاور لختی همراه باشد. اگر چرخش حول محور با گشتاور لختی میانی، مثلاً، محور ۲ باشد، به‌طوری که $I_3 > I_2 > I_1$، تقاطع دو بیضیوار دیگر نقطه نیست، بلکه مطابق شکل ۲.۴.۹ یک منحنی است که در اطراف هر دو بیضی کشیده می‌شود. در این حالت، چرخش ناپایدار است زیرا محور چرخش در اطراف جسم حرکت تقدیمی اجرا می‌کند (مسئلهٔ ۱۹.۹). (اگر محور اولیهٔ چرخش تقریباً، ولی نه کاملاً، در راستای یکی از محورهای پایدار باشد، در این صورت، بردار سرعت زاویه‌ای حول محور مربوط یک مخروط ترسیم می‌کند.) این نکات را می‌توان صرفاً با بالاانداختن یک جسم کشیده، کتاب، یا راکت پینگ‌پونگ به هوا نشان داد.

1. Poinsot ellipsoid



شکل ۲.۴.۹ بیضیوارهای L و T ثابت برای جسم صلبی که آزادانه حول محوری (الف) با حداقل گشتاور لختی، (ب) با حداکثر گشتاور لختی، و (ج) با گشتاور لختی متوسط می‌چرخند.

۵.۹ چرخش آزاد جسم صلب با یک محور تقارن: بررسی تحلیلی

هر چند توصیف هندسی حرکت جسم صلب که در بخش قبل آمد، در تجسم چرخش آزاد جسم صلبی مفید است که تحت‌تأثیر هیچ گشتاور نیرویی نباشد، این روش مقادیر عددی را فوراً به‌دست نمی‌دهد. اکنون به ابزار استدلالی مبادرت می‌کنیم که توصیفی است با رویکردی تحلیلی بر پایهٔ انتگرال‌گیری مستقیم معادلات اویلر.

معادلات اویلر را در حالتی خاص حل می‌کنیم که طی آن جسم یک محور تقارن دارد، به‌طوری که دوگشتاور از سه گشتاور اصلی لختی آن با هم مساوی باشند. نمونه‌ای از چنین جسمی را در شکل ۱.۵.۹ مشاهده می‌کنید. معمولاً همه می‌توانند پرتاب چنین جسمی را در تعطیلی آخر هفته در استادیومهای ورزشی شهرهای امریکا مشاهده کنند. محور درازتر و مرکزی این جسم محور تقارن آن است. این جسم کره‌وار کشیده‌ای است که معمولاً به آن توپ فوتبال امریکایی می‌گویند.

محور ۳ را محور تقارن اختیار می‌کنیم. نمادگذاریهای زیر را معرفی می‌کنیم:

گشتاور لختی حول محور تقارن $I_s = I_3$

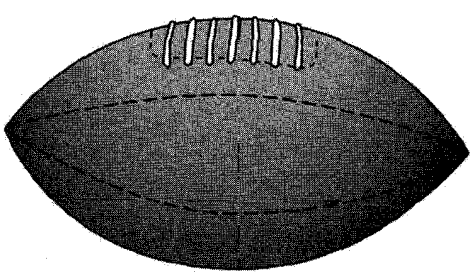
گشتاور لختی حول محورهای عمودی بر محور تقارن $I = I_1 = I_2$

برای حالت گشتاور نیروی صفر، معادلات اویلر (۵.۳.۹) عبارت‌اند از

$$I\dot{\omega}_1 + \omega_2\omega_3(I_s - I) = 0 \qquad \text{(۱.۵.۹ الف)}$$

$$I\dot{\omega}_2 + \omega_3\omega_1(I - I_s) = 0 \qquad \text{(۱.۵.۹ ب)}$$

$$I_s\dot{\omega}_3 = 0 \qquad \text{(۱.۵.۹ ج)}$$



شکل ۱.۵.۹ کره‌وار کشیده، که محور مرکزی درازتر آن محور تقارنش است؛ معمولاً توپ فوتبال امریکایی به این شکل است.

از معادلهٔ آخری نتیجه می‌شود

$$\omega_۳ = \text{ثابت} \qquad (۲.۵.۹)$$

اکنون ثابتی، Ω، را از این قرار تعریف می‌کنیم

$$\Omega = \omega_۳ \frac{I_s - I}{I} \qquad (۳.۵.۹)$$

می‌توان معادلات (۱.۵.۹ الف و ب) را به این شرح نوشت

$$\dot{\omega}_۱ + \Omega\omega_۲ = ۰ \qquad (۴.۵.۹ \text{ الف})$$

$$\dot{\omega}_۲ - \Omega\omega_۱ = ۰ \qquad (۴.۵.۹ \text{ ب})$$

برای جدا کردن متغیرها در معادلات (۴.۵.۹ الف و ب) از معادلهٔ اول نسبت به t مشتق می‌گیریم؛

$$\ddot{\omega}_۱ + \Omega\dot{\omega}_۲ = ۰ \qquad (۵.۵.۹)$$

معادلهٔ (۴.۵.۹ ب) را برحسب $\dot{\omega}_۲$ حل می‌کنیم و جواب را در معادلهٔ (۵.۵.۹) قرار می‌دهیم،

$$\ddot{\omega}_۱ + \Omega^۲\omega_۱ = ۰ \qquad (۶.۵.۹)$$

که معادلهٔ حرکت هماهنگ ساده است. جواب این معادله عبارت است از

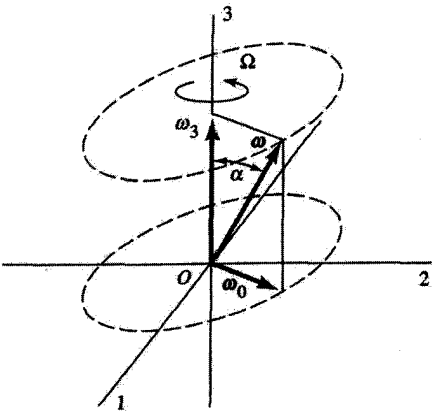
$$\omega_۱ = \omega_۰ \cos\Omega t \qquad (۷.۵.۹ \text{ الف})$$

$\omega_۰$ ثابت انتگرال‌گیری است. برای یافتن $\omega_۲$، از معادلهٔ (۷.۵.۹ الف) نسبت به t مشتق می‌گیریم و نتیجه را در معادلهٔ (۴.۵.۹ الف) می‌گنجانیم. در این صورت می‌توانیم معادلهٔ حاصل را به‌ازای $\omega_۲$ حل کنیم و برسیم به:

$$\omega_۲ = \omega_۰ \sin\Omega t \qquad (۷.۵.۹ \text{ ب})$$

به این ترتیب، $\omega_۱$، $\omega_۲$ نسبت به زمان به‌طور هماهنگ و با سرعت زاویه‌ای Ω تغییر می‌کنند و اختلاف فاز آنها $\pi/۲$ است. نتیجه می‌شود که تصویر $\boldsymbol{\omega}$ بر صفحهٔ ۱ و ۲ دایره‌ای به شعاع $\omega_۰$ با بسامد زاویه‌ای Ω را طی می‌کند (شکل ۲.۵.۹).

نتایج بالا را می‌توانیم از این قرار جمع‌بندی کنیم: در چرخش آزاد جسم صلبی دارای محور تقارن، بردار سرعت زاویه‌ای حول محور تقارن حرکتی مخروطی (حرکت تقدیمی) تشکیل می‌دهد. بنابراین، ناظری در دستگاه مرجع متصل به جسم چرخان، خواهد دید که $\boldsymbol{\omega}$ مخروطی پیرامون محور



شکل ۲.۵.۹ بردار سرعت زاویه‌ای و مؤلفه‌های آن برای حرکت تقدیمی آزاد جسمی برخوردار از محور تقارن.

تقارن جسم ترسیم می‌کند (که به آن مخروط جسم (یا مخروط قطب راه) گویند) (شکل ۴.۶.۹). بسامد زاویه‌ای این حرکت تقدیمی ثابت Ω است که در قالب معادلهٔ (۳.۵.۹) تعریف شده است. زاویهٔ بین محور تقارن (محور ۳) و محور چرخش (جهت ω) را، مطابق شکل ۲.۵.۹، با α نشان می‌دهیم. در این صورت $\omega_3 = \omega \cos\alpha$، و بنابراین

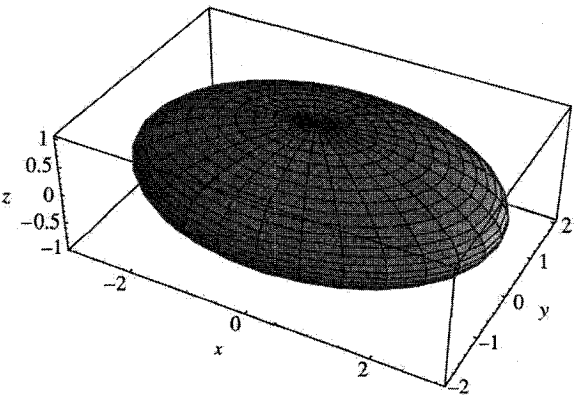
$$\Omega = \left(\frac{I_s}{I} - 1\right) \omega \cos\alpha \qquad (۸.۵.۹)$$

که Ω آهنگ حرکت تقدیمی بردار سرعت زاویه‌ای حول محور تقارن را به‌دست می‌دهد. (دربارهٔ چند مثال خاص در پایان این بخش بحث خواهیم کرد.)

اکنون می‌توانیم ارتباط بین تحلیل بالا در خصوص چرخش جسم صلب در غیاب گشتاور نیرو و توصیف هندسی بخش قبل را ملاحظه کنیم. مسیر دایره‌ای به شعاع ω_0 که انتهای بردار سرعت زاویه‌ای می‌پیماید، درست محل تقاطع دو بیضیوار شکل ۱.۴.۹ است.

* چرخش آزاد جسم صلب با سه گشتاور اصلی متفاوت: حل عددی

در بخش قبل دربارهٔ چرخش آزاد جسم صلبی بحث کردیم که یک محور تقارن داشت به‌طوری که دو محور عمود بر آن محورهای اصلی بودند که گشتاورهای لختی مساوی داشتند. در اینجا می‌خواهیم این شرط را ضعیفتر و دربارهٔ چرخش آزاد جسم صلب با گشتاورهای لختی اصلی نامساوی، $I_1 < I_2 < I_3$، بحث کنیم. جسم صلبی که در نظر می‌گیریم بیضیواری با توزیع



شکل ۳.۵.۹ بیضیوار با نیم‌قطرهای نامساوی $a > b > c$ و توزیع جرمی یکنواخت.

جرمی یکنواخت است که سطح جانبی آن در قالب معادلهٔ زیر بیان می‌شود

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \qquad (۹.۵.۹)$$

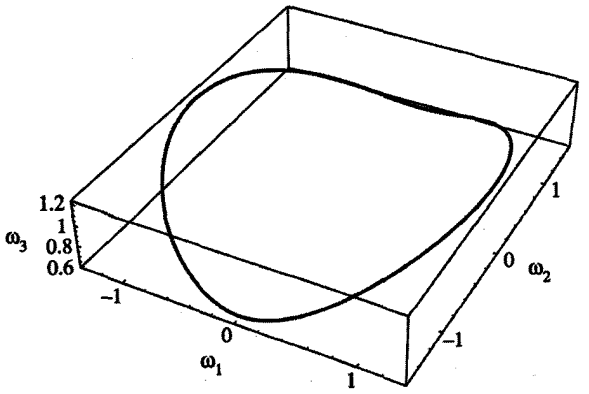
که $a > b > c$ نیم‌قطرهای بیضیوارند (شکل ۳.۵.۹). معادلات اویلر (۵.۳.۹) را برای این جسم به‌طور عددی با به‌کاربردن متماتیکا حل می‌کنیم. می‌بینیم که هر چند حرکت حاصل کمی پیچیده‌تر از حالتی است که جسم محور تقارن دارد، بسیاری از نتایج کلی آنها یکسان به‌دست می‌آیند.

اولاً، برای گشتاورهای لختی اصلی که در قالب معادلات (۷.۱.۹ الف، ب، و ج) بیان و به‌طور مناسبی به شکل انتگرالی مانند معادلهٔ (۹.۱.۹ الف) تبدیل شده‌اند، حل می‌کنیم. بنابراین

$$I_3 = I_{zz} = 8\rho \int_0^a \int_0^{b(1-x^2/a^2)^{1/2}} \int_0^{c(1-x^2/a^2-y^2/b^2)^{1/2}} (x^2 + y^2)\,dz\,dy\,dx \qquad (۱۰.۵.۹)$$

با دو رابطهٔ مشابه برای دو گشتاور اصلی دیگر I_1 و I_2. ضریب ۸ در معادلهٔ (۱۰.۵.۹) به این علت ظاهر می‌شود که ما از تقارن سود جسته‌ایم تا نیمی از انتگرال‌گیری حول هر یک از محورهای اصلی را حذف کنیم. به‌علاوه، اگر قرار دهیم $8\rho = 1$ از عمومیت مسئله نکاسته‌ایم، زیرا به هر حال وقتی معادلات اویلر را به‌کار می‌بریم حذف می‌شود، چرا که معادلات اویلر در غیاب گشتاورهای نیروی خارجی همگن‌اند.

برای ارزیابی جرم و سه گشتاور لختی اصلی (به یاد آورید که، $8\rho = 1$) در مورد بیضیواری که نیم‌قطرهایش $a = 3$، $b = 2$، و $c = 1$ هستند. تابع *Mathematica's NIntegrate* (بخش ۱.۸)، را به‌کار برده‌ایم.



شکل ۴.۵.۹ چرخش آزاد بیضیوار شکل ۳.۵.۹، که در فضای فاز ترسیم شده است.

در این صورت معادلات اویلر برای چرخش آزاد این بیضیوار به‌صورت زیر در می‌آید

$$\begin{aligned} A_۱\omega_۲\omega_۳ &= \dot{\omega}_۱ \\ A_۲\omega_۳\omega_۱ &= \dot{\omega}_۲ \\ A_۳\omega_۱\omega_۲ &= \dot{\omega}_۳ \end{aligned} \qquad (۱۱.۵.۹)$$

که $A_۱ = (I_۲ - I_۳)/I_۱ = -۰٫۶$، $A_۲ = (I_۳ - I_۱)/I_۲ = ۰٫۸$، و $A_۳ = (I_۱ - I_۲)/I_۳ = -۰٫۳۸۵$. این دستگاه سه معادلهٔ دیفرانسیل را به‌طور عددی و با فراخوان *Mathematica's NDSolve* حل می‌کنیم (بخش ۴.۷، سیارکهای ترواییِ). فراخوان مناسب عبارت است از

$$\text{NDSolve}[\{\text{شرایط اولیه، معادلات}\}, \{\omega_۱, \omega_۲, \omega_۳\}, \{t, t_{\min}, t_{\max}\}]$$

شرایط اولیه را $[\omega_۱(۰), \omega_۲(۰), \omega_۳(۰)] = (۱, ۱, ۱)\text{s}^{-۱}$ می‌گیریم. بازهٔ زمانی $[۰ - t_{\max}]$ را $۳٫۳\pi$ یا تقریباً مساوی یک زمان تناوب حرکت حاصل اختیار می‌کنیم که در شکل ۴.۵.۹ طی نموداری از فضای فاز نشان داده شده است.

به شباهت این نمودار با شکل ۲.۵.۹، که حرکت تقدیمی بیضیوار را نشان می‌دهد و سه محورش محورهای تقارن‌اند، توجه کنید. در آن حالت $\omega_۱$ و $\omega_۲$ حول $\omega_۳$ حرکت تقدیمی اجرا می‌کنند که $\omega_۳$ ثابت باقی می‌ماند. اما در اینجا محور ۳، محور اصلی است که حول آن گشتاور لختی بزرگترین مقدار را دارد و سرعت زاویه‌ای حول آن همواره ثابت نیست، بلکه نسبت به $\omega_۱$ و

ω_2 نزدیکتر به مقدار ثابت باقی می‌ماند. این حرکت عبارت است از حرکتی که ω_1 و ω_2 حول ω_3 حرکت تقدیمی اجرا می‌کنند که خود ω_3 اندکی می‌لرزد و لمبر می‌خورد.

تحلیل بخش ۴.۹ در اینجا نیز به‌کار می‌آید. هم انرژی جنبشی، T، و هم بزرگی تکانهٔ زاویه‌ای، که به‌صورت $\mathbf{L}\cdot\mathbf{L} = L^2$ بیان می‌شود، ثابتهای حرکت‌اند. به‌طوری که در بخش ۴.۹ توضیح داده شد، هر یک از این مقادیر بردار سرعت زاویه‌ای را مقید می‌کنند تا به دو رویهٔ بیضیوار (معادلات (۱.۴.۹ ب) و (۲.۴.۹ ب)) ختم شوند که در قالب معادلات زیر بیان می‌کنیم

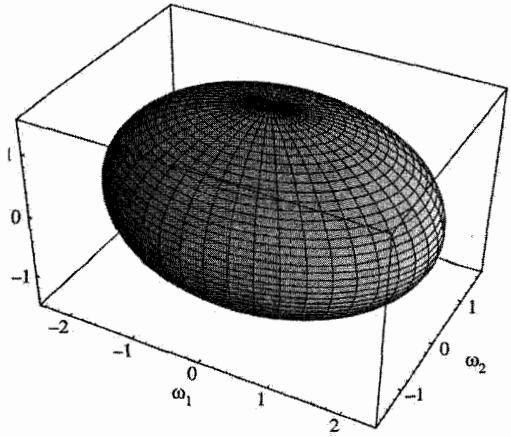
$$\frac{\omega_1^2}{(2T/I_1)} + \frac{\omega_2^2}{(2T/I_2)} + \frac{\omega_3^2}{(2T/I_3)} = 1 \qquad (12.5.9)$$

$$\frac{\omega_1^2}{(L/I_1)^2} + \frac{\omega_2^2}{(L/I_2)^2} + \frac{\omega_3^2}{(L/I_3)^2} = 1 \qquad (13.5.9)$$

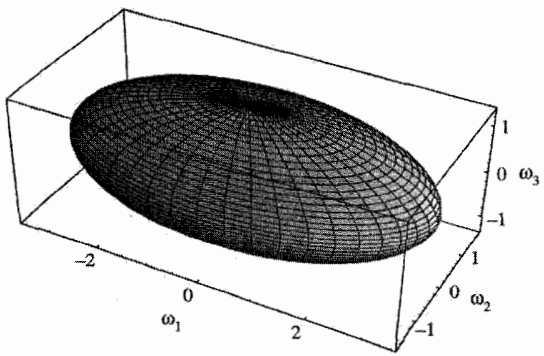
مقادیر انرژی جنبشی و بزرگی تکانهٔ زاویه‌ای را شرایط اولیهٔ مربوط به ω_1، ω_2، و ω_3 که قبلاً داده شده‌اند، تعیین می‌کنند. بیضیوارهای حاصل را با T و L^2 ثابت در شکلهای ۵.۵.۹ (الف) و (ب) مشاهده می‌کنید. در شکل ۵.۵.۹ (ج) نمودار بیضیوارهای T و L^2 ثابت همراه با تقاطع حاصل آنها را مشاهده می‌کنید. بردار سرعت زاویه‌ای مقید است در امتداد این خط قرار گیرد تا به‌طور همزمان شرایطی را تأمین کند که T و L^2 در خلال حرکت ثابت باقی بمانند. بررسی دقیق تقاطع آشکار می‌سازد که این جواب با جواب معادلات اویلر که منحنی نمایش تغییرات آن در شکل ۴.۵.۹ رسم شده است، همان‌طور که انتظار می‌رفت، یکسان است.

۶.۹ توصیف چرخش جسم صلب نسبت به دستگاه مختصات ثابت: زاویه‌های اویلری

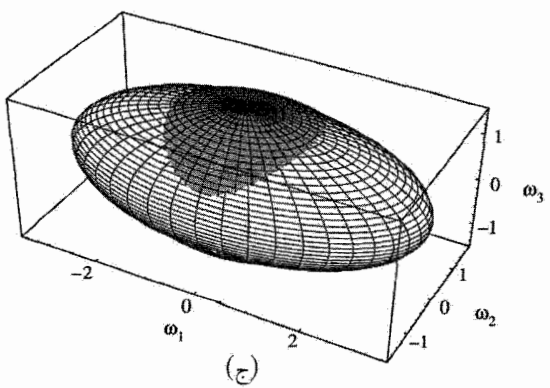
در تحلیل پیشین چرخش آزاد جسم صلب، حرکت تقدیمی آن نسبت به مجموعهٔ محورهای اصلی متصل به جسم که با آن هم می‌چرخند، توصیف شد، برای توصیف حرکت نسبت به ناظر خارج از جسم، باید مشخص کنیم سمتگیری جسم در فضا نسبت به دستگاه مختصات ثابت چگونه با زمان تغییر می‌کند. برای انجام این‌کار راه و روش منحصربه‌فردی وجود ندارد، اما در الگویی که عموماً انتخاب می‌شود، سه زاویهٔ ϕ، θ، و ψ به‌کار می‌گیرند تا بین جهت سه محور اصلی جسم صلب نسبت به محورهای ثابت در فضا ارتباط برقرار شود. این الگو را ابتدا لئونارد اویلر (۱۷۸۳ـ۱۷۰۷) در سال ۱۷۷۶ منتشر کرد که نمودار آن را در شکل ۱.۶.۹ مشاهده می‌کنید. دستگاه مختصات که با $O123$ علامت‌گذاری شده است، با سه محور اصلی متصل به جسم تعریف می‌شود و همراه



(الف)

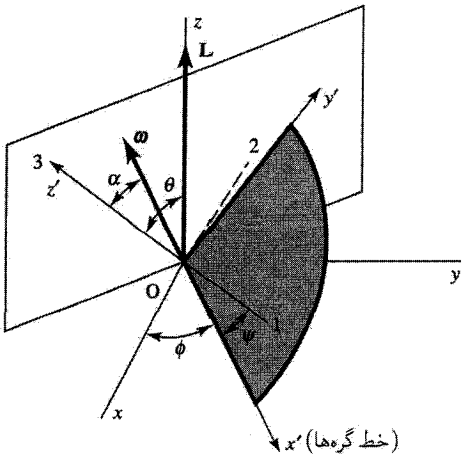


(ب)



(ج)

شکل ۵.۵.۹ (الف) بیضیوار یا T ثابت برای چرخش آزاد بیضیوار جرم شکل ۱۳.۵.۹. (ب) بیضیوار با L^2 ثابت برای چرخش آزاد بیضیوار جرم شکل ۳.۵.۹. (ج) بیضیوارهای T و L^2 ثابت که همراه با هم ترسیم شده‌اند تا تقاطع آنها رد مسیر فضای فاز را برای بیضیوار با چرخش آزادانهٔ شکل ۳.۵.۹ نشان دهد.

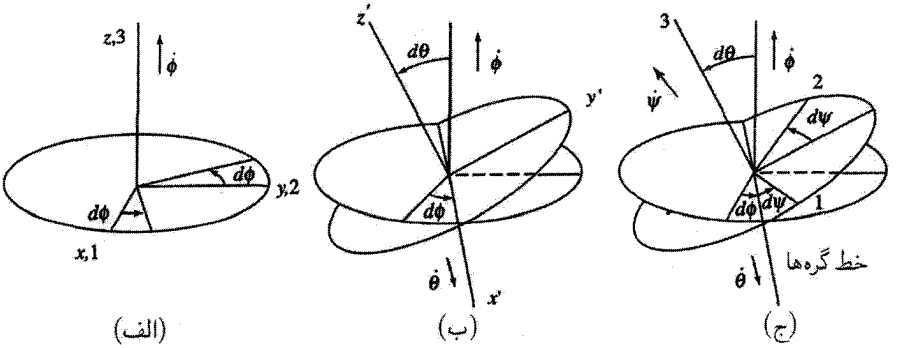


شکل ۶.۵.۹ نمودار نمایانگر رابطهٔ زاویه‌های اویلر با محورهای مختصات ثابت و چرخان.

با جسم می‌چرخد. دستگاه مختصات ثابت در فضا با $Oxyz$ علامت‌گذاری می‌شود. دستگاه چرخان سومی، $Ox'y'z'$، ارتباط بین محورهای اصلی متصل به جسم را برقرار می‌کند و محورهای تثبیت‌شده را نیز در فضا نشان می‌دهد که به این صورت تعریف می‌کنیم: محور z' بر محور ۳ جسم یا محور تقارن آن منطبق است. محور x' خط تقاطع صفحهٔ جسم ۱ و ۲ با صفحهٔ ثابت xy به‌شمار می‌آید؛ این محور خط گره‌ها نامیده می‌شود. زاویهٔ بین محور x و x' با ϕ و زاویهٔ بین z و z' (یا محور ۳) با θ نشان داده شده است. چرخش جسم حول محور ۳ با زاویهٔ بین محور ۱ و محور x' و ψ تعیین می‌شود. سه زاویهٔ ϕ، θ، و ψ به‌طور کامل سمتگیری جسم در فضا را مشخص می‌کنند زاویه‌های اویلری نامیده می‌شوند.

بردار سرعت زاویه‌ای جسم، $\boldsymbol{\omega}$، عبارت است از جمع برداری سه سرعت زاویه‌ای که به آهنگ تغییر سه زاویهٔ اویلری مربوط می‌شوند. به این موضوع می‌توان با ملاحظهٔ تغییر بینهایت کوچک در سمتگیری زاویه‌ای جسم پی برد که وقتی اتفاق می‌افتد که جسم در بازهٔ زمانی بینهایت کوچک می‌چرخد. فرض کنید در لحظهٔ $t = 0$ سمتگیری دستگاه جسم (دستگاه مختصات $O123$) بر دستگاه $Oxyz$ ثابت منطبق باشد. در مدت‌زمان کوتاه بعدی dt، جسم صلب به اندازهٔ زاویهٔ بینهایت کوچک $\boldsymbol{\omega} dt = d\boldsymbol{\beta}$ می‌چرخد. زاویهٔ بینهایت کوچک چرخش را به‌صورت بردار نوشته‌ایم. سرعت زاویه‌ای، $\boldsymbol{\omega}$، جسم صلب چرخان عبارت است از چرخش به اندازهٔ زاویه‌ای بینهایت کوچک در مدت‌زمانی بینهایت کوتاه و کمیتی است برداری.[۱] بنابراین، چرخش به اندازهٔ

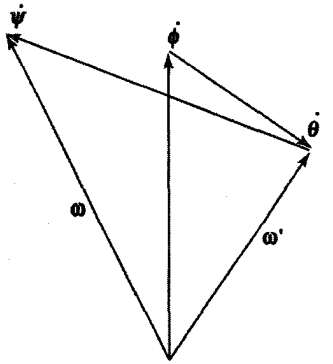
۱. در واقع، این یک شبه‌بردار است. بردارها تحت پاریته تغییر علامت می‌دهند. شبه‌بردارها تغییر علامت نمی‌دهند. این اختلاف در رفتار آنها به بحث ما در اینجا مربوط نمی‌شود.



شکل ۱.۶.۹ ایجاد هرگونه چرخش بینهایت کوچک دلخواه جسم صلب به‌صورت جمع برداری چرخشهای بینهایت کوچک از طریق زاویه‌های اویلری آزاد، (الف) $d\boldsymbol{\phi}$، (ب) $d\boldsymbol{\theta}$، و (ج) $d\boldsymbol{\psi}$.

زاویهٔ بینهایت کوچک در مقدار زمان بینهایت کوتاه نیز بردار است که متوجه همان جهت بردار سرعت زاویه‌ای متناظر آن است. این جهت از طریق قاعدهٔ دست راست قراردادی تعیین می‌شود. چرخش به اندازهٔ $d\boldsymbol{\beta}$ می‌تواند، به ترتیب، از طریق زاویه‌های $d\boldsymbol{\phi}$، $d\boldsymbol{\theta}$، و $d\boldsymbol{\psi}$ به سه چرخش بینهایت کوچک متوالی «تجزیه شود». ابتدا، با شروع از $t = ۰$، محور $O۱۲۳$ را پادساعتگرد حول محور z به اندازهٔ $d\boldsymbol{\phi}$ بچرخانید. این چرخش در شکل ۲.۶.۹ (الف) نشان داده شده است. با این چرخش، مطابق شکل ۲.۶.۹ (ب)، محور ۱ بر محور x' منطبق می‌شود. جهت $d\boldsymbol{\phi}$ در امتداد محور ثابت z واقع است؛ جهتی که پیچ راستگرد در نتیجهٔ پیچاندن پادساعتگرد باید جلو برود. آنگاه محورهای $O۱۲۳$ را در جهت پادساعتگرد حول محور x' به اندازهٔ زاویهٔ $d\boldsymbol{\theta}$ بچرخانید؛ این چرخش را در شکل ۲.۶.۹ (ب) مشاهده می‌کنید. چرخش اخیر محور ۳ را بر محور z' منطبق می‌کند. جهت $d\boldsymbol{\theta}$ در امتداد محور x' است. سرانجام، محورهای $O۱۲۳$ را پادساعتگرد حول محور z'، به اندازهٔ زاویهٔ $d\boldsymbol{\psi}$، بچرخانید. این چرخش را در شکل ۲.۶.۹ (ج) مشاهده می‌کنید و جهت آن در امتداد محور z' است. سمتگیری حاصل دستگاه مختصات «جسم»، $O۱۲۳$، نسبت به دستگاه مختصات «ثابت»، $Oxyz$، چنان است که در شکل ۱.۶.۹ نشان داده شده است؛ تنها فرق آن به این ترتیب است که در این مورد زاویه‌ها بینهایت کوچک‌اند. آشکار است که این سمتگیری نتیجهٔ چرخش واقعی جسم به اندازهٔ $d\boldsymbol{\beta}$ با سرعت زاویه‌ای $\boldsymbol{\omega}$ است، به‌طوری که

$$\begin{aligned} d\boldsymbol{\beta} &= \boldsymbol{\omega}\, dt = d\boldsymbol{\phi} + d\boldsymbol{\theta} + d\boldsymbol{\psi} \\ \therefore \boldsymbol{\omega} &= \dot{\boldsymbol{\phi}} + \dot{\boldsymbol{\theta}} + \dot{\boldsymbol{\psi}} \end{aligned} \qquad (۱.۶.۹)$$



شکل ۲.۶.۹ نمودار برداری نمایانگر رابطهٔ بین سرعتهای زاویه‌ای $\dot{\phi}$، $\dot{\theta}$، $\dot{\psi}$، ω، و ω'.

در اکثر مسائلی که شامل حرکت چرخشی جسم صلب‌اند، وقتی معادلات حرکت در دستگاههای مرجع چرخان $O123$ یا $Ox'y'z'$ نوشته شوند، اثباتشان آسانتر است. به هر حال، حرکت چرخشی جسم در هر یک از این دو دستگاه مختصات مستقیماً به دستگاه مختصات ثابت فضایی مرتبط می‌شود، چنانچه معادلات حرکت را برحسب زاویه‌های اویلر و مشتقات زمانی آنها بیان کنیم. برای نخستین گام به طرف ایجاد معادلات حرکت جسم چرخان (از حرکت انتقالی آن چشم می‌پوشیم) لازم است سه مؤلفهٔ سرعت زاویه‌ای $\boldsymbol{\omega}$ را در هر یک از این دستگاههای مختصات برحسب این متغیرها، پیدا کنیم. با بررسی شکلهای ۱.۶.۹ و ۲.۶.۹ مشاهده می‌کنیم که $\boldsymbol{\omega}$ شامل چرخش حول محور ۳ با سرعت زاویه‌ای $\dot{\psi}$ است که با چرخش دستگاه پریم‌دار که سرعت زاویه‌ای آن‌را $\boldsymbol{\omega}'$ می‌نامیم، برهم‌نهاده شده باشد (شکل ۳.۶.۹). واضح است که $\boldsymbol{\omega}'$ عبارت است از جمع برداری $\dot{\phi}$ و $\dot{\boldsymbol{\theta}}$ و در قالب رابطه‌ای از این قرار بیان می‌شود:

$$\boldsymbol{\omega}' = \dot{\phi} + \dot{\boldsymbol{\theta}} \qquad (۲.۶.۹)$$

اکنون می‌توانیم مؤلفه‌های $\boldsymbol{\omega}'$ را در دستگاه $Ox'y'z'$ پیدا کنیم. ابتدا، مؤلفه‌های مربوط به $\dot{\phi}$، $\dot{\boldsymbol{\theta}}$، و $\dot{\psi}$ را می‌نویسیم

$$\begin{aligned}
&\dot{\phi}_{x'} = ۰ && \dot{\theta}_{x'} = \dot{\theta} && \dot{\psi}_{x'} = ۰ \\
&\dot{\phi}_{y'} = \dot{\phi}\sin\theta && \dot{\phi}_{y'} = ۰ && \dot{\psi}_{y'} = ۰ \\
&\dot{\phi}_{z'} = \dot{\phi}\cos\theta && \dot{\phi}_{z'} = ۰ && \dot{\psi}_{z'} = \dot{\psi}
\end{aligned} \qquad (۳.۶.۹)$$

بنابراین

$$\begin{aligned}\omega'_{x'} &= \dot{\phi}_{x'} = \dot{\theta}\\ \omega'_{y'} &= \dot{\phi}_{y'} = \dot{\phi}\sin\theta\\ \omega'_{z'} &= \dot{\phi}_{z'} = \dot{\phi}\cos\theta\end{aligned} \tag{۴.۶.۹}$$

اکنون اختلافهای $\boldsymbol{\omega}$ با $\boldsymbol{\omega}'$ فقط در آهنگ چرخش $\dot{\boldsymbol{\psi}}$ حول محور z' است. بنابراین، مؤلفه‌های $\boldsymbol{\omega}$ در دستگاه پریم‌دار عبارت‌اند از

$$\begin{aligned}\omega_{x'} &= \dot{\theta}\\ \omega_{y'} &= \dot{\phi}\sin\theta\\ \omega_{z'} &= \dot{\phi}\cos\theta + \dot{\psi}\end{aligned} \tag{۵.۶.۹}$$

سپس، مؤلفه‌های $\dot{\boldsymbol{\phi}}$، $\dot{\boldsymbol{\theta}}$، و $\dot{\boldsymbol{\psi}}$ را در دستگاه $O۱۲۳$ بیان می‌کنیم

$$\begin{aligned}
&\dot{\phi}_۱ = \dot{\phi}_{y'}\sin\psi = \dot{\phi}\sin\theta\sin\psi && \dot{\theta}_۱ = \dot{\theta}_{x'}\cos\psi = \dot{\theta}\cos\psi && \dot{\psi}_۱ = ۰\\
&\dot{\phi}_۲ = \dot{\phi}_{y'}\cos\psi = \dot{\phi}\sin\theta\cos\psi && \dot{\theta}_۲ = -\dot{\theta}_{x'}\sin\psi = -\dot{\theta}\sin\psi && \dot{\psi}_۲ = ۰\\
&\dot{\phi}_۳ = \dot{\phi}\cos\theta && \dot{\theta}_۳ = ۰ && \dot{\psi}_۳ = \dot{\psi}
\end{aligned} \tag{۶.۶.۹}$$

و سپس آنها را برای به‌دست‌آوردن مؤلفه‌های $\boldsymbol{\omega}$ در دستگاه $O۱۲۳$ به‌کار می‌بریم

$$\begin{aligned}\omega_۱ &= \dot{\phi}\sin\theta\sin\psi + \dot{\theta}\cos\psi\\ \omega_۲ &= \dot{\phi}\sin\theta\cos\psi - \dot{\theta}\sin\psi\\ \omega_۳ &= \dot{\phi}\cos\theta + \dot{\psi}\end{aligned} \tag{۷.۶.۹}$$

(در حال حاضر به استفاده از معادلات (۷.۶.۹) نیازی نداریم، ولی بعداً به آنها رجوع خواهیم کرد.)

حال در مورد موضوع بحث کنونی ما که جسم تحت‌تأثیر هیچ گشتاور نیرویی نیست، بزرگی بردار تکانهٔ زاویه‌ای، $\mathbf{L}$، ثابت و جهت آن نیز در دستگاه $Oxyz$ ثابت است. محور z را در جهت $\mathbf{L}$ می‌گیریم. این جهت را خط تغییرناپذیر می‌گویند. با توجه به شکل ۱.۶.۹ می‌بینیم که مؤلفه‌های $\mathbf{L}$ در دستگاه پریم‌دار عبارت‌اند از

$$\begin{aligned}L_{x'} &= ۰\\ L_{y'} &= L\sin\theta\\ L_{z'} &= L\cos\theta\end{aligned} \tag{۸.۶.۹}$$

در اینجا نیز بررسی خود را به حالتی منحصر می‌کنیم که جسم دارای یک محور تقارن، یعنی محور ۳، باشد. چون محورهای x' و y' در صفحهٔ ۱ و ۲ قرار می‌گیرند، و محور z' بر محور ۳ منطبق است، در این صورت محورهای پریم‌دار نیز محورهای اصلی به‌شمار می‌آیند. در واقع، گشتاورهای اصلی یکسان‌اند: $I_1 = I_2 = I_{x'x'} = I_{y'y'} = I$ و $I_3 = I_{z'z'} = I_s$.

حال معادلهٔ اول از معادلات (۵.۶.۹) و (۸.۶.۹) را در نظر می‌گیریم که مؤلفهٔ x' سرعت زاویه‌ای و تکانهٔ زاویه‌ای جسم، یعنی صفر، را به‌دست می‌دهد. از این دو معادله پی می‌بریم که $\dot{\theta} = 0$. بنابراین، θ ثابت است و $\boldsymbol{\omega}$، که هیچ‌گونه مؤلفهٔ x' ندارد، باید مطابق شکل در صفحهٔ $y'z'$ قرار گیرد. زاویهٔ بین بردار سرعت زاویه‌ای $\boldsymbol{\omega}$ و محور z' را با α نشان می‌دهیم. در این صورت، علاوه بر معادلات (۵.۶.۹) و (۸.۶.۹)، به معادلاتی به‌صورت زیر می‌رسیم:

$$\omega_{y'} = \omega \sin\alpha \qquad \omega_{z'} = \omega \cos\alpha \qquad \text{(۹.۶.۹ الف)}$$

$$L_{y'} = I\omega \sin\alpha \qquad L_{z'} = I_s \omega \cos\alpha \qquad \text{(۹.۶.۹ ب)}$$

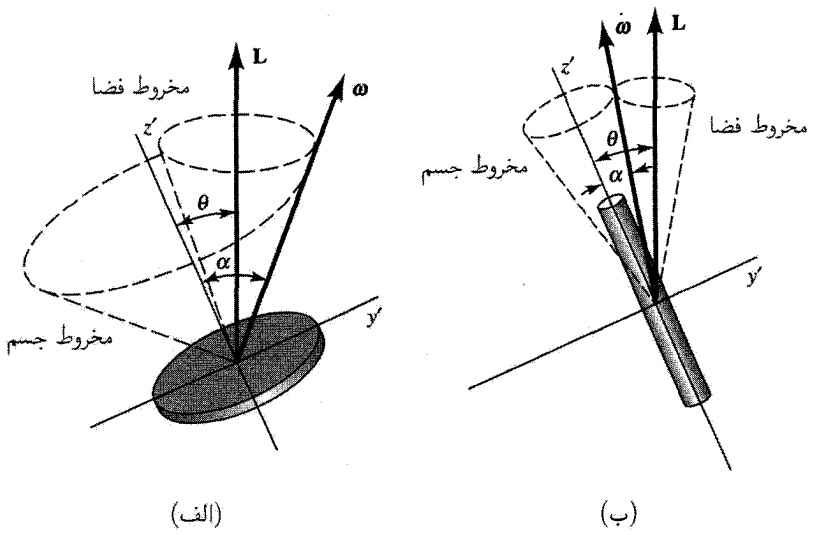
بنابراین

$$\frac{L_{y'}}{L_{z'}} = \tan\theta = \frac{I}{I_s}\tan\alpha \qquad \text{(۱۰.۶.۹)}$$

که رابطهٔ بین زاویه‌های θ و α را می‌دهد.

بنابر نتیجهٔ بالا، بسته به اینکه I از I_s کوچکتر یا بزرگتر باشد، به ترتیب، θ از α کوچکتر یا بزرگتر است. به بیان دیگر، هرگاه جسم تخت باشد ($I < I_s$)، بردار تکانهٔ زاویه‌ای بین محور تقارن و محور چرخش قرار می‌گیرد. ولی در حالتی که جسم کشیده باشد ($I > I_s$) محور چرخش بین محور تقارن و بردار تکانهٔ زاویه‌ای واقع می‌شود. این دو حالت در شکل ۴.۶.۹ نشان داده شده‌اند. در هر یک از این حالتها، هنگامی که جسم می‌چرخد یک ناظر را در دستگاه مختصات ثابت می‌بینید که محور تقارن (محور z' یا محور ۳) یک مخروط را ترسیم می‌کند، در حالی که حول بردار تکانهٔ زاویه‌ای ثابت $\mathbf{L}$ حرکت تقدیمی انجام می‌دهد. در عین حال، این ناظر می‌بیند که محور چرخش (بردار $\boldsymbol{\omega}$) حول $\mathbf{L}$ با همان بسامد حرکت تقدیمی اجرا می‌کند. سطحی که به‌وسیلهٔ $\boldsymbol{\omega}$ حول $\mathbf{L}$ پیموده می‌شود، مطابق شکل، مخروط فضا نام دارد. حرکت تقدیمی $\boldsymbol{\omega}$ و محور تقارن جسم را می‌توان با غلتش مخروط جسم روی مخروط فضا تجسم کرد (شکل ۴.۶.۹). محور مرکزی مخروط جسم محور تقارن جسم است، و خطی که دو مخروط در آن بر هم مماس می‌شوند، جهت $\boldsymbol{\omega}$ را تعریف می‌کند.

با مراجعه به شکل ۱.۶.۹، مشاهده می‌کنیم که سرعت زاویه‌ای چرخش صفحهٔ $y'z'$ حول محور z با آهنگ زمانی تغییر زاویهٔ ϕ برابر است. بنابراین، به ترتیبی که خارج از جسم مشاهده



شکل ۳.۶.۹ چرخش آزاد (الف) یک قرص و (ب) یک میله. مخروطهای فضا و مخروطهای جسم با خط‌چین نموده شده‌اند.

می‌شود، $\dot{\phi}$ آهنگ زاویه‌ای حرکت تقدیمی محور تقارن و نیز محور چرخش حول خط تغییرناپذیر (بردار $\mathbf{L}$) است. این حرکت تقدیمی به‌صورت «لنگی» ظاهر می‌شود نظیر آنچه در پرتاب ناکامل توپ فوتبال یا دیسک مشاهده می‌کنیم. بنابر معادلهٔ دوم از معادلات (۵.۶.۹) و معادلهٔ اول از معادلات (۹.۶.۹ الف)، برای آهنگ حرکت تقدیمی $\dot{\phi}\sin\theta = \omega\sin\alpha$ یا

$$\dot{\phi} = \omega\frac{\sin\alpha}{\sin\theta} \qquad (۱۱.۶.۹)$$

را داریم. با بهره‌گیری از رابطهٔ بین α و θ که از معادله ۱۰.۶.۹ به‌دست آمده است، می‌توان معادلهٔ (۱۱.۶.۹) را به‌صورت سودمندتری در آورد. بعد از کمی عملیات جبری، برای آهنگ لنگیدن برحسب سرعت زاویه‌ای جسم حول محور چرخش آن، ω، و میل محور چرخش نسبت به محور تقارن جسم، α، می‌رسیم به

$$\dot{\phi} = \omega\left[1 + \left(\frac{I_s^2}{I^2} - 1\right)\cos^2\alpha\right]^{1/2} \qquad (۱۲.۶.۹)$$

برای جمعبندی تحلیل خود از چرخش آزاد جسم صلبی با یک محور تقارن، سرعت زاویه‌ای اساسی در اختیار داریم: بزرگی سرعت زاویه‌ای، ω، سرعت زاویه‌ای حرکت تقدیمی، Ω، محور

چرخش (جهت ω) حول محور تقارن جسم، و سرعت زاویه‌ای، $\dot{\phi}$، حرکت تقدیمی (لنگی) محور تقارن حول خط تغییرناپذیر (بردار تکانهٔ زاویه‌ای ثابت).

مثال ۱.۶.۹ حرکت تقدیمی فریزبی[۱]

برای مثالی از نظریهٔ بالا حالت قرص نازکی دایره‌ای، یا هر جسم متقارن و نسبتاً «تخت»، مانند بشقاب چینی یا فریزبی، را در نظر می‌گیریم. قضیهٔ محور عمود برای محورهای اصلی عبارت است از $I_۳ = I_۱ + I_۲$، و برای جسمی متقارن داریم $I_۱ = I_۲$. بنابراین، $۲I_۱ = I_۳$ که با نمادگذاری کنونی ما به‌صورت $۲I = I_s$ در می‌آید. از این‌رو، نسبت زیر تقریب خوبی به‌شمار می‌آید

$$\frac{I_s}{I} = ۲$$

اگر جسم موردنظر خود را در هوا چنان پرتاب کنیم که بردار سرعت زاویه‌ای ω با محور تقارن زاویهٔ α بسازد، در این صورت، معادلهٔ ۸.۵.۹ برای حرکت تقدیمی محور چرخش حول محور تقارن از این رابطه به‌دست می‌آید،

$$\Omega = \omega \cos \alpha$$

در مورد حرکت تقدیمی محور تقارن حول خط تغییرناپذیر لنگی، آن‌طور که از خارج مشاهده می‌شود، با استفاده از معادلهٔ (۱۲.۶.۹) به این رابطه می‌رسیم

$$\dot{\phi} = \omega(۱ + ۳\cos^۲ \alpha)^{۱/۲}$$

در حالت خاص، اگر α خیلی کوچک باشد به‌طوری که $\cos \alpha$ خیلی نزدیک به یک شود، پس، به‌طور تقریبی داریم

$$\Omega \approx \omega$$

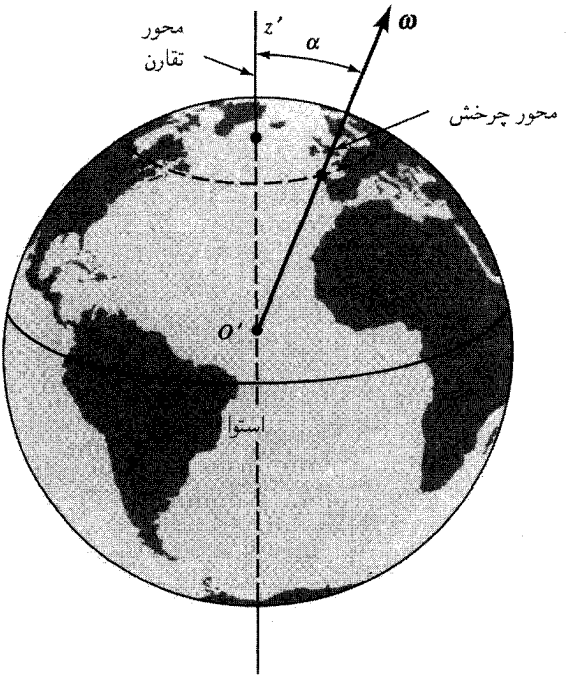
$$\dot{\phi} \approx ۲\omega$$

بنابراین، آهنگ لنگی خیلی نزدیک به دو برابر سرعت زاویه‌ای چرخش است.

مثال ۲.۶.۹ حرکت تقدیمی آزاد زمین

دانسته‌ایم که در حرکت زمین محور چرخش نسبت به قطب جغرافیایی که، بنا بر تعریف، محور تقارن است، زاویهٔ میل خیلی کوچکی دارد. این زاویهٔ α حدود ۰٫۲ ثانیهٔ قوس است (در شکل ۵.۶.۹

۱. Frisbee (نوعی وسیلهٔ بازی به شکل بشقاب).



شکل ۴.۶.۹ محور تقارن و محور چرخش زمین نموده شده است. (زاویهٔ α به نحو اغراق‌آمیزی بزرگ گرفته شده است.)

به‌نحوی اغراق‌آمیز بزرگ نشان داده شده است). همچنین، می‌دانیم که نسبت گشتاور لختی I_s/I، به‌طوری که از سر و ته پهنی زمین تعیین شده است، حدود ۱٫۰۰۳۲۷ است. به این ترتیب، از معادلهٔ (۸.۵.۹) داریم

$$\Omega = ۰٫۰۰۳۲۷\omega$$

در این صورت، چون روز $\omega = ۲\pi/(\mathrm{d})$، زمان تناوب حرکت تقدیمی از این رابطه محاسبه می‌شود

$$\frac{۲\pi}{\Omega} = \frac{۱}{۰٫۰۰۳۲۷}\mathrm{d} = ۳۰۵\mathrm{d}$$

زمان تناوب مشاهده‌شدهٔ حرکت تقدیمی محور چرخش زمین حول قطب حدود ۴۴۰ روز است. اختلاف بین مقادیر مشاهده و محاسبه‌شده، از این نکته ناشی می‌شود که زمین کاملاً صلب نیست و شکل کره‌وار کشیده کاملاً متقارنی ندارد. شکل آن بیشتر شبیه گلابی و اندکی قلنبه است.

در خصوص حرکت تقدیمی محور تقارن که از فضا مشاهده می‌شود، از معادلهٔ (۱۲.۶.۹)

به این رابطه می‌رسیم

$$\dot{\phi} = ۱٫۰۰۳۲۷\omega$$

به این ترتیب، زمان تناوب حرکت «لنگی» محور تقارن زمین عبارت است از

$$\frac{۲\pi}{\dot{\phi}} = \frac{۲\pi}{\omega}\frac{۱}{۱٫۰۰۳۲۷} \approx ۰٫۹۹۷\mathrm{d}$$

این حرکت تقدیمی آزاد محور زمین در فضا با حرکت تقدیمی خیلی طولانیتر ۲۶۰۰۰ سالهٔ محور چرخش زمین حول محور عمود بر صفحهٔ مداری، برهم‌نهاده می‌شود. این حرکت تقدیمی اخیر از آنجا ناشی می‌شود که به علت پهن‌بودن سر و ته زمین، از سوی خورشید و ماه به زمین گشتاور نیرو وارد می‌آید. این حقیقت که زمان تناوب آن خیلی طولانیتر از حرکت تقدیمی آزاد است، دلیلی کافی است برای اینکه در محاسبهٔ زمان تناوب حرکت تقدیمی آزاد از گشتاور نیروهای خارجی چشم‌پوشی شود.

۷.۹ حرکت فرفره

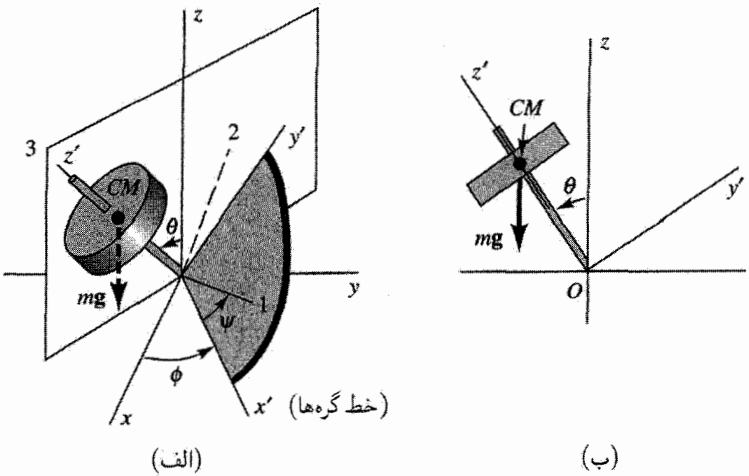
در این بخش حرکت جسم صلب متقارنی را بررسی می‌کنیم که آزادانه حول نقطهٔ ثابتی می‌چرخد و برخلاف حالت حرکت تقدیمی آزاد که جسم تحت اثر هیچ گشتاور نیرویی نیست، یک گشتاور نیرو بر آن وارد می‌آید. نمونه‌ای از این حالت فرفرهٔ متقارن، یعنی، جسم صلبی است با $I_۱ = I_۲ \neq I_۳$.

نمادگذاری محورهای مختصات ما در شکل ۱.۷.۹ (الف) نشان داده شده است. برای وضوح، فقط محورهای z'، y'، و z نشان داده شده‌اند، و محور x' بر صفحهٔ کاغذ عمود است. مبدأ O نقطهٔ ثابتی است که فرفره حول آن می‌گردد.

بزرگی گشتاور حول O ناشی از نیروی وزن $mgl\sin\theta$ است که در آن l فاصلهٔ O تا مرکز جرم CM است. این گشتاور حول محور x' است، به‌طوری که

$$\begin{aligned} N_{x'} &= mgl\sin\theta \\ N_{y'} &= ۰ \\ N_{z'} &= ۰ \end{aligned} \qquad (۱.۷.۹)$$

مؤلفه‌های بردار سرعت زاویه‌ای فرفره، ω، در قالب معادلات (۵.۶.۹) بیان شده‌اند. به این ترتیب، مؤلفه‌های تکانهٔ زاویه‌ای فرفره در دستگاه پریم‌دار از این قرارند:



شکل ۱.۷.۹ فرفرهٔ متقارن.

$$
\begin{aligned}
L_{x'} &= I_{x'x'}\omega_{x'} = I\dot{\theta} \\
L_{y'} &= I_{y'y'}\omega_{y'} = I\dot{\phi}\sin\theta \\
L_{z'} &= I_{z'z'}\omega_{z'} = I_s(\dot{\phi}\cos\theta + \dot{\psi}) = I_s S
\end{aligned}
\qquad (۲.۷.۹)
$$

در اینجا برای گشتاورهای لختی همان نمادگذاری بخش قبل را به‌کار می‌بریم، و در آخرین معادلهٔ (۲.۷.۹)، کمیت $\omega_{z'} = \dot{\phi}\cos\theta + \dot{\psi}$ را با S نمایش داده‌ایم که آن را اسپین می‌خوانیم، که صرفاً بیان سرعت زاویه‌ای حول محور تقارن فرفره است.

معادلهٔ بنیادی حرکت در دستگاه پریم‌دار (معادلهٔ (۱۰.۲.۵) یا (۳.۳.۹)) عبارت است از

$$
\mathbf{N} = \left(\frac{d\mathbf{L}}{dt}\right)_{\text{چرخشی}} + \boldsymbol{\omega}' \times \mathbf{L} \qquad (۳.۷.۹)
$$

که در آن مؤلفه‌های $\mathbf{N}$، $\mathbf{L}$، و $\boldsymbol{\omega}$، به‌ترتیب، در قالب معادلات (۱.۷.۹)، (۲.۷.۹)، و (۴.۶.۹) بیان می‌شوند. در نتیجه، معادلات مؤلفه‌ای حرکت از این قرار به‌دست می‌آیند:

$$
mgl\sin\theta = I\ddot{\theta} + I_s S\dot{\phi}\sin\theta - I\dot{\phi}^2\cos\theta\sin\theta \qquad (۴.۷.۹ \text{ الف})
$$

$$
0 = I\frac{d}{dt}(\dot{\phi}\sin\theta) - I_s S\dot{\theta} + I\dot{\theta}\dot{\phi}\cos\theta \qquad (۴.۷.۹ \text{ ب})
$$

$$
0 = I_s\dot{S} \qquad (۴.۷.۹ \text{ ج})
$$

معادلهٔ آخری (۴.۷.۹ ج) نشان می‌دهد که S، اسپین فرفره حول محور تقارن، ثابت می‌ماند. البته، مؤلفهٔ تکانهٔ زاویه‌ای در امتداد آن محور نیز ثابت است

$$L_{z'} = I_s S = \text{ثابت} \tag{۵.۷.۹}$$

پس، معادلهٔ دوم معادل است با

$$0 = \frac{d}{dt}(I\dot{\phi}\sin^2\theta + I_s S\cos\theta) \tag{۶.۷.۹}$$

به‌طوری که

$$I\dot{\phi}\sin^2\theta + I_s S\cos\theta = L_z = \text{ثابت} \tag{۷.۷.۹}$$

این ثابت آخری مؤلفهٔ تکانهٔ زاویه‌ای در امتداد محور z ثابت است (مسئلهٔ ۲۳.۹). به‌آسانی می‌شود بررسی کرد که دو تکانهٔ زاویه‌ای $L_{z'}$ و L_z باید ثابت باشند. گشتاور نیروی گرانشی همیشه در جهت محور x' یا خط گره‌ها قرار دارد. چون هم محور تقارن جسم (محور z') و هم محور ثابت فضایی z بر خط گره‌ها عمودند، گشتاور نیرو در امتداد هیچ‌کدام از آنها نمی‌تواند مؤلفه‌ای داشته باشد.

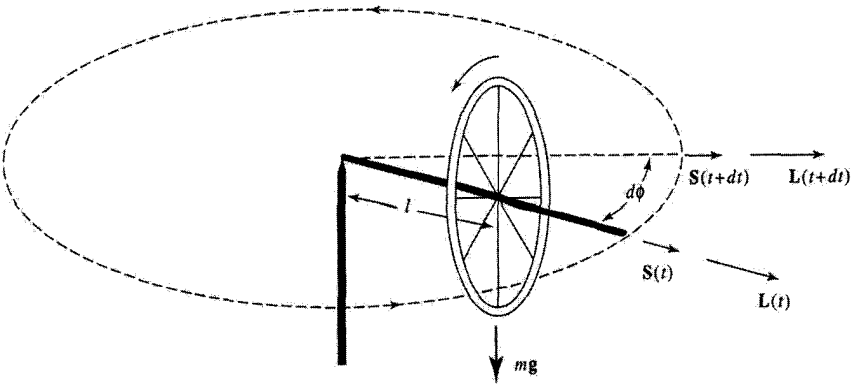
حرکت تقدیمی پایا

در اینجا در خصوص یک حالت خاص و سادهٔ حرکت فرفره، یعنی حرکت تقدیمی پایا در صفحه‌ای افقی بحث خواهیم کرد. این حرکت «نمایشی» متداول است که در آن محور در حالت افقی باقی می‌ماند و با آهنگی ثابت حول خط قائم، در نمادگذاری ما محور z، حرکت تقدیمی اجرا می‌کند. بنابراین، ثابت $= \theta = 90^\circ$ و $0 = \dot{\theta} = \ddot{\theta}$. در این حالت، معادلهٔ (۴.۷.۹ الف) به این رابطهٔ ساده تبدیل می‌شود

$$mgl = I_s S\dot{\phi} \tag{۸.۷.۹}$$

حال به‌آسانی می‌بینیم که کمیت mgl دقیقاً (مقدار اسکالر) گشتاور نیرو حول محور x' است. به‌علاوه، بزرگی (بردار) مؤلفهٔ افقی تکانهٔ زاویه‌ای $I_s S$ است و در صفحهٔ افقی دایره‌ای را می‌پیماید. در نتیجه، نوک بردار $\mathbf{L}$ سرعتی (آهنگ زمانی تغییر) به بزرگی $I_s S\dot{\phi}$ دارد و جهت آن بردار با امتداد محور x' موازی است. بنابراین، معادلهٔ (۸.۷.۹) فقط بیان ساده‌ای از رابطهٔ کلی $\mathbf{N} = d\mathbf{L}/dt$ برای این حالت خاص و مناسب است (شکل ۲.۷.۹).

حالت کلیتر حرکت تقدیمی پایا حالتی است که در آن θ ثابت است ولی مقداری غیر از 90° دارد؛ برای بررسی این حالت باز هم از معادلهٔ (۴.۷.۹ الف) بهره می‌گیریم. به این ترتیب که در



شکل ۲.۷.۹ چرخ دوچرخه با سرعت زاویه‌ای اسپین $\mathbf{S}$ حول محورش می‌چرخد و تکانهٔ زاویه‌ای اسپین $\mathbf{L}$ حول یک محور که در انتهایش پاشنه شده می‌چرخد و حرکت پایایی در صفحهٔ افقی اجرا می‌کند.

آن قرار می‌دهیم $\ddot{\theta} = 0$ و بعد عامل مشترک $\sin\theta$ را حذف می‌کنیم:

$$mgl = I_s S\dot{\phi} - S\dot{\phi}^2 \cos\theta \qquad (۹.۷.۹)$$

این عبارت، معادلهٔ درجهٔ دومی برحسب $\dot{\phi}$ است. با حل این معادله دو ریشه به‌دست می‌آید

$$\dot{\phi} = \frac{I_s S \pm (I_s^2 S^2 - 4mglI\cos\theta)^{1/2}}{2I\cos\theta} \qquad (۱۰.۷.۹)$$

بنابراین، به‌ازای یک مقدار معین θ برای حرکت تقدیمی پایای فرفره، دو آهنگ ممکن وجود دارد: یک حرکت تقدیمی سریع (علامت مثبت) و یک حرکت تقدیمی آهسته (علامت منفی). بسته به شرایط اولیه یکی از این دو حالت پیش می‌آید. معمولاً در حرکت فرفرهٔ ساده حالت آهسته‌تر اتفاق می‌افتد. در هر دو حالت، برای اینکه جواب از نظر فیزیکی ممکن باشد، باید کمیت داخل پرانتز مثبت یا صفر شود؛ یعنی

$$I_s^2 S^2 \geq 4mglI\cos\theta \qquad (۱۱.۷.۹)$$

حالت خواب فرفره

هر کسی با فرفره بازی کرده باشد می‌داند که اگر محورش قائم باشد و به‌قدر کافی سریع بچرخد، هنگام چرخش در امتداد قائم باقی خواهد ماند، که به آن حالت خواب می‌گویند. این حالت

با مقدار ثابت صفر برای θ در معادلات فوق مطابقت می‌کند. چون $\dot{\phi}$ باید حقیقی باشد، نتیجه می‌گیریم که معیار پایداری فرفره در حالت خواب باید از این قرار باشد:

$$I_s^2 S^2 \geq 4mglI \qquad (۱۲.۷.۹)$$

اگر چرخش فرفره بر اثر اصطکاک کند شود، به‌طوری که شرط بالا دیگر تأمین نشود، به افتادن میل می‌کند و سرانجام واژگون خواهد شد.

مثال ۱.۷.۹

یک ژیروسکوپ اسباب‌بازی به جرم $100\,\mathrm{g}$ از قرص یکنواختی به شعاع $a = 2\,\mathrm{cm}$ تشکیل شده که به یک محور چرخندهٔ سبک بسته شده است؛ مرکز این قرص به فاصلهٔ $2\,\mathrm{cm}$ از لولایی قرار دارد که ژیروسکوپ بر آن می‌چرخد. اگر ژیروسکوپ با آهنگ ۲۰ دور در ثانیه به چرخش واداشته شود، زمان تناوب حرکت تقدیمی افقی پایای آن را بیابید.

حل:

با بهره‌گیری از یکای cgs، داریم $I_s = \frac{1}{2}ma^2 = \frac{1}{2} \times 100\,\mathrm{g} \times (2\,\mathrm{cm})^2 = 200\,\mathrm{g\,cm^2}$. در مورد اسپین باید دور بر ثانیه را به رادیان بر ثانیه تبدیل کنیم، یعنی، $S = 20 \times 2\pi\,\mathrm{rad/s}$. در این صورت، با توجه به معادلهٔ (۸.۷.۹) آهنگ حرکت تقدیمی برحسب رادیان بر ثانیه عبارت خواهد بود از

$$\dot{\phi} = \frac{mgl}{I_s S} = \frac{100\,\mathrm{g} \times 980\,\mathrm{cms^{-2}} \times 2\,\mathrm{cm}}{200\,\mathrm{g\,cm^2} \times 40 \times 3{,}142\,\mathrm{s^{-1}}} = 7{,}8\ \mathrm{s^{-1}}$$

پس، زمان تناوب مربوطه از این قرار خواهد شد:

$$\frac{2\pi}{\dot{\phi}} = \frac{2 \times 3{,}142}{7{,}8\,\mathrm{s^{-1}}} = 0{,}81\,\mathrm{s}$$

مثال ۲.۷.۹

حداقل اسپین ژیروسکوپ در مثال ۱.۷.۹ چقدر باشد تا بتواند در وضعیت قائم به خواب رود.

حل:

علاوه بر مقادیر مثال قبلی، گشتاور لختی I حول محورهای x' با y' را لازم داریم. طبق قضیهٔ محورهای موازی،

$$I = I_{x'x'} = I_{y'y'} = \frac{1}{4}ma^2 + ml^2 = \frac{1}{4}100\,\mathrm{g} \times (2\,\mathrm{cm})^2 + 100\,\mathrm{g} \times (2\,\mathrm{cm})^2 = 500\,\mathrm{gcm^2}$$

در این صورت، از معادلهٔ (۱۲.۷.۹) می‌توانیم بنویسیم

$$S \geq \frac{۲}{I_s}(mglI)^{۱/۲} = \frac{۲}{۲۰۰}(۲۰۰ \times ۹۸۰ \times ۲ \times ۵۰۰)^{۱/۲}\mathrm{s}^{-۱} = ۱۴۰\mathrm{s}^{-۱}$$

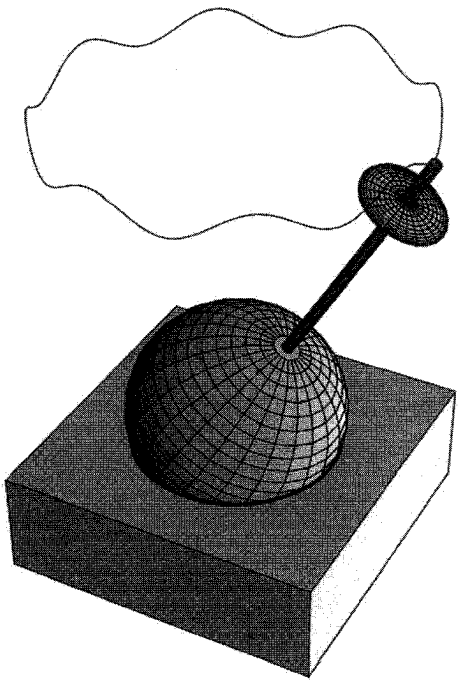
یا، برحسب دور بر ثانیه، مینیمم اسپین عبارت است از

$$S = \frac{۱۴۰}{۲\pi} = ۲۲٫۳\mathrm{rps}$$

۸.۹ معادلهٔ انرژی و رقص محوری (ناوش)

معمولاً در ژرفای پرپیچ و خم و تاریکی در درون بخشهای فیزیک اکثر دانشگاهها گنجی تمام‌عیار از تجهیزات آزمایشگاهی نسبتاً قدیمی و مستعملی پنهان‌شده که دیگر کاربرد فعالی ندارند. این ابزار و وسایل سالها ذخیره شده‌اند تا بعداً به‌کار گرفته شوند؛ گاهی هم برحسب وظیفه به‌صورت وسیلهٔ نمایشی در سخنرانی بعد از انجام تغییرات و اصلاحات مناسب روی آنها دوباره به‌کار انداخته می‌شوند. هر چند بعضی از آنها نسبتاً جدیدند، در واقع برای کاربردهای نمایشی در سخنرانیها، عمداً خریداری شده‌اند. یکی از دلچسبترین ابزار از این دست ژیروسکوپ هوانوردی است. گاهگاهی استادان این وسیله را بیرون می‌آورند و در کلاسهای درس مکانیک برای آموزش تصویری حرکت تقدیمی از آن بهره می‌گیرند (شکل ۱.۸.۹). ژیروسکوپ هوانوردی از این مزیت برخوردار است که تقریباً اصطکاک ندارد؛ از این‌رو تمام جزئیات حرکت چرخشی را قبل از آنکه به علت آثار اصطکاکی از بین بروند، می‌توان مشاهده کرد. جزء چرخان ژیروسکوپ هوانوردی یک گوی کروی و صیقلی با میلهٔ استوانه‌ای نازکِ متصل به آن شده که به‌طور شعاعی از مرکز کره خارج شده است. این میله محور تقارن جسم را مشخص می‌کند. این کره در داخل سطح نیم‌کرهٔ صاف، صیقلی، و وارونه قرار می‌گیرد، که شعاع انحنای آن بر شعاع انحنای قسمت کروی ژیروسکوپ کاملاً منطبق است. یک سوراخ کوچک در سطح نیم‌کره تعبیه می‌کنند تا هوا بتواند به داخل آن دمیده شود و بستر تقریباً بدون اصطکاکی فراهم آورد که گوی کروی بر آن قرار گیرد. معمولاً، ژیروسکوپ به این منظور ساخته شده است که حول محور تقارن بدنه‌اش بچرخد و از این‌رو این محور به چندین طریق رها می‌شود تا حرکت را آغاز کند.

در یکی از نمایشهای مشهورتر با ژیروسکوپ هوانوردی، استاد با قراردادن قرص کوچکی که در مرکزش سوراخ است و محور مرکزی به‌صورت میلهٔ استوانه‌ای نازکی متصل به ژیروسکوپ از این سوراخ عبور می‌کند، فرفره می‌سازد، و این کار را با قراردادن قرص درست پایینتر از نوک میله، مطابق شکل ۱.۸.۹، انجام می‌دهد. سپس، استاد برای فراهم‌کردن زمینه آثار درخور توجهی که



شکل ۱.۸.۹ ژیروسکوپ هوانوردی.

به‌زودی رخ می‌نمایند، محور فرفره را صرفاً قدری از حالت قائم خارج و آن‌را از حال سکون رها می‌کند. چون فرفره به خاطر وزن قرص که روی میله به‌صورت محورش سوار شده، نامتوازن است، واژگون می‌شود و بر سطح میزی که ژیروسکوپ هوانوردی بر آن قرار دارد برخورد می‌کند؛ این همان رفتاری است که دانشجویان ناظر کاملاً انتظارش را دارند. نیروی گرانشی گشتاور نیرویی وارد بر فرفرهٔ نامتوازن ایجاد و آن را واژگون می‌کند. اما اکنون، استاد محتاط آزمایش را تکرار می‌کند، با این تفاوت که در اینجا نیز حرکت فرفره با کج‌شدن آن نسبت به حالت قائم به اندازهٔ زاویهٔ θ_1 آغاز می‌شود، اما این‌بار قبل از آنکه «فرو افتد» آن‌را حول محور تقارنش به چرخش در می‌آورد. در واقع، مانند قبل فرفره شروع به واژگون‌شدن می‌کند، اما حرکت تقدیمی را نیز آغاز می‌کند و محور تقارنش، در میان حیرت دانشجویان حاضر که اکنون به موضوع جذب شده‌اند، کاملاً بر سطح میز فرو نمی‌افتد. به نظر می‌رسد که در زاویهٔ معین θ_2 به سد نفوذناپذیری برخورد می‌کند و محورش به‌طور معجزه‌آسایی دوباره به سوی حالت قائم برمی‌گردد و در خلال برگشت حرکت آن به تدریج

کند می‌شود و سرانجام در همان زاویهٔ θ_1، یعنی زاویهٔ کجی آن در همان آغاز حرکت، متوقف می‌شود. سپس فرو می‌افتد، دوباره شروع به حرکت تقدیمی می‌کند، و این حرکت «پایین و بالارفتن» را همچنان تکرار می‌کند. استاد این حرکت چشمگیر و درخور توجه را صرفاً این‌طور اجرا می‌کند که محور تقارن فرفره را به‌طور پایا تا زاویهٔ θ_1 کج می‌کند، آن‌را به چرخش در می‌آورد، و سپس محور را رها می‌کند. این حرکت بالا و پایین‌رفتن را که در آن محور تقارن با بالا و پایین‌رفتن بین حدود زاویه‌ای θ_1 و θ_2 نوسان می‌کند، رقص محوری گویند. همان‌طور که در تحلیل بعد خواهیم دید، فقط یکی از چندین طریقهٔ رقص محوری، بسته به اینکه حرکت چگونه آغاز شده است، می‌تواند برقرار شود.

در تحلیل حرکت فرفره فرض می‌کنیم که نیروهای اصطکاکی وجود ندارند؛ به این ترتیب انرژی کل فرفره، $E = T_{\text{چرخشی}} + V$، ثابت می‌ماند

$$E = \frac{1}{2}(I\omega_{x'}^2 + I\omega_{y'}^2 + I_s\omega_{z'}^2) + mgl\cos\theta = \text{ثابت} \qquad (۱.۸.۹)$$

یا، برحسب زوایای اویلر،

$$E = \frac{1}{2}(I\dot{\theta}^2 + I\dot{\phi}^2\sin^2\theta + I_sS^2) + mgl\cos\theta \qquad (۲.۸.۹)$$

با توجه به معادلهٔ (۷.۷.۹)، می‌توانیم $\dot{\phi}$ را به‌دست آوریم

$$\dot{\phi} = \frac{L_z - I_sS\cos\theta}{I\sin^2\theta} = \frac{L_z - L_{z'}\cos\theta}{I\sin^2\theta} \qquad (۳.۸.۹)$$

و با نشاندن این عبارت در معادلهٔ (۲.۸.۹)، رابطهٔ زیر را به‌ازای E برحسب θ و ثابتهای حرکت به‌دست می‌آوریم

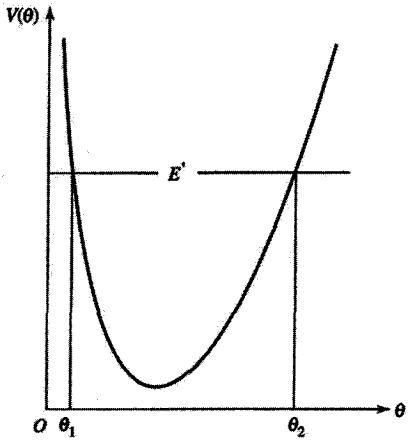
$$E = \frac{1}{2}I_sS^2 + \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 + \frac{(L_z - L_{z'}\cos\theta)^2}{2I\sin^2\theta} + mgl\cos\theta \qquad (۴.۸.۹)$$

از آنجا که نخستین جملهٔ سمت راست این معادله، $I_sS^2/2$ («انرژی اسپین»)، یک ثابت حرکت است، می‌توانیم آن را از انرژی کل فرفره بکاهیم و ثابت دیگری را به‌صورت زیر تعریف کنیم

$$E' = E - \frac{1}{2}I_sS^2 \qquad (۵.۸.۹)$$

که اساساً انرژی کل باقیماندهٔ فرفره در حرکت در امتداد مختصهٔ θ است. اکنون معادلهٔ (۴.۸.۹) را مجدداً از این قرار می‌نویسیم،

$$E' = \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 + V(\theta) \qquad (۶.۸.۹)$$



شکل ۲.۸.۹ منحنی نمایش تغییرات انرژی.

که پتانسیل مؤثر[1] فرفره، $V(\theta)$، بنابر تعریف عبارت خواهد شد از،

$$V(\theta) = \frac{(L_z - L_{z'}\cos\theta)^2}{2I\sin^2\theta} + mgl\cos\theta \qquad (۷.۸.۹)$$

این تعریف پتانسیل مؤثر به ما امکان می‌دهد تا، فقط از طریق رابطه‌ای که مانند معادلهٔ انرژی کل یک‌بعدی به نظر می‌رسد، یعنی $E' = T + V$، توجه خود را منحصراً روی حرکت فرفره در امتداد مختصه متمرکز کنیم. در اینجا تعریف $V(\theta)$ مشابه تعریف $U(r)$ است که در بخش ۱۱.۶ ارائه شد و در آن توجه خود را روی مؤلفهٔ شعاعی حرکت مداری جسمی متمرکز کردیم که دستخوش میدان نیروی مرکزی است (مانند سیاراتی که در مدار خود به دور خورشید حرکت می‌کنند)؛ در آن مثال خاص، دیدیم که پتانسیل مؤثر شیء را مقید می‌کند تا در داخل حدود شعاعی $(r_1 \leq r \leq r_2)$ قرار گیرد که نقاط برگشت مدار نامیده می‌شود. همین اتفاق در این حالت برای حرکت برحسب مختصهٔ θ رخ می‌دهد. شیء متحرک نمی‌تواند به ناحیه‌ای برود که در آنجا پتانسیل مؤثر آن از انرژی کلش، E'، تجاوز کند. در شکل ۲.۸.۹ وضعیت تصویری این موقعیت را مشاهده می‌کنید. در این شکل منحنی نمایش تغییرات پتانسیل مؤثر بین 0 و π، کمینه و بیشینهٔ مقادیر ممکن θ را، همراه با مقدار ثابت E' مشاهده می‌کنید. مقدار عملی E' حدود پایین و بالای مربوط به حرکت فرفره را برحسب θ تعیین می‌کند؛ بدیهی است که θ نمی‌تواند در خارج این دو حد یا «نقاط برگشت»، θ_1 و θ_2، قرار گیرد.

با بررسی شکل مشاهده می‌کنیم که فرفره وقتی به هر یک از نقاط برگشت حرکتش می‌رسد

۱. این کمیت در واقع انرژی پتانسیل است و نه پتانسیل. با همهٔ این احوال، این اصطلاح استاندارد است و امیدواریم که سبب حیرت کسانی نشود که در پی یافتن معنای دقیق‌اند.

که $V(\theta) = E'$. این مقادیر را می‌توان با حل‌کردن معادلهٔ (۶.۸.۹) به‌ازای $\dot{\theta}$ و مساوی صفر قراردادن آن پیدا کرد،

$$\dot{\theta}^2 = \frac{2}{I}[E' - V(\theta)] \qquad (۸.۸.۹)$$

این مسئله را می‌توان با نشاندن $u = \cos\theta$ در معادلهٔ (۸.۸.۹) و حل‌کردن آن به‌ازای $\dot{u}$، به قرار زیر، کمی ساده‌تر کرد

$$\dot{u} = -\dot{\theta}\sin\theta \qquad (۹.۸.۹ \text{ الف})$$

$$\dot{\theta} = -\frac{\dot{u}}{(1-u^2)^{1/2}} \qquad (۹.۸.۹ \text{ ب})$$

$$\dot{u}^2 = \frac{2}{I}(1-u^2)(E' - mglu) - \frac{1}{I^2}(L_z - L_{z'}u)^2 \qquad (۹.۸.۹ \text{ ج})$$

یا

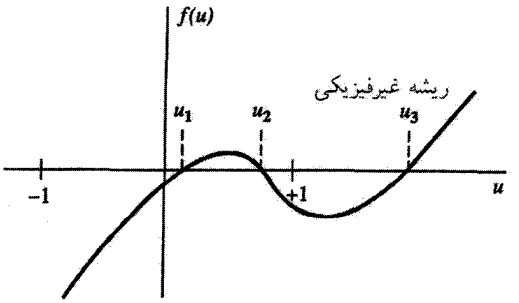
$$\dot{u}^2 = f(u) \qquad (۱۰.۸.۹)$$

دو نقطهٔ برگشت θ_1 و θ_2 با ریشه‌های معادلهٔ $f(u) = 0$ متناظرند. توجه کنید که $f(u)$ یک چند جمله‌ای درجهٔ سوم است؛ به این ترتیب، این معادله سه ریشه دارد. هر چند که یکی از این سه ریشه غیرفیزیکی است.

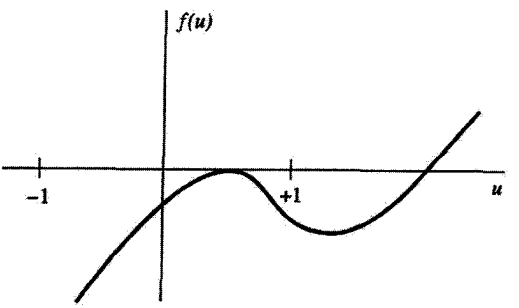
علی‌الاصول، می‌توانیم u و (بنابراین θ) را به‌صورت تابعی از زمان و به کمک این انتگرال‌گیری، به‌دست آوریم:

$$t = \int \frac{du}{\sqrt{f(u)}} \qquad (۱۱.۸.۹)$$

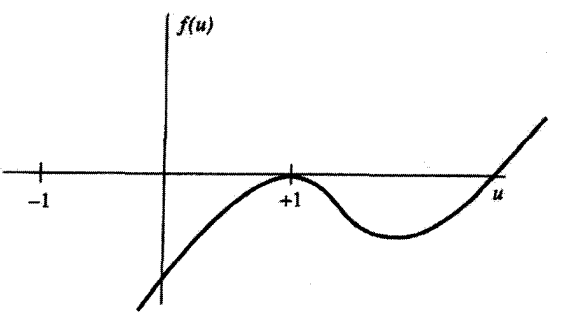
اما، اگر صرفاً بخواهیم در خصوص خواص کلی حرکت تحقیق کنیم، نیازی به این انتگرال‌گیری نداریم. در ناحیهٔ بین نقاط برگشت، که حرکت از لحاظ فیزیکی میسر است، $f(u)$ باید مثبت باشد. به‌علاوه، چون θ باید بین حدود مطلق 0 و π قرار گیرد، u به مقادیری بین -1 و $+1$ محدود می‌شود. نمودار تغییرات $f(u)$ را در شکل ۳.۸.۹ (الف) برای حالتی که دو ریشهٔ u_1 و u_2 بین 0 و $+1$ وجود داشته باشند، مشاهده می‌کنید. این وضعیتی متداول است (سطح میزی که ژیروسکوپ هوانوردی بر آن قرار دارد با $\theta = \pi/2$ یا $u = 0$ متناظر است). $f(u)$ بین آن دو ریشه مثبت است و ناحیهٔ بین آنها جایی است که حرکت اجرا می‌شود. مقادیر θی متناظر با آن دو ریشه عبارت‌اند از θ_1 و θ_2، یعنی هر دو نقطهٔ برگشت در جایی قرار دارند که θ جهت حرکت را برعکس می‌کند. محور تقارن فرفره با بالا و پایین‌رفتن بین این دو مقدار θ نوسان می‌کند در



(الف)



(ب)

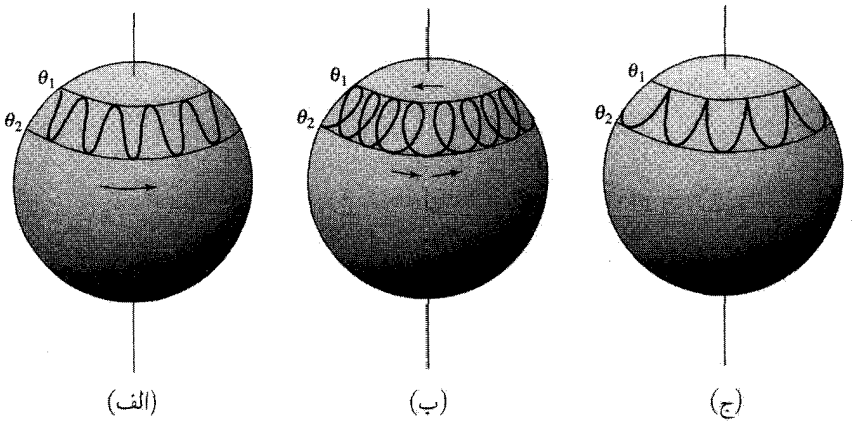


(ج)

شکل ۳.۸.۹ نمودار پتانسیل مؤثر فرفرهٔ چرخان.

حالی که فرفره حول امتداد قائم نیز حرکت تقدیمی اجرا می‌کند. این حرکت کلی را حرکت تقدیمی یا رقص محوری نامند.

حرکت تقدیمی همراه با رقص محوری می‌تواند در هر یک از سه طریقهٔ نموده‌شده در شکل



شکل ۴.۸.۹ حرکت رقص محوری فرفرهٔ چرخان. (الف) علامت $\dot{\phi}$ هرگز تغییر نمی‌کند؛ (ب) $\dot{\phi}$ تغییر علامت می‌دهد؛ (ج) در دوره تناوب حرکت تقدیمی به ازای $\theta = \theta_1$، $\dot{\phi} = 0$.

۴.۸.۹ (الف)، (ب)، و (ج) صورت گیرد. مسیرهایی که در آنجا نمایش داده شده‌اند، مسیر محور تقارن جسم است که بر روی کره‌ای متصل به دستگاه مختصات ثابت فضا، $Oxyz$، ارائه شده‌اند. شیوه‌ای که عملاً پیش می‌آید بسته به این است که آیا سرعت زاویه‌ای $\dot{\phi}$ (که در قالب معادلهٔ (۳.۸.۹) بیان می‌شود) هنگامی که θ بین دو حدش در خلال حرکت تغییر می‌کند، تغییر علامت بدهد یا نه. این امر به نوبهٔ خود به مقادیر تکانهٔ زاویه‌ای حول محور z، L_z و تکانهٔ زاویه‌ای اسپین $L_{z'} (= I_s S)$ بستگی دارد. اگر $\dot{\phi}$ تغییر علامت ندهد، هنگامی که محور تقارن بین دو حد زاویه‌ای θ_1 و θ_2 نوسان می‌کند، حرکت تقدیمی وارونه نمی‌شود. نمایش تصویری این شیوهٔ نوسان را در شکل ۴.۸.۹ (الف) مشاهده می‌کنید. اگر $\dot{\phi}$ در طی حرکت تقدیمی با رقص محوری تغییر علامت دهد، باید در θ_1 و θ_2 علامتهای مخالف داشته باشد (شکل ۳.۸.۹). در این حالت، شیوه‌ای که در شکل ۴.۸.۹ (ب) نمایش یافته است، به‌دست می‌آید.

شیوه یا مُد سوم که در شکل ۴.۸.۹ (ج) مشاهده می‌کنید، شیوهٔ متداولی است که قبلاً تشریح شد و در آن استاد محتاط ما حرکت را با کج‌کردن محور فرفره و چرخاندن آن حول محور تقارنش انجام داده سپس آن را از حال سکون رها کرد. این کار تأثیر فراهم‌کردن مقادیر ثابت حرکت، L_z و $L_{z'}$، را داشت، به طریقی که

$$\frac{L_z}{L_{z'}} = \cos\theta_1 \qquad (۱۲.۸.۹)$$

$$\dot{\phi}|_{\theta=\theta_1} = 0 \qquad \dot{\theta}|_{\theta=\theta_1} = 0 \tag{۱۳.۸.۹}$$

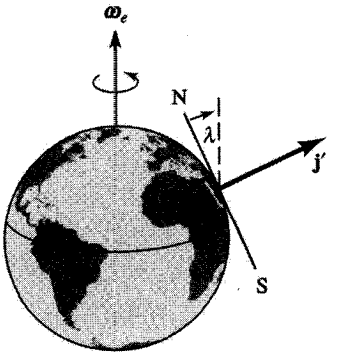
سپس این استاد می‌توانست به نمایش دو مُد دیگر رقص محوری حرکت تقدیمی، صرفاً با قراردادن نوک محور تقارن جسم یا اندکی به سمت جلو اقدام کند، به‌طوری که $\dot{\phi}|_{\theta=\theta_1} > 0$ (شکل ۴.۸.۹ الف)، یا اندکی به سوی عقب، به‌طوری که $\dot{\phi}|_{\theta=\theta_1} < 0$ (شکل ۴.۸.۹ ب).

دو امکان دیگر برای حرکت فرفره وجود دارد. اگر معادلهٔ ما ریشهٔ مضاعف داشته باشد، همان‌طور که به کمک نمودار $f(u)$ در شکل ۳.۸.۹ (ب) نشان داده شده است، یعنی اگر $u_1 = u_2$، در این صورت رقص محوری برقرار نمی‌شود و فرفره حرکت تقدیمی پایا اجرا می‌کند. استاد ما بی‌تردید می‌تواند با چرخاندن خیلی سریع فرفره حول محور تقارن، و بعد با جلوراندن آن به آرامی، با سرعت زاویه‌ای $\dot{\phi} \gtrsim 0$ و سپس با رهاکردن آن با ظرافت و رعایت $\dot{\theta} = 0$، این مُد را نمایش دهد (مسئلهٔ ۲۴.۹). آخرین امکان، فرفرهٔ در حالت خواب است که در بخش قبل در خصوص آن بحث شد. این حالت متناظر است با نمودار شکل ۳.۸.۹ (ج) که در آن $f(u)$ فقط یک تک ریشهٔ فیزیکی، $u_1 = 1$، دارد. استاد مورد بحث ما می‌تواند این مد را با همخط‌کردن محور بالایی در امتداد عمود، چرخاندن سریع آن به‌طوری که معیار پایداری ناشی از معادلهٔ (۱۲.۷.۹) تأمین شود، و سپس رهاکردن آن، برقرار کند؛ اگر این استاد نتواند با سرعت کافی آن را بچرخاند، ناپایدار از کار در می‌آید و واژگون خواهد شد.

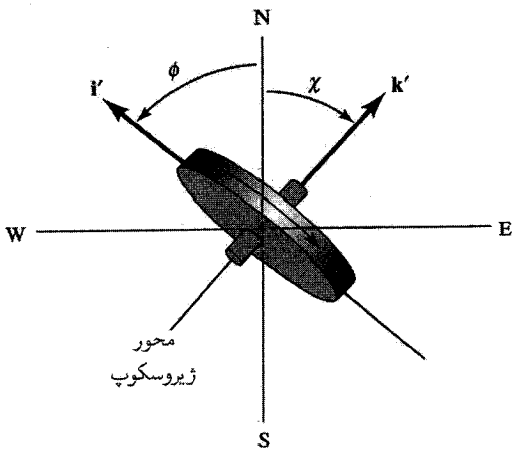
۹.۹ قطب‌نمای ژیروسکوپی

حرکت فرفره‌ای را در نظر می‌گیریم که بر تکیه‌گاهی با پایهٔ معلق (قالب) سوار می‌شود؛ این تکیه‌گاه محور اسپین را مقید می‌کند که افقی بماند، ولی این محور آزاد است تا در هر جهتی بگردد. نمودار این وضعیت که آن را در شکل ۱.۹.۹ مشاهده می‌کنید، از شکل ۱.۷.۹ برگرفته شده است با این تفاوت که اکنون $\theta = 90^\circ$ و محورهای بدون پریم، مطابق شکل، در جهتهای مربوطه بر سطح زمین مشخص شده‌اند. این فرفره از مرکز سوار شده است و شباهتی با فرفره‌های نامتوازنی ندارد که اخیراً دربارهٔ آنها بحث کردیم، به‌طوری که هیچگونه گشتاور نیروی گرانشی بر آن وارد نمی‌آید. در این حالت، فرفرهٔ چرخان گرچه، کاملاً از تأثیر گشتاور نیرو رها نیست، قدری شبیه به ژیروسکوپی رفتار می‌کند که کاملاً فرفره‌ای بدون گشتاور نیرو است.

با توجه به مطالب فصل ۵ پی می‌بریم که مؤلفه‌های سرعت زاویه‌ای زمین، که در اینجا با ω_e نشان داده می‌شود، عبارت‌اند از $\omega_e \cos\lambda$ (شمال) و $\omega_e \sin\lambda$ (قائم)، که λ عرض جغرافیایی



(الف)



(ب)

شکل ۱.۹.۹ قطب‌نمایی ژیروسکوپی.

است. در این صورت، در دستگاه مختصات پریم‌دار می‌توانیم بنویسیم

$$\boldsymbol{\omega}_e = \mathbf{i}'\omega_e \cos\lambda\cos\phi + \mathbf{j}'\omega_e \sin\lambda + \mathbf{k}'\omega_e \cos\lambda \sin\phi \qquad (۱.۹.۹)$$

حال دستگاه پریم‌دار حول محور قائم با آهنگ زاویه‌ای $\dot{\phi}$ می‌چرخد به‌طوری که سرعت زاویه‌ای دستگاه پریم‌دار عبارت است از

$$\boldsymbol{\omega}' = \boldsymbol{\omega}_e + \mathbf{j}'\dot{\phi} = \mathbf{i}'\omega_e \cos\lambda\cos\phi + \mathbf{j}'(\dot{\phi} + \omega_e \sin\lambda) + \mathbf{k}'\omega_e \cos\lambda \sin\phi \quad (۲.۹.۹)$$

به همین ترتیب، ژیروسکوپ خودش با سرعت زاویه‌ای $\dot{\psi}$ حول محور z' می‌چرخد که با مؤلفه‌های مندرج در معادلهٔ (۲.۹.۹) برهم‌نهاده می‌شود، به‌طوری که سرعت زاویه‌ای ژیروسکوپ نسبت به دستگاه پریم‌دار عبارت خواهد بود از

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}' + \mathbf{k}'\dot{\psi} = \mathbf{i}'\omega_e \cos\lambda\cos\phi + \mathbf{j}'(\dot{\phi} + \omega_e \sin\lambda) + \mathbf{k}'(\dot{\psi} + \omega_e \cos\lambda \sin\phi) \quad (۳.۹.۹)$$

گشتاورهای لختی اصلی ژیروسکوپی، مانند قبل، عبارت‌اند از $I_۱ = I_۲ = I$ و $I_۳ = I_s$؛ به این ترتیب، تکانهٔ زاویه‌ای را می‌توان به این طریق بیان کرد

$$\mathbf{L} = \mathbf{i}'I\omega_e \cos\lambda\cos\phi + \mathbf{j}'I(\dot{\phi} + \omega_e \sin\lambda) + \mathbf{k}'I_s S \quad (۴.۹.۹)$$

که در جملهٔ آخر، اسپین کل، S، عبارت است از

$$S = \dot{\psi} + \omega_e \cos\lambda \sin\phi \quad (۵.۹.۹)$$

حال، چون ژیروسکوپ آزادانه حول هر دو محور قائم (محور y') و محور اسپین یا z' می‌چرخد، گشتاور لازم برای افقی نگه‌داشتن محور باید حول محور x' باشد: $\mathbf{N} = \mathbf{i}'N$. بنابراین، معادلهٔ حرکت

$$\mathbf{N} = \left(\frac{d\mathbf{L}}{dt}\right)_{\text{چرخشی}} + \boldsymbol{\omega}' \times \mathbf{L} \quad (۶.۹.۹)$$

دارای مؤلفه‌هایی در دستگاه پریم‌دار، از این قرار است

$$N = I\frac{d}{dt}(\omega_e \cos\lambda\cos\phi) + (\boldsymbol{\omega}' \times \mathbf{L})_{x'} \quad (۷.۹.۹ \text{ الف})$$

$$۰ = I\frac{d}{dt}(\dot{\phi} + \omega_e \sin\lambda) + (\boldsymbol{\omega}' \times \mathbf{L})_{y'} \quad (۷.۹.۹ \text{ ب})$$

$$۰ = I_s\frac{dS}{dt} + (\boldsymbol{\omega}' \times \mathbf{L})_{z'} \quad (۷.۹.۹ \text{ ج})$$

با توجه به عبارتهای مربوط به $\boldsymbol{\omega}'$ و $\mathbf{L}$، پی می‌بریم که $(\boldsymbol{\omega}' \times \mathbf{L})_{z'} = ۰$، از این‌رو معادلهٔ (۷.۹.۹ ج) به‌صورت $dS/dt = ۰$ در خواهد آمد؛ در نتیجه S ثابت است. به‌علاوه، پی می‌بریم که معادلهٔ (۷.۹.۹ ب) به‌صورت زیر در خواهد آمد

$$۰ = I\ddot{\phi} + I\omega_e^۲ \cos^۲\lambda\cos\phi\sin\phi - I_s S\omega_e \cos\lambda\cos\phi \quad (۸.۹.۹)$$

در اینجا بهتر است که زاویهٔ ϕ را برحسب متمّم آن، $\chi = ۹۰^\circ - \phi$، بیان کنیم، به‌طوری که $\cos\phi = \sin\chi$ و $\ddot{\phi} = -\ddot{\chi}$. به‌علاوه، می‌توانیم در معادلهٔ بالا از جملهٔ شامل $\omega_e^۲$ چشم بپوشیم، زیرا در حال حاضر $S \gg \omega_e$. در نتیجه، معادلهٔ (۸.۹.۹) تبدیل می‌شود به

$$\ddot{\chi} + \left(\frac{I_s S \omega_e \cos\lambda}{I}\right)\sin\chi = ۰ \qquad (۹.۹.۹)$$

این عبارت به معادلهٔ دیفرانسیل آونگ شبیه است. متغیر χ حول مقدار $\chi = ۰$ نوسان می‌کند، و وجود هرگونه میرایی باعث خواهد شد که محور ژیروسکوپ «بگردد» و سرانجام در جهت شمال‌ـجنوب مستقر شود. زمان تناوب نوسان کم‌دامنه عبارت است از

$$T_۰ = ۲\pi\left(\frac{I}{I_s\omega_e S\cos\lambda}\right)^{۱/۲} \qquad (۱۰.۹.۹)$$

چون برای جسمی متقارن از «نوع تخت» نسبت I_s/I خیلی به ۲ نزدیک است، زمان تناوب نوسان اصولاً از جرم و ابعاد ژیروسکوپ مستقل است. به‌علاوه، چون ω_e خیلی کوچک است، اسپین S باید نسبتاً بزرگ باشد تا زمان تناوبش به‌طور معقولی کوچک باشد؛ مثلاً، برای بسامد چرخش ۶۰ Hz قطب‌نمای ژیروسکوپی را در نظر می‌گیریم که $S = ۲\pi \times ۶۰\,\mathrm{rad/s}$. در این صورت، در مورد قطب‌نمای ژیروسکوپی از نوع تخت و به‌ازای عرض جغرافیایی ۴۵° درجهٔ شمالی، زمان تناوب را از این قرار،

$$T_۰ = ۲\pi\left(\frac{۲۴\times۶۰\times۶۰}{۲\times۲\pi\times۶۰\times۲\pi\times۰٫۷۰۷}\right)^{۱/۲} s = \left(\frac{۱۲\times۶۰}{۰٫۷۰۷}\right)^{۱/۲} s \quad S = ۳۱٫۹s$$

یا حدود $\frac{۱}{۲}$ دقیقه به‌دست می‌آوریم. در محاسبهٔ بالا از این نکته سود جستیم که

$$\omega_e = ۲\pi/(۲۴\times۶۰\times۶۰)\mathrm{rad/s}$$

از این‌رو، عاملهای ۲π جملگی حذف می‌شوند.

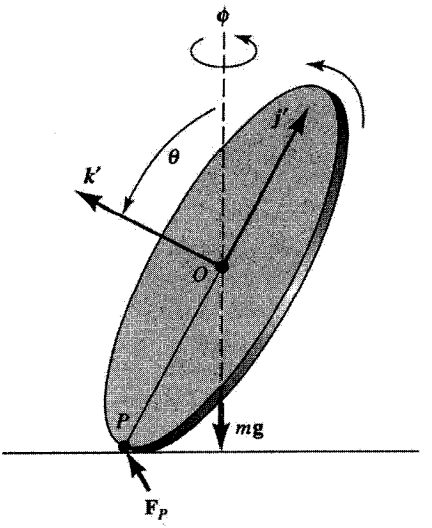
۱۰.۹ چرا لانس آرمسترانگ (معمولاً) زمین نمی‌خورد

در سال ۲۰۰۳، لانس آرمسترانگ دومین کسی بود که در مسابقات تور دوفرانس (مسابقهٔ دوچرخه‌سواری دور فرانسه) برای پنج‌بار متوالی قهرمان می‌شد. پنجمین برنده‌شدن وی به‌آسانی به‌دست نیامد. معمولاً برندهٔ توردوفرانس در چند مرحله قبل از مرحلهٔ آخر، یعنی ورود دوچرخه‌سواران به پاریس، تعیین می‌شود؛ بعد از ورود به پاریس خیابان شانزه‌لیزه را چندبار دور می‌زنند، فاتح دیگر

در این مرحله با چالشی مواجه نیست در حالی که اعضای تیم خودی به‌خوبی از وی محافظت می‌کنند، به راحتی گشت می‌زند. در سال ۲۰۰۳ پیروزی لانس تا پایان مرحلهٔ نوزدهم از بیست مرحلهٔ مسابقه قطعی نبود؛ این مرحله یک مسیر ۴۹ کیلومتری انفرادی (تایم ترایل) بود. باران می‌بارید. جاده خیس و لغزنده بود و پیمودن مسیر مسابقه مهارتهای فنی پردامنه‌ای را می‌طلبید. رقیب عمدهٔ آرمسترانگ، یان اولریخ در کلّ مسابقه در مقام دوم و فقط یک دقیقه و چند ثانیه پشت سر آرمسترانگ قرار داشت. اولریخ، که خود دوچرخه‌سوار انفرادی (تایم ترایل) قدرتمندی بود، در مرحلهٔ دوازدهم، یعنی تایم ترایل ۴۷ کیلومتری قبلی، با زمانی بیشتر از یک دقیقه از آرمسترانگ پیشی گرفته بود. هنگامی که او خود را برای شروع مرحلهٔ ۱۹ آماده می‌کرد، خیال داشت در این مرحله نیز نمایشی مقتدرانه ارائه دهد. متأسفانه، در دو سوم مسیر این مرحله از مسابقه، اولریخ، که داشت از پیچ خیلی تندی در شرایط مرطوب عبور می‌کرد، چرخ عقب دوچرخه‌اش لغزید، زیر او را خالی کرد، و او را به زمین انداخت، لیز خورد و به داخل علفهای خشک کنار جاده برخورد کرد، در این هنگام با نومیدی تمام مشاهده کرد که قهرمانی را از دست داده است. آرمسترانگ با پوشیدن پیراهن زرد پیشرو تمامی مسابقه، از امتیاز شروع مرحلهٔ خود به فاصلهٔ سه دقیقه بعد از اولریخ برخوردار بود. زمانی که خبر واژگون‌شدن اولریخ را از رادیو شنید، شانه به شانه و همزمان با این آلمانی تندرو قرار داشت و با احتمال زیاد، حتی اگر اولریخ نیفتاده بود، برای پیشگامی کلی، جلو باقی می‌ماند. ولی با افتادن اولریخ، آرمسترانگ از آنجا می‌توانست سرعت خود را کمی کُند کند، احتیاط بیشتری بخرج دهد تا پیچهای لغزندهٔ دیگری که باقی مانده بود طی کند. او در مکان سوم خط پایانی گشت می‌زد و یک دقیقه و شانزده ثانیه جلوتر از اولریخ در پیشگامی کلی قرار گرفت، در این حال پنجمین پیروزی متوالی او در مسابقات توردوفرانس حتمی شد. بدیهی است اولریخ به علت واژگون‌شدن خود به‌شدت ناراحت شده بود، ولی بعداً که تا حدی از آثار این سقوط مصیبت‌بار خود بهبود یافته بود، آن مرحله را با چهارم‌شدن و کل مسابقهٔ توردوفرانس را با دوم‌شدن به پایان رسانید.

در این بخش، ما توجه خود را به تحلیل مراحل پایانی دوچرخه‌سوار و دوچرخه بر روی جادهٔ لغزان که آشکارا مسئلهٔ خیلی پیچیده‌ای است، معطوف نمی‌کنیم. در عوض، مسئلهٔ ساده‌تر تحلیل پایداری طوقهٔ چرخ دوچرخه را از نوعی انتخاب می‌کنیم که معمولاً چرخ عقب دوچرخه‌های مسابقه به‌کار گرفته شده است، که خودش روی جادهٔ افقی کاملاً ناهموار می‌غلتد.

حرکت چرخ را می‌توان به دو بخش تفکیک کرد: (۱) حرکت انتقالی مرکز جرم و (۲) چرخش حول مرکز جرم. معادلات کلی توصیف‌کنندهٔ حرکت چرخ در قالب معادلهٔ نیرو (۱.۶.۸) و معادلهٔ گشتاور (۲.۶.۸) بیان می‌شوند. نیروهای خارجی وارد بر چرخ عبارت‌اند از نیروی وزن، mg، وارد



شکل ۱.۱۰.۹ مختصات مربوط به تحلیل حرکت چرخ غلتان.

بر مرکز جرم و $\mathbf{F}_P$ وارد بر نقطهٔ تماس آن با جاده (شکل ۱.۱۰.۹). به این جهت معادلهٔ نیرو عبارت است از

$$\mathbf{F}_P + m\mathbf{g} = m\frac{d\mathbf{v}_{\text{cm}}}{dt} \qquad (۱.۱۰.۹)$$

و معادلهٔ گشتاور عبارت خواهد بود از

$$\mathbf{r}_{OP} \times \mathbf{F}_P = \frac{d\mathbf{L}}{dt} \qquad (۲.۱۰.۹)$$

که $\mathbf{r}_{OP}$ بردار مکان نقطهٔ تماس نسبت به مرکز جرم است. با حل معادلهٔ (۱.۱۰.۹) برحسب $\mathbf{F}_P$ و نشاندن نتیجهٔ آن در معادلهٔ (۲.۱۰.۹)، می‌رسیم به

$$\mathbf{r}_{OP} \times \left(m\frac{d\mathbf{v}_{cm}}{dt} - m\mathbf{g}\right) = \frac{d\mathbf{L}}{dt} \qquad (۳.۱۰.۹)$$

اگر $\boldsymbol{\omega}$ سرعت زاویه‌ای چرخ باشد، آنگاه سرعت مرکز جرم از این قرار به‌دست می‌آید:

$$\mathbf{v}_{cm} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{PO} = \boldsymbol{\omega} \times (-\mathbf{r}_{OP}) \qquad (۴.۱۰.۹)$$

اگر، مطابق شکل ۱.۱۰.۹، a شعاع چرخ و θ زاویهٔ میل محور چرخ آن نسبت به امتداد قائم باشد،

در این صورت، در دستگاه مختصات پریم‌دار،

$$\mathbf{r}_{OP} = -\mathbf{j}'a \tag{۵.۱۰.۹}$$

$$\mathbf{g} = -g(\mathbf{j}'\sin\theta + \mathbf{k}'\cos\theta) \tag{۶.۱۰.۹}$$

با نشاندن عبارتهای بالا در معادلهٔ (۳.۱۰.۹) می‌رسیم به

$$-a\mathbf{j}' \times \left[m\frac{d}{dt}(\boldsymbol{\omega} \times a\mathbf{j}') + mg(\mathbf{j}'\sin\theta + \mathbf{k}'\cos\theta)\right] = \frac{d\mathbf{L}}{dt} \tag{۷.۱۰.۹}$$

به‌علاوه، دستگاه مختصات پریم‌دار با سرعت زاویه‌ای $\boldsymbol{\omega}'$ می‌چرخد (این نکته را به یاد بیاورید که $\mathbf{i}'$ همیشه در صفحهٔ افقی قرار می‌گیرد و بردارهای $\mathbf{j}'$ و $\mathbf{k}'$ همیشه در صفحهٔ قائم قرار دارند؛ به بحث بخش ۱.۶.۹ رجوع کنید). بنابراین، داریم

$$\frac{d}{dt} = \left(\frac{d}{dt}\right)_{\text{چرخشی}} + \boldsymbol{\omega}' \times \tag{۸.۱۰.۹}$$

با نشاندن این رابطهٔ عملگری در معادلهٔ (۷.۱۰.۹)، خواهیم رسید به

$$\begin{aligned} -ma^2\mathbf{j}' \times \left[\left(\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}\right)_{\text{چرخشی}} \times \mathbf{j}' + \boldsymbol{\omega}' \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{j}')\right] \\ - mga[\mathbf{j}' \times (\mathbf{j}'\sin\theta + \mathbf{k}'\cos\theta)] = \left(\frac{d\mathbf{L}}{dt}\right)_{\text{چرخشی}} + \boldsymbol{\omega}' \times \mathbf{L} \end{aligned} \tag{۹.۱۰.۹}$$

برای حل معادلهٔ حرکت عمومی بالا تلاشی نخواهیم کرد. در عوض، می‌خواهیم دربارهٔ حالت خاصی بحث کنیم، یعنی حالتی که چرخ در وضعیت خیلی نزدیک به قائم قرار گرفته و جهت حرکت غلتشی آن ثابت یا تقریباً ثابت است: غلتش پایا. منظور این است که θ نزدیک به ۹۰° باقی می‌ماند به‌طوری که متمم $\chi = 90° - \theta$ و زاویهٔ ϕ هر دو کوچک بمانند. با این فرضها، تقریباً داریم $\sin\chi = \chi$ و $\sin\phi = \phi$ و عبارتهای کلی مؤلفه‌های $\boldsymbol{\omega}'$، $\boldsymbol{\omega}$، و $\mathbf{L}$ که معادلات (۴.۶.۹)، (۵.۶.۹)، و (۲.۷.۹) آنها را بیان می‌کنند، ساده‌تر می‌شوند و به‌صورت زیر در می‌آیند

$$\boldsymbol{\omega}' = -\mathbf{i}'\dot{\chi} + \mathbf{j}'\dot{\phi} \tag{۱۰.۱۰.۹ الف}$$

$$\boldsymbol{\omega} = -\mathbf{i}'\dot{\chi} + \mathbf{j}'\dot{\phi} + \mathbf{k}'S \tag{۱۰.۱۰.۹ ب}$$

$$\mathbf{L} = -\mathbf{i}'I\dot{\chi} + \mathbf{j}'I\dot{\phi} + \mathbf{k}'I_sS \tag{۱۰.۱۰.۹ ج}$$

با واردکردن این کمیتها در معادلهٔ (۹.۱۰.۹) و انجام عملیات ضروری و حذف جملات شامل کمیتهای کوچک χ و ϕ با مرتبهٔ بالاتر، به این نتیجه می‌رسیم،

$$ma^2(\mathbf{i}'\ddot{\chi} - \mathbf{k}'\dot{S} - \mathbf{i}'S\dot{\phi}) - mga\mathbf{i}'\chi = \mathbf{i}'(I\ddot{\chi} + T_sS\dot{\phi}) + \mathbf{j}'(I\ddot{\phi} + I_sS\dot{\chi}) + \mathbf{k}'I_s\dot{S} \qquad (۱۱.۱۰.۹)$$

با مساوی قراردادن این سه مؤلفه داریم

$$ma^2(\ddot{\chi} - S\dot{\phi}) - mga\chi = -I\ddot{\chi} + I_sS\dot{\phi} \qquad (۱۲.۱۰.۹ \text{ الف})$$

$$0 = -I\ddot{\phi} + I_sS\dot{\chi} \qquad (۱۲.۱۰.۹ \text{ ب})$$

$$0 = \dot{S}(I_s + ma^2) \qquad (۱۲.۱۰.۹ \text{ ج})$$

معادلهٔ (۱۲.۱۰.۹ ج) نشان می‌دهد که $\dot{S} = 0$ و بنابراین S ثابت است. در این صورت، می‌توان از معادلهٔ (۱۲.۱۰.۹ ب) انتگرال گرفت و رسید به: $I\dot{\phi} + I_sS\chi = 0$، مشروط بر اینکه فرض کنیم شرط اولیهٔ $\chi = \dot{\phi} = 0$ برقرار باشد. بنابراین $\dot{\phi} = -I_sS\chi/I$ که اگر آن را در معادلهٔ (۱۲.۱۰.۹ الف) وارد کنیم، معادلهٔ دیفرانسیل تفکیک‌شدهٔ زیر برحسب χ به‌دست می‌آید:

$$I(I + ma^2)\ddot{\chi} + [I_s(I_s + ma^2)S^2 - Imga]\chi = 0 \qquad (۱۳.۱۰.۹)$$

نتیجه این است که غلتش پایای موردنظر در صورتی رخ خواهد داد که کمیت داخل کروشه مثبت باشد. بنابراین، معیار پایانی عبارت است از

$$S^2 > \frac{Imga}{I_s(I_s + ma^2)} \qquad (۱۴.۱۰.۹)$$

مثال ۱.۱۰.۹

صفحهٔ چرخ دوچرخه با چه سرعتی باید چرخانده شود تا ایستاده باقی بماند (فرض کنید چرخ پوستهٔ نازک یکنواخت دایره‌ای است، به شعاع $a = 0.35\,\text{m}$)؟

حل:

گشتاورهای لختی قرص دایره‌ای یکنواخت و نازک عبارت‌اند از $I_s = 2I = \frac{1}{2}ma^2$. معیار غلتش پایا در قالب معادلهٔ (۱۴.۱۰.۹) بیان می‌شود

$$S^2 > \frac{mga}{2(\frac{1}{2}ma^2 + ma^2)} = \frac{g}{3a}$$

چون سرعت غلتش عبارت است از $v = v_{cm} = aS$، معیار پایانی غلتش عبارت است از

$$v^2 > \frac{ga}{3}$$

با نشاندن مقادیر عددی، می‌رسیم به

$$v > \left(\frac{۹٫۸۰\,\mathrm{ms}^{-2} \times ۰٫۳۵\mathrm{m}}{3}\right)^{1/2} = ۱٫۰۷\mathrm{m/s} = ۳٫۸۵\mathrm{kg/hr}$$

از این‌رو، اگر لانس آرمسترانگ در وضعیت نسبتاً قائم روی جادهٔ خشک با سرعت دوچرخه‌سواری بکند، احتمالاً واژگون نخواهد شد. مگر اینکه یک تماشاچی مشتاق فرمان او را با بندهای کیف وسایل صوتیش به دام اندازد!

مسائل

۱.۹ تیغهٔ (پوستهٔ) مستطیلی یکنواخت نازکی به جرم m و ابعاد $2a$ و a مفروض است. دستگاه مختصات $Oxyz$ را چنان اختیارکنید که تیغه در صفحهٔ xy و مبدأ در یکی از رأسها و ضلع بلندتر در امتداد محور x واقع باشد. کمیتهای زیر را بیابید:

(الف) گشتاورها و حاصلضربهای لختی

(ب) گشتاور لختی حول قطری که از مبدأ می‌گذرد

(ج) تکانهٔ زاویه‌ای حول مبدأ، در صورتی که صفحه با سرعت زاویه‌ای ω حول قطری بچرخد که از مبدأ می‌گذرد

(د) انرژی جنبشی بند (ج)

۲.۹ جسم صلبی شامل سه میلهٔ یکنواخت نازک، هر یک به جرم m و طول $2a$ است که در نقاط وسط خود دوبه‌دو برهم عمودند. دستگاه مختصاتی با محورهایی در امتداد این میله‌ها اختیارکنید.

(الف) اگر جسم با سرعت زاویه‌ای ω حول محور بچرخد که از مبدأ و نقطهٔ $(1, 1, 1)$ می‌گذرد، تکانهٔ زاویه‌ای و انرژی جنبشی جسم را پیدا کنید.

(ب) نشان دهید که گشتاور لختی برای هر محورگذرا از مبدأ یکسان است.

(ج) نشان دهید که گشتاور لختی تیغهٔ مربعی یکنواخت حول هر محوری که از مرکز تیغه می‌گذرد و در صفحهٔ آن واقع است، با آنچه در مثال ۱.۱.۹ به‌دست آمد، یکی است.

۳.۹ مجموعهٔ محورهای اصلی را برای تیغهٔ یادشده در مسئله ۱.۹ پیدا کنید، در صورتی که مبدأ

(الف) در یک رأس،

(ب) در مرکز ورقه واقع باشد.

۴.۹ قطعهٔ یکنواختی به جرم m و به ابعاد a در $2a$ در $3a$ با سرعت زاویه‌ای ω حول قطر بزرگ خود می‌چرخد. با بهره‌گیری از دستگاه مختصاتی که مبدأ آن در مرکز جسم واقع باشد،

(الف) انرژی جنبشی

(ب) زاویهٔ بین بردار سرعت زاویه‌ای و بردار تکانهٔ زاویه‌ای حول مبدأ را بیابید.

۵.۹ میلهٔ نازک یکنواختی به طول l و جرم m با سرعت زاویه‌ای ثابت ω مقید به چرخش حول محوری است که از مرکز میله می‌گذرد و با آن زاویهٔ α می‌سازد.

(الف) نشان دهید تکانهٔ زاویه‌ای $\mathbf{L}$ حول O بر میله عمود و بزرگی آن عبارت است از $(ml^2\omega/12)\sin\alpha$.

(ب) نشان دهید بردار گشتاور، $\mathbf{N}$، بر میله و $\mathbf{L}$ عمود، و بزرگی آن عبارت است از $(ml^2\omega^2/12)\sin\alpha\cos\alpha$.

۶.۹ بزرگی گشتاوری را بیابید که باید بر قطعه‌جسم نامبرده در مسئلهٔ ۴.۹ وارد آید تا سرعت زاویه‌ای ω از لحاظ بزرگی و جهت ثابت باشد.

۷.۹ جسم صلبی به شکل دلخواه و بدون آنکه تحت‌تأثیر گشتاوری باشد، آزادانه می‌چرخد. به کمک معادلات اویلر نشان دهید که هم انرژی جنبشی چرخشی و هم بزرگی تکانهٔ زاویه‌ای، همان‌طور که در بخش ۴.۹ بیان شد، ثابت‌اند (راهنمایی: به‌ازای $\mathbf{N}=0$، معادلات اویلر (معادلهٔ ۵.۳.۹) را به‌ترتیب در ω_1، ω_2، و ω_3 ضرب و بعد آن سه معادله را با هم جمع کنید. نتیجه ثابت‌بودن انرژی جنبشی را نشان می‌دهد. سپس، معادلات اویلر را، به ترتیب، در $I_1\omega_1$، $I_2\omega_2$، و $I_3\omega_3$ ضرب و با هم جمع کنید، نتیجه نشان می‌دهد که L^2 ثابت است.)

۸.۹ پوسته‌ای به شکل دلخواه، بدون آنکه تحت‌تأثیر گشتاوری باشد، آزادانه می‌چرخد. با بهره‌گیری از معادلات اویلر، نشان دهید که اگر صفحهٔ ۱ و ۲ صفحهٔ پوسته باشد، مجموع $\omega_1^2+\omega_2^2$ ثابت است؛ یعنی، بزرگی تصویر ω روی صفحهٔ پوسته ثابت است؛ هر چند که مؤلفهٔ ω_3 عمود بر این صفحه، ناگزیر ثابت نباشد. (راهنمایی: از قضیهٔ محورهای متعامد بهره گیرید.) برای چه نوع پوسته‌ای ω_3 ثابت است؟

۹.۹ یک تیغهٔ مربعی به ضلع a و جرم m را چنان به هوا پرتاب می‌کنند که بدون آنکه تحت‌تأثیر گشتاوری واقع شود، آزادانه بچرخد. زمان تناوب چرخشی $2\pi/\omega$ برابر است با 1s. اگر محور چرخشی یا محور تقارن زاویهٔ 45° بسازد، زمان تناوب حرکت تقدیمی محور چرخش حول محور تقارن، و زمان تناوب لنگی محور تقارن را حول خط تغییرناپذیر برای دو حالت زیر پیدا کنید:

(الف) تیغهٔ نازک

(ب) ورقه‌ای ضخیم به ضخامت $a/4$.

۱۰.۹ جسم صلبی دارای محور تقارن، بدون هیچ گشتاوری حول نقطه‌ای ثابت آزادانه می‌چرخد. اگر α زاویهٔ بین محور تقارن و محور چرخش لحظه‌ای باشد، نشان دهید که زاویهٔ بین محور چرخش و خط تغییرناپذیر (بردار $\mathbf{L}$) عبارت است از

$$\tan^{-1}\left[\frac{(I_s - I)\tan\alpha}{I_s + I\tan^2\alpha}\right]$$

که I_s (گشتاور لختی حول محور تقارن) از I (گشتاور لختی حول محور عمود بر محور تقارن) بزرگتر است.

۱۱.۹ چون بزرگترین مقدار نسبت I_s/I برابر است با ۲ (برای پوستهٔ متقارن) با استفاده از نتیجهٔ مسئلهٔ ۱۰.۹ نشان دهید که زاویهٔ بین $\boldsymbol{\omega}$ و $\mathbf{L}$ از $\tan^{-1}(\frac{1}{\sqrt{8}})$ یا حدود ۱۹٫۵° تجاوز نمی‌کند؛ نیز نشان دهید که مقدار α مربوط برابر $\tan^{-1}\sqrt{2}$، یا حدود ۵۴٫۷°، است.

۱۲.۹ زاویهٔ بین $\boldsymbol{\omega}$ و $\mathbf{L}$ را برای دو حالت مسئلهٔ ۹.۹ به‌دست آورید.

۱۳.۹ همین زاویه را برای زمین بیابید.

۱۴.۹ یک سکوی پرتاب اجرام به فضا به شکل قرص دایره‌ای نازکی به شعاع a و جرم m (بشقاب پرنده) در ابتدا حول محور تقارن خود با سرعت زاویه‌ای $\boldsymbol{\omega}$ به‌طور پایا می‌چرخد. یک سنگ آسمانی به لبهٔ این سکو اصابت می‌کند و به آن ضربهٔ $\mathbf{p}$ را وارد می‌آورد. جهت $\mathbf{p}$ موازی محور سکو و بزرگی آن $ma\omega/4$ است. مقادیر برایند برای آهنگ حرکت تقدیمی Ω، آهنگ لنگی $\dot{\phi}$، و زاویهٔ α را برای محور تقارن و محور چرخ جدید پیدا کنید.

۱۵.۹ یک صفحهٔ دایره‌ای نازک (فریزبی) به طریقی در هوا پرتاب می‌شود که چرخش آن لنگی معینی داشته باشد. اگر اصطکاک هوا بر چرخش آن گشتاور اصطکاکی $-c\boldsymbol{\omega}$ وارد آورد، نشان دهید که مؤلفهٔ $\boldsymbol{\omega}$ در جهت محور تقارن با زمان به‌طور نمایی کاهش می‌یابد. همچنین نشان دهید که زاویهٔ α بین محور تقارن و بردار سرعت زاویه‌ای $\boldsymbol{\omega}$ در جهت محور تقارن به‌طور نمایی با زمان کاهش می‌یابد؛ اگر I_s بزرگتر از I باشد، که این شرط در مورد شیء تخت برقرار است. بنابراین، در صورت وجود مقاومت هوا درجهٔ لنگی به‌طور پایدار کاهش می‌یابد.

۱۶.۹ فرفرهٔ ساده‌ای شامل یک قرص دایره‌ای سنگین به جرم m و شعاع a مفروض است که بر مرکز میلهٔ نازکی به جرم $m/2$ و به طول a سوار شده است. اگر این فرفره را در حالی که محور آن با امتداد قائم زاویهٔ ۴۵° می‌سازد با آهنگ معین S به چرخش در آورند، هنگامی که در مقدار ثابت $\theta = 45°$ حرکت تقدیمی پایا اجرا می‌کند، برای آهنگ حرکت تقدیمی $\dot{\phi}$ دو مقدار ممکن وجود دارد.

(الف) دو مقدار عددی $\dot{\phi}$ را، به‌ازای $S = 900\,\text{rpm}$ و $a = 10\,\text{cm}$، پیدا کنید.

(ب) برای اینکه فرفره در وضعیت قائم به «خواب» رود، سرعت چرخشش چقدر باید باشد؟ نتایج خود را به دور در دقیقه (rpm) بیان کنید.

۱۷.۹ مدادی را در حالت ایستاده به چرخش در می‌آورند. سرعت چرخش این مداد باید چقدر باشد تا همان‌طور ایستاده باقی بماند؟ فرض کنید مداد استوانهٔ یکنواختی به طول a و قطر b باشد. سرعت چرخش اسپین را برحسب دور بر ثانیه، به‌ازای $a = ۲۰\,\text{cm}$ و $b = ۱\,\text{cm}$، پیدا کنید.

۱۸.۹ سرعت چرخش یک سکه (به شعاع ۰٫۹۵cm) چقدر باشد تا ایستاده باقی بماند؟

۱۹.۹ جسم صلبی بدون تأثیر هیچ گشتاوری آزادانه می‌چرخد. با مشتق‌گیری از اولین معادله از معادلات اویلر نسبت به t، و با حذف $\omega_۲$ و $\omega_۳$ ازطریق معادلات دوم و سوم اویلر، نشان دهید که نتیجهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$\ddot{\omega}_۱ + K_۱\omega_۱ = ۰$$

که در آن تابع $K_۱$ از این قرار است،

$$K_۱ = -\omega_۲^۲\left[\frac{(I_۳ - I_۲)(I_۲ - I_۱)}{I_۱ I_۳}\right] + \omega_۳^۲\left[\frac{(I_۳ - I_۲)(I_۳ - I_۱)}{I_۱ I_۲}\right]$$

دو جفت معادله با جایگشتهای دوره‌ای ۲ ← ۱، ۳ ← ۲، ۱ ← ۳ به‌دست می‌آید. در رابطهٔ بالا برای $K_۱$ هر دو کمیت موجود در کروشه‌ها ثابتهای مثبت‌اند، اگر $I_۱ < I_۲ < I_۳$، یا اگر $I_۱ > I_۲ > I_۳$. در مسئلهٔ رشد (افزایش) $\omega_۱$ (پایایی) بحث کنید اگر در ابتدا $\omega_۱$ خیلی کوچک باشد و (الف) $\omega_۲ = ۰$ و $\omega_۳$ بزرگ باشد: چرخش اولیه خیلی نزدیک به محور ۳ است و (ب) $\omega_۳ = ۰$ و $\omega_۲$ بزرگ باشد: چرخش اولیه تقریباً حول محور ۲ است. (گوشزد: این روش تحلیلی عبارت است از شیوهٔ به‌دست‌آوردن معیار پایایی که در شکل ۲.۴.۹ نشان داده شده است.)

۲۰.۹ جسم صلبی شامل شش ذره، هر یک به جرم m، است و در سر سه میلهٔ سبک، به‌ترتیب، به طول $۲a$، $۲b$، و $۲c$ نصب شده‌اند؛ میله‌ها در نقاط وسط خود دو به دو برهم عمودند.

(الف) نشان دهید که مجموعهٔ محورهای مختصات که به این ترتیب به وسیلهٔ میله‌ها تعریف شده‌اند، محورهای اصلی به شمار می‌آیند، و تانسور لختی را برای این سیستم نسبت به این محورها بنویسید.

(ب) با بهره‌گیری از جبر ماتریسی تکانهٔ زاویه‌ای و انرژی جنبشی این سیستم را وقتی به‌دست آورید که حول محوری که از مبدأ و نقطهٔ (a, b, c) می‌گذرد، با سرعت زاویه‌ای $\boldsymbol{\omega}$ می‌چرخد.

۲۱.۹ با بهره‌گیری از روشهای ماتریسی، مسائل ۱.۹ و ۴.۹ را حل کنید.

۲۲.۹ قطعه‌جسم مکعب مستطیل شکل یکنواختی به ابعاد $۲a$ در $۲b$ در $۲c$ و جرم m حول قطر بزرگش می‌چرخد. تانسور لختی آن را برای دستگاه مختصاتی به‌دست آورید که مبدأ آن در

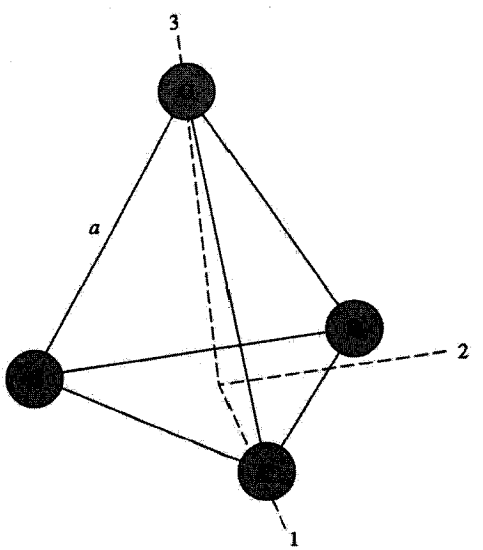
مرکز قطعه‌جسم باشد و محورهایش بر وجوه عمود باشند. همچنین، تکانهٔ زاویه‌ای و انرژی جنبشی را بیابید. تانسور لختی را برای محورهایی بیابید که مبدأ آنها در یکی از رأسها واقع باشد.

۲۳.۹ نشان دهید که مؤلفهٔ z تکانهٔ زاویه‌ای، L_z، فرفرهٔ سادهٔ یادشده در بخش ۷.۹، در قالب معادلهٔ (۷.۷.۹) بیان می‌شود.

۲۴.۹ اگر فرفره‌ای که در بخشهای ۷.۹ و ۸.۹ راجع به آن بحث شد، خیلی سریع به چرخش واداشته شود ($\dot{\psi} \gg 0$)، آهنگ حرکت تقدیمی آن کند ($\dot{\phi} \approx 0$) و اختلاف زاویه‌ای، $\theta_2 - \theta_1$، بین حدود حرکت رقص محوری آن کوچک خواهد شد؛ با فرض این شرط، نشان دهید که فرفره می‌تواند بدون رقص محوری حرکت تقدیمی اجرا کند، اگر حرکتش با $\dot{\theta}|_{\theta=\theta_1} = 0$ و $\dot{\phi}|_{\theta=\theta_1} = mgl/L_{z'}$ آغاز شود که $L_{z'} = I_s S$.

۲۵.۹ مولکولهای فرمالدهید (CH_2O) به وسیلهٔ امواج رادیویی در فضای خارجی آشکارسازی شده‌اند. وقتی حالتهای چرخشی آنها تغییر می‌کند تابش می‌کنند. فرض کنید این مولکول جسم صلبی به شکل چهاروجهی منظم است که وجوه آن مثلثهای متساوی‌الاضلاعی تشکیل می‌دهند؛ جرم اتمهای اکسیژن، کربن، و هیدروژن، به ترتیب، عبارت‌اند از ۱۶AMU، ۱۲AMU، و ۱AMU.

(الف) نشان دهید دستگاه مختصاتی که محور ۳ی آن از اتم اکسیژن و تصویر آن روی وجهی



شکل م۲۵.۹

متشکل از ۱ اتم کربن و ۲ اتم هیدروژن می‌گذرد، محور ۱ آن از آن دو نقطه و تصویر اتم کربن عبور می‌کند، و محور ۲ی آن موازی خط واصل دو اتم هیدروژن است. این محورها، همان محورهای اصلی مولکول‌اند (مطابق شکل م. ۲۵.۹).

(ب) تانسور لختی را برای این مولکول حول این محورها بنویسید.

(ج) فرض کنید مولکول با سرعت زاویه‌ای

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_1 \mathbf{e}_1 + \omega_2 \mathbf{e}_2 + \omega_3 \mathbf{e}_3$$

می‌چرخد. نشان دهید که اگر این مولکول اساساً حول محور ۳ یا ۲ بچرخد (یعنی اگر ω_1 و ω_2 در مقایسه با ω_3 کوچک باشند یا اگر ω_1 و ω_3 در مقایسه با ω_2 کوچک باشند)، چرخش آن پایاست. اما اگر اساساً حول محور ۱ بچرخد، چرخش آن پایا نیست.

مسائل کامپیوتری

ک۱.۹ فرفرهٔ چرخانی را در نظر بگیرید که در مثالهای ۱.۷.۹ و ۲.۷.۹ دربارهٔ آن بحث شد. فرض کنید آن را با سرعت ۳۵ دور بر ثانیه به چرخش واداشته‌اند، و در ابتدا محور چرخش آن در زاویهٔ $\theta_0 = 60^\circ$ ثابت نگاه داشته می‌شود. بعد این محور را رها می‌کنند و فرفره شروع به واژگون‌شدن می‌کند؛ هنگامی که دارد می‌افتد، محورش حرکت تقدیمی را آغاز می‌کند به‌طوری که بین زوایای قطبی محدودکنندهٔ θ_1 و θ_2 رقص محوری می‌کند.

(الف) دو حد θ_1 و θ_2 را محاسبه کنید.

(ب) زمان تناوب حرکت رقص محوری را به‌طور تحلیلی تخمین بزنید. (راهنمایی: در رابطه‌ای که در متن درس برای u داده شده است، هرجا لازم است تقریبهایی به‌کار ببرید و بعد انتگرال بگیرید.)

(ج) زمان تناوب حرکت تقدیمی میانگین را به‌طور تحلیلی تخمین بزنید. (راهنمایی: در رابطه‌ای که در متن درس برای $\dot{\phi}$ داده شده است، تقریبهایی به‌کار برید).

(د) $\cos\theta(t)$ و $\phi(t)$ را با انتگرال‌گیری معادلات مناسب حرکت روی فاصلهٔ زمانی که قدری بزرگتر از زمان تناوب رقص محوری باشد، به‌طور عددی به‌دست آورید.

(ه) تابع $x(t) = \cos\theta_1 - \cos\theta(t)$ را اختیار کنید که در آن θ_1 حد کوچکتر دو حد زاویه‌ای حرکت رقص محوری باشد. $x(t)$ را برحسب $\phi(t)$ روی همان فاصلهٔ قسمت (د) ترسیم کنید. با توجه به این نمودار، هم زمان تناوب رقص محوری، و هم زمان تناوب حرکت تقدیمی میانگین را

محاسبه کنید. نتایج به‌دست‌آمده از این نمودار را با نتایج مربوط به بندهای (الف)، (ب)، و (ج) مقایسه کنید.

ک۲.۹ **(الف)** محاسبهٔ عددی چرخش آزاد بیضوی با سه گشتاور لختی اصلی نامساوی، در بخش ۵.۹، را تکرار کنید. به خصوص، مقادیر گشتاورهای لختی و نمودار فضای فاز داده‌شده در آن بخش را بررسی کنید.

(ب) مسیر فضای فاز همان بیضیوار را با جواب مربوط به محل تقاطع بیضیوارهای ثابت T و L^2 محاسبه کنید.

(ج) شرایط اولیهٔ مناسب برای $[\omega_1(0), \omega_2(0), \omega_3(0)]$ را که منجر به حرکت تقدیمی حول محوری غیر از محور ۳ می‌شود، در صورت امکان، بیابید. (راهنمایی: سرعتهای زاویه‌ای حول محور ۳ و هر کدام از محورهای ۱ یا ۲، ولی نه هر دو، در مدت یک زمان تناوب حرکت باید از صفر عبور کند).

۱۰

مکانیک لاگرانژی

«. . . برای تبدیل‌کردن نظریهٔ مکانیک و هنر حل‌کردن مسائل وابسته به آن به فرمول عمومی، که توسعه سادهٔ آن تمام معادلات لازم را برای حل هر مسئله فراهم می‌آورد . . . برای متحد و ارائه‌کردن اصول مختلف از یک دیدگاه، که تا اینجا، برای کمک به حل مسائل مکانیک مفید از کار درآمده‌اند؛ با نشان‌دادن وابستگی متقابلشان و داوری در خصوص اعتبار و دامنهٔ ممکن آنها . . . هیچ نموداری در این کار یافت نخواهد شد. روشهایی که من آنها را توضیح می‌دهم، نه نیازمند ساختارها و نه برهانهای هندسی یا مکانیکی‌اند، بلکه فقط عملیات جبری لازم است که ذاتی فرایندی منظم و یکنواخت است. آنها که به تحلیل علاقه دارند، با شادمانی، مشاهده خواهند کرد که مکانیک به شاخهٔ جدیدی از تحلیل تبدیل می‌شود و به خاطر تعمیم این حوزه از من بسی سپاسگزار خواهند بود.»[1]

دریچهٔ دیگر نگریستن به مکانیک، غیر از چشم‌انداز نیوتونی، در خاک قاره‌ای اروپا همزمان با تلاشهای نیوتون پدید آمد و تعمیم یافت. پیشگام این کار ویلهلم فون لایب‌نیتس (۱۷۱۶ – ۱۶۴۶)

1. Joseph Louis de Lagrange, *Avertissement For Mechanique Analytique*, 1788.

بود (کسی که نیوتون با او بر سر کسب اعتبار ابداع حساب انتگرال و دیفرانسیل در جر و بحثی شدید عمیقاً درگیر شده بود). رویکرد لایب‌نیتس بر پایهٔ عملیات ریاضی با کمیتهای اسکالرِ انرژی، بر خلاف کمیتهای برداری نیرو و شتاب استوار بود. بیش از یک قرن طول کشید تا این رویکرد با مشغول‌کردن درخشانترین استعدادها و تواناترین اذهان به خود، به کمال برسد. بعد از لایب‌نیتس، پیشرفتهای مکانیک جدید عمدتاً به دست یوهان برنولی (۱۷۴۸ـ۱۶۶۷) صورت گرفت. وی، در سال ۱۷۱۷، اصل «کار مَجازی» را برای توصیف تعادل سیستمهای استاتیکی، برقرار کرد. این اصل را ژان لوران دالامبر (۱۷۸۳ـ۱۷۱۷) ابداع کرد تا سیستمهای دینامیکی را نیز در برگیرد. ژوزف لویی لاگرانژ (۱۸۱۳ـ۱۷۳۶) با کارهای خود این مرحله را به اوج خود رساند؛ اصل کار مجازی و تعمیم دالامبری آن را به‌صورت اساسی برای رسیدن به معادلات دینامیکی حرکت که، اکنون به نام خودش نامیده می‌شود، به‌کار گرفت.[۱]

در ابتدا، رویکرد لاگرانژ را در تشکیل‌دادن معادلات حرکتش به کار نمی‌بریم. بلکه، رویکرد دیگری را بر می‌گزینیم، که اساساً با هدف حل‌کردن مسائلی دنبال می‌شود که دامنهٔ علم فیزیک را درنوردند، نه صرفاً مسائلی که به حوزهٔ مکانیک کلاسیک محدود می‌شوند. این رویکرد از باور فلسفی عمیقی ناشی می‌شود که بر اساس آن عالم فیزیکی بر طبق قوانین طبیعت، که بر اساس یک اصل صرفه‌جویی استوار است، عمل می‌کند. شکل این قوانین باید ساده و ظریف باشد. این اعتقاد بر بسیاری از فیزیکدانان و ریاضیدانان برجستهٔ سراسر تاریخ تأثیر نهاد که در میان معدودی از تعداد بسیار آنها می‌توان از اویلر، گاوس، اینشتین، برنولی، و ریلی یاد کرد. ایدهٔ اساسی از این قرار است که «طبیعت مادر» انتخابها را انجام داده است، و همواره تلقین می‌کند که اشیائی که عالم فیزیکی را تشکیل می‌دهند، مسیرهایی در فضا و زمان دنبال می‌کنند که بر اصول فرینه‌ها مبتنی است. مثلاً، اجسام متحرک مسیرهایی «جستجو می‌کنند» که ژئودزیک‌اند، یعنی در کوتاهترین فاصلهٔ بین دو نقطه بر رویهٔ هندسی معینی واقع‌اند؛ پرتو نور مسیری می‌پیماید که زمان عبورش کوتاهترین (یا به نحو چشمگیری کوتاهترین) زمان باشد؛ و مجموعهٔ ذرات پیکربندیهایی متوازنی به خود می‌گیرند که انرژی آنها را کمینه می‌سازد.

چنین فرضی معنایی عمیق دربارهٔ کارکرد طبیعت می‌رساند که ممکن است صحیح باشد یا

---

۱. برای دستیابی به بحثی در خصوص، اصل کار مجازی، ر.ک.، مثلاً،

N. G. Chataeu. *Theoretical Mechanics*, Springer-Verlag, Berlin, 1989.

برای به‌دست‌آوردن معادلات لاگرانژ از اصل دالامبر، مثلاً، ر.ک.

H. Goldstein, *Classical Mechanics*, Addison-Wesley, Reading, MA, 1965;

F. A. Scheck, *Mechanics—From Newton's Laws to Deterministic Chaos*, Springer-Verlag, Berlin, 1990.

نباشد. این همان مبحث و موضوعی است که برای فلاسفه و حکمای الهی یکسان خوراک فراهم می‌آورد. از دیدگاه فیزیکدان، به تعبیری حقیقت امر در عمل معلوم می‌شود. هر چند ممکن است قوانین طبیعت، ظریف و زیبا باشند، باید نهایتاً به تأیید عملی و تجربی آنها پافشاری کنیم. قوانینی که برای ترسیم واقعیت طبیعت برمی‌گزینیم، باید تحت بررسی موشکافانهٔ علمی قرار گیرد. ناکامی در برآورده‌کردن با استانداردهای این استلزام، بسیاری از فرضیه‌های دقیق موشکافانه را به توده‌ای بدون استفاده بدل می‌کند.

اما، فرضیهٔ صرفه‌جویی کلی که در اینجا با آن آشنا می‌شویم، در مقابل تمام ضربه‌های سهمگین دژکوبهای آزمایشی ایستادگی کرده است (درواقع، به قوانین حرکت نیوتون منجر می‌شود). این فرضیه که ابتدا در سال ۱۸۳۴ ریاضیدان برجستهٔ ایرلندی سر ویلیام روان هامیلتون (۱۸۶۵ـ۱۸۰۵) آن را اعلان کرد، چنان برگسترش و تعمیم فیزیک نظری جدید مؤثر از کار در آمده است که اکثر فیزیکدانان این فرضیه را تا مرتبه‌ای حتی بنیادیتر از قوانین نیوتون ارتقا داده‌اند. به این ترتیب، بر آن شده‌ایم که از این فرضیه به عنوان اصل موضوع بنیادی مکانیک در آغاز این فصل سود جوییم. در بخشهای آتی:

- از این اصل موضوع، به نام اصل وردشی هامیلتون، بهره می‌گیریم تا نشان دهیم که در حالت خاص سقوط جسمی در میدان گرانشی یکنواخت، این اصل با قانون دوم حرکت نیوتون هم‌ارز است.
- اصل وردشی هامیلتون را به‌کار می‌بریم تا معادلات حرکت لاگرانژ را برای سیستم پایسته استخراج کنیم و کاربرد آن‌را در مثالهای متعدد نشان دهیم.
- نشان می‌دهیم چگونه لازم است معادلات حرکت لاگرانژ اصلاح شوند وقتی نیروهای قیدی تعمیم‌یافته در نظر گرفته می‌شوند.
- اصل دالامبر را ارائه می‌کنیم و آن را در استخراج معادلات لاگرانژ برای هر سیستم فیزیکی به کار می‌بریم که هر گونه نیروی تعمیم‌یافته‌ای، از جمله نیروهای ناپایستار، را دربرگیرد تا به این وسیله نمایش هم‌ارزی فرمول‌بندیهای مکانیک نیوتونی و لاگرانژی را کامل کنیم.
- با فرمول‌بندی هامیلتونی مکانیک آشنا می‌شویم و کاربرد آن را ضمن مثالهای متعدد نمایش می‌دهیم.

۱.۱۰ اصل وردشی هامیلتون: یک مثال

بنابر اصل وردشی هامیلتون، انتگرال

$$J = \int_{t_1}^{t_2} L dt$$

که در امتداد مسیر حرکت احتمالی یک سیستم فیزیکی گرفته می‌شود، هنگامی اکسترمم خواهد بود که در طول مسیر حرکتی محاسبه شود که عملاً آن را طی می‌کند. $L = T - V$ عبارت است از تابع لاگرانژی سیستم یا اختلاف بین انرژی جنبشی و پتانسیل آن. به بیان دیگر، از بین راههای فراوان و متعددی که هر سیستم در خلال بازهٔ زمانی $t_2 - t_1$ می‌تواند پیکربندی خود را تغییر دهد، حرکت واقعی حرکتی است که برای آن انتگرال فوق ماکسیمم یا مینیمم باشد. این گزاره را می‌توان از لحاظ ریاضی به این قرار بیان کرد:

$$\delta J = \delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = 0 \qquad (۱.۱.۱۰)$$

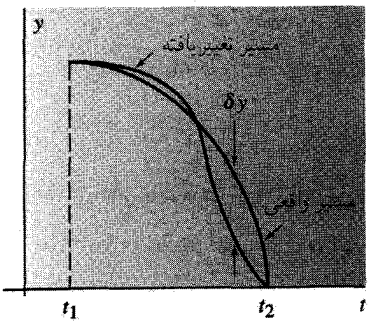
که در آن δ عملگری است نمایانگر تغییر هر پارامتر سیستم خاص به اندازهٔ بینهایت کوچک که با مقداری که این پارامتر در هنگامی که انتگرال معادلهٔ (۱.۱.۱۰) اکسترمم است، اختلاف دارد. مثلاً، δ که به صراحت در معادلهٔ (۱.۱.۱۰) ظاهر می‌شود تغییری در کل انتگرال حول مقدار اکسترمم آن است. چنین تغییر و وردشی از طریق تغییردادن مختصات و سرعتهای سیستمی دینامیکی به‌دست می‌آید که با مقادیری فرق دارند که سیستم با آنها در زمان t_1 تا t_2 تحت قیدی متحول می‌شود که تغییر در تمام پارامترها در نقاط پایانی حرکت در t_1 و t_2 صفر باشد. یعنی، وردش یا تغییر پارامترهای سیستم بین t_1 و t_2 تحت شرایطی که حرکت باید در خلال آن بازهٔ زمانی کامل شود و شرایطی که تمام پارامترهای سیستم در شروع و ختم حرکت باید مقادیر بدون تغییری به خود بگیرند، کاملاً دلخواه است.

اصل وردشی هامیلتون را در مورد سقوط ذره‌ای از حال سکون در میدان گرانشی یکنواخت به‌کار می‌بریم. می‌بینیم که انتگرال در معادلهٔ (۱.۱.۱۰) اکسترمم است، وقتی مسیری که شیء پیموده مسیری است که برای آن ذره از قانون دوم نیوتون پیروی می‌کند. در هر لحظهٔ t ارتفاع ذره از سطح زمین را با y و سرعتش را با $\dot{y}$ نشان می‌دهیم. در این صورت، δy و $\delta \dot{y}$ جابه‌جاییهای مجازی وکوچک y و $\dot{y}$ را نسبت به مکان و سرعت واقعی ذره در هر لحظه t در خلال حرکت واقعیش می‌نمایانند (شکل ۱.۱.۱۰). انرژی پتانسیل ذره mgy، و انرژی جنبشی آن $m\dot{y}^2/2$ است. تابع لاگرانژ عبارت خواهد بود از $L = m\dot{y}^2/2 - mgy$. وردش در انتگرال لاگرانژی در قالب این عبارت بیان می‌شود:

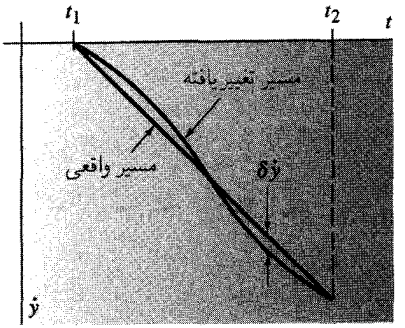
$$\delta J = \delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = \delta \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{m\dot{y}^2}{2} - mgy\right] dt = \int_{t_1}^{t_2} (m\dot{y}\delta\dot{y} - mg\delta y) dt \qquad (۲.۱.۱۰)$$

وردش در سرعت را می‌توان به وردش مختصه تبدیل کرد، با توجه به اینکه

$$\delta\dot{y} = \frac{d}{dt}\delta y \qquad (۳.۱.۱۰ \text{ الف})$$



(الف)



(ب)

شکل ۱.۱.۱۰ (الف) وردش (تغییر) مختصهٔ ذره از مسیر حقیقیش در سقوط آزاد (ب) وردش در سرعت ذره از مقدار واقعی سرعت آن در خلال سقوط آزاد.

با انتگرال‌گیری از جملهٔ اول معادلهٔ (۲.۱.۱۰) به طریق جزء به جزء می‌رسیم به

$$\int_{t_1}^{t_2} m\dot{y}\delta\dot{y}dt = \int_{t_1}^{t_2} m\dot{y}\frac{d}{dt}\delta y dt = m\dot{y}\delta y\Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} m\ddot{y}\delta y dt \qquad (۳.۱.۱۰ \text{ ب})$$

جملهٔ انتگرال‌گیری‌شدهٔ سمت راست عیناً صفر است زیرا پارامترهای مسیرهای مُجاز حرکت در نقاط انتهایی حرکت تغییری نمی‌کنند. به این ترتیب، می‌رسیم به

$$\delta J = \delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = \int_{t_1}^{t_2} (-m\ddot{y} - mg)\delta y dt = 0 \qquad (۴.۱.۱۰)$$

چون δy وردشی کاملاً دلخواه از پارامتر y را نسبت به مقدار واقعی آن در سراسر حرکت ذره نمایش می‌دهد (جز در نقاط انتهایی که وردش مقید به صفر می‌شود)، تنها راهی که معادلهٔ (۴.۱.۱۰) می‌تواند تحت چنین شرایطی صفر شود از این قرار است که جملهٔ داخل پرانتز در تمام مدت عیناً صفر شود. به این ترتیب،

$$-mg - m\ddot{y} = 0 \qquad (۵.۱.۱۰)$$

که همان‌طور که قبلاً گفته شد، این قانون دوم حرکت برای ذرهٔ سقوطی در میدان گرانشی یکنواخت است.

جواب این معادلهٔ حرکت عبارت است از $y(t) = -\frac{1}{2}gt^2$ (با این فرض که شیء از حال سکون در $y_0 = 0$ سقوط می‌کند). اکنون نشان می‌دهیم که هر جوابی که با این جواب تفاوت کند،

انتگرالی، $J = \int L dt$، به‌دست می‌دهد که اکسترمم نیست. می‌توانیم هر وردش ممکن در y نسبت به جواب واقعی را از طریق بیان پارامتری آن به‌صورت $y(\alpha, t)$ نمایش دهیم، به‌صورتی که

$$y(\alpha, t) = y(\circ, t) + \alpha\eta(t) \qquad (۶.۱.۱۰)$$

وقتی پارامتر $\alpha = \circ$، در این صورت $y = y(\circ, t) = y(t)$ جواب واقعی است. $\eta(t)$ هر تابعی از زمان است که مشتق اول آن در بازهٔ $[t_۱, t_۲]$ پیوسته باشد و مقادیرش، $\eta(t_۱)$ و $\eta(t_۲)$، صفرند و به این ترتیب، تضمین می‌شود که $y(\alpha, t)$، بدون توجه به مقدار α، در آن زمانها به مقدار واقعی خود می‌رسد. چون انتخاب $\eta(t)$ دلخواه است، فقط با قیدهای بیان‌شده در معادلهٔ (۶.۱.۱۰) سازگار است، و کمیت $\alpha\eta(t)$ هر وردش $\delta y(t)$ نسبت به مسیر دینامیکی واقعی را که بخواهیم ایجاد می‌کند. نمودار وردش نسبت به مسیر دینامیکی واقعی در شکل ۱.۱.۱۰ ترسیم شده است.

حال انتگرال J تابعی از پارامتر α است

$$J(\alpha) = \int_{t_۱}^{t_۲} L[y(\alpha, t), \dot{y}(\alpha, t); t]dt \qquad (۷.۱.۱۰)$$

اکنون به محاسبهٔ این انتگرال برای حالت سقوط جسم اقدام می‌کنیم. رابطهٔ $\dot{y}$ برحسب پارامتر α از این قرار است

$$\dot{y}(\alpha, t) = \dot{y}(\circ, t) + \alpha\dot{\eta}(t) \qquad (۸.۱.۱۰)$$

که $\dot{y}(\circ, t) = -gt$. انرژی جنبشی و پتانسیل جسم افتان، عبارت‌اند از

$$T = \frac{۱}{۲}m\dot{y}^۲ = \frac{۱}{۲}m[-gt + \alpha\dot{\eta}(t)]^۲ \qquad (۹.۱.۱۰ \text{ الف})$$

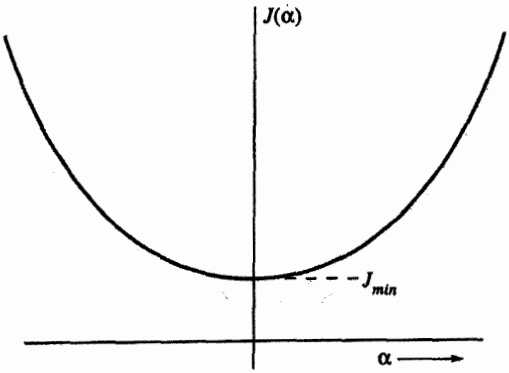
$$V = mgy = mg\left[-\frac{۱}{۲}gt^۲ + \alpha\eta(t)\right] \qquad (۹.۱.۱۰ \text{ ب})$$

بنابراین، انتگرال $J(\alpha)$ عبارت است از

$$\begin{aligned} J(\alpha) &= \int_{t_۱}^{t_۲} m\left(\frac{\dot{y}^۲}{۲} - gy\right)dt \\ &= \int_{t_۱}^{t_۲} m\left\{g^۲t^۲ - \alpha g[t\dot{\eta}(t) + \eta(t)] + \frac{۱}{۲}\alpha^۲\dot{\eta}^۲(t)\right\}dt \end{aligned} \qquad (۱۰.۱.۱۰)$$

انتگرال جملهٔ خطی برحسب α، در آکولاد وسطی در معادلهٔ (۱۰.۱.۱۰) به این قرار است

$$\int_{t_۱}^{t_۲}[t\dot{\eta}(t) + \eta(t)]dt = t\eta(t)\Big|_{t_۱}^{t_۲} - \int_{t_۱}^{t_۲}\eta(t)dt + \int_{t_۱}^{t_۲}\eta(t)dt \equiv \circ \qquad (۱۱.۱.۱۰)$$



شکل ۲.۱.۱۰ $J(\alpha) = \alpha + b\alpha^2$ به‌ازای $\alpha = 0$ مینیمم است.

جملهٔ اول در معادلهٔ (۱۱.۱.۱۰) صفر می‌شود زیرا $\eta(t_1) = 0$ و $\eta(t_2) = 0$. به این ترتیب، جملهٔ خطی برحسب α کاملاً صفر می‌شود و می‌رسیم به

$$J(\alpha) = \frac{1}{3}g^2(t_2^3 - t_1^3) + \frac{1}{2}\alpha^2 \int_{t_1}^{t_2} \dot{\eta}^2(t)dt \qquad (۱۲.۱.۱۰)$$

جملهٔ آخر در معادلهٔ (۱۲.۱.۱۰) برحسب مجذور پارامتر α است، و چون انتگرال $\dot{\eta}^2(t)$ به‌ازای هر $\dot{\eta}(t)$ باید مثبت باشد، $J(\alpha)$ رفتار ترسیم‌شدهٔ شکل ۲.۱.۱۰ را می‌نمایاند. مقدار انتگرال مینیمم است وقتی

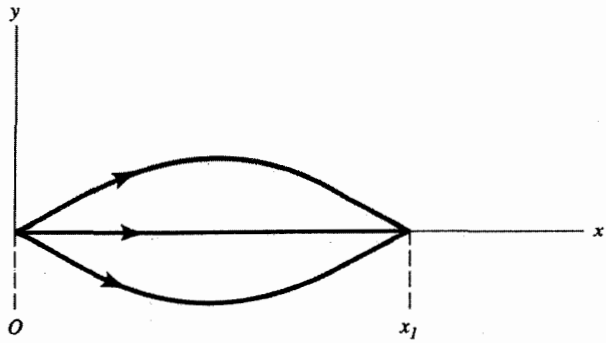
$$\left.\frac{\partial J(\alpha)}{\partial \alpha}\right|_{\alpha=0} = 0$$

که به‌ازای $\alpha = 0$ اتفاق می‌افتد.

گرچه این نتیجه بر پایهٔ مثال خاصی استوار شد، برای هر انتگرال J از تابعی از تابع y (و مشتق مرتبهٔ اول آن) که شکل پارامتری دارد که در قالب معادلهٔ (۶.۱.۱۰) بیان شده، صادق است. $J(\alpha)$ حاصل به α تا مرتبهٔ اول بستگی دارد و مشتق جزئی آن در $\alpha = 0$ صفر می‌شود، که انتگرال را فقط وقتی اکسترمم می‌کند که y مساوی با جوابی باشد که از قانون دوم حرکت نیوتون به‌دست آمد.

مثال ۱.۱.۱۰

فرض کنید ذره‌ای در امتداد مسیری سینوسی در خلال بازهٔ زمانی Δt در ناحیه‌ای بدون میدان نیرو در فضا از نقطهٔ $x = 0$ به $x = x_1$ برود. با بهره‌گیری از اصل هامیلتون نشان دهید که دامنهٔ



شکل ۳.۱.۱۰ مسیرهای ممکن برای ذره‌ای در ناحیهٔ بدون میدان نیرو.

مسیر سینوسی فرض‌شده صفر است و بر این موضوع دلالت می‌کند که مسیری که ذره می‌پیماید در واقع خط راستی است بین دو نقطه.

حل:

مطابق شکل ۳.۱.۱۰، چند مسیر ممکن وجود دارد که منحنی سینوسی بین ۰ و x_1 در امتداد خط مستقیم صحیح مفروض آنها را پی می‌گیرد.

این حرکت که ذرهٔ واقع در ناحیهٔ بدون میدان نیرو از فضا انجام می‌دهد در قالب رابطهٔ $x = v_x t$ بیان می‌شود. هر حرکت ممکن دیگر مقید است که در بازهٔ زمانی

$$\Delta t = x_1/v_x$$

کامل شود. به این ترتیب، می‌توانیم مسیرهای سینوسی تغییریافتهٔ ممکن را مطابق با

$$x = v_x t \quad \text{و} \quad y = \pm\eta \sin \pi v_x t/x_1$$

تغییر دهیم، که η پارامتری است که می‌تواند تغییر کند تا دامنهٔ مسیر سینوسی ذره را تغییر دهد. این تغییر تضمین می‌کند که مهم نیست ذره کدام مسیر را انتخاب می‌کند؛ آن مسیر باید در x_1 در زمان Δt خاتمه یابد. تابع لاگرانژی برای مسیر تغییریافته عبارت است از

$$L = T - V = \frac{1}{2} m \left[v_x^2 + \left(\frac{\eta \pi v_x}{x_1} \right)^2 \cos^2 \frac{\pi v_x t}{x_1} \right] - V$$

V انرژی پتانسیل ذره و ثابت است، زیرا حرکت در ناحیه‌ای از فضا بدون میدان نیرو صورت می‌گیرد. بنابراین

$$J = \int_{۰}^{x_۱/v_x} L dt = \frac{m v_x x_۱}{۲} + \frac{m v_x \eta^۲ \pi^۲}{۴ x_۱} - V \frac{x_۱}{v_x}$$

مسیر را با تغییر η تغییر می‌دهیم، به‌طوری که

$$\delta J = \left(\frac{\pi^۲ m v_x}{۲ x_۱} \right) \eta \delta\eta = ۰$$

از آنجا که $\delta\eta$ صفر نیست، η باید صفر باشد تا در اصل هامیلتون صدق کند و این مبین آن است که مسیر نشان داده‌شده به وسیلهٔ معادلهٔ $x = v_x t$، مسیر واقعی ذره را نمایش می‌دهد. بدیهی است که برای نمایش‌دادن این مطلب به‌طور قطعی، باید نشان دهیم که همین نتیجه برای تمام وردشهای ممکن مسیر به‌دست می‌آید؛ در اینجا ما این کار را انجام نمی‌دهیم.

۲.۱۰ مختصات تعمیم‌یافته

برای تعیین مکان مجموعه‌ای از ذرات در فضا مختصات به‌کار می‌برند. به‌طور کلی می‌توانیم هر مجموعهٔ مختصاتی برای توصیف حرکت سیستم فیزیکی اختیار کنیم. اما، به علت وجود قیدهای هندسی، که پیکربندی مجاز هر سیستم را محدود می‌کنند، ثابت می‌شود که بعضی انتخابها از انتخابهای دیگر مناسبترند.

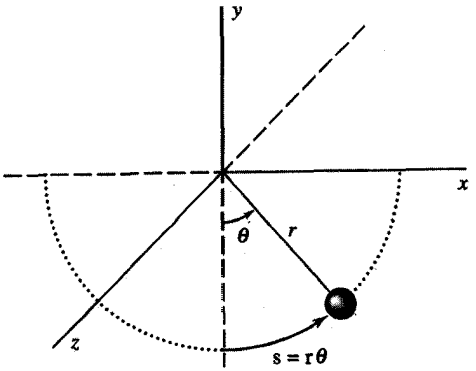
مثلاً، حرکت آونگ در شکل ۱.۲.۱۰ را در نظر بگیرید. حرکت آونگ به حرکت در صفحهٔ xy در طول قوسی به شعاع r محدود می‌شود. می‌توانیم مختصاتی اختیار کنیم که پیکربندی آونگ را از طریق بردار مکانی آن توصیف می‌کند،

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} \qquad (۱.۲.۱۰)$$

بدیهی است که چنین انتخابی عقلانی نیست زیرا دو شرط قیدی را، که آونگ باید از آنها پیروی کند، نادیده می‌انگارد، یعنی

$$z = ۰ \qquad r^۲ - (x^۲ + y^۲) = ۰ \qquad (۲.۲.۱۰)$$

فقط یک مختصهٔ اسکالری برای مشخص‌کردن مکان آونگ واقعاً لازم است. در بادی امر ممکن است x یا y به‌کار آید، ولی برای برطرف‌کردن ابهام ممکن چپ و راست، باید احتمالاً x را برگزینیم

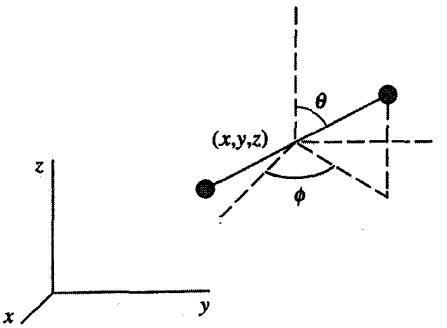


شکل ۱.۲.۱۰ آونگی که در صفحهٔ xy تاب می‌خورد.

تا منحصراً مکان را تعیین کند. در این صورت باید فرض کنیم مقدار y همواره منفی باشد. در این صورت، با معلوم‌بودن مقدار x آونگ، y و z باید به‌طورکامل از طریق شرایط قیدی مشخص شوند. باز هم این انتخاب برای تشریح پیکربندی آونگ نامناسب است.

انتخابی بهتر طول قوس جابه‌جایی $s(= r\theta)$ یا، هم‌ارز آن، جابه‌جایی زاویه‌ای θ هر آونگ از حالت قائم است. هر یک از این انتخابها، انتخابی بهتر است، چون فقط یک عدد لازم است تا به ما بگوید آونگ درکجا قرار دارد. موضوع مهم در اینجا از این قرار است که آونگ واقعاً یک درجهٔ آزادی دارد؛ یعنی می‌تواند فقط از یک راه حرکت کند و آن امتداد قوسی به شعاع r است. فقط یک تک مختصهٔ مستقل وجود دارد که برای ترسیم پیکربندی آن به‌طور منحصر به فرد لازم است. مختصات تعمیم‌یافته، مجموعه‌ای از مختصات مستقل q_i هستند (که هیچ معادلهٔ قیدی رابطه‌ای بین آنها برقرار نمی‌کند) که درست برای مشخص‌کردن پیکربندی سیستم ذرات به‌طور منحصر به فرد کفایت می‌کنند. تعداد مختصات تعمیم‌یافتهٔ لازم، با تعداد درجات آزادی سیستم برابر است؛ اگر برای توصیف پیکربندی سیستم کمتر از این تعداد انتخاب کنیم، نتیجه تعیین نمی‌شود؛ اگر بیشتر از این تعداد انتخاب شود، یعنی برخی مختصات باید از مختصات دیگر توسط شرایط قیدی تعیین شوند.

مثلاً، یک تک‌ذره که می‌تواند در فضای سه‌بعدی آزادانه حرکت کند، سه درجهٔ آزادی نمایش می‌دهد و سه مختصه برای مشخص‌کردن پیکربندی آن لازم است. هیچ معادلهٔ قیدی‌ای وجود ندارد که بین مختصات یک ذرهٔ آزاد ارتباط برقرار کند. برای مشخص‌کردن پیکربندی دو ذرهٔ آزاد به‌طورکامل شش مختصه لازم است، اما برای دو ذره که خط مستقیم صلبی آنها را مانند دمبل



شکل ۲.۲.۱۰ مختصات تعمیم‌یافته برای دو ذره‌ای که میلهٔ صلب فوق‌العاده نازکی آنها را به هم مربوط کرده است.

به هم مربوط کرده باشد (شکل ۲.۲.۱۰)، فقط پنج مختصه لازم است. ببینیم چرا چنین اتفاقی می‌افتد. مکان ذرهٔ ۱ می‌تواند با مختصات (x_1, y_1, z_1) مشخص شود، در صورتی که مکان ذرهٔ ۲ می‌تواند با مختصات (x_2, y_2, z_2) مانند حالت ذرهٔ آزاد مشخص شود. اما، معادله‌ای قیدی وجود دارد که بین مختصات رابطه برقرار می‌کند

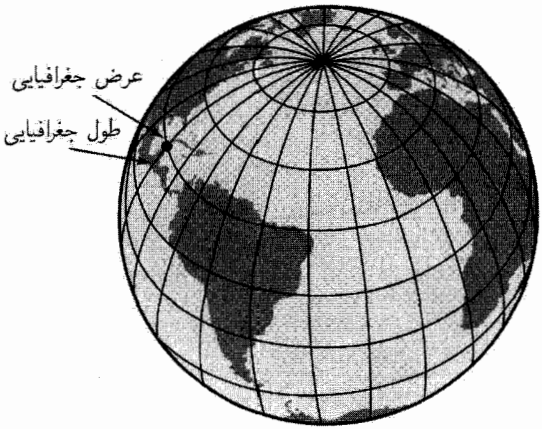
$$d^2 - [(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2] = 0 \qquad (۳.۲.۱۰)$$

یعنی، فاصلهٔ بین دو ذره ثابت و برابر d است.

فرض کنید، در حین مشخص‌کردن مکان یک سیستم، شش مختصهٔ بالا یکی‌یکی اختیار کرده باشیم. برای انتخاب در فرایند گزینش آزادی کامل نداریم، زیرا انتخاب مختصهٔ ششم باید بعد از اینکه پنج مختصهٔ اول را برگزیدیم به ما تحمیل شود. یعنی این موضوع بیشتر آن است که ابتدا فقط پنج مختصهٔ مستقل، مثلاً (X, Y, Z, θ, ϕ)، انتخاب کنیم، که هیچ معادلهٔ قیدی‌ای بین آنها ارتباط برقرار نکرده و در آن (X, Y, Z) مختصات مرکز جرم و (θ, ϕ) زوایای سمت الرأسی و سمتی باشند که سمتگیری دمبل را نسبت به قائم توصیف می‌کنند ($\theta = 0^\circ$، وقتی ذرهٔ ۱ مستقیماً بالای ذرهٔ ۲ واقع باشد، و $\phi = 0^\circ$ وقتی که تصویر خط از ذرهٔ ۲ به ذرهٔ ۱ روی صفحهٔ xy به موازات x متوجه باشد).

برای مثال آخر، موقعیت ذرهٔ مقید به حرکت بر سطح کره را در نظر بگیرید. در اینجا نیز، مختصات (x, y, z) یک مجموعهٔ مستقل تشکیل نمی‌دهند. قیدی به‌صورت زیر، بین آنها ارتباط برقرار می‌کند

$$R^2 - (x^2 + y^2 + z^2) = 0 \qquad (۴.۲.۱۰)$$



شکل ۳.۲.۱۰ مختصهٔ نقطه‌ای روی کرهٔ زمین که به وسیلهٔ عرض و طول جغرافیایی مشخص شده است.

که R شعاع کره است. این ذره برای حرکتش فقط دو درجهٔ آزادی موجود دارد و دو مختصهٔ مستقل برای مشخص‌کردن کامل مکانش روی کره لازم است.

این مختصات می‌توانند عرض جغرافیایی و طول جغرافیایی گرفته شوند که مکانهای روی سطح کروی را نسبت به استوا و نصف‌النهار مبدأ نشان می‌دهند، همانند مکانهای روی سطح زمین (شکل ۳.۲.۱۰)، یا زوایای قطبی و سمتی θ و ϕ مانند مثال دمبل اختیار کنیم.

به‌طور کلی، اگر N ذره آزاد باشند که در فضای سه‌بعدی حرکت کنند ولی $3N$ مختصهٔ آنها با m شرط قیدی به هم مرتبط شوند، در این صورت $n = 3N - m$ مختصهٔ تعمیم‌یافتهٔ مستقل وجود دارد تا به‌طور منحصر به فردی مکان N ذره را توصیف کنند و n درجهٔ آزادی مستقل در دسترس برای حرکت وجود دارد به شرط آنکه قیود به نوعی باشند که در مثالهای قبلی شرح داده شد. چنین قیدهایی را هولونوم می‌گویند. این قیدها را باید بشود به‌صورت معادلاتی به این شکل بیان کرد

$$f_j(x_i, y_i, z_i, t) = 0 \qquad i = 1, 2, \ldots, N \qquad j = 1, 2, \ldots, m \qquad (5.2.10)$$

این معادلات اتحادند، شکل آنها انتگرال‌پذیر است، و ممکن است صراحتاً به زمان بستگی داشته یا نداشته باشند.

قیدهایی که نتوانند به‌صورت معادلاتی از تساویها در آیند یا به‌صورتی غیرقابل انتگرال‌گیری باشند، ناهولونوم نامیده می‌شوند، و نمی‌توان از معادلاتی که چنین قیدهایی بروز می‌دهند، برای حذف هر بستگی مختصات توصیف‌کنندهٔ پیکربندی سیستم از مسئله، بهره گرفت. برای مثالی از

چنین قیدی، ذره‌ای را در نظر بگیرید که مقید به ماندن در خارج از سطح یک کره باشد. (آدمی روی زمین می‌تواند به ماه برود اما بیشتر از چند کیلومتر نمی‌تواند به درون پوستهٔ زمین فرو رود، که این موضوع تقریبی معقول برای این مثال به‌شمار می‌آید.) این شرطِ قیدی در قالب نامساوی زیر بیان می‌شود:

$$(x^۲ + y^۲ + z^۲) - R^۲ \geq ۰ \qquad (۶.۲.۱۰)$$

واضح است که این معادله نمی‌تواند تعداد مختصات مستقل ذره را، وقتی خارج کره قرار دارد، به کمتر از سه کاهش دهد. داخل کره موضوع دیگری است. در این مورد، تک‌قید، درجهٔ آزادی را به صفر کاهش می‌دهد. چون بررسی چنین موقعیتهایی با بهره‌گیری از مکانیک لاگرانژی دشوار است، ما از آنها در این کتاب چشم می‌پوشیم.

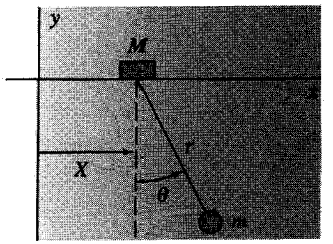
شاید مثال کلاسیکی قید ناهولونوم که در آن معادلهٔ نماینده غیرقابل انتگرال‌گیری است، در مورد غلتیدن توپی بر سطح مسطح ناصافی بدون لغزش، ظاهر می‌شود. شرط «غلتش» بین مختصات رابطه برقرار می‌کند. تغییری در سمتگیری گوی بدون ملازمت تغییر در مکانش روی سطح رخ نمی‌دهد. اما، معادلهٔ قیدی شرطی روی سرعتها می‌گذارد و نه بر مختصات. نقطهٔ تماس گوی با سطح به‌طور لحظه‌ای در حال سکون است. قید مطلوب بر مختصات فقط با انتگرال‌گیری معادلهٔ نمایش‌دهندهٔ قید سرعت به‌دست می‌آید. این کار نمی‌تواند انجام شود، مگر اینکه مسیر گوی معلوم باشد. متأسفانه، همین مسئله است که می‌خواهیم حل کنیم. از این‌رو، معادلهٔ قیدی غیرقابل انتگرال‌گیری است و همان‌طور که قبلاً ذکر شد، نمی‌تواند به کار گرفته شود تا بستگی مختصات را از مسئله حذف کند. اما، برعکس قید ناهولونوم که با شرط نامساوی روی مختصات نمایش داده شد، این نوع قید ناهولونوم را می‌توان با شیوهٔ لاگرانژی از طریق روش ضرایب لاگرانژ حل و فصل کرد.[۱] در اینجا نیز، از چنین وضعیتهایی چشم می‌پوشیم.

۳.۱۰ محاسبهٔ انرژیهای جنبشی و پتانسیل برحسب مختصات تعمیم‌یافته: یک مثال

لاگرانژی $L = T - V$ باید به‌صورت تابع مختصات تعمیم‌یافته و مشتقات زمانی (سرعتهای تعمیم‌یافته) مناسب برای وضعیت فیزیکی مفروض بیان شود. (گاهی، ممکن است لاگرانژی تابع صریحی از زمان نیز باشد، هر چند که در اینجا با چنین حالتهایی سروکار نداریم.) می‌خواهیم بفهمیم چگونه چنین عبارتی را تشکیل دهیم، پیش از آنکه معادلات حرکت لاگرانژ را از اصل وردشی هامیلتون

۱. مثلاً، ر. ک. صفحات ۳۳ تا ۴۴ کتاب

H. Goldstein, *Classical Mechanics*, Addison-Wesley, Reading, MA, 1965.



شکل ۱.۳.۱۰ آونگ سادهٔ متصل به نگهدارندهٔ متحرک.

به‌دست آوریم. از قبل واضح نیست که این‌کار چگونه باید دقیقاً انجام شود. تقریباً همیشه انرژی جنبشی مجموعهٔ ذرات را می‌توانیم به‌صورت توان دوم سرعتهای ذرات در دستگاه مختصات دکارتی بنویسیم.

چون مختصات دکارتی متعامدند، هیچ جملهٔ جفت‌شدهٔ ضربی‌ای در چنین عبارتی یافت نمی‌شود. اما، وقتی انرژی جنبشی برحسب مختصات تعمیم‌یافته بیان می‌شود، این موضوع معمولاً صادق نیست؛ یعنی، مختصات اختیارشده ممکن است جمله‌های سرعت جفت‌شدهٔ ضربی، به‌صورت $\alpha\dot{q}_i\dot{q}_j$، پدید آورند. هیچ تعمیم هم‌ارزی مرتبط با این عبارت برای انرژی پتانسیل سیستم وجود ندارد. در حالتهایی، این عبارت شامل جمله‌های ضربی است حتی وقتی برحسب مختصات دکارتی بیان شود. اما، معمولاً انرژی پتانسیل به شکل تابعی فقط برحسب یکی از مختصات تعمیم‌یافته بیان‌کردنی است و بررسی چگونگی بستگیش به آن مختصه آسان است. معمولاً از این جنبه در برگزیدن مختصات تعمیم‌یافته برای هر وضعیت خاص بهره می‌گیریم. متأسفانه، چنین انتخابی همیشه به جملات ضربی در رابطهٔ انرژی جنبشی سیستم منجر می‌شود.

در مثالی خاص، حالت نسبتاً پردردسری را، مطابق شکل ۱.۳.۱۰، در نظر می‌گیریم که مورد آونگی به جرم m متصل به جرم M است که آزادانه در یک‌بعد در امتداد رویهٔ افقی بدون اصطکاکی حرکت می‌کند. ابتدا، ببینیم دقیقاً چند مختصهٔ تعمیم‌یافته، برای مشخص‌کردن پیکربندی این سیستم به‌طور منحصر به فرد، ضروری است. برای هر جرم سه مختصهٔ دکارتی لازم است، اما چهار قید هولونوم وجود دارد

$$\begin{aligned} Z &= 0 \qquad Y = 0 \\ z &= 0 \qquad [(x-X)^2 + y^2] - r^2 = 0 \end{aligned} \tag{۱.۳.۱۰}$$

دو قید اول تضمین می‌کنند که حرکت جرم M در طول محور x صورت گیرد. دو قید دوم تضمین می‌کنند که آونگ در صفحهٔ xy در امتداد قوسی به شعاع r، نسبت به تکیه‌گاه متحرک، تاب بخورد.

دو درجهٔ آزادی برای این حرکت وجود دارد و دو مختصهٔ تعمیم‌یافته برای توصیف پیکربندی این سیستم ضروری است. آن مختصات را X اختیارکرده‌ایم که مکان افقی جرم M را نشان دهد و θ، جابه‌جایی زاویه‌ای آونگ نسبت به حالت قائم است.

انرژیهای پتانسیل و جنبشی این سیستم را می‌توان برحسب مختصات و سرعتهای دکارتی از این قرار بیان کرد:

$$T = \frac{1}{2}M\dot{X}^2 + \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) \qquad \text{(الف ۲.۳.۱۰)}$$

$$V = mgy \qquad \text{(ب ۲.۳.۱۰)}$$

برای به‌دست‌آوردن انرژی پتانسیل برحسب مختصات تعمیم‌یافته، تبدیل مختصاتی از این قرار لازم است

$$x = X + r\sin\theta \qquad y = -r\cos\theta \qquad X = X \qquad \text{(الف ۳.۳.۱۰)}$$

در حالی که دست‌یافتن به انرژی جنبشی به‌صورت تابعی از سرعتهای تعمیم‌یافته می‌تواند با مشتق‌گیری از معادلهٔ (۳.۳.۱۰ الف)، انجام پذیرد:

$$\dot{x} = \dot{X} + r\dot{\theta}\cos\theta \qquad \dot{y} = r\dot{\theta}\sin\theta \qquad \dot{X} = \dot{X} \qquad \text{(ب ۳.۳.۱۰)}$$

با نشاندن این تبدیلات در معادلات (۲.۳.۱۰ الف و ب)،

$$T = \frac{M}{2}\dot{X}^2 + \frac{m}{2}[(\dot{X} + r\dot{\theta}\cos\theta)^2 + (r\dot{\theta}\sin\theta)^2] \qquad \text{(الف ۴.۳.۱۰)}$$

$$= \frac{M}{2}\dot{X}^2 + \frac{m}{2}[\dot{X}^2 + (r\dot{\theta})^2 + 2\dot{X}r\dot{\theta}\cos\theta]$$

$$V = -mgr\cos\theta \qquad \text{(ب ۴.۳.۱۰)}$$

جنبه‌های متعدد معادلات (۴.۳.۱۰ الف و ب) اظهارات ما را تشریح می‌کنند:

۱. انرژی جنبشی، به‌صورت درجهٔ دوم سرعتهای تعمیم‌یافتهٔ شامل جملهٔ ضربی، بیان‌کردنی است.

۲. انرژی پتانسیل به یک مختصهٔ تعمیم‌یافته، که در این حالت کسینوس زاویه است، بستگی دارد.

هر چند ممکن است ملاحظهٔ چگونگی نوشتن انرژی پتانسیل مستقیماً برحسب یک مختصهٔ تعمیم‌یافته آسان باشد، نوشتن انرژی جنبشی مستقیماً برحسب سرعتهای تعمیم‌یافته به قدری اندیشیدن نیاز دارد، ولی به انجام دادنش می‌ارزد؛ از این‌رو آن را بررسی می‌کنیم.

سرعت جرم M نسبت به دستگاه مرجع لخت ثابت ما، عبارت است از

$$\mathbf{V}_M = \mathbf{i}\dot{X} \qquad (۵.۳.۱۰)$$

سرعت جرم m را می‌توان به‌صورت جرم M به اضافهٔ سرعت جرم m نسبت به جرم M بیان کرد؛ یعنی

$$\mathbf{v}_m = \mathbf{V}_M + \mathbf{v}_{m(\text{نسبی})} \qquad (۶.۳.۱۰ \text{ الف})$$

که

$$\mathbf{v}_{m(\text{نسبی})} = \mathbf{e}_\theta r\dot{\theta} \qquad (۶.۳.۱۰ \text{ ب})$$

و $\mathbf{e}_\theta$ بردار یکهٔ مماسی بر قوسی است که آونگ در امتدادش تاب می‌خورد. از این‌رو، اکنون می‌توان سرعت m را به شکل مؤلفه‌ای، به‌صورت تابعی از مختصات تعمیم‌یافتهٔ X و θ بیان کرد

$$\dot{x} = \dot{X} + r\dot{\theta}\cos\theta \qquad \dot{y} = r\dot{\theta}\sin\theta \qquad (۷.۳.۱۰)$$

با نشاندن این عبارتها به‌ازای سرعتهای دکارتی دو جرم در معادلهٔ (۲.۳.۱۰ الف)، انرژی جنبشی برحسب مختصات تعمیم‌یافته، مطابق معادلهٔ (۴.۳.۱۰ الف)، به‌دست می‌آید.

حتی برای برقراری عبارت صحیح انرژی جنبشی می‌توان راه مستقیمتری را با توجه به این عبارت، به‌دست آورد:

$$T = \frac{1}{2}M\mathbf{V}_M \cdot \mathbf{V}_M + \frac{1}{2}m\mathbf{v}_m \cdot \mathbf{v}_m \qquad (۸.۳.۱۰)$$

که در آن

$$\mathbf{V}_m = \mathbf{i}\dot{X} \qquad \mathbf{v}_m = \mathbf{i}\dot{X} + \mathbf{e}_\theta r\dot{\theta} \qquad (۹.۳.۱۰ \text{ الف})$$

$$\mathbf{V}_M \cdot \mathbf{V}_M = \dot{X}^2 \qquad \mathbf{v}_m \cdot \mathbf{v}_m = \dot{X}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + 2\dot{X}r\dot{\theta}\cos\theta \qquad (۹.۳.۱۰ \text{ ب})$$

برای به‌دست‌آوردن عبارت صحیح انرژی جنبشی هر سیستم معین، با دنبال‌کردن روش مطرح‌شدهٔ اول (معادلات (۲.۳.۱۰ الف) تا (۴.۳.۱۰ ب))، یعنی، نوشتن انرژی جنبشی برحسب سرعتها در مختصات دکارتی، در یافتن تبدیلی که بین مختصات دکارتی و تعمیم‌یافته رابطه برقرار کند، و سپس مشتق‌گرفتن از آنها، کمتر اشتباهی پیش می‌آید. اما، در بسیاری از حالتها، بهره‌گیری از آخرین رویهٔ نشان داده‌شده (معادلات (۸.۳.۱۰) تا (۹.۳.۱۰ ب)) آسانتر است، مخصوصاً اگر کسی بتواند تجسم کند درست چه شکلی از سرعتهای تعمیم‌یافته برحسب بردارهای یکهٔ متناظر با مختصات تعمیم‌یافتهٔ انتخابی، اختیار می‌شود.

وقتی مسائل فقط شامل قیدهای هولونوم باشند، همیشه معادلات تبدیلی یافت می‌شود که بین مختصات دکارتی مجموعه‌ای از ذرات با مختصات تعمیم‌یافتهٔ آنها رابطه برقرار می‌کند و بنابراین سرعتهای تعمیم‌یافتهٔ مورد نیاز را می‌توان از طریق مشتق‌گیری به‌دست آورد. مثلاً، در مورد تک ذره، داریم:

سه درجهٔ آزادی ــ حرکت نامقید در فضا

$$\begin{aligned} x &= x(q_1, q_2, q_3) \\ y &= y(q_1, q_2, q_3) \\ z &= z(q_1, q_2, q_3) \end{aligned} \qquad (۱۰.۳.۱۰)$$

دو درجهٔ آزادی ــ حرکت مقید روی سطح

$$\begin{aligned} x &= x(q_1, q_2) \\ y &= y(q_1, q_2) \\ z &= z(q_1, q_2) \end{aligned} \qquad (۱۱.۳.۱۰)$$

یک درجهٔ آزادی ــ حرکت روی خط

$$\begin{aligned} x &= x(q) \\ y &= y(q) \\ z &= z(q) \end{aligned} \qquad (۱۲.۳.۱۰)$$

و، همان‌طورکه در مورد معادلات (۳.۳.۱۰ الف و ب) انجام دادیم، می‌توانیم تبدیلهای سرعت را از طریق مشتق‌گیری سادهٔ تبدیلات مختصات به‌دست آوریم:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial x}{\partial q_i} \dot{q}_i \\ \dot{y} &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial y}{\partial q_i} \dot{q}_i \\ \dot{z} &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial z}{\partial q_i} \dot{q}_i \end{aligned} \qquad (۱۳.۳.۱۰)$$

که n تعداد درجات آزادی است.

۴.۱۰ معادلات لاگرانژ حرکت برای سیستمهای پایسته

اکنون آماده‌ایم تا معادلات لاگرانژ را از اصل وردشی هامیلتون استخراج کنیم. ابتدا باید خاطرنشان سازیم که تمام مثالهای ما تا به حال فقط شامل سیستمهای پایسته بودند که حرکتشان نامقید یا، در بدترین حالت، فقط تحت‌تأثیر قیدهای هولونوم مستقل از زمان است. کماکان تحلیل خود را به چنین سیستمهایی محدود می‌کنیم. خوانندهٔ علاقه‌مندی را که بخواهد زحمت بحث دربارهٔ سیستمهای ناپایسته یا سیستمهایی را به خود هموار کند که در معرض قیدهای ناهولونوم‌اند، ترغیب می‌کنیم تا به کتابهای پیشرفته‌تر در این زمینه رجوع کند.

اصل هامیلتون در قالب معادلهٔ (۱.۱.۱۰) بیان می‌شود. ما از طریق دست یازیدن به همان راهکار وردشی بخش ۱.۱۰ برای حالت خاص سقوط آزاد جسم در میدان گرانشی کار خود را آغاز می‌کنیم. فقط این‌بار فرایند مربوط به هر سیستم پایستار کلی را اجرا می‌کنیم. با فرض آنکه لاگرانژی تابع معلومی از مختصات تعمیم‌یافتهٔ q_i و سرعتهای تعمیم‌یافتهٔ $\dot{q}_i$ باشد، کار خود را شروع می‌کنیم. وردش در انتگرال زمانیش عبارت است از

$$\delta J = \delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = \int_{t_1}^{t_2} \delta L dt = \int_{t_1}^{t_2} \sum_i \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i \right) dt = 0 \tag{۱.۴.۱۰}$$

q_i توابعی از زمان‌اند؛ این توابع در حالی تغییر می‌کنند که سیستم از t_1 تا t_2 «متحول می‌شود». بنابراین، وردش δq_i با اختلاف بین دو تابع وابسته به زمان t برابر است که با هم اختلاف اندکی دارند. بنابراین، $\delta \dot{q}_i$ را می‌توان به‌صورت زیر بیان کرد

$$\delta \dot{q}_i = \frac{d}{dt} \delta q_i \tag{۲.۴.۱۰}$$

این نتیجه می‌تواند در واپسین جملهٔ معادلهٔ (۱.۴.۱۰) نشانده شود، که در این صورت می‌توان آن را انتگرال‌گیری جزء به جزء کرد:

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{d}{dt} (\delta q_i) dt = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \sum_i \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i dt \tag{۳.۴.۱۰}$$

جملهٔ انتگرال‌گیری‌شده صفر می‌شود، زیرا در نقاط انتهایی t_1 و t_2 وردش عبارت است از $\delta q_i = 0$. بنابراین، می‌رسیم به

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = \int_{t_1}^{t_2} \sum_i \left[\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \right] \delta q_i dt = 0 \tag{۴.۴.۱۰}$$

هر مختصهٔ تعمیم‌یافته q_i از سایر مختصات مستقل است، همین‌طور وردشهای δq_i نیز از یکدیگر مستقل‌اند. افزون بر این، مقدار واقعی هر وردش δq_i کاملاً دلخواه است. به بیان دیگر، می‌توانیم هر مختصه را به هر روشی که اختیار می‌کنیم، تغییر دهیم تا جایی که تضمین شود که وردش آن در نقاط انتهایی مسیر صفر می‌شود. در نتیجه، تنها راهی که می‌توانیم تضمین کنیم انتگرال قبلی صفر می‌شود، از این قرار است که با دادن تمام مقادیر مختلف و ممکن δq_i، بخواهیم هر جملهٔ داخل کروشهٔ انتگرال معادلهٔ (۴.۴.۱۰)، به‌طور جداگانه صفر شود؛ یعنی،

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) = ۰ \qquad (i = ۱, ۲, \ldots, n) \qquad (۵.۴.۱۰)$$

اینها معادلات لاگرانژی مطلوب برای سیستم پایستارند که، در بدترین حالت، فقط دستخوش قیدهای هولونومی‌اند.

۵.۱۰ بعضی کاربردهای معادلات لاگرانژ

در اینجا فایدهٔ پردامنهٔ معادلات حرکت لاگرانژ را، از طریق بهره‌جستن از آنها برای دستیابی به معادلات دیفرانسیل حرکت برای چند سیستم مختلف، توصیف می‌کنیم. راهبرد کلی حل مسئله، از این طریق به قرار زیر است:

۱. مجموعهٔ مختصات تعمیم‌یافتهٔ مناسبی اختیار کنید که پیکربندی سیستم را به‌طور منحصر به فرد مشخص می‌کند.

۲. معادلات تبدیلی بیابید که مختصات دکارتی وابسته به یکدیگر را به مختصات تعمیم‌یافتهٔ مستقل از هم مربوط کنند.

۳. انرژی جنبشی را به‌صورت تابعی از مختصات و سرعتهای تعمیم‌یافته بیابید. در صورت امکان، دستورالعمل $T = m\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}/۲$ را به‌کار گیرید که $\mathbf{v}$ برحسب بردارهای یکهٔ، مناسب با مختصات تعمیم‌یافتهٔ انتخابی بیان شده باشد. در صورت لزوم، انرژی جنبشی را برحسب مختصات دکارتی بیان کنید، سپس از تبدیلات مختصات مشتق بگیرید و تبدیلات سرعت را که به دست می‌آید، در رابطهٔ انرژی جنبشی وارد کنید.

۴. انرژی پتانسیل را به‌صورت تابعی از مختصات تعمیم‌یافته بیابید و، در صورت لزوم، تبدیلات مختصات را به‌کار گیرید.

مثال ۱.۵.۱۰ نوسانگر هماهنگ

نوسانگر هماهنگ یک‌بعدی را در نظر بگیرید. x را مختصهٔ جابه‌جایی قرار دهید. این مرحلهٔ دوم

صریحاً ضروری نیست. بدیهی است که تک مختصهٔ دکارتی x تک مختصهٔ تعمیم‌یافته است. لاگرانژی عبارت است از

$$L(x,\dot{x}) = T - V = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2$$

از دو مختصهٔ دیگر y و z چشم پوشیده‌ایم، زیرا هر دو مقیدند که صفر باشند. اکنون عملیات لاگرانژ معادلهٔ (۵.۴.۱۰) را اجرا می‌کنیم:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \qquad \frac{\partial L}{\partial x} = -kx$$
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = m\ddot{x} + kx = 0$$

این معادلهٔ حرکت نوسانگر هماهنگ نامیراست که در فصل ۳ در خصوص آن بحث شد.

مثال ۲.۵.۱۰ تک‌ذره در میدانی مرکزی

در اینجا مسئله عبارت است از کاربرد معادلات لاگرانژ برای تشکیل معادلات دیفرانسیل حرکت ذره‌ای که مقید است در یک صفحه تحت‌تأثیر نیروی مرکزی حرکت کند. تک قید در قالب $z = 0$ بیان می‌شود، از این‌رو دو مختصهٔ تعمیم‌یافته نیاز داریم. مختصات قطبی در صفحهٔ $q_1 = r$, $q_2 = \theta$ را اختیار می‌کنیم. معادلات تبدیل و سرعتهای برایند عبارت‌اند از

$$x = r\cos\theta \qquad y = r\sin\theta$$
$$\dot{x} = \dot{r}\cos\theta - r\dot{\theta}\sin\theta \qquad \dot{y} = \dot{r}\sin\theta + r\dot{\theta}\cos\theta$$

به این ترتیب، تابع لاگرانژ عبارت است از

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) \qquad V = V(r)$$
$$L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - V(r)$$

می‌توانستیم جملهٔ انرژی جنبشی را از طریق بیان بردار سرعت برحسب بردارهای یکهٔ شعاعی و مماسی مستقیمتر به‌دست آوریم

$$\mathbf{v} = \mathbf{e}_r\dot{r} + \mathbf{e}_\theta r\dot{\theta}$$

و به این ترتیب، مجذور سرعت ذره عبارت است از

$$\mathbf{v}\cdot\mathbf{v} = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2$$

که درست آن چیزی است که با بهره‌گیری از تبدیلات مختصات به‌دست آوردیم.

مشتقهای پاره‌ای مربوطه را که لازم داریم تا معادلات لاگرانژ را تکمیل کنند، عبارت‌اند از

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r} \qquad \frac{\partial L}{\partial r} = mr\dot{\theta}^2 - \frac{\partial V}{\partial r} = mr\dot{\theta}^2 + f(r)$$
$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \qquad \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta}$$

در این صورت، معادلات حرکت عبارت‌اند از

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = \frac{\partial L}{\partial r} \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$$
$$m\ddot{r} = mr\dot{\theta}^2 + f(r) \qquad \frac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta}) = 0$$

برای مرجع آینده باید توجه کنیم چون مشتق زمانی $mr^2\dot{\theta}$ صفر است، این کمیت ثابت حرکت به‌شمار می‌آید که تکانهٔ زاویه‌ای ذره است. به آسانی می‌توانیم مشاهده کنیم که ثابت‌بودن به‌طور طبیعی از فرمولبندی لاگرانژ حاصل می‌شود زیرا مختصهٔ θ از تابع لاگرانژ حذف می‌شود.

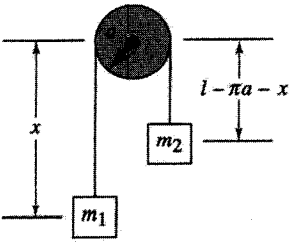
مثال ۳.۵.۱۰ ماشین آتوود

ماشین آتوود از دو وزنه به جرمهای m_1 و m_2 تشکیل می‌شود که با ریسمان آرمانی سبک و کشش‌ناپذیری به طول l به هم بسته شده‌اند و این ریسمان از روی یک قرقرهٔ بدون اصطکاک به شعاع a و گشتاور لختی I می‌گذرد (شکل ۱.۵.۱۰). این سیستم فقط یک درجهٔ آزادی دارد؛ یکی از جرمها به سمت بالا یا پایین حرکت می‌کند، در حالی که جرم دیگر مقید به حرکت در جهت مخالف است و همیشه با جرم اول به اندازهٔ طول ریسمان فاصله دارد. قرقره در جهتهای مقتضی و مناسب می‌چرخد. پنج قید هولونومی وجود دارد. چهار قید از حرکت در راستای y یا z جلوگیری می‌کنند، در حالی که پنجمین قید، قید یادشدهٔ قبلی را بیان می‌کند

$$(x_1 + \pi a + x_2) - l = 0$$

x_1 و x_2 مکانهای قائم هر جرم نسبت به مرکز جرم قرقره‌اند. لاگرانژی عبارت است از

$$T = \frac{1}{2}m_1\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}^2 + \frac{1}{2}I\frac{\dot{x}^2}{a^2}$$



شکل ۱.۵.۱۰ ماشین آتوود.

$$V = -m_1 g x - m_2 g(l - \pi a - x)$$
$$L = \frac{1}{2}\left(m_1 + m_2 + \frac{I}{a^2}\right)\dot{x}^2 + (m_1 - m_2)gx + m_2 g(l - \pi a)$$

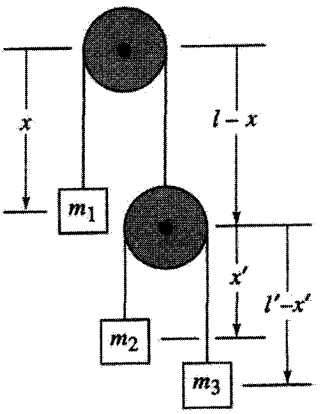
که x تک‌مختصهٔ تعمیم‌یافتهٔ سیستم است. معادلات لاگرانژ حرکت از این قرارند:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial L}{\partial x}$$
$$\left(m_1 + m_2 + \frac{I}{a^2}\right)\ddot{x} = (m_1 - m_2)g$$
$$\ddot{x} = \frac{(m_1 - m_2)g}{[m_1 + m_2 + I/a^2]}$$

که این رابطه شتاب نهایی سیستم را به‌دست می‌دهد. اگر $m_1 > m_2$، m_1 با شتاب ثابت پایین می‌آید در حالی که m_2 با همان شتاب بالا می‌رود. هرگاه $m_2 > m_1$، عکس موضوع صادق است. اگر $m_1 = m_2$، هر جرم در حال سکون باقی می‌ماند (یا با سرعت ثابت حرکت می‌کند). اثر گشتاور لختی قرقره عبارت است از کاستن شتاب سیستم. خواننده احتمالاً این نتیجه را از روی تحلیل ارائه‌شده در سطح مقدماتی‌تر فیزیک به خاطر خواهد آورد.

مثال ۴.۵.۱۰ ماشین آتوود مرکب

سیستم نمایش‌یافتهٔ شکل ۲.۵.۱۰ را در نظر بگیرید. به جای یکی از وزنه‌های ماشین آتوود ساده، ماشین آتوود سادهٔ دومی قرار داده می‌شود. برای حرکت این سیستم دو درجهٔ آزادی وجود دارد. اگر بخواهیم با تساهل صحبت کنیم، آنها آزادی جرم ۱ (و قرقرهٔ متحرک متصل به آن) در بالارفتن و پایین‌آمدن حول قرقرهٔ ثابت و آزادی جرم ۲ (و جرم ۳ متصل به آن) در بالارفتن و پایین‌آمدن حول قرقرهٔ متحرک، هستند. هیچ حرکت دیگری مجاز نیست. در این صورت، باید ۱۰ قید هولونومی



شکل ۲.۵.۱۰ ماشین آتوود مرکب.

وجود داشته باشد. هشت قید از آنها حرکت تمام سه جرم به اضافهٔ قرقرهٔ متحرک را فقط به یک بعد محدود می‌کنند. دو قید هولونومی مختصات x را به هم مرتبط می‌کنند:

$$(x_p + x_1) - l = 0 \qquad (2x_1 + x_2 + x_3) - (2l + l') = 0$$

x_i و x_p مختصات قائم جرمها و قرقرهٔ متحرک نسبت به مرکز جرم قرقرهٔ ثابت هستند. (دانشجو باید این معادلات قیدی را بررسی کند.) معنای این قیود دربارهٔ کاستن مختصات به دو مختصهٔ تعمیم‌یافتهٔ اختیاری x و x' در شکل ۲.۵.۱۰ نشان داده می‌شود. در این حالت فرض کردیم که قرقره‌ها بدون جرم‌اند. از این‌رو، می‌توانیم از آثار گشتاورهای لختی چشم بپوشیم. همچنین، فرض کرده‌ایم که شعاع قرقره‌ها لزوماً صفرند (یا در مقایسه با l و l' طول ریسمانهای مقیدساز کوچک باشند). این فرض به ما امکان می‌دهد تا معادلهٔ قیدی قبلی را با چشم‌پوشی از طول ریسمان که دور هر قرقره قرار می‌گیرد ساده کنیم. اکنون می‌توانیم انرژیهای جنبشی و پتانسیل را برای هر سیستم و تابع لاگرانژ حاصل از آنها به‌صورت زیر بنویسیم:

$$T = \frac{1}{2}m_1\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m_2(-\dot{x} + \dot{x}')^2 + \frac{1}{2}m_3(-\dot{x} - \dot{x}')^2$$

$$V = -m_1 g x - m_2 g(l - x + x') - m_3 g(l - x + l' - x')$$

$$L = \frac{1}{2}m_1\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m_2(-\dot{x} + \dot{x}')^2 + \frac{1}{2}m_3(\dot{x} + \dot{x}')^2$$
$$+ (m_1 - m_2 - m_3)gx + (m_2 - m_3)gx' + \text{ثابت}$$

بنابراین، معادلات حرکت عبارت‌اند از

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial L}{\partial x} \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}'} = \frac{\partial L}{\partial x'}$$

$$m_1\ddot{x} + m_2(\ddot{x} - \ddot{x}') + m_3(\ddot{x} + \ddot{x}') = (m_1 - m_2 - m_3)g$$

$$m_2(-\ddot{x} + \ddot{x}') + m_3(\ddot{x} + \ddot{x}') = (m_2 - m_3)g$$

با حل جبری معادلات بالا می‌توان شتابها را به‌دست آورد.

مثال ۵.۵.۱۰ معادلات اویلر برای چرخش آزاد جسم صلب

در این مثال، از روش لاگرانژ برای استنتاج معادلات اویلر مربوط به حرکت جسم صلب بهره می‌گیریم. حالتی را در نظر می‌گیریم که جسم بدون هیچ گشتاوری می‌چرخد. در اینجا جسم صلب متضمن هیچ انرژی پتانسیلی نیست؛ از این‌رو تابع لاگرانژ با انرژی جنبشی مساوی است

$$L = T = \frac{1}{2}(I_1\omega_1^2 + I_2\omega_2^2 + I_3\omega_3^2)$$

که در آن ωها نسبت به محورهای اصلی جسم سنجیده می‌شوند. در معادلهٔ (۷.۶.۹)، ωها را برحسب زاویه‌های اویلر θ، ϕ، و ψ، از این قرار بیان کردیم:

$$\omega_1 = \dot{\theta}\cos\psi + \dot{\phi}\sin\theta\sin\psi$$

$$\omega_2 = -\dot{\theta}\sin\psi + \dot{\phi}\sin\theta\cos\psi$$

$$\omega_3 = \dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta$$

اگر زاویه‌های اویلر را مختصات تعمیم‌یافته بدانیم، معادلات حرکت عبارت‌اند از

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \frac{\partial L}{\partial \theta}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = \frac{\partial L}{\partial \phi}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = \frac{\partial L}{\partial \psi}$$

حال، بنا بر قاعدهٔ زنجیری داریم

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = \frac{\partial L}{\partial \omega_3}\frac{\partial \omega_3}{\partial \dot{\psi}} = I_3\omega_3$$

از این‌رو

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = I_3\dot{\omega}_3$$

در اینجا نیز، با بهره‌گیری از قاعدهٔ زنجیری

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial \psi} &= I_1\omega_1\frac{\partial \omega_1}{\partial \psi} + I_2\omega_2\frac{\partial \omega_2}{\partial \psi}\\ &= I_1\omega_1(-\dot{\theta}\sin\psi + \dot{\phi}\sin\theta\cos\psi) + I_2\omega_2(-\dot{\theta}\cos\psi - \dot{\phi}\sin\theta\sin\psi)\\ &= I_1\omega_1\omega_2 - I_2\omega_2\omega_1\end{aligned}$$

در نتیجه، معادلهٔ لاگرانژی حرکت در مختصات ψ کاهش می‌یابد به

$$I_3\dot{\omega}_3 = \omega_1\omega_2(I_1 - I_2)$$

که، مطابق آنچه در بخش ۳.۹ نشان دادیم، سومین معادله از معادلات اویلری چرخش عبارت است از جسم صلبی که تحت‌تأثیر هیچ گشتاوری نباشد. دو معادلهٔ دیگر از معادلات اویلر را می‌توان با جایگشت دوره‌ای اندیس پایین ۲ → ۱، ۳ → ۲، ۱ → ۳ به‌دست آورد. علت صادق‌بودن این جایگشت آن است که محور اصلی خاصی را بر محورهای دیگر ترجیح نداده‌ایم.

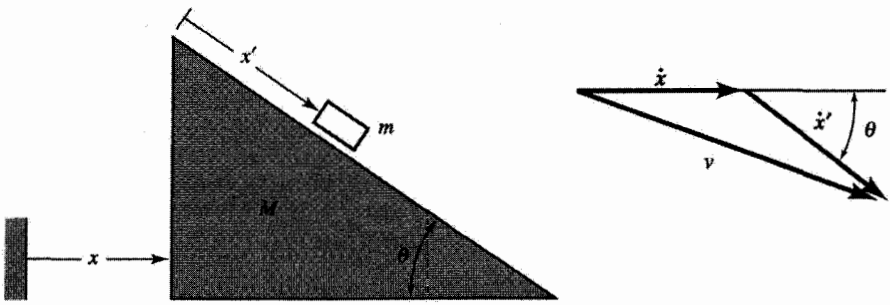
مثال ۶.۵.۱۰ ذرهٔ لغزان بر سطح شیبدار متحرک

ذره‌ای به جرم m را در نظر بگیرید که آزادانه روی سطح شیبدار هموار به جرم M بلغزد. سطح شیبدار ثابت نیست، بلکه آزادانه روی سطح افقی صاف، مطابق شکل ۳.۵.۱۰، می‌لغزد. فقط دو درجهٔ آزادی وجود دارد، زیرا هر شیء مقید به حرکت در یک بعد است. می‌توانیم به آسانی مکان سطح شیبدار را با اختیارکردن مختصهٔ تعمیم‌یافتهٔ x به‌صورت جابه‌جایی سطح نسبت به نقطهٔ مرجع ثابت مشخص کنیم. سپس با انتخاب x' برای جابه‌جایی ذره به سمت پایین سطح نسبت به بالای آن، به‌صورت مختصهٔ تعمیم‌یافتهٔ ذره، پیکربندی سیستم را به‌طورکامل مشخص می‌کنیم.

انرژی جنبشی هر جرم را به‌صورت ضرب نقطه‌ای بردار سرعت مربوط به هر جرم در خودش محاسبه می‌کنیم، که هر بردار سرعت برحسب بردارهای یکه متوجه در جهت مختصهٔ تعمیم‌یافتهٔ مربوطه مشخص شده باشد

$$\mathbf{V} = \mathbf{i}\dot{x} \qquad \mathbf{v} = \mathbf{i}\dot{x} + \mathbf{e}_\theta\dot{x}'$$

بردار یکهٔ $\mathbf{e}_\theta$ به سمت پایین سطح با زاویهٔ شیب θ نسبت به افق متوجه است (شکل ۳.۵.۱۰).



شکل ۳.۵.۱۰ قطعه‌جسم لغزان که روی یک گوهٔ متحرک با سطح شیبدار به پایین می‌لغزد.

بنابراین، انرژی جنبشی عبارت است از

$$\begin{aligned} T_M &= \tfrac{1}{2} M\mathbf{V}\cdot\mathbf{V} &&= \tfrac{1}{2} M\dot{x}^2 \\ T_m &= \tfrac{1}{2} m\mathbf{v}\cdot\mathbf{v} &&= \tfrac{1}{2} m(\mathbf{i}\dot{x} + \mathbf{e}_\theta \dot{x}')\cdot(\mathbf{i}\dot{x} + \mathbf{e}_\theta \dot{x}') \\ & && = \tfrac{1}{2} m(\dot{x}^2 + \dot{x}'^2 + 2\dot{x}\dot{x}'\cos\theta) \\ T &= T_M + T_m \end{aligned}$$

انرژی پتانسیل سیستم فقط به مکان قائم جرم m بستگی دارد. می‌توانیم وقتی ذره در بالای سطح است، مقدار آن‌را صفر اختیار کنیم

$$V = -mgx'\sin\theta$$

از این‌رو، سیستم لاگرانژی به‌صورت زیر است

$$L = \tfrac{1}{2} M\dot{x}^2 + \tfrac{1}{2} m(\dot{x}^2 + \dot{x}'^2 + 2\dot{x}\dot{x}'\cos\theta) + mgx'\sin\theta$$

و معادلات حرکت از این قرارند:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}'} = \frac{\partial L}{\partial x'}$$

$$\frac{d}{dt}[m(\dot{x} + \dot{x}'\cos\theta) + M\dot{x}] = 0 \qquad \frac{d}{dt}(\dot{x}' + \dot{x}\cos\theta) = g\sin\theta$$

(**گوشزد**: مشتق زمانی جملهٔ اول صفر است. بنابراین، جملهٔ اول داخل کروشه ثابت حرکت است. چون لاگرانژی مستقل از مختصهٔ x است، این وضعیت پیش می‌آید؛ مانند وضعیتی که در مثال

۲.۵.۱۰ پیش آمد. بررسی دقیق این جمله آشکار می‌کند که لاگرانژی یادشده تکانهٔ خطی کل سیستم در جهت x است.)

اینکه جملهٔ $[m(\dot{x}+\dot{x}'\cos\theta)+M\dot{x}]$ ثابت حرکت است، از نظر نیوتونی این نکته را نیز منعکس می‌کند که هیچ نیروی خالصی در جهت محور x برقرار نیست. توجه کنید که طبعاً این نتیجه ظاهراً از فرمولبندی لاگرانژی حاصل می‌شود. در بخش بعد راجع به این موضوع مطالب بیشتری مطرح خواهیم کرد.

با انجام مشتق‌گیری زمانی در روابط بالا، می‌رسیم به:

$$m(\ddot{x}+\ddot{x}'\cos\theta)+M\ddot{x}=0 \qquad \ddot{x}+\ddot{x}\cos\theta=g\sin\theta$$

در اینجا، $\ddot{x}$ و $\ddot{x}'$ را به‌دست می‌آوریم و داریم

$$\ddot{x}=\frac{-g\sin\theta\cos\theta}{(m+M)/m-\cos^2\theta} \qquad \ddot{x}'=\frac{g\sin\theta}{1-m\cos^2\theta/(m+M)}$$

این مثال خاص به‌خوبی حالتی را تشریح می‌کند که وقتی از مسیر فرمولبندی لاگرانژی به مسائل پیچیده می‌پردازیم آن مسئله را تکه‌تکه می‌کند. قطعاً می‌توانستیم مسئله را با استفاده از روشهای نیوتونی حل کنیم، اما چنین کاری بیشتر از آن چیزی که روش (آسان و سریع) لاگرانژی می‌طلبد، به اندیشه و بصیرت فیزیکی نیاز دارد.

۶.۱۰ تکانه‌های تعمیم‌یافته: مختصات حذف‌شدنی

جنبهٔ کلیدی مثالهای ۲.۵.۱۰ و ۵.۵.۱۰ ظهور تکانهٔ خطی پایسته در طول مختصهٔ تعمیم‌یافته بود که صراحتاً در سیستم لاگرانژی نمی‌گنجید. می‌خواهیم این وضعیت را با جزئیات بیشتری بکاویم. شاید ساده‌ترین مثال که چنین شرطی را باز می‌نمایاند، ذرهٔ آزاد متحرکی در یک خط مستقیم، مثلاً، در امتداد محور x باشد. انرژی جنبشی آن عبارت است از

$$T=\frac{1}{2}m\dot{x}^2 \qquad (۱.۶.۱۰)$$

m جرم و $\dot{x}$ سرعت این ذره است. تابع لاگرانژ برای این سیستم شکل مخصوصاً سادهٔ $L=T$ را به خود می‌گیرد. به این ترتیب، معادلهٔ لاگرانژ حرکت به‌صورت زیر است

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{x}}=\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot{x}}=0 \qquad \frac{d}{dt}(m\dot{x})=0 \qquad (۲.۶.۱۰)$$

$$\therefore m\dot{x}=\text{ثابت}$$

همان‌طورکه در مثالهای ۲.۵.۱۰ و ۵.۵.۱۰ اتفاق افتاد، وقتی لاگرانژی مستقل از مختصه باشد، یکی از جوابهای معادلهٔ حرکت به ثابت‌بودن کمیتی می‌انجامد که می‌توان آن را به‌کمک تکانهٔ خطی سیستم مربوط به آن مختصهٔ حذفی باز شناخت. در این حالت می‌بینیم که کمیت ثابت دقیقاً با حاصلضرب $m\dot{x}$، تکانهٔ خطی «نیوتونی»، p_x، ذرهٔ آزاد برابر است. به این ترتیب، تعریف زیر را در قالب فرمول ارائه می‌کنیم:

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \qquad (۳.۶.۱۰)$$

که تکانهٔ این ذره است. در مورد سیستمی که با مختصات تعمیم‌یافتهٔ $q_1, q_2, \ldots, q_k, \ldots, q_n$ توصیف شود، کمیتهای p_k، بنابر تعریف، عبارت‌اند از

$$p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \qquad (۴.۶.۱۰)$$

این کمیتها را تکانه‌های تعمیم‌یافتهٔ مزدوج با مختصهٔ تعمیم‌یافتهٔ q_k می‌گویند. در این صورت، معادلات لاگرانژ برای سیستمی پایستار را می‌توان از این قرار نوشت:

$$\dot{p}_k = \frac{\partial L}{\partial q_k} \qquad (۵.۶.۱۰)$$

اکنون به آسانی معلوم می‌شود که اگر لاگرانژی صریحاً شامل مختصه q_k نباشد، در این صورت

$$\dot{p}_k = \frac{\partial L}{\partial q_k} = ۰ \qquad (۶.۶.۱۰)$$

$$\therefore p_k = \text{ثابت} \qquad (۷.۶.۱۰)$$

مختصهٔ غایب، چشم‌پوشیدنی و تکانهٔ مزدوج آن ثابت حرکت است.

مثال ۱.۶.۱۰ آونگ متصل به تکیه‌گاه متحرک

حال تحلیل آونگ متصل به تکیه‌گاه متحرک را، که در بخش ۳.۱۰ به اختصار به آن اشاره کردیم، ادامه می‌دهیم (شکل ۱.۳.۱۰). قبلاً انرژی جنبشی و پتانسیل را برای این سیستم برحسب مختصات تعمیم‌یافتهٔ X، مکان تکیه‌گاه متحرک، و زاویهٔ θ که آونگ با محور قائم می‌سازد، محاسبه کرده‌ایم. این انرژیها در قالب معادلات (۴.۳.۱۰ الف و ب) بیان می‌شوند. لاگرانژی این سیستم از این قرار است

$$L = \frac{۱}{۲}(M+m)\dot{X}^۲ + \frac{۱}{۲}m(r^۲\dot{\theta}^۲ + ۲\dot{X}r\dot{\theta}\cos\theta) + mgr\cos\theta$$

معادلات حرکت عبارت‌اند از

$$\dot{p}_x = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{X}} = \frac{\partial L}{\partial X} = ۰ \qquad \dot{p}_\theta = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \frac{\partial L}{\partial \theta}$$

$$\frac{d}{dt}[(M+m)\dot{X} + mr\dot{\theta}\cos\theta] = ۰$$

$$\frac{d}{dt}[m(r^۲\dot{\theta} + \dot{X}r\cos\theta)] = -m(\dot{X}r\dot{\theta} + gr)\sin\theta$$

$$\ddot{\theta} + \frac{\ddot{X}}{r}\cos\theta + \frac{g}{r}\sin\theta = ۰$$

(**گوشزد:** لاگرانژی از مختصهٔ تعمیم‌یافتهٔ X مستقل است. این کمیت مختصه‌ای چشم‌پوشیدنی است. تکانهٔ مزدوج آن نخستین جمله در کروشه‌های معادلهٔ قبلی است: تکانهٔ خطی کل سیستم در جهت X است. این تکانه ثابت حرکت است و باید کمیتی پایستار باشد، چون انرژی پتانسیل سیستم از این مختصه مستقل است (به این علت است که در تابع لاگرانژ آن مختصه وجود ندارد) و، بنابراین، نیروهای خارجی خالصی که در این جهت عمل کنند، وجود ندارند.)

گاهی، معادلات دیفرانسیل حرکت پیچیده به نظر می‌رسند. شاید لازم است از خود بپرسیم که آیا معادلات دیفرانسیل دستخوش خطا هستند یا خیر. چنین وضعیتی می‌تواند در ملاحظهٔ معادلهٔ دوم حرکت پیش آید که قبلاً آن را استنتاج کردیم. بررسی اعتبار چنین معادلاتی مستلزم آن است که سیستم پیرو برخی شرایط محدودکننده باشد و سپس باید به‌دقت کاوش کنیم که معادلهٔ حرکت به‌دست‌آمده بر چه چیزی دلالت می‌کند، با این فرض که شرایط مفروض برقرار باشند. مثلاً، فرض کنید که در مسئلهٔ قبلی تکیه‌گاه متحرک را «محکم می‌کنیم»؛ یعنی، آن را به مسیری ثابت می‌کنیم که قبلاً اجازه داشت در آن بدون اصطکاک حرکت کند. در این صورت، این مثال را به مثال آونگ ساده تبدیل می‌کنیم که معادلهٔ حرکت این واقعیت را بهتر منعکس می‌کند. می‌بینیم که چنین اتفاقی می‌افتد. جملهٔ وسطی، شامل شتاب $\ddot{X}$، به صفر میل می‌کند، زیرا هرگونه حرکت جرم M در جهت X را حذف کرده‌ایم. معادلهٔ حرکت برایند از این قرار می‌شود:

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{r}\sin\theta = ۰$$

که معادلهٔ آونگ ساده است.

تا اینجا، به‌خوبی پیش رفته‌ایم. باز هم کماکان نگران جملهٔ $\ddot{X}$ هستیم. شرط قبلی باعث می‌شود که $\ddot{X}$ از معادلهٔ حرکت حذف شود. اینکه ببینیم آیا حضورش معنایی دارد یا خیر، روش خوبی نیست. شگرد دیگری را به‌کار می‌گیریم، مانند آنکه قبلاً به‌کار بردیم؛ اما این‌بار با شتاب زاویه‌ای و جملات حاوی سرعت $\ddot{\theta}$ و $\dot{\theta}$. آیا می‌توانیم صحنه‌ای را تجسم کنیم که این کمیتها صفر

باشند؟ اگر سیستم چنین محدودیتی داشته باشد چه نوع حرکتی را باید به نمایش گذارد؟ اگر آن دو جمله صفر باشند، معادلهٔ حرکت به جوابی به‌ازای θ برحسب شتاب افقی $\ddot{X}$ و g تبدیل می‌شود

$$\tan\theta = \frac{-\ddot{X}}{g}$$

به بیان دیگر، اگر تکیه‌گاه را به‌طور یکنواخت به طرف راست شتاب دهیم، جواب معادلهٔ بالا آونگی را توصیف می‌کند که «بدون حرکت» با زاویهٔ θ به طرف «چپ» راستای قائم نسبت به نگهدارنده‌اش آویخته باشد؛ یعنی سیستم به یک «شتاب‌سنج خطی» ساده تبدیل می‌شود. در واقع، این طرح ممکن حرکت سیستم موردنظر است. چنین تحلیلی را در فصل ۵ ارائه دادیم و نیز در چند کتاب درسی مقدماتی فیزیک پایه می‌توان به آن دسترسی یافت.[۱] می‌بینید، که همهٔ اینها با معنی‌اند.

مثال ۲.۶.۱۰ آونگ کروی، یا قالب صابون در کاسه

یکی از مسائل کلاسیک در مکانیک از این قرار است که ذره‌ای تحت‌تأثیر نیروی گرانشی به باقی‌ماندن بر سطح کروی صافی مقید شود، مانند جرم کوچکی که در داخل کاسهٔ کروی صاف به اطراف می‌لغزد. این حالت به کمک آونگ ساده‌ای که آزادانه در هر جهت تاب می‌خورد، نیز نشان داده می‌شود (شکل ۱.۶.۱۰). این نوع آونگ را اصطلاحاً آونگ کروی می‌نامند که در بخش ۶.۵ هم در خصوص آن صحبت کردیم.

در این حالت دو درجهٔ آزادی وجود دارد و ما، مطابق شکل، از مختصات تعمیم‌یافتهٔ θ و ϕ بهره خواهیم برد. در واقع این کمیتها با مختصاتی کروی دارای ثابت$= r = l$ معادل‌اند که در آن l طول ریسمان آونگ است. دو مؤلفهٔ سرعت عبارت‌اند از $v_\theta = l\dot{\theta}$ و $v_\phi = l\dot{\phi}\sin\theta$. ارتفاع گلولهٔ آونگ که از صفحهٔ xy اندازه‌گیری می‌شود عبارت است از $l - l\cos\theta$؛ بنابراین، لاگرانژی عبارت است از

$$L = \frac{1}{2}ml^2(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2\sin^2\theta) - mgl(1 - \cos\theta)$$

مختصهٔ ϕ چشم‌پوشیدنی است، از این‌رو فوراً می‌رسیم به

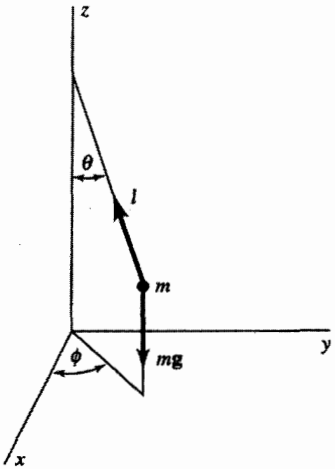
$$p_\phi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = ml^2\dot{\phi}\sin^2\theta = \text{ثابت}$$

این رابطه تکانهٔ زاویه‌ای حول امتداد قائم، یا محور z، است. برای ما فقط معادله برحسب θ باقی می‌ماند:

---

۱. مثلاً ر.ک. مثال ۸.۶ در

Serway and Jewett, *Physics For Scientists and Engineers*, 6th ed, Brooks/Cole Thomson–Learning, Belmont, CA, 2004.



شکل ۱.۶.۱۰ آونگ کروی.

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \frac{\partial L}{\partial \theta}$$

که می‌توان آن را از این قرار نوشت:

$$ml^2\ddot{\theta} = ml^2\dot{\phi}^2 \sin\theta\cos\theta - mgl\sin\theta$$

حال ثابت S را معرفی می‌کنیم که بنابر تعریف عبارت است از

$$S = \dot{\phi}\sin^2\theta = \frac{p_\phi}{ml^2} \qquad (۸.۶.۱۰)$$

(این کمیت عبارت است از تکانهٔ زاویه‌ای تقسیم بر ml^2.) در این صورت، معادلهٔ دیفرانسیل حرکت برحسب θ از این قرار است:

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta - S^2\frac{\cos\theta}{\sin^3\theta} = 0 \qquad (۹.۶.۱۰)$$

در اینجا ملاحظهٔ چند حالت خاص آموزنده است. اولاً، اگر زاویهٔ ϕ ثابت باشد، آنگاه $\dot{\phi} = 0$ و بنابراین $S = 0$. در نتیجه، معادلهٔ بالا بدل می‌شود به

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0$$

که، البته، دقیقاً همان معادلهٔ دیفرانسیل آونگ ساده است. این حرکت در صفحهٔ ثابت$= \phi = \phi_0$ انجام می‌شود.

حالت خاص دوم، آونگ مخروطی است. در این حالت گلولهٔ آونگ دایره‌ای افقی می‌پیماید؛ از این‌رو، ثابت= $\theta = \theta_0$. در این حالت، $\dot{\theta} = 0$ و $\ddot{\theta} = 0$. بنابراین، معادلهٔ (۹.۶.۱۰) به این قرار خواهد شد:

$$\frac{g}{l}\sin\theta_0 - S^2\frac{\cos\theta_0}{\sin^3\theta_0} = 0$$

یا

$$S^2 = \frac{g}{l}\sin^4\theta_0\sec\theta_0 \qquad (۱۰.۶.۱۰)$$

مقداری از S را که از معادلهٔ (۸.۶.۱۰) به‌دست می‌آید، در معادلهٔ (۱۰.۶.۱۰) وارد می‌کنیم؛ می‌رسیم به

$$\dot{\phi}_0^2 = \frac{g}{l}\sec\theta_0 \qquad (۱۱.۶.۱۰)$$

که شرطی است برای آنکه آونگ حرکت مخروطی اجرا کند.

اکنون به حالتی نظر می‌کنیم که حرکت تقریباً مخروطی است؛ یعنی، حالتی که در آن مقدار θ نزدیک به مقدار θ_0 باقی می‌ماند. اگر عبارت S^2 را که در قالب معادلهٔ (۱۰.۶.۱۰) بیان شده است، در معادلهٔ (۹.۶.۱۰) وارد کنیم، نتیجه عبارت خواهد بود از

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\left(\sin\theta - \frac{\sin^4\theta_0}{\cos\theta_0}\frac{\cos\theta}{\sin^3\theta}\right) = 0$$

در اینجا، بهتر است متغیر جدید ξ را به قرار زیر تعریف کنیم:

$$\xi = \theta - \theta_0$$

عبارت داخل پرانتز را، که $f(\xi)$ می‌نامیم، می‌توان به‌صورت سری توانی برحسب ξ بر طبق فرمول استاندارد، بسط داد

$$f(\xi) = f(0) + f'(0)\xi + f''(0)\frac{\xi^2}{2!} + \dots$$

بعد از انجام عملیات مشخص، پی می‌بریم که $f(0) = 0$ و $f'(0) = 3\cos\theta_0 + \sec\theta_0$. چون با حالت مقادیر کوچک ξ سروکار داریم، از توانهای بالاتر از توان اول ξ چشم می‌پوشیم و از این‌رو می‌توانیم بنویسیم

$$\ddot{\xi} + \frac{g}{l}(3\cos\theta_0 + \sec\theta_0)\xi = 0$$

به این ترتیب، ξ حول $\xi = 0$ نوسان هماهنگ اجرا می‌کند یا، معادل آن، θ حول مقدار θ_0 نوسان هماهنگ اجرا می‌کند، به‌طوری که زمان تناوب آن عبارت است از

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g(3\cos\theta_0 + \sec\theta_0)}}$$

حال مقدار $\dot{\phi}$ نسبت به مقدار به‌دست‌آمده با حرکت مخروطی خالص $\dot{\phi}_0$ تفاوت چندانی نمی‌کند. بنابراین، ϕ در خلال نوسان θ حول θ_0 دائماً افزایش می‌یابد. در خلال یک نوسان کامل θ، افزایش مقدار زاویهٔ سمتی ϕ عبارت است از

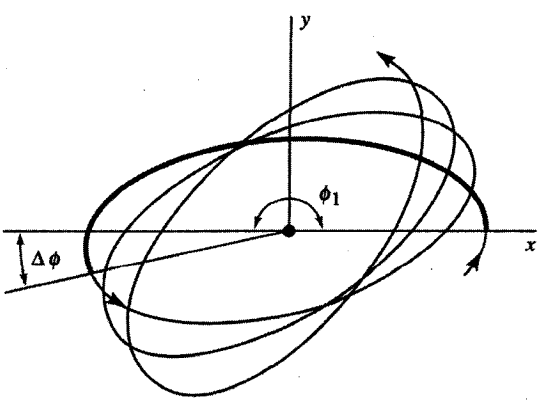
$$\phi_1 \approx \dot{\phi}_0 T_1$$

از مقادیر $\dot{\phi}_0$ و T_1 که در معادلهٔ بالا داده شده‌اند، می‌رسیم به

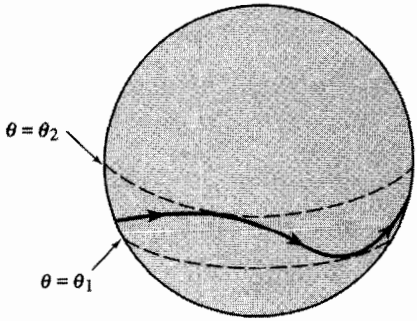
$$\phi_1 = 2\pi(3\cos^2\theta_0 + 1)^{-1/2}$$

اکنون کمیت داخل پرانتز به‌ازای مقادیر ناصفر θ_0، از ۴ کمتر است، بنابراین ϕ_1 از π ($180°$) بزرگتر است. مقدار اضافی $\Delta\phi$ در شکل ۲.۶.۱۰ نشان داده‌شده، که نمودار تصویر مسیر حرکت گلولهٔ آونگ بر صفحهٔ xy است. آونگ در طی نوسان خود، مطابق شکل، در جهت افزایش ϕ حرکت تقدیمی اجرا می‌کند.

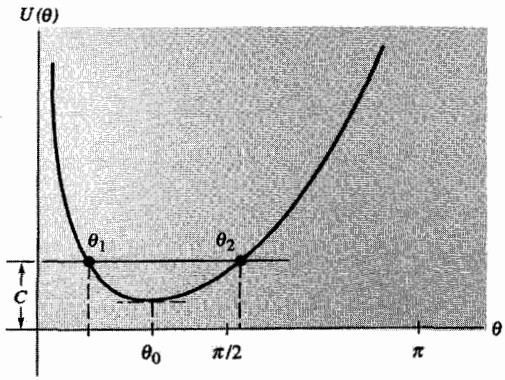
سرانجام، در حالت کلی می‌توانیم به معادلهٔ دیفرانسیل حرکت (معادلهٔ ۹.۶.۱۰) برگردیم و با توجه به این نکته که $\ddot{\theta} = \dot{\theta}d\dot{\theta}/d\theta = \frac{1}{2}d\dot{\theta}^2/d\theta$، یک بار نسبت به θ انتگرال بگیریم. نتیجه عبارت خواهد بود از



شکل ۲.۶.۱۰ تصویر مسیر حرکت آونگ کروی بر صفحهٔ xy.



شکل ۳.۶.۱۰ نمودار حدود حرکت آونگ کروی.



شکل ۴.۶.۱۰ نمودار پتانسیل مؤثر آونگ کروی.

$$\frac{1}{2}\dot{\theta}^2 = \frac{g}{l}\cos\theta - \frac{S^2}{2\sin^2\theta} + C = -U(\theta) + C$$

که در آن C ثابت انتگرال‌گیری و عبارت زیر، پتانسیل مؤثر است

$$U(\theta) = -\frac{g}{l}\cos\theta + \frac{S^2}{2\sin^2\theta}$$

در عمل، معادلهٔ انتگرال‌گیری‌شده درست همان معادلهٔ انرژی است که در آن انرژی کل عبارت است از $E = C\,ml^2$.

برای شرط اولیهٔ مفروضی، حرکت آونگ چنان است که گلولهٔ آن بین دو دایرهٔ افقی نوسان می‌کند. این دایره‌ها، بنابر تعریف، عبارت‌اند از نقاط برگشت حرکت θ که به‌ازای آن $\dot{\theta} = 0$ یا $U(\theta) = C$. این موضوع در شکلهای ۳.۶.۱۰ و ۴.۶.۱۰ نشان داده شده است.

۷.۱۰ نیروهای قیدی: ضریبهای لاگرانژ

توجه کنید که هر چند سیستم فیزیکی بحث‌شده در چند مثال قبلی ما تحت‌تأثیر قیود هولونوم بوده است، در هیچ جای محاسباتمان ناگزیر نشده‌ایم به‌طور اخص نیروی حاصل از این قیدها را در نظر بگیریم. این از مزیتهای مهم روش لاگرانژ است: گنجاندن مستقیم چنین نیروهای قیدی در جواب مربوط به حرکت جسم مقید زاید است، و بنابراین، از آن چشم می‌پوشیم. اما، به دلیلی فرض کنید که می‌خواهیم مقادیر این نیروها را بدانیم. مثلاً، شاید یک مهندس بخواهد مقدار نیروی قائمی (نرمالی) را بداند که پلی منحنی بر کامیون سنگینی وارد می‌آورد که از رویش عبور می‌کند ــ یا فرض کنید تارزان بخواهد کشش ساقهٔ گیاه نرمی را در هنگامی بداند که از رودخانه‌ای پر از تمساح با تاب‌خوردن از آن، عبور می‌کند. واضح است در این چنین مواردی، بی‌اطلاعی از موضوع ضرورتاً خطرناک و زیانبار است.

اگر به چنین انتخابی دست بزنیم، می‌توانیم نیروهای قیدی را به صراحت به فرمولبندی لاگرانژی وارد کنیم. علی‌الاصول، این کار را می‌توان به این طریق انجام داد که بلافاصله به معادلهٔ (معادلات) قیدی برای کاهش تعداد درجات آزادی در یک مسئله متوسل نشویم. به این صورت، درست از همان آغاز، تمام مختصات تعمیم‌یافته‌ای را در نظر می‌گیریم که برحسب آنها انرژی جنبشی و پتانسیل سیستم در مسئلهٔ موردنظر بیان می‌شوند. این کار به معادلات لاگرانژ بیشتری برای مسئله می‌انجامد، یک معادله برای هر مختصهٔ تعمیم‌یافتهٔ اضافی که معادلهٔ قیدی آن را حذف نمی‌کند. اما به این علت که مختصات مستقل نیستند، معادلات لاگرانژ حاصل که قبلاً استنتاج شده‌اند دیگر نمی‌توانند مستقل باشند. اما، می‌توان آنها را به روش ضریبهای لاگرانژ از هم مستقل کرد.

برای سادگی، سیستمی را در نظر می‌گیریم که فقط دو مختصهٔ تعمیم‌یافتهٔ q_1 و q_2 آن را توصیف کرده و یک معادلهٔ قیدی بین آنها ارتباط برقرار کرده باشد

$$f(q_1, q_2, t) = 0 \qquad (۱.۷.۱۰)$$

کار خود را با اصل وردشی هامیلتون، مطابق معادلهٔ (۴.۴.۱۰)، شروع می‌کنیم

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L\, dt = \int_{t_1}^{t_2} \sum_i \left[\frac{\partial L}{\partial q_1} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \right] \delta q_i dt = 0 \qquad (۲.۷.۱۰)$$

فقط در این حالت، δq_iها مستقل نیستند؛ وردشی در q_1 به وردشی در q_2، سازگار با قیدی که معادلهٔ (۱.۷.۱۰) برقرار کرده، می‌انجامد، که چون در هر لحظهٔ زمانی t ثابت است، از این شرط پیروی می‌کند:

$$\delta f = \left(\frac{\partial f}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial f}{\partial q_2} \delta q_2 \right) = 0 \qquad (۳.۷.۱۰)$$

با حل‌کردن این معادله به‌ازای δq_2 برحسب δq_1، می‌رسیم به

$$\delta q_2 = -\left(\frac{\partial f/\partial q_1}{\partial f/\partial q_2}\right)\delta q_1 \qquad (۴.۷.۱۰)$$

و با نشاندن این مقدار در معادلهٔ (۲.۷.۱۰)، می‌رسیم به

$$\int_{t_1}^{t_2}\left[\left(\frac{\partial L}{\partial q_1}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1}\right)-\left(\frac{\partial L}{\partial q_2}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2}\right)\left(\frac{\partial f/\partial q_1}{\partial f/\partial q_2}\right)\right]\delta q_1 dt = 0 \qquad (۵.۷.۱۰)$$

فقط یک مختصه، q_1، در این عبارت تغییر می‌کند و چون این مختصه می‌تواند به‌دلخواه تغییر کند، جملهٔ داخل کروشه باید صفر شود. از این‌رو

$$\frac{(\partial L/\partial q_1)-(d/dt)(\partial L/\partial \dot{q}_1)}{(\partial f/\partial q_1)} = \frac{(\partial L/\partial q_2)-(d/dt)(\partial L/\partial \dot{q}_2)}{(\partial f/\partial q_2)} \qquad (۶.۷.۱۰)$$

جملهٔ سمت چپ فقط تابعی از مختصهٔ تعمیم‌یافته، q_1، و مشتق آن است، در حالی که جملهٔ سمت راست فقط تابعی از q_2 و مشتق آن است. به‌علاوه، هر جمله به‌طور ضمنی از طریق این متغیرها و شاید هم به‌طور صریح، به زمان بستگی دارد. تنها راهی که این کمیتها بتوانند در تمام مدت زمان حرکت باهم مساوی باشند، این است که اینها با تک‌تابعی از زمان برابر باشند، که آن تابع را $-\lambda(t)$ می‌نامیم. بنابراین

$$\frac{\partial L}{\partial q_i}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}+\lambda(t)\frac{\partial f}{\partial q_i}=0 \qquad i=1,2 \qquad (۷.۷.۱۰)$$

اکنون مسئله‌ای با سه تابع مجهول از زمان: $q_1(t)$، $q_2(t)$، و $\lambda(t)$ داریم و سه معادلهٔ مستقل برای حل آنها نیز لازم داریم: دو معادلهٔ حرکت لاگرانژ (۷.۷.۱۰) و یک معادلهٔ قیدی (۱.۷.۱۰). بنابراین، هر چند بین این دو مختصه یک معادلهٔ قیدی رابطه برقرار می‌کند و بلافاصله می‌توانستیم آن‌را به‌کار بریم تا درجهٔ آزادی را در این مسئله کاهش دهیم به‌طوری که حرکت می‌توانست با یک معادله «بدون ضریب لاگرانژ» مشخص شود، این کار را نکردیم. علت این امر آن است که جمله‌های ضریب لاگرانژ

$$Q_i = \lambda(t)\frac{\partial f}{\partial q_i} \qquad i=1,2 \qquad (۸.۷.۱۰)$$

که در دو معادلهٔ حرکت لاگرانژ (۷.۷.۱۰) ظاهر می‌شوند، نیروهای قیدی‌اند که می‌خواهیم آنها را پیدا کنیم. این معادلات فقط به این علت در این مسئله ظاهر می‌شوند که ما در ابتدا از معادلهٔ قیدی استفاده نکردیم تا درجات آزادی را کاهش دهیم. این جمله‌های Q_i را نیروهای تعمیم‌یافتهٔ

قیدی می‌گویند. این جمله‌ها با نیروها یکسان‌اند اگر مختصهٔ تعمیم‌یافتهٔ مربوط به آنها، q_i، مختصهٔ فضایی باشد. اما، همان‌طور که خواهیم دید، این جمله‌ها گشتاورند اگر مختصهٔ مربوط به آنها q_i یک مختصهٔ زاویه‌ای باشد.

مسئلهٔ کلیتر نیز برحسب n مختصهٔ تعمیم‌یافته قابل توصیف است که m معادلهٔ قیدی بین آنها ارتباط برقرار می‌کند. بنابراین، اگر بخواهیم از نیروهای قیدی باخبر شویم، در این صورت سیستم با n معادلهٔ حرکت لاگرانژ به این قرار توصیف می‌شود:

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} + \sum_j \lambda_j(t)\frac{\partial f_j}{\partial q_i} \qquad \begin{cases} i = ۱, ۲, \ldots, n \\ j = ۱, ۲, \ldots, m \end{cases} \qquad (۹.۷.۱۰)$$

اما توجه کنید که $m+n$ مجهول ــ$nq_i(t)$ و $m\lambda_j(t)$ــ وجود دارد. اطلاعات اضافی لازم برای حل این مسئله از m معادلهٔ قیدی حاصل می‌شود که معمولاً در یکی از قالبهای زیر، یا ترکیبی از آنها، معلوم‌اند

$$f_j(q_i, t) = ۰ \qquad (۱۰.۷.۱۰ \text{ الف})$$

$$\sum_i \frac{\partial f_j}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial f_j}{\partial t} dt = ۰ \qquad \begin{cases} i = ۱, ۲, \ldots, n \\ j = ۱, ۲, \ldots, m \end{cases} \qquad (۱۰.۷.۱۰ \text{ ب})$$

رابطهٔ دوم (معادلهٔ ۱۰.۷.۱۰ ب) دیفرانسیل کامل رابطهٔ اول، و از این‌رو با معادلهٔ اول معادل است. در موارد بسیاری، قیود به شکل دیفرانسیلی زیر معلوم‌اند که در آن هیچ مشتق زمانی صریحی وجود ندارد:

$$\sum_i \frac{\partial f_j}{\partial q_i} dq_i = ۰ \qquad \begin{cases} i = ۱, ۲, \ldots, n \\ j = ۱, ۲, \ldots, m \end{cases} \qquad (۱۰.۷.۱۰ \text{ ج})$$

قیودی به این شکل، وقتی در اصل وردشی هامیلتون برای به‌دست‌آوردن معادلات لاگرانژ به کار می‌روند، با وردش نموده‌شده در قالب معادلهٔ (۳.۷.۱۰) معادل‌اند و، بنابراین، مستقیماً به معادلات لاگرانژ (۹.۷.۱۰) منجر می‌شوند. حتی اگر قرار بود به صراحت به زمان بستگی داشته باشند، مانند حالت معادلات (۱۰.۷.۱۰ الف و ب)، وقتی در اصل وردشی هامیلتون به‌کار می‌روند، بستگی زمانی هیچ تأثیری بر معادلات حرکت لاگرانژ ندارد زیرا در خلال انجام وردش زمان ثابت گرفته می‌شود، واقعیتی که از آن در معادلهٔ (۳.۷.۱۰) استفاده کردیم. بنابراین، وقتی کسی بخواهد نیروهای قیدی را بشناسد و قیدها چنان باشند که با معادلات (۱۰.۷.۱۰ الف، ب، یا ج) داده شده‌اند، معادلات حرکت لاگرانژ عبارت‌اند از معادلاتی که به وسیلهٔ معادلات (۹.۷.۱۰) معلوم شده‌اند.

مثال ۱.۷.۱۰

قرصی را در نظر بگیرید که ریسمانی به دورش پیچیده شده باشد و یک سر این ریسمان به تکیه‌گاه ثابت متصل شده است. قرص را رها می‌کنند تا سقوط کند و در حین سقوط، ریسمان از پیرامون قرص باز شود (شکل ۱.۷.۱۰). (این وضعیت قدری شبیه به یوـیو است که ریسمانش به یک انگشت متصل باشد و بعد بگذارید سقوط کند و انگشت در حکم تکیه‌گاهی که ثابت شده، بدون حرکت باشد.) معادلهٔ حرکت قرص در حال سقوط و نیروهای قیدی را بیابید.

حل:

انرژی جنبشی قرص در حال سقوط از این قرار است

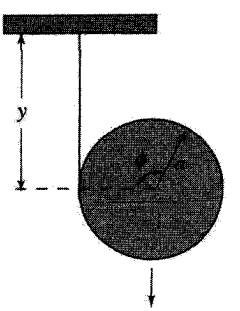
$$T = \frac{1}{2}m\dot{y}^2 + \frac{1}{2}I_{cm}\dot{\phi}^2$$
$$= \frac{1}{2}m\dot{y}^2 + \frac{1}{4}ma^2\dot{\phi}^2$$

که m جرم قرص، a شعاع آن، و $I_{\text{cm}} = \frac{1}{2}ma^2$ گشتاور لختی قرص حول محور مرکزش است. انرژی پتانسیل و قرص عبارت است از

$$V = -mgy$$

که تراز مرجع برای انرژی پتانسیل در $y = 0$، نقطهٔ آویز، واقع می‌شود. بنابراین، لاگرانژی از این قرار است

$$L = T - V = \frac{1}{2}m\dot{y}^2 + \frac{1}{4}ma^2\dot{\phi}^2 + mgy$$



شکل ۱.۷.۱۰ قرص افتان که از ریسمان متصل‌شده به آن باز می‌شود.

معادلهٔ قیدی عبارت است از

$$f(y,\phi) = y - a\phi = ۰$$

این سیستم یک درجهٔ آزادی دارد و می‌توانیم y یا ϕ را مختصهٔ تعمیم‌یافته اختیار کنیم و بعد معادلهٔ قیدی را به‌کار بریم تا مختصهٔ دیگر را از ملاحظات خود حذف کنیم. در این صورت، لاگرانژی پیشین می‌تواند به تابعی از یک تک‌مختصهٔ تعمیم‌یافته تبدیل شود و می‌توانیم معادلهٔ لاگرانژ (۵.۴.۱۰) را بدون ضریبهای لاگرانژ، برای حل‌کردن معادلهٔ حرکت قرص سقوطی به‌کار بریم. این حرکت نیروهای قیدی مورد نظر را ایجاد نمی‌کند. برای یافتن آنها، باید معادلات لاگرانژ (۹.۷.۱۰) را با ضرایب نامعین لاگرانژ، λ_j، به‌کار بریم. در این حالت، در اینجا معادلات (۹.۷.۱۰) از این قرارند:

$$\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} + \lambda\frac{\partial f}{\partial y} = ۰$$
$$\frac{\partial L}{\partial \phi} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} + \lambda\frac{\partial f}{\partial \phi} = ۰$$

با اجرای دستورالعمل قبلی، معادلات حرکت زیر را به‌دست می‌آوریم:

$$mg - m\ddot{y} + \lambda = ۰$$
$$-\frac{۱}{۲}ma^۲\ddot{\phi} - \lambda a = ۰$$

مشتق‌گیری از معادلهٔ قیدی می‌دهد

$$\ddot{\phi} = \frac{\ddot{y}}{a}$$

با درج این کمیت در معادلات حرکت قبلی، مقدار λ عبارت می‌شود از:

$$\lambda = -\frac{۱}{۳}mg$$

این کمیت را در اولین معادله از معادلات حرکت بالا درج می‌کنیم و با بهره‌گیری از معادلهٔ قیدی مشتق گرفته‌شده، داریم

$$\ddot{y} = \frac{۲}{۳}g \qquad \ddot{\phi} = \frac{۲}{۳}\frac{g}{a}$$

به این ترتیب، معادلات حرکت لازم برای دو مختصهٔ تعمیم‌یافته وابسته در اختیار داریم.

اگر قرص به‌طور آزاد سقوط می‌کرد و به علت اتصال به ریسمان متصل به آن مقید نبود، شتاب به سمت پایین بایست g می‌بود. کشش بالاسو در ریسمان، یعنی نیروی قیدی، شتاب را به اندازهٔ $\frac{1}{3}g$ کاهش می‌دهد. بنابراین، λ باید با کشش در ریسمان، یکی از نیروهای تعمیم‌یافتهٔ قیدی، مساوی باشد. با محاسبهٔ مقادیر و «نیروی» تعمیم‌یافته

$$Q_y = \lambda \frac{\partial f}{\partial y} = \lambda = -\frac{1}{3}mg$$
$$Q_\phi = \lambda \frac{\partial f}{\partial \phi} = -\lambda a = \frac{1}{3}mga$$

می‌توانیم ملاحظه کنیم وضعیت به همین ترتیب است. نیروی تعمیم‌یافتهٔ Q_y در واقع کشش در ریسمان است که شتاب پایین‌سوی قرص را کاهش می‌دهد، در حالی که Q گشتاور قرص است که سبب می‌شود قرص حول مرکز جرمش بچرخد.

۸.۱۰ اصل دالامبر: نیروهای تعمیم‌یافته

در بخش ۱.۱۰ نشان دادیم که چگونه اصل وردش هامیلتون، برای وضعیت سادهٔ جسمی که در میدان گرانشی یکنواخت سقوط آزاد می‌کند، به قوانین حرکت نیوتون انجامید. در بخش ۴.۱۰ اصل هامیلتون را برای رسیدن به معادلات لاگرانژ حرکت در مورد سیستمهای پایستار به‌کار بردیم، از این نتایج چنین برداشت می‌شود که فرمولبندیهای نیوتونی و لاگرانژی مکانیک، دست‌کم برای یک دستهٔ محدود از مسائل، معادل‌اند. در بخش ۷.۱۰ نشان دادیم که چگونه فرمولبندی لاگرانژ می‌تواند اصلاح شود تا نیروهای قیدی را که از تابع پتانسیل پایستار به‌دست نمی‌آیند، شامل شود. در اینجا می‌خواهیم نشان دهیم که با تغییر و اصلاح کوچکی، فرمولبندی لاگرانژی را می‌توان بسط بیشتری داد تا سیستمهایی را در برگیرد که ممکن است به همان خوبی نیروهای ناپایستار را نمایش دهند. با انجام این کار، امیدواریم هرگونه تردید دیرینه را، که تاکنون ممکن است گریبان دانشجویی را گرفته بود که شاید با بدبینی به نتیجهٔ هم‌ارزی فرمولبندی نیوتونی و لاگرانژی مکانیک می‌نگریست، از بین ببریم.

برای انجام این کار، به اصلی که ابتدا توسط برنولی بیان شد و بعد دالامبر آن را فرمولبندی کرد متوسل می‌شویم. این اصل بر پایهٔ تدوین شرط اساسی تعادل پایه‌گذاری شده است. شرط تعادل از این قرار است که تمام نیروهای وارد بر همهٔ اجسامی که سیستم فیزیکی را تشکیل می‌دهند،

وقتی سیستم در وضعیت تعادل است، صفر می‌شوند

$$\sum_{i=1}^{N} \mathbf{F}_i = 0 \qquad (۱.۸.۱۰)$$

در اینجا، $\mathbf{F}_i$ تمام نیروهای وارد بر جسم iام، و N تعداد اجسامی است که سیستم را تشکیل می‌دهند. این مجموعه معادلات، روابط بین کمیتهای برداری را نشان می‌دهد. فرمولبندی مکانیک که در اواخر قرن هفدهم و اوایل قرن هجدهم، ابتدا در اروپای مرکزی، بسط یافت، مبتنی بر روابطی اسکالری نظیر انرژی و کار، بود. برنولی و دالامبر پی بردند که کار خالص انجام‌شده روی اجسام در حالت تعادل، اگر تحت‌تأثیر جابه‌جاییهای کوچک نسبت به حالت تعادل قرارگیرند، باید صفر شود. علی‌الاصول، در چنین جابه‌جاییهایی، به‌ازای هر نیرویی که روی اجسام کار مثبت انجام می‌دهد، نیرویی یافت می‌شود که به همان مقدار کار منفی انجام دهد.

با بهره‌گیری از این ایده، روش یافتن شرایط لازم برای برقراری تعادل، با به تصور درآوردن سیستمی از اجسام در قالب پیکربندی مفروضی که دستخوش جابه‌جاییهای کوچکی دور از مکان مفروضشان باشند، محاسبهٔ کار برایند انجام‌شده روی سیستم، سپس مساوی صفر قراردادن این مجموع، اجرا می‌شود. این جابه‌جاییها تجسم می‌شوند ــ اجسام عملاً در وضعیت تعادل آشکارا دستخوش جابه‌جاییهای واقعی نیستند ــ و فرض می‌شود دامنهٔ بینهایت‌کوچکی دارند. فرض می‌شود این جابه‌جاییها به‌طور لحظه‌ای رخ دهند (یعنی، $\delta t = 0$). چنین جابه‌جاییهایی معمولاً با نماد δ (مانند قبل) نشان داده می‌شوند و به آنها جابه‌جاییهای مجازی می‌گویند. نکتهٔ مهم در این فرمولبندی عبارت است از تشخیص این نکته که اگر برای سیستمی دستخوش چنین جابه‌جاییهای مجازی کار صفر شود، در این صورت، این سیستم در حالت تعادل است. بنابراین، راهی برای برقرارکردن شرایط لازم برای تعادل از طریق بحث دربارهٔ کمیت اسکالر کار، در اختیار داریم، به جای آنکه با کمیت برداری نیرو بحث کنیم. این اصل کار مجازی است که در آغاز این فصل ذکر کردیم، و با این شرط بیان می‌شود:

$$\delta W = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{F}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0 \qquad (۲.۸.۱۰)$$

اما، مسائل مربوط به حوزهٔ دینامیک با اجسامی سروکار دارند که در وضعیت تعادل نیستند. این مسائل را باید با بهره‌گیری از قانون دوم حرکت نیوتون حل کرد

$$\mathbf{F}_i = \dot{\mathbf{p}}_i \qquad i = 1, 2, \ldots, N \qquad (۳.۸.۱۰)$$

بصیرت و بینش دالامبر عبارت بود از بازشناسی مسائل در دینامیک که بتوان آنها را به همان قالب زبانی ریخت که اصل کار مجازی را با گنجاندن جملهٔ لختی $-\dot{\mathbf{p}}$ به‌صورت نیرویی واقعی در معادلهٔ (۲.۸.۱۰) بیان می‌کنند،

$$\sum_{i=1}^{N}(\mathbf{F}_i - \dot{\mathbf{p}}_i)\cdot\delta\mathbf{r}_i = 0 \qquad (۴.۸.۱۰)$$

شرطی که در معادلهٔ (۴.۸.۱۰) بیان شد، اصل دالامبر نامیده می‌شود و معادل است با قانون دوم حرکت نیوتون، اما چنان نوشته شده که گویی جملهٔ لختی یک نیروی واقعی است

$$\mathbf{F}_i - \dot{\mathbf{p}}_i = 0 \qquad i = 1, 2, \ldots, N \qquad (۵.۸.۱۰)$$

(که از نتیجهٔ کارمان در فصل ۵ می‌دانیم که این روش معتبری برای تحلیل حرکت در یک دستگاه مرجع نالخت مناسب به‌شمار می‌آید). در واقع، دالامبر مسئله‌ای در حوزهٔ دینامیک را به مسئله‌ای در حوزهٔ استاتیک تبدیل کرد (همان‌طور که لاگرانژ خودش نیز به همین روش عمل کرد).

اما، در مطالب بعدی نمی‌خواهیم این استنتاج را با تعداد زیادی نماد مانند جمعهای دوگانه و سه‌گانه و اندیسهای بسیار تیره کنیم؛ همچنان که گاهی به خاطر میل مفرطمان برای کامل و دقیق‌بودن بحث، این اتفاق می‌افتد. به این ترتیب، معادلات لاگرانژ را برای حالت تک ذره‌ای که، به هر حال، فرض می‌شود تحت‌تأثیر چند نیروی دلخواه باشد، به‌دست می‌آوریم. احتمالاً دانشجوی بلندهمت می‌تواند، بر پایهٔ مطالب گذشته در این کتاب که راجع به آنها قبلاً به تلاش سختی دست زدیم، این تحلیل را به سیستمی با تعداد ذرات زیاد که تحت‌تأثیر نیروهای بسیار باشند، تعمیم دهد.

برای تک‌ذره‌ای که در مختصات دکارتی سه‌بعدی بیان شده باشد، با اصل دالامبر، معادلهٔ (۴.۸.۱۰)، کار خود را شروع می‌کنیم

$$\sum_{i=1}^{3}(F_i - \dot{p}_i)\delta x_i = 0 \qquad (۶.۸.۱۰)$$

اندیس i یکی از سه مختصهٔ دکارتی را نشان می‌دهد و F_iها حاصل‌جمع تمام مؤلفه‌های نیروی وارد بر جسم در جهت iام به‌شمار می‌آیند.

فرض می‌کنیم حرکت ذره برحسب مختصات تعمیم‌یافته‌اش، q_j، نیز توصیف شود که ممکن است معادلات قیدی بین آنها رابطه برقرار کنند یا نکنند. برای لحظه‌ای، فرض می‌کنیم این رابطه برقرار نباشد و رابطهٔ بین سه مختصهٔ دکارتی و سه مختصهٔ تعمیم‌یافتهٔ ضروری برای توصیف حرکت ذره در قالب معادلهٔ (۱۰.۳.۱۰) برای سیستم نامقید بیان شود.

نخستین جمله در مجموعیابی معادلهٔ (۶.۸.۱۰) عبارت است از کار مجازی انجام‌شده روی سیستم

$$\delta W = \sum_i F_i \delta x_i = \sum_j \left[\sum_i \left(F_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \right) \right] \delta q_j = \sum_j Q_j \delta q_j \qquad (۷.۸.۱۰)$$

این عبارت مساوی با صفر نیست! Q_jها، که به کمک رابطهٔ زیر بیان می‌شوند

$$Q_j = \sum_i F_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \qquad (۸.۸.۱۰)$$

نیروهای تعمیم‌یافته، متناظر با مختصات تعمیم‌یافتهٔ q_j، نامیده می‌شوند. مانند حالت مربوط به نیروهای تعمیم‌یافتهٔ قیدی که در بخش ۷.۱۰ دربارهٔ آنها بحث شد، نیروی تعمیم‌یافتهٔ Q_j عبارت است از نیرو اگر مختصه تعمیم‌یافته متناظر q_j مکان باشد؛ نیروی تعمیم‌یافته گشتاور نیروست اگر مختصهٔ تعمیم‌یافتهٔ متناظر q_j، زاویه باشد. در هر حالت، حاصلضرب $Q_j \delta_j$ کار است.

اکنون جملهٔ لختی معادلهٔ (۶.۸.۱۰) را محاسبه می‌کنیم

$$\begin{aligned} \sum_i \dot{p}_i \delta x_i &= \sum_i m \ddot{x}_i \delta x_i = \sum_j \left[\sum_i m \ddot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \right] \delta q_j \\ &= \sum_j \delta q_j \sum_i m \left[\frac{d}{dt} \left(\dot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \right) - \ddot{x}_i \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial x_i}{\partial q_j} \right) \right] \end{aligned} \qquad (۹.۸.۱۰)$$

با مشتق‌گرفتن از معادلات (۱۳.۳.۱۰)، می‌رسیم به

$$\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \qquad (۱۰.۸.۱۰)$$

می‌توانیم این رابطه را در نخستین جملهٔ داخل کروشهٔ معادلهٔ (۹.۸.۱۰) وارد کنیم،

$$\begin{aligned} \sum_i m \frac{d}{dt} \left(\dot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \right) &= \sum_i m \frac{d}{dt} \left(\dot{x}_i \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_j} \right) \\ &= \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left(\sum \frac{1}{2} m \dot{x}_1^2 \right) \right] = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) \end{aligned} \qquad (۱۱.۸.۱۰)$$

برای محاسبهٔ جملهٔ دوم داخل کروشهٔ معادلهٔ (۹.۸.۱۰)، باید مشتق زمانی $\partial x_i / \partial q_j$ را به‌دست آوریم. چون مشتق زمانی هر تابع کلی از q_j و t به این صورت بیان می‌شود

$$\frac{d}{dt} f(q_j, t) = \sum_k \frac{\partial f}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial f}{\partial t} \qquad (۱۲.۸.۱۰)$$

با توجه به این عملیات، می‌رسیم به

$$\sum_i m\dot{x}_i \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x_i}{\partial q_j}\right) = \sum_i m\dot{x}_i \left[\sum_k \frac{\partial^2 x_i}{\partial q_k \partial q_j}\dot{q}_k + \frac{\partial^2 x_i}{\partial q_j \partial t}\right] = \sum_i m\dot{x}_i \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial q_j} \quad (۱۳.۸.۱۰ \text{ الف})$$

این نتیجه با وارونه‌کردن ترتیب مشتق‌گیری معادل است

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial x_i}{\partial q_j} = \frac{\partial}{\partial q_j}\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial q_j} \quad (۱۳.۸.۱۰ \text{ ب})$$

به این ترتیب، جملهٔ دوم می‌شود

$$\sum_i m\dot{x}_i \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x_i}{\partial q_j}\right) = \frac{\partial}{\partial q_j}\left[\sum_i \frac{1}{2} m\dot{x}_i^2\right] = \frac{\partial T}{\partial q_j} \quad (۱۳.۸.۱۰ \text{ ج})$$

به این صورت، جملهٔ لختی (معادلهٔ ۹.۸.۱۰) عبارت است از

$$\sum_i \dot{p}_i \delta x_i = \sum_j \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j}\right]\delta q_j \quad (۱۴.۸.۱۰)$$

با ترکیب‌کردن معادلات (۷.۸.۱۰) و (۱۴.۸.۱۰)، اصل دالامبر به این صورت در می‌آید

$$\sum_i (F_i - \dot{p}_i)\delta x_i = \sum_j \left\{Q_j - \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j}\right]\right\}\delta q_j = 0 \quad (۱۵.۸.۱۰)$$

فعلاً، فرض کرده‌ایم قیدهایی وجود ندارند؛ بنابراین، q_j می‌تواند مستقلاً تغییر کند. به این ترتیب، جملهٔ داخل کروشه‌ها باید صفر شود، و می‌رسیم به

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j \quad (۱۶.۸.۱۰)$$

اگر نیروها خارجی پایستار باشند، آنها را می‌توان از یک تابع انرژی پتانسیل، $F_i = -\nabla_i V$، به‌دست آورد و می‌شود معادلهٔ (۱۶.۸.۱۰) را ساده‌تر هم کرد

$$Q_j = \sum_i F_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j} = -\sum_i \nabla_i V \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \quad (۱۷.۸.۱۰ \text{ الف})$$

عبارت آخری در معادلهٔ (۱۷.۸.۱۰ الف) مشتق جزئی V نسبت به q_j است، به این ترتیب

$$Q_j = -\frac{\partial V}{\partial q_j} \quad (۱۷.۸.۱۰ \text{ ب})$$

و می‌توان این کمیت را در معادلهٔ (۱۶.۸.۱۰) نشاند، که می‌دهد

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial (T-V)}{\partial q_j} = ۰ \qquad (۱۸.۸.۱۰)$$

اگر تابع انرژی پتانسیل V مستقل از سرعت تعمیم‌یافته، $\dot{q}_j$، باشد می‌توانیم آن جمله را در کنار نخستین جملهٔ معادلهٔ (۱۸.۸.۱۰) نیز به‌حساب آوریم

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial (T-V)}{\partial \dot{q}_j}\right] - \frac{\partial (T-V)}{\partial q_j} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = ۰ \qquad (۱۹.۸.۱۰)$$

که در آن تابع لاگرانژی $L = T - V$ را نشانده‌ایم که در بخش ۱.۱۰ با آن آشنا شدیم. معادلهٔ (۱۹.۸.۱۰) معادلهٔ لاگرانژی حرکت برای سیستمهای پایستار است که قبلاً آن را از اصل وردشی هامیلتون به‌دست آوریم. هر چند در اینجا بر محدودیتهایی تأکید ورزیده‌ایم که باید به نیروها و پتانسیل تعمیم‌یافته وابسته باشند، در صورتی که این قالب‌بندی استاندارد، اعمال شود. با توجه به وابستگیهای تابعی صریح مجاز در تابع لاگرانژی به‌کاررفته در معادلهٔ (۱۹.۸.۱۰)[۱]، بر این امر حتی باید بیشتر تأکید کرد

$$L(q_j, \dot{q}_j, t) = T(q_j, \dot{q}_j, t) - V(q_j) \qquad (۲۰.۸.۱۰)$$

به‌طور کلی، برای سیستمی دستخوش نیروهای تعمیم‌یافتهٔ ناپایستار و نیروهای قیدی که آن را Q'_j می‌نامیم، معادلات حرکت لاگرانژ را می‌توان از این قرار نوشت

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right] - \frac{\partial L}{\partial q_j} = Q'_j \qquad j = ۱, ۲, \ldots, n \qquad (۲۱.۸.۱۰)$$

هر چند آنچه به‌دست آوردیم برای تک ذره بود که حداکثر فقط سه مختصهٔ تعمیم‌یافته برای توصیف حرکتش لازم است؛ اگر N ذره درکار باشند، در این صورت $n = ۳N$ تعداد مختصات تعمیم‌یافتهٔ لازم برای توصیف این سیستم است. تابع لاگرانژ شامل تمام پتانسیلهای پایستار است که، به این ترتیب، اثر تمام نیروهای پایستار وارد بر سیستم را در خود دارد. نیروهای قیدی شامل بعضی Q'_jها ممکن است با بهره‌گیری از روش ضریبهای لاگرانژ بحث‌شده در بخش قبل، به‌دست آیند؛

۱. در مواردی نیروهای تعمیم‌یافته را می‌توان از یک پتانسیل وابسته به سرعت، مانند $V = V(q_j, \dot{q}_j, t)$ استنتاج کرد و

$$Q_j = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial V}{\partial q_j}$$

و قالب‌بندی استاندارد لاگرانژی باز هم صادق است.

نیروهای تعمیم‌یافتهٔ ناپایستار Q'_j، نظیر نیروی اصطکاک یا نیروی وابسته به زمان، باید به‌خصوص به‌صورت کمیت معلوم یا مجهول در معادلهٔ (۲۱.۸.۱۰) گنجانده شوند. اگر نیروهای ناپایستار $\mathbf{F}_i$ معلوم باشند، Q'_j ممکن است بلافاصله با بهره‌گیری از معادلهٔ (۸.۸.۱۰) محاسبه شود. اگر $\mathbf{F}_i$ها مجهول باشند، در این صورت Q'_j باید از فرایند حل معادلات لاگرانژ به‌دست آیند. بنابراین، معادلهٔ حرکت لاگرانژ که به کمک معادلهٔ (۲۱.۸.۱۰) بیان می‌شود، کاملاً کلی و با قانون حرکت نیوتون معادل است که با بهره‌گیری از اصل دالامبر، به‌دست آمد.

هرچند قبلاً معادلات لاگرانژ را فقط برای مورد سیستمهای پایستار از اصل هامیلتون به‌دست آوردیم، می‌توان از آن به همان ترتیبی بهره گرفت که از اصل دالامبر بهره بردیم، تا معادلات لاگرانژ را برای حالت کلیتری به‌دست آوریم. بنابراین، ممکن است دربارهٔ امکان معادل‌بودن این دو روش فرمولبندی قوانین مکانیک تعجب کنیم. این دو روش معادل هم‌اند. در واقع، نسخهٔ تعمیم‌یافتهٔ اصل هامیلتون چیزی جز شکل انتگرالی اصل دالامبر نیست.

چرا روش لاگرانژ؟

با این فرض که هم اصل هامیلتون و هم اصل دالامبر با معادلات لاگرانژ معادل‌اند، چرا هیچ کدام از این دو روش به عنوان نقطهٔ شروع برای حل مسائل مکانیک به‌کار گرفته نمی‌شود؟ می‌توانید این کار را انجام دهید ــ و این روش شیوه‌ای تقریبی برای حل مسائل پیچیده در مکانیک کلاسیک بسی مفید از کار در آمده است، اما بحث دربارهٔ این روشها از حوصلهٔ برنامه این کتاب خارج است.[۱] از سوی دیگر، معادلات لاگرانژ روش کاری بسیار سازگار و البته راهبردی برای حل مسئلهٔ مکانیکی تقریباً گیج‌کننده، فراهم می‌آورند. با این خصوصیت به نظر می‌رسد این معادلات حتی از روش نیوتونی با کاربرد جهانی سبقت گرفته‌اند. در این صورت، سؤالی که اکثر دانشجویان می‌پرسند این است که: «چرا اصلاً روش نیوتونی را به‌کار می‌برید، وقتی روش لاگرانژ این قدر ساده‌تر، عملیتر، و توانمندتر به نظر می‌آید؟» ظاهراً این کار اعطای مهارت محاسباتی توانمند به متخصص است ــ که او را به جهش از روی ساختمانهای بلند با یک جست قادر می‌کند. . . .

قدرت راهبرد لاگرانژ در حل مسائل بر توانایی آن در پرداختن به توابع اسکالر است، حال آنکه راهبرد نیوتون بر شالودهٔ بهره‌گیری از کمیتهای برداری، نیروها، و تکانه‌ها استوار است. در حالتی که مسائل خیلی پیچیده نباشند، اعمال روش نیوتونی نسبتاً سرراست و آسان است، اما هنگامی

---

۱. مثلاً ر. ک.

C. G. Gray, G. Karl, and V. A. Novikov, Direct Use of Variational Principles as an Approximation Technique in Classical Mechanics, *Am. J. Phys.* **64**(9), 1177, 1996.

که مسئله پیچیده‌تر می‌شود، حل کردنش با راهبرد لاگرانژی توانایی این روش را نشان می‌دهد. این روش در چارچوب زبان مختصات تعمیم‌یافته بیان می‌شود که به استثنای ساده‌ترین مسائل، اساساً کاربرد آنها به‌صورت روشی برای توصیف حرکت سیستمهای چند جسمی (بس جسمی) یا آنها که با قیدهای پیچیده شکل گرفته‌اند، آسانتر است. به جای آنکه عملیات برداری در سیستم مختصات دکارتی صلب انجام گیرد، معادلات حرکت منحصراً از عملیات با کمیتهای اسکالر در فضای پیکربندی به‌دست می‌آیند.

راهبرد لاگرانژ به‌خصوص وقتی قدرتمند است که به سیستم پایستاری می‌پردازد که فقط می‌خواهیم معادلات حرکتش را به‌دست آوریم؛ نیروهای قیدی موضوع مهمی نیستند. در واقع، فرمولبندی لاگرانژی استاندارد از آنها چشم می‌پوشد. اگر نیروهای قیدی مورد توجه باشند، در این صورت باید روشی به‌کار گرفت که شامل ضرایب لاگرانژ باشد تا به یافتن آنها اقدام کرد. در چنین شرایطی، باید توصیه کرد که روش نیوتونی اختیار و پیگیری شود. اما، وقتی نیروهای تعمیم‌یافته ناپایستار یا وابسته به سرعت سربلند می‌کنند، روش نیوتونی همواره یکی از گزینشها به‌شمار می‌آید؛ در چنین مواردی، در واقع برای شکستن گردو به پتک نیاز داریم؛ ضربتهای ظریف با «شمشیر نازک» لاگرانژی احتمالاً بیهوده از کار در خواهد آمد.

سرانجام، بین این دو راهبرد اختلاف نگرش واقعی برقرار است. روش نیوتونی دیفرانسیلی است؛ در این روش علت و معلول گنجیده است. کاربرد نیرویی خارجی در یک جسم به شتاب‌گرفتن آن جسم می‌انجامد. معادلات لاگرانژ نیز دیفرانسیلی‌اند، اما به زبان انرژی جنبشی و پتانسیل توصیف می‌شوند، «جوهر» اسکالر بیشتر ذاتی جسم است تا اینکه نسبت به آن غیرذاتی باشند. این تمایز به‌خصوص در مورد سیستمهای پایستار صادق است، زیرا اصطلاح نیرو تاکنون در هیچ جای فرمولبندی لاگرانژی ظاهر نشده است. اصل وردش هامیلتون اوج این دیدگاه است: این اصل به مفهوم انرژی بسیار اهمیت می‌دهد و در عوض اهمیت مفهوم نیرو را کم می‌کند. در واقع، در سیستمهای میکروسکوپی مفاهیم نیرو، علت، و معلول کاملاً معنی کلاسیکی خود را از دست می‌دهند. در چنین سیستمهایی، انرژیها بیشترین سلطه را دارند و تصادفی نیست که برای توابع هامیلتونی و لاگرانژی در فرمولبندی نظریهٔ مکانیک کوانتومی نقشهای بنیادی فرض می‌کنند.

اگر اصل وردش هامیلتون را فرمولبندی بنیادی مکانیک بدانیم، آن اختلاف نگرش بارزتر هم می‌شود. این اصل عبارت است از فرمولبندی انتگرالی در مقابل فرمولبندی دیفرانسیلی. حرکت صحیحی که جسمی در فضا انجام می‌دهد، حرکتی است که انتگرال زمانی اختلاف بین انرژیهای جنبشی و پتانسیل را کمینه می‌کند. چنین چشم‌اندازی یک تصویر «فراگیر» در تقابل با چشم‌انداز «موضعی» فرمولبندی نیوتونی است. حتی نظریه‌های مکانیک کوانتومی دوگانگی چشم‌انداز را بروز

می‌دهند، مثلاً راهبرد انتگرال مسیر ریچارد فاینمن[1] (۱۹۸۸ـ۱۹۱۸) در تقابل با راهبرد دیفرانسیلی اروین شرودینگر (۱۹۶۱ـ۱۸۸۷). با فرض آنکه ظاهراً طبیعت از چنین اصول فراگیری پیروی می‌کند، همان‌طور که در آغاز این فصل اشاره شد، چندان دشوار نیست که بفهمیم چرا تعدادی از فیلسوفان از آنها به‌صورت اساس استدلالهای غایت‌شناختی، مبنی بر اینکه طبیعت برای رسیدن به هدفی در کار است، بهره گرفته‌اند ــ اینکه طبیعت هدفمند است ــ یا اینکه در اذهان هدفی برای آن مقصود بوده است. در واقع، موپرتویی استدلال کرد که مسیرهای دینامیکی که در فضا در نظر گرفته شده‌اند و دارای مقادیر ناکمینه‌ای از کمیتی ریاضی‌اند که او آنها را کنش[2] نامید عملاً باید مشاهده می‌شدند، در صورتی که طبیعت کمتر از قوانین کامل حرکت را به نمایش می‌گذاشت و به این ترتیب برای وجود خدایی استدلال کرد که دنیا را تمام و کمال اعطا کرده است. چنین رنگ و بوهای غایت‌شناختی در استدلالی که بر پایهٔ آن چشمان چنان طراحی شده‌اند که می‌توانیم ببینیم ــ در تقابل با دیدگاهی که چشمان به تدریج در بستر زمان تکوین یافته‌اند، هر مرحلهٔ جدید تکامل پیروزمندانه از طریق انتخاب طبیعی ظاهر می‌شود تا اینکه سرانجام چشمی به‌وجود آمده که وقف مزیت بقای بینایی به دارندگانش شده است.

این موضوع فلسفی را کنار می‌گذاریم زیرا به روش عملی که باید در هنگام حل مسائل مکانیک اتخاذ کنیم، ربطی ندارد. در واقع، حرکتی که عملاً یک سیستم فیزیکی بروز می‌دهد، تحت این انتخاب ناورداست و، بنابراین، نمی‌توان آن را برای این تصمیم‌گیری به‌کار برد که کدام فلسفه و نگرش برتر است تا اتخاذ شود. اما، در هنگام حل یک مسئله روش انتخاب برتری وجود دارد و این روشی است که از مزیتهایی محاسباتی برخوردار است که ذاتی مسئلهٔ موردنظر خاصی است.

۹.۱۰ تابع هامیلتونی: معادلات هامیلتون

تابعی از مختصات تعمیم‌یافته به شرح زیر را در نظر بگیرید:

$$H = \sum_i \dot{q}_i p_i - L \qquad (۱.۹.۱۰)$$

---

1. R. P. Feynman and A. R. Hibbs, *Quantum Mechanics and Path Integrals*, McGraw-Hill, New York, 1965.

2. Pierre-Louis-Moreau de Maupertuis, *Essai de Cosmologie* (1751), in *Oeuvres*, Vol. 4, P.3, Lyon, 1768,

یا ر.ک.

Henry Margenau, *The Nature of Physical Reality*, 2nd Ed., McGraw-Hill, NewYork, 1977. Announced by Maupertuis in 1747, and the first of the minimum principles, the *principle of least action* was the forerunner of Hamilton's principle.

در سیستمهای دینامیکی ساده انرژی جنبشی، T، تابع درجهٔ دوم همگنی از $\dot{q}$ها، و انرژی پتانسیل، V، به‌تنهایی تابعی از qهاست، به‌طوری که

$$L = T(q_i, \dot{q}_i) - V(q_i) \qquad (۲.۹.۱۰)$$

حال، با توجه به قضیهٔ اویلر برای توابع همگن،[۱] داریم

$$\sum_i \dot{q}_i p_i = \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = ۲T \qquad (۳.۹.۱۰)$$

بنابراین،

$$H = \sum_i \dot{q}_i p_i - L = ۲T - (T - V) = T + V \qquad (۴.۹.۱۰)$$

یعنی، برای این نوع سیستمهای موردنظر، تابع H با انرژی کل آن برابر است.

n معادلهٔ زیر را در نظر بگیرید

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \quad (i = ۱, ۲, \ldots, n) \qquad (۵.۹.۱۰)$$

هرگاه این معادلات را به‌ازای $\dot{q}$ها برحسب pها و qها حل کنیم،

$$\dot{q}_i = \dot{q}_i(p_i, q_i) \qquad (۶.۹.۱۰)$$

به کمک این معادلات می‌توانیم H را به‌صورت تابعی از pها و qها بیان کنیم:

$$H(p_i, q_i) = \sum_i p_i \dot{q}_i(p_i, q_i) - L \qquad (۷.۹.۱۰)$$

حال وردش تابع H متناظر با وردش δp_i و δq_i را محاسبه می‌کنیم. داریم

$$\delta H = \sum_i \left[p_i \delta \dot{q}_i + \dot{q}_i \delta p_i - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i - \frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i \right] \qquad (۸.۹.۱۰ \text{ الف})$$

۱. بنا بر قضیهٔ اویلر برای تابع همگن f از درجهٔ n برحسب متغیرهای $x_۱$، $x_۲$، ...، x_r، داریم

$$x_۱ = \frac{\partial f}{\partial x_۱} + x_۲ \frac{\partial f}{\partial x_۲} + \ldots + x_r \frac{\partial f}{\partial x_r} = nf$$

جمله‌های اول و سوم داخل کروشه حذف می‌شوند، زیرا بنا بر تعریف، $p_i = \partial L/\partial \dot{q}_i$. همچنین، چون معادلات لاگرانژ را می‌توان به‌صورت $\dot{p}_i = \partial L/\partial q_i$ نوشت، می‌توانیم بنویسیم

$$\delta H = \sum_i [\dot{q}_i \delta p_i - \dot{p}_i \delta q_i] \qquad (۸.۹.۱۰ \text{ ب})$$

حال وردش H باید با این معادله داده شود

$$\delta H = \sum_i \left[\frac{\partial H}{\partial p_i} \delta p_i + \frac{\partial H}{\partial q_i} \delta q_i \right] \qquad (۸.۹.۱۰ \text{ ج})$$

از این دو معادله نتیجه می‌گیریم

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial p_i} &= \dot{q}_i \\ \frac{\partial H}{\partial q_i} &= -\dot{p}_i \end{aligned} \qquad (۹.۹.۱۰)$$

این معادلات را معادلات هامیلتونی یا معادلات بُتدادی حرکت می‌گویند. معادلات هامیلتونی حرکت شامل $2n$ معادلهٔ دیفرانسیل مرتبهٔ اول‌اند، در حالی که معادلات لاگرانژ مشتمل‌اند بر n معادلهٔ مرتبهٔ دوم. ما معادلات هامیلتون را برای سیستمهای سادهٔ پایستار به‌دست آورده‌ایم. می‌توان نشان داد که معادلات (۹.۹.۱۰) نیز در سیستمهای کلیتر، مثلاً سیستمهای ناپایستار، سیستمهایی که در آنها تابع انرژی پتانسیل شامل $\dot{q}$ها هستند، و سیستمهایی که در آنها L صریحاً شامل زمان است، صادق‌اند، اما در این حالتها انرژی کل دیگر ضرورتاً با H مساوی نیست.

دانشجویی که درس مکانیک کلاسیک را گذرانده باشد بار دیگر در کلاس مکانیک کوانتومی (یعنی نظریهٔ بنیادی پدیده‌های اتمی)، با معادلات هامیلتون برخورد خواهد کرد. معادلات هامیلتون در مکانیک آسمانی نیز کاربرد پیدا می‌کنند. برای مطالعهٔ بیشتر، به مراجع برگزیده (تحت عنوان مکانیک پیشرفته) در آخر کتاب مراجعه کنید.

مثال ۱.۹.۱۰

معادلات هامیلتونی حرکت را برای نوسانگر هماهنگ یک‌بعدی به‌دست آورید.

حل:

داریم

$$T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 \qquad V = \frac{1}{2} k x^2 \qquad L = T - V$$

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \qquad \dot{x} = \frac{p}{m}$$

به این ترتیب،

$$H = T + V = \frac{۱}{۲m}p^۲ + \frac{k}{۲}x^۲$$

در این صورت، معادلات حرکت

$$\frac{\partial H}{\partial p} = \dot{x} \qquad \frac{\partial H}{\partial x} = -\dot{p}$$

چنین خواهند شد

$$\frac{p}{m} = \dot{x} \qquad kx = \dot{p}$$

معادلهٔ اول در این حالت صرفاً بیان مجددی از رابطهٔ تکانه‌ـسرعت است. با بهره‌گیری از نخستین معادله، می‌توان معادلهٔ دوم را از این قرار نوشت:

$$kx = -\frac{d}{dt}(m\dot{x})$$

یا، پس از بازآرایی جملات،

$$m\ddot{x} + kx = ۰$$

که بیان معادلهٔ آشنای نوسانگر هماهنگ است.

مثال ۲.۹.۱۰

معادلات هامیلتونی حرکت ذره را در میدان مرکزی بیابید.

حل:

در اینجا، در مختصات قطبی داریم

$$T = \frac{m}{۲}(\dot{r}^۲ + r^۲\dot{\theta}^۲)$$

$$V = V(r)$$

$$L = T - V$$

به این ترتیب،

$$p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r} \qquad \dot{r} = \frac{p_r}{m}$$

$$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^۲\dot{\theta} \qquad \dot{\theta} = \frac{p_\theta}{mr^۲}$$

در نتیجه،

$$H = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2}\right) + V(r)$$

در این صورت، معادلات هامیلتونی

$$\frac{\partial H}{\partial p_r} = \dot{r} \qquad \frac{\partial H}{\partial r} = -\dot{p}_r \qquad \frac{\partial H}{\partial p_\theta} = \dot{\theta} \qquad \frac{\partial H}{\partial \theta} = -\dot{p}_\theta$$

از این قرار خواهند بود

$$\frac{p_r}{m} = \dot{r}$$

$$\frac{\partial V(r)}{\partial r} - \frac{p_\theta^2}{mr^3} = -\dot{p}_r$$

$$\frac{p_\theta}{mr^2} = \dot{\theta}$$

$$0 = -\dot{p}_\theta$$

دو معادلهٔ آخر ثابت‌بودن تکانهٔ زاویه‌ای را نشان می‌دهند:

$$p_\theta = \text{ثابت} \quad \text{و} \quad mr^2\dot{\theta} = ml$$

که با استفاده از آن و دو معادلهٔ اول، داریم

$$m\ddot{r} = \dot{p}_r = \frac{ml^2}{r^3} - \frac{\partial V(r)}{\partial r}$$

که معادلهٔ شعاعی حرکت است. البته این معادله با معادله‌ای که قبلاً در مثال ۲.۵.۱۰ به‌دست آوردیم، معادل است.

مثال ۳.۹.۱۰

مسئلهٔ پراکندگی رادرفورد را در نظر بگیرید که در بخش ۱۴.۶ دربارهٔ آن بحث کردیم و در آن ذره‌ای به بار الکتریکی q و جرم m به طرف مرکز پراکندگی، هسته‌ای سنگین به بار Q که فرض می‌شود بدون حرکت و در حال سکون باشد، حرکت می‌کند. در ابتدا ذرهٔ فرودی که بینهایت دور از مرکز پراکندگی واقع است و با سرعت v_0 در طول خط مستقیم، که فاصلهٔ عمودی آن تا مرکز پراکندگی (پارامتر برخورد) b است، حرکت می‌کند (شکل ۱.۱۴.۶). با استفاده از معادلات هامیلتون رابطه‌ای انتگرالی برای زاویهٔ پراکندگی θ_S به‌دست آورید.

حل:

دو مختصه برای توصیف حرکت ذره، که به یک صفحه در فضا مقید می‌شود، ضروری است. مختصات قطبی r و θ را اختیار می‌کنیم. جهت محور قطبی را چنان می‌گیریم که مکان اولیهٔ ذرهٔ فرودی در $\theta = 0$ عبارت باشد از $r = \infty$. هامیلتونی این مسئله مانند هامیلتونی مثال قبلی (۲.۹.۱۰) است. این هامیلتونی عبارت است از

$$H = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2}\right) + V(r) = E\left(= \frac{1}{2}mv_0^2\right)$$

هامیلتونی با انرژی کل ذرهٔ فرودی مساوی و ثابت حرکت است. به‌علاوه، θ مختصه‌ای چشم‌پوشیدنی است به‌طوری که تکانهٔ زاویه‌ای

$$p_\theta = mr^2\dot{\theta} = L(= mv_0 b)$$

نیز ثابت حرکت است.

معادلات هامیلتونی مربوط عبارت‌اند از

$$\frac{\partial H}{\partial p_\theta} = \dot{\theta} \qquad \frac{\partial H}{\partial r} = -\dot{p}_r$$

با مشتق‌گیری از معادلهٔ اول نسبت به r می‌رسیم به

$$\frac{\partial}{\partial r}\dot{\theta} = \frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial H}{\partial p_\theta} = \frac{\partial}{\partial p_\theta}\frac{\partial H}{\partial r} = -\frac{\partial \dot{p}_r}{\partial p_\theta}$$

با انتگرال‌گیری از معادلهٔ بالا، عبارتی به‌ازای $\dot{\theta}$ به این صورت به‌دست می‌آید

$$d\theta = -d\left[\int \frac{\partial p_r}{\partial p_\theta} dr\right] \quad \text{یا} \quad \dot{\theta} = -\int \frac{\partial \dot{p}_r}{\partial p_\theta} dr = -\frac{d}{dt}\int \frac{\partial p_r}{\partial p_\theta} dr$$

که، فعلاً حدود انتگرال را قید نکرده‌ایم. با بررسی معادلهٔ (۱.۱۴.۶)، می‌بینیم که θ_0 تغییر در جهت زاویه‌ای ذره است به هنگامی که از $r = \infty$ به $r = r_{\min}$، نزدیکترین فاصله به هسته، حرکت می‌کند، از آنجا که

$$\theta = 0,\ r = \infty \text{ در} \qquad \frac{\partial p_r}{\partial p_\theta} = 0$$

می‌رسیم به

$$\theta_0 = -\int_{\infty}^{r_{\min}} \frac{\partial p_r}{\partial p_\theta} dr$$

می‌توانیم با استفاده از عبارت مربوط به هامیلتونی این معادله را برحسب p_r بیابیم

$$p_r = \left[2m(E - V(r)) - \frac{p_\theta^2}{r^2} \right]^{1/2}$$

چون زاویهٔ پراکندگی عبارت است از $\theta_S = \pi - 2\theta_0$ (شکل ۱.۱۴.۶)، می‌رسیم به

$$\theta_S = \pi + 2 \int_{\infty}^{r_{\min}} \frac{\partial}{\partial p_\theta} \left[2m(E - V(r)) - \frac{p_\theta^2}{r^2} \right]^{1/2} dr$$

می‌توان با دیفرانسیل‌گرفتن از عبارت داخل انتگرال این عبارت را یک گام جلوتر برد. می‌رسیم به

$$\theta_S = \pi - 2 \int_{\infty}^{r_{\min}} \frac{\dfrac{L}{r^2}}{\left[2m\left(E - \dfrac{qQ}{r} \right) - \dfrac{L^2}{r^2} \right]^{1/2}} dr$$

که در آن به جای p_θ ثابت تکانهٔ زاویه‌ای L را قرار داده‌ایم. همچنین عبارت انرژی پتانسیل ذره در میدان هسته، $V(r) = qQ/r$، را وارد کرده‌ایم. دانشجو باید بتواند نشان دهد که محاسبهٔ انتگرال در معادلهٔ بالا، کمیت θ_0 را می‌دهد که در قالب معادلهٔ (۶.۱۴.۶) داده شده است.

مسائل

برای تمام مسائل زیر باید از روش لاگرانژ بهره بگیرید، مگر اینکه خلاف آن گفته شود.

۱.۱۰ انتگرال زیر

$$J(\alpha) = \int_{t_1}^{t_2} L[x(\alpha, t), \dot{x}(\alpha, t), t] dt$$

را برای نوسانگر هماهنگ ساده محاسبه کنید. تحلیل ارائه‌شده در بخش ۱.۱۰ را دنبال کنید و نشان دهید که $J(\alpha)$ به‌ازای $\alpha = 0$ فرین است.

۲.۱۰ معادلهٔ دیفرانسیل حرکت پرتابه را در میدان گرانشی یکنواخت بدون مقاومت هوا بیابید.

۳.۱۰ کرهٔ یکنواخت صلبی بر سطح شیبدار کاملاً زبری به پایین می‌غلتد، شتاب آن را به‌دست آورید. مقدار این شتاب را با نتیجه‌ای که قبلاً در بخش ۶.۸ به‌دست آمد، مقایسه کنید.

۴.۱۰ دو قطعه جسم به جرمهای m به وسیلهٔ ریسمان انعطاف‌پذیری به یکدیگر متصل می‌شوند. یکی از آنها بر میز صاف افقی قرار داده می‌شود، و دیگری بر لبهٔ میز آویزان است. شتاب این دو قطعه‌جسم را به‌دست آورید، در صورتی که (الف) جرم ریسمان چشم‌پوشیدنی و (ب) ریسمان سنگین و جرمش m' باشد.

۵.۱۰ معادلات حرکت یک ماشین آتوود «مرکب‌ـمرکب» را تشکیل دهید که شامل یک ماشین آتوود (با جرمهای $m_۱$ و $m_۲$) باشد که ریسمان سبکی با عبور از روی قرقره به ماشین آتوود دیگری به جرمهای $m_۳$ و $m_۴$ متصل می‌شود. از جرم تمام قرقره‌ها چشم بپوشید. شتاب را برای حالتهای $m_۱ = m$، $m_۲ = ۴m$، $m_۳ = ۲m$، و $m_۴ = m$ به‌دست آورید.

۶.۱۰ یک گوی به جرم m روی گوه‌ای متحرک به جرم M به پایین می‌غلتد. زاویهٔ گوه θ است، و می‌تواند آزادانه بر سطح صاف افقی بلغزد. سطح تماس بین گلوله و گوه کاملاً ناصاف است. شتاب گوه را پیدا کنید.

۷.۱۰ ذره‌ای بر سطح شیبدار صافی به زاویهٔ شیب θ، که با آهنگ ثابت ω افزایش می‌یابد، می‌لغزد. اگر در لحظهٔ $t = ۰$، که ذره از حال سکون شروع به حرکت می‌کند، داشته باشیم $\theta = ۰$، حرکت بعدی ذره را به‌دست آورید.

۸.۱۰ نشان دهید روش لاگرانژ خودبه‌خود معادلات صحیح حرکت را برای یک ذرهٔ متحرک در صفحه در دستگاه مختصات چرخان Oxy به‌دست می‌دهد. (راهنمایی: $T = \frac{۱}{۲}m\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}$، که $\mathbf{v} = \mathbf{i}(\dot{x} - \omega y) + \mathbf{j}(\dot{y} + \omega x)$، و $F_x = -\partial V/\partial x$، $F_y = -\partial V/\partial y$.)

۹.۱۰ مسئلهٔ ۸.۱۰ را برای حرکت در سه بعد تکرار کنید.

۱۰.۱۰ معادلات دیفرانسیل حرکت «آونگ کشسان» را به‌دست آورید: این آونگ به ذره‌ای به جرم m با ریسمانی کشسان به ضریب سفتی K و به طول اولیهٔ $l_۰$ متصل است. فرض کنید حرکت در صفحهٔ قائم انجام می‌شود.

۱۱.۱۰ ذره‌ای در امتداد یک جوی چرخزاد صاف آزادانه حرکت می‌کند؛ سطح این چرخزاد در قالب این معادلات پارامتری بیان می‌شود

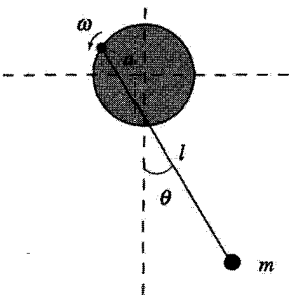
$$x = \frac{a}{۴}(۲\theta + \sin ۲\theta)$$

$$y = \frac{a}{۴}(۱ - \cos ۲\theta)$$

که $۰ \le \theta \le \pi$ و a ثابت است. تابع لاگرانژ و معادلهٔ حرکت ذره را بیابید.

۱۲.۱۰ آونگی ساده به طول l و جرم m از نقطه‌ای واقع بر محیط قرص بدون جرم نازکی به شعاع a آویزان است. نقطهٔ آویز با سرعت زاویه‌ای ثابت ω حول محور مرکزیش، مطابق شکل

م۱۲.۱۰، می‌چرخد. معادلهٔ حرکت جرم m را پیدا کنید.



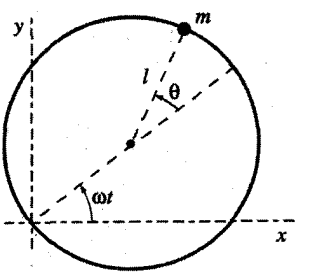
شکل م۱۲.۱۰

۱۳.۱۰ مُهرهٔ تسبیحی به جرم m مقید است روی حلقهٔ دایره‌ای نازکی به شعاع l بلغزد؛ این حلقه با سرعت زاویه‌ای ثابت ω در یک صفحهٔ افقی حول نقطه‌ای روی محیطش، مطابق شکل م۱۳.۱۰، می‌چرخد.

(**الف**) معادلات حرکت مهرهٔ تسبیح را بیابید.

(ب) نشان دهید مهرهٔ تسبیح مانند آونگ حول نقطهٔ واقع بر محیط به‌طور قطری مخالف نقطه‌ای که حول آن حلقه می‌چرخد، نوسان می‌کند.

(ج) «طول» مؤثر این «آونگ» چقدر است؟



شکل م۱۳.۱۰

۱۴.۱۰ نقطهٔ آویز آونگ ساده با شتاب ثابت a به بالا حرکت می‌کند، به‌طوری که ارتفاع نقطهٔ آویز $\frac{1}{2}at^2$ و سرعت قائم آن at است. معادلهٔ دیفرانسیل حرکت را برای نوسانهای کم دامنهٔ آونگ با روش لاگرانژ به‌دست آورید. نشان دهید زمان تناوب آونگ یادشده $2\pi[l/(g+a)]^{1/2}$ است که l طول آونگ را نمایش می‌دهد.

۱۵.۱۰ مسئلهٔ ۱۲.۸ را با بهره‌گیری از معادلات لاگرانژ حل کنید. (الف) نشان دهید شتاب گوی $\frac{5}{7}g$ است. (ب) کشش نخ را پیدا کنید.

۱۶.۱۰ یک فنرکشسان سنگین با ضریب سفتی و چگالی یکنواخت، قطعه‌جسمی به جرم m را نگه می‌دارد. اگر m' جرم فنر و k ضریب سفتی آن باشد، نشان دهید زمان تناوب نوسانهای قائم عبارت است از

$$2\pi\sqrt{\frac{m+(m'/3)}{k}}$$

این مسئله اثر جرم فنر بر زمان تناوب را نشان می‌دهد (راهنمایی: برای تشکیل معادلهٔ لاگرانژ این سیستم، فرض کنید که سرعت هر جزء فنر متناسب است با فاصلهٔ آن از نقطهٔ آویز.)

۱۷.۱۰ روش ضرایب لاگرانژ را به‌کار برید و کشش را در دو ریسمان ماشین آتوود مرکب مثال ۴.۵.۱۰ بیابید.

۱۸.۱۰ میلهٔ صافی به طول l در صفحه‌ای با سرعت زاویه‌ای ثابت ω حول محوری می‌چرخد که در یک سر میله و عمود بر صفحهٔ حرکت محکم شده است. یک مُهرهٔ تسبیح به جرم m ابتدا در سر ثابت میله قرارگرفته است؛ آن را اندکی هل می‌دهند تا سرعت اولیه‌اش در طول میله ωl باشد:

(الف) زمانی را که طول می‌کشد تا مهرهٔ تسبیح خود را به سر دیگر میله برساند، بیابید.

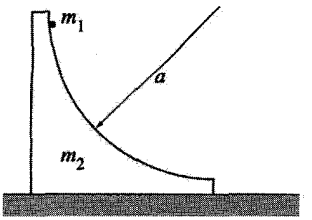
(ب) با بهره‌گیری از روش ضرایب لاگرانژ نیروی واکنش $\mathbf{F}$ را بیابید که میله بر مهرهٔ تسبیح وارد می‌آورد.

۱۹.۱۰ ذره‌ای به جرم m که بر بالای نیمکرهٔ صافی به شعاع a نشانده شده است، به‌طور بسیار جزئی مختل می‌شود. به‌طوری که شروع به لغزیدن به طرف پایین می‌کند. نیروی عمودی قیدی که از سوی نیمکره بر ذره وارد می‌آید و زاویه‌ای را نسبت به قائم بیابید که در آن ذره نیمکره را ترک می‌کند. از روش ضرایب لاگرانژ استفاده کنید.

۲۰.۱۰ ذره‌ای به جرم m_1 از روی سطح دایره‌ای صافی به شعاع انحنای a به پایین می‌لغزد که مربوط است به گوه‌ای به جرم m_2 که آزادانه به‌طور افقی روی سطح افقی صافی حرکت می‌کند که روی آن قرار دارد (شکل م ۲۰.۱۰).

(الف) معادلات حرکت را برای هر جرم پیدا کنید.

(ب) نیروی عمودی قیدی را که به وسیلهٔ گوه بر ذره وارد می‌آید، پیدا کنید. از روش ضرایب لاگرانژ بهره گیرید.



شکل م۲۰.۱۰

۲۱.۱۰ (الف) معادلات دیفرانسیل عمومی حرکت ذره در مختصات استوانه‌ای R، ϕ، و z را بیابید. از این رابطه بهره بگیرید

$$\begin{aligned} v^2 &= v_R^2 + v_\phi^2 + v_z^2 \\ &= \dot{R}^2 + R^2\dot{\phi}^2 + \dot{z}^2 \end{aligned}$$

(ب) معادلات دیفرانسیل عمومی حرکت ذره را در مختصات کروی؛ r، θ، و ϕ بیابید. از این رابطه استفاده کنید

$$\begin{aligned} v^2 &= v_r^2 + v_\theta^2 + v_\phi^2 \\ &= \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\dot{\phi}^2\sin^2\theta \end{aligned}$$

(**گوشزد:** نتایج خود را با نتیجهٔ به‌دست‌آمده، در فصل ۱، معادلات (۳.۱۲.۱) و (۱۴.۱۲.۱)، با قراردادن $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ و به‌دست‌آوردن مؤلفه‌ها، مقایسه کنید.)

۲۲.۱۰ معادلات دیفرانسیل حرکت در سه بعد را برای ذره در میدان مرکزی، با بهره‌گیری از مختصات کروی به‌دست آورید.

۲۳.۱۰ یک قالب صابون در داخل کاسهٔ صافی به شکل مخروط قائم وارونه، به زاویهٔ رأس 2α، می‌لغزد. محور مخروط قائم است. قالب صابون را به‌صورت یک ذره به جرم m در نظر بگیرید، معادلات دیفرانسیل حرکت را در مختصات کروی بنویسید که در آن: ثابت $= \alpha = \theta$، و مانند حالت آونگ کروی مثال ۲.۶.۱۰، نشان دهید که ذره با برخورداری از حرکت اولیه با $\dot{\phi}_0 \neq 0$، باید بین دو دایرهٔ افقی روی مخروط باقی بماند. (راهنمایی: نشان دهید $\dot{r}^2 = f(r)$، که در آن معادلهٔ $f(r) = 0$ دو ریشه دارد که نقاط برگشت حرکت در r را تعریف می‌کنند.) پتانسیل مؤثر در این مسئله چیست؟

۲۴.۱۰ در مسئلهٔ ۲۳.۱۰، مقدار $\dot{\phi}_0$ را چنان بیابید که ذره روی یک تک‌دایرهٔ افقی $r = r_0$ باقی بماند. زمان تناوب نوسانهای کوچک حول این دایره را نیز در صورتی بیابید که $\dot{\phi}_0$ با مقدار مطلوب کاملاً مساوی نباشد.

۲۵.۱۰ همان‌طور که در بخش ۵.۴ بیان شد، معادلهٔ دیفرانسیل حرکت ذره‌ای به جرم m و بار الکتریکی q که با سرعت $\mathbf{v}$ در میدان مغناطیسی ساکن $\mathbf{B}$ حرکت می‌کند، از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید

$$m\ddot{\mathbf{r}} = q(\mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

نشان دهید که تابع لاگرانژی

$$L = \frac{1}{2}mv^2 + q\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}$$

معادلهٔ صحیح حرکت را به‌دست می‌دهد که در آن $\mathbf{B} = \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A}$. کمیت $\mathbf{A}$ پتانسیل برداری نامیده می‌شود. (راهنمایی: در این مسئله لازم است فرمول کلی

$$df(x, y, z)/dt = \dot{x}\partial f/\partial x + \dot{y}\partial f/\partial y + \dot{z}\partial f/\partial z$$

به‌کار رود. بنابراین، برای جزء شامل $\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}$، داریم

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial(\mathbf{v} \cdot \mathbf{A})}{\partial \dot{x}}\right] = \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial \dot{x}}(\dot{x}A_x + \dot{y}A_y + \dot{z}A_z)\right] = \frac{d}{dt}(A_x)$$
$$= \dot{x}\frac{\partial A_x}{\partial x} + \dot{y}\frac{\partial A_x}{\partial y} + \dot{z}\frac{\partial A_x}{\partial z}$$

و روابط مشابه برای سایر مشتقها نیز برقرار است.)

۲۶.۱۰ تابع هامیلتونی را بنویسید و معادلات بنادی هامیلتون را برای حرکت یک پرتابه در سه بعد، در میدان گرانشی یکنواخت، بدون مقاومت هوا به‌دست آورید. نشان دهید که این معادلات به همان معادلات حرکت که در بخش ۳.۴ یافتیم، می‌انجامند.

۲۷.۱۰ معادلات بُنادی هامیلتون را در حالتهای زیر بیابید:

(الف) آونگ ساده

(ب) ماشین آتوود ساده

(ج) ذره‌ای که روی سطح شیبدار به پایین می‌لغزد

۲۸.۱۰ ذره‌ای به جرم m تحت‌تأثیر نیروی ربایشی مرکزی قرار دارد که در قالب رابطهٔ زیر بیان می‌شود

$$\mathbf{F}(r, t) = -\mathbf{e}_r \frac{k}{r^2}\exp^{-\beta t}$$

که k و β ثابتهای مثبت‌اند. t زمان و r فاصله تا مرکز نیروست. (الف) تابع هامیلتونی را برای ذره بیابید. (ب) هامیلتونی را با انرژی کل ذره مقایسه کنید. (ج) آیا انرژی ذره پایستار است؟ بحث کنید.

۲۹.۱۰ دو ذره به جرم m_1 و m_2، به رابطهٔ فنر بی‌جرمی به طول اولیهٔ l و ثابت فنری k، به هم متصل شده‌اند. این سیستم آزادانه بر بالای یک سطح افقی صاف که تکیه‌گاهش به‌شمار می‌آید می‌چرخد و ارتعاش می‌کند. (الف) هامیلتونی این سیستم را بیابید. (ب) معادلات هامیلتونی حرکت را پیدا کنید. (ج) کدام تکانهٔ تعمیم‌یافته، در صورت وجود، پایستارند؟

۳۰.۱۰ همان‌طور که می‌دانیم، انرژی جنبشی ذره در حرکت یک‌بعدی عبارت است از $\frac{1}{2}m\dot{x}^2$. اگر انرژی پتانسیل متناسب با x^2، مثلاً $\frac{1}{2}kx^2$ باشد، با به‌کاربردن مستقیم اصل وردشی هامیلتون، $\delta \int L dt = 0$، نشان دهید معادلهٔ نوسانگر هماهنگ ساده به‌دست می‌آید.

۳۱.۱۰ جرم نسبتی ذرهٔ متحرک در قالب این رابطه بیان می‌شود

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

که m_0 جرم سکون، v سرعت آن، و c سرعت نور است.

(الف) نشان دهید لاگرانژی زیر معادلهٔ صحیح حرکت را به‌دست می‌دهد،

$$L = -m_0 c^2 \sqrt{1 - v^2/c^2} - V$$

که در آن انرژی پتانسیل V وابسته به سرعت نیست.

(ب) تکانهٔ تعمیم‌یافتهٔ ذره و هامیلتونی آن را بیابید.

(ج) اگر انرژی جنبشی نسبیتی ذره عبارت باشد از

$$T = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

نشان دهید $H = T + V$.

(د) نشان دهید جز یک ثابت اضافی، رابطهٔ نسبیتی انرژی جنبشی ذراتی که به کندی حرکت می‌کنند، به رابطهٔ نیوتونی کلاسیکی تبدیل می‌شود.

مسائل کامپیوتری

ک۱.۱۰ فرض کنید آونگ کروی مطرح‌شده در بخش ۶.۱۰، با شرایط اولیه‌ای به شرح زیر، به حرکت در می‌آید: $\phi_0 = 0\,\text{rad}$، $\dot{\phi}_0 = 10.57\,\text{rad/s}$، $\theta_0 = \pi/4\,\text{rad}$، و $\dot{\theta}_0 = 0\,\text{rad/s}$. طول آونگ را ۰٫۲۸۴ متر بگیرید.

(الف) θ_1 و θ_2، حدود زاویه‌ای قطبی حرکت، را محاسبه کنید

$$\frac{1}{2}\dot{\theta}^2 = -U(\theta) + C = 0$$

(راهنمایی: معادله را به‌صورت عددی برای شرط $\dot{\theta}_0 = 0$ حل کنید.)

(ب) معادلات حرکت آونگ را به‌طور عددی حل کنید، و زمان تناوب حرکت θ را بیابید.

(ج) منحنی نمایش تغییرات θ را به‌صورت تابعی از زاویهٔ سمتی ϕ برحسب دورهٔ کامل سمتی ترسیم کنید.

(د) در طول یک دوره کامل θ، زاویهٔ حرکت تقدیمی $\Delta\phi$ را محاسبه کنید.

ک۲.۱۰ مهرهٔ تسبیحی از سکون روی منحنی صاف S در صفحهٔ xy از نقطهٔ $(0, 2)$ تا نقطهٔ $(0, \pi)$ می‌لغزد.

(الف) نشان دهید منحنی S که برای آن زمان کل حرکت کمینه است، چرخزادی است که در قالب معادلات پارامتری $x = \theta - \sin\theta$ و $y = 1 + \cos\theta$ توصیف می‌شود، که θ از 0 تا π تغییر می‌کند. (راهنمایی: زمان حرکت در قالب رابطهٔ $T = \int ds/v$ بیان می‌شود که ds عنصر دیفرانسیلی جابه‌جایی و v سرعت مهرهٔ تسبیح روی منحنی S است. ds را برحسب $y' = dy/dx$ و dx بیان کنید. تابع انتگرالده حاصل را به‌صورت تابع صریحی از y و y'، و در صورت امکان x، بیان کنید. انتگرال وقتی کمینه است که تابع انتگرالده در معادلهٔ لاگرانژ صدق کند. معادلهٔ دیفرانسیل منحنی‌ای را بیابید که نمایش تغییرات معادلهٔ لاگرانژ است و آن را حل کنید.)

(ب) فرض کنید منحنی S را بتوانیم به وسیلهٔ تابع درجهٔ دوم $y(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ تقریب‌بندی کنیم (این تابع باید شرایط مرزی مربوط به منحنی S را برآورده کند). این تابع (و مشتق آن) را در انتگرال بند (الف) برای زمان حرکت تسبیح وارد کنید. ثابتهای a_i را پیدا کنید که انتگرال را کمینه می‌کنند.

(ج) زمان کمینهٔ عبور را تخمین بزنید.

(د) تابع $y(x)$ را که در بند (الف) به‌دست آمد، همراه با حل دقیق که با معادلات نمایش‌دهندهٔ چرخزاد (از $x = 0$ تا $x = \pi$) داده شده است، ترسیم کنید. این جوابها تا چه اندازه با هم سازگارند؟

۱۱

دینامیک سیستمهای نوسانی

تحول امروزی علم فیزیک، نام هامیلتون را پیوسته بلندآوازه‌تر می‌کند. مقایسهٔ مشهور وی بین مکانیک و اپتیک عملاً مکانیک موجی را پیش‌بینی کرد، که چیزی فراتر از ایده‌های او نبود، مگر اینکه در مکانیک موجی ایده‌های یادشده باید جدیتر گرفته می‌شدند ــ اندکی جدیتر از آنچه خودش بتواند، به اعتبار دانش تجربی یک قرن پیش، عمیقتر به آنها بپردازد. مفهوم اساسی در کل نظریهٔ جدید فیزیک، «هامیلتونی» است. اگر بخواهید نظریهٔ جدید را در هر مسئلهٔ خاصی به‌کار ببرید، در شروع کارتان باید مسئله را «به شکل هامیلتونی» در آورید.

با این حساب، هامیلتون یکی از بزرگترین مردان علم به‌شمار می‌آید که جهان به خود دیده است.[1]

در فصلهای پیش سیستمهای ساده‌ای که می‌توانند حول پیکربندی تعادل نوسان کنند، از جمله آونگ ساده، ذره‌ای آویخته به یک سر فنر کشسان، آونگ فیزیکی، و مانند آنها را بررسی کردیم.

1. Erwin Schroedinger, *A Collection of Papers in Memory of Sir William Rowan Hamilton*, ed. D. E. Smith, *Scripta Mathematica Studies*, no. 2, N. Y., 1945.

هر یک از این حالتها فقط یک درجهٔ آزادی داشتند که یک تک‌بسامد نوسان شاخص آن به‌شمار می‌آمد. در اینجا سیستمهای پیچیده‌تر ــ سیستمهایی با چندین درجهٔ آزادی که شاخص آنها چندین بسامد نوسان مختلف است ــ در نظر می‌گیریم. هرگاه مختصات تعمیم‌یافته و روش لاگرانژ را برای یافتن معادلات حرکت برحسب آن مختصات به‌کار بگیریم، این تحلیل بسیار ساده خواهد شد.

۱.۱۱ انرژی پتانسیل و تعادل: پایداری

قبل از آنکه حرکت سیستمی را با چندین درجهٔ آزادی حول یک پیکربندی تعادل بررسی کنیم، ابتدا ببینیم منظورمان از اصطلاح تعادل چیست. در راهی برای ورود به موضوع، حرکت نوسانی جرم متصل به فنر حول موضع تعادلش را به خاطر می‌آوریم. این دستگاه یک سیستم پایستار است و نیروی بازگردانندهٔ آن از یک تابع انرژی پتانسیل استنتاج می‌شود

$$V(x) = \frac{۱}{۲}kx^۲ \qquad (۱.۱.۱۱)$$

$$F(x) = -\frac{dV(x)}{dx} = -kx \qquad (۲.۱.۱۱)$$

موضع تعادل نوسانگر در $x = ۰$ واقع است، مکانی که نیروی بازگرداننده صفر می‌شود یا مشتق تابع انرژی پتانسیل صفر است. اگر نوسانگر ابتدا در $x = ۰$ ساکن می‌بود، بایست در آنجا به حال سکون باقی می‌ماند.

حال حرکت آونگ ساده‌ای به طول r را در نظر می‌گیریم که مقید به تاب‌خوردن در صفحهٔ قائم باشد (شکل ۱.۲.۱۰). مطابق بحث بخش ۲.۱۰، فرض می‌کنیم مکانش با مختصهٔ تعمیم‌یافتهٔ θ، زاویه‌ای که آونگ با قائم می‌سازد، توصیف شود. انرژی پتانسیل در $\theta = ۰$ را صفر می‌گیریم، تابع انرژی پتانسیل و «نیروی» بازگردانندهٔ مشتق از آن، عبارت است از

$$V = mgr(۱ - \cos\theta) \qquad (۳.۱.۱۱)$$

$$N_\theta = -\frac{\partial V}{\partial \theta} = -mg(r\sin\theta) = -mgx \qquad (۴.۱.۱۱)$$

که x جابه‌جایی افقی وزنهٔ آونگ نسبت به قائم است. مختصهٔ تعمیم‌یافتهٔ آونگ متغیری زاویه‌ای است، و نیروی بازگرداننده در واقع گشتاوری بازگرداننده، N_θ، است. وقتی گشتاور بازگرداننده صفر است، آونگ در موضع تعادلش قرار دارد. در هر یک از این دو حالت، اعم از اینکه انرژی پتانسیل تابعی از مختصهٔ مکانی یا زاویه‌ای باشد، تعادل مربوط به یک پیکربندی است که در آن مشتق تابع انرژی پتانسیل صفر می‌شود.

اکنون حالت بالا را به سیستمی با n درجهٔ آزادی تعمیم می‌دهیم که مختصات تعمیم‌یافتهٔ q_1، q_2، و ...، q_n به‌طورکامل پیکربندی آن را مشخص کنند. qها می‌توانند آمیزه‌ای از متغیرهای مکانی و زاویه‌ای باشند. فرض می‌کنیم سیستم پایستار و تابع انرژی پتانسیل آن به‌تنهایی تابعی از qها باشد:

$$V = V(q_1, q_2, \ldots, q_n) \qquad (۵.۱.۱۱)$$

تمام نیروها و گشتاورهای وارد بر سیستم صفر می‌شوند وقتی

$$\frac{\partial V}{\partial q_k} = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, n) \qquad (۶.۱.۱۱)$$

این سیستم پیچیده‌تر وقتی در حال تعادل است که معادلهٔ (۶.۱.۱۱) برقرار باشد. این معادلات شرط لازم برای وضعیتی است که سیستم در حال سکون بماند در صورتی که در این پیکربندی از ابتدا در حال سکون باشد. اما، اگر سیستم نسبت به این پیکربندی دستخوش جابه‌جایی کوچکی شود، شاید به پیکربندی تعادل برگردد یا برنگردد. اگر سیستم همواره به بازگشت به وضعیت تعادل گرایش داشته باشد، با فرض اینکه جابه‌جایی به اندازهٔ کافی کم‌دامنه باشد، تعادل را پایدار گویند؛ در غیر این صورت، تعادل ناپایدار است. (هرگاه سیستم به حرکت به سوی وضعیت تعادل یا دورشدن از آن تمایلی نداشته باشد، تعادل را بی‌تفاوت نامند.)

یک گوی که (۱) در ته کاسه‌ای کروی، (۲) بر بالاترین نقطهٔ یک نیمکره، و (۳) بر صفحه‌ای افقی قرار داده‌شده، به‌ترتیب، نمونه‌هایی از تعادل پایدار، تعادل ناپایدار، و تعادل بی‌تفاوت را نشان می‌دهد.

به کمک شهود پی می‌بریم که انرژی پتانسیل باید برای برقراری تعادل پایدار در تمام موارد کمینه باشد. این استدلال را می‌توان از طریق ملاحظات انرژی نیز ارائه کرد. اگر سیستم پایستار باشد انرژی کل، $T + V$، ثابت است، از این‌رو، برای تغییری اندک نزدیک به وضعیت تعادل، $\Delta T = -\Delta V$. به این ترتیب، هرگاه V افزایش یابد T کاهش پیدا می‌کند؛ یعنی، با فرض کم‌دامنه‌بودن جابه‌جایی، حرکت به کندشدن و برگشتن به وضعیت تعادل گرایش دارد. اگر انرژی پتانسیل بیشینه باشد، عکس این موضوع صادق است؛ یعنی، هرگونه جابه‌جایی که سبب شود V کاهش یابد و T افزایش پذیرد، در این صورت، سیستم به دورشدن از وضعیت تعادل با آهنگی دائم‌فزاینده گرایش دارد.

تعمیم معیارهای تعادل پایدار

ابتدا سیستمی با یک درجهٔ آزادی در نظر می‌گیریم. فرض کنید تابع انرژی پتانسیل $V(q)$ را به‌صورت سری تیلور حول نقطهٔ $q = 0$ بسط دهیم، یعنی،

$$V(q) = V_0 + qV_0' + \frac{q^2}{2!}V_0'' + \frac{q^3}{3!}V_0''' + \ldots + \frac{q^n}{n!}V_0^{(n)} + \ldots \qquad (۷.۱.۱۱ \text{ الف})$$

نمادگذاری $V_0' = (dV/dq)_{q=0}$ و مانند آنها را به‌کار می‌بریم. حال اگر $q = 0$ یکی از وضعیتهای تعادل باشد، در این صورت $V_0' = 0$. این شرط جملهٔ خطی بسط را حذف می‌کند. به‌علاوه، جملهٔ V_0 ثابتی است که مقدارش به انتخاب دلخواه صفر انرژی پتانسیل بستگی دارد، بنابراین بدون اینکه هیچگونه لطمه‌ای به کلیت موضوع وارد آید، می‌توانیم قرار دهیم $V_0 = 0$. در نتیجه، عبارت مربوط به $V(q)$ ساده می‌شود به

$$V(q) = \frac{q^2}{2} V_0'' + \dots \qquad \text{(ب ۷.۱.۱۱)}$$

اگر V_0'' صفر نباشد، برای جابه‌جایی مختصر q نسبت به حالت تعادل، نیرو در حین این جابه‌جایی تقریباً خطی است

$$F(q) = -\frac{dV}{dq} = -qV_0'' \qquad \text{(ج ۷.۱.۱۱)}$$

اگر V_0'' مثبت باشد، این نیرو از نوع بازگردان یا پایدارساز است، در حالی که اگر V_0'' منفی باشد، نیروی یادشده پادبازگردان و تعادل ناپایدار است. اگر $V_0'' = 0$، در این صورت، باید اولین جملهٔ ناصفر در بسط را بررسی کنیم. اگر این جمله از مرتبهٔ n زوج باشد، در این صورت، بسته به اینکه مشتق $V_0^{(n)} = (d^n V/dq^n)_{q=0}$ مثبت یا منفی باشد، تعادل، به‌ترتیب، پایدار یا ناپایدار است. اگر مرتبهٔ مشتق اول ناصفر از مرتبهٔ n فرد باشد، بدون توجه به علامت مشتق، تعادل همواره ناپایدار است؛ این حالت با وضعیت نقطهٔ C در شکل ۱.۱.۱۱ متناظر است. واضح است که اگر تمام مشتقات صفر شوند، در این صورت، تابع انرژی پتانسیل ثابت، و تعادل بی‌تفاوت خواهد بود.

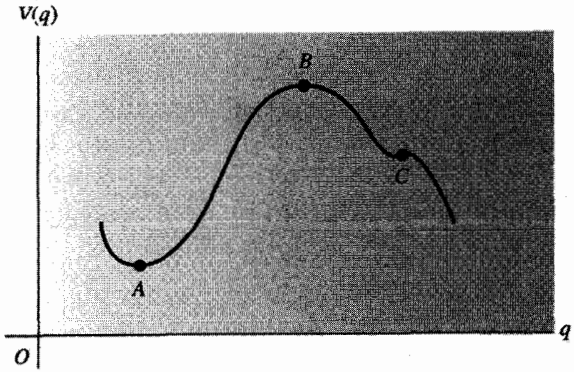
به همین ترتیب، در حالتی که سیستم چند درجهٔ آزادی دارد، اگر پیکربندی تعادل وجود داشته باشد، می‌توانیم تبدیلی خطی چنان انجام دهیم که $q_1 = q_2 = \dots = q_n = 0$ پیکربندی تعادل را تشکیل دهد. پس، تابع انرژی پتانسیل را می‌توان از این قرار بسط داد

$$V(q_1, q_2, \dots, q_n) = \frac{1}{2}(K_{11}q_1^2 + 2K_{12}q_1q_2 + K_{22}q_2^2 + \dots) \qquad \text{(الف ۸.۱.۱۱)}$$

که در آن

$$K_{11} = \left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_1^2}\right)_{q_1=q_2=\dots=q_n=0} \qquad \text{(ب ۸.۱.۱۱)}$$

$$K_{12} = \left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_1 \partial q_2}\right)_{q_1=q_2=\dots=q_n=0}$$



شکل ۱.۱.۱۱ نمودار تابع انرژی پتانسیل یک بعدی. نقطهٔ A یکی از حالتهای تعادل پایدار است. نقاط B و C ناپایدارند.

و به همین ترتیب. به دلخواه قرار داده‌ایم $V(۰,۰,\ldots,۰) = ۰$. جمله‌های خطی در این بسط غایب‌اند زیرا بسط حول یک پیکربندی تعادل صورت می‌گیرد.

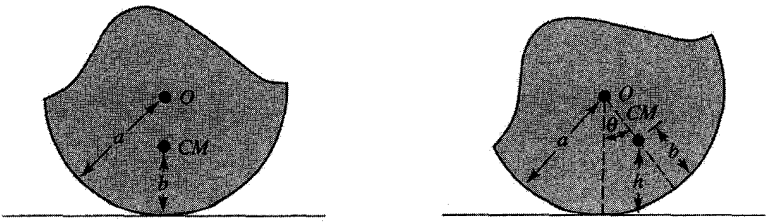
عبارت داخل پرانتز در معادلهٔ (۸.۱.۱۱ الف) را شکل درجهٔ دوم می‌گویند. اگر این شکل درجهٔ دوم معین مثبت باشد،[۱] یعنی به‌ازای تمام مقادیر q صفر یا مثبت باشد، در این صورت، پیکربندی تعادل $q_۱ = q_۲ = \ldots = q_n = ۰$ پایدار است.

مثال ۱.۱.۱۱ پایداری صندلیهای ننویی، مدادهایی که بر نوکشان می‌ایستند، و مانند آنها

تعادل جسمی را با پایه‌ای گرد (کروی یا استوانه‌ای) واقع بر صفحه‌ای افقی بررسی می‌کنیم. شعاع انحنای پایهٔ جسم را a می‌گیریم و، مطابق شکل ۲.۱.۱۱ (الف)، فرض می‌کنیم مرکز جرمش، CM، تا نقطهٔ اولیهٔ تماس به اندازهٔ b فاصله داشته باشد. در شکل ۲.۱.۱۱ (ب)، جسم بعد از جابه‌جایی از وضعیت اولیه نشان داده شده است. طبق این شکل، θ زاویهٔ بین امتداد قائم و خط OCM (O مرکز انحنا) است. اگر h فاصلهٔ مرکز جرم تا صفحهٔ افقی باشد، انرژی پتانسیل از این قرار به‌دست می‌آید

۱. شرط لازم و کافی برای اینکه شکل درجهٔ دوم در معادلهٔ (۸.۱.۱۱ الف) مثبت باشد، عبارت است از

$$K_{۱۱} > ۰ \qquad \begin{vmatrix} K_{۱۱} & K_{۱۲} \\ K_{۲۱} & K_{۲۲} \end{vmatrix} > ۰ \qquad \text{و به همین ترتیب} \quad \begin{vmatrix} K_{۱۱} & K_{۱۲} & K_{۱۳} \\ K_{۲۱} & K_{۲۲} & K_{۲۳} \\ K_{۳۱} & K_{۳۲} & K_{۳۳} \end{vmatrix} > ۰$$



شکل ۲.۱.۱۱ مختصات لازم برای تحلیل پایداری جسم تەگرد.

$$V = mgh = mg[a - (a - b)\cos\theta]$$

که m جرم جسم است. داریم

$$V' = \frac{dV}{d\theta} = mg(a - b)\sin\theta$$

که به‌ازای $\theta = ۰$، می‌رسیم به

$$V'_۰ = ۰$$

بنابراین، $\theta = ۰$ وضعیت تعادل است. به‌علاوه، مشتق دوم عبارت است از

$$V'' = mg(a - b)\cos\theta$$

بنابراین، به‌ازای $\theta = ۰$

$$V''_۰ = mg(a - b)$$

از این‌رو، به‌ازای $a > b$ یعنی اگر مرکز جرم در زیر مرکز انحنا واقع باشد، تعادل پایدار است. اگر $a < b$، مشتق دوم منفی و تعادل ناپایدار است، نظیر مدادی که به‌طور قائم روی نوکش ایستاده باشد. اگر $a = b$، تابع انرژی پتانسیل ثابت و تعادل بی‌تفاوت است. در حالت اخیر، مرکز جرم به مرکز انحنای منحنی منطبق است.

۲.۱۱ نوسان سیستمی با یک درجهٔ آزادی حول وضعیت تعادل

اگر سیستمی یک درجهٔ آزادی داشته باشد، انرژی جنبشی را می‌توان از این قرار بیان کرد

$$T = \frac{۱}{۲}M\dot{q}^۲ \qquad (۱.۲.۱۱)$$

که ضریب M ممکن است ثابت یا تابعی از مختصهٔ تعمیم‌یافتهٔ q باشد. در هر حالت، اگر $q = ۰$ وضعیت تعادل باشد، q را به قدرکافی کوچک در نظر می‌گیریم تا عبارت ثابت$= M(۰)$ $M = M$، تقریب قابل قبولی شود. از عبارت مربوط به انرژی پتانسیل (معادلهٔ ۷.۱.۱۱ ب) می‌توانیم تابع لاگرانژ را به این قرار بنویسیم

$$L = T - V = \frac{۱}{۲}M\dot{q}^۲ - \frac{۱}{۲}V_۰''q^۲ \qquad (۲.۲.۱۱)$$

در این صورت، معادلهٔ لاگرانژ حرکت

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = ۰ \qquad (۳.۲.۱۱)$$

به این صورت در می‌آید:

$$M\ddot{q} + V_۰''q = ۰ \qquad (۴.۲.۱۱)$$

به این ترتیب، اگر $q = ۰$ وضعیت تعادل پایدار باشد، یعنی اگر $V_۰'' > ۰$، در این صورت، دستگاه حول وضعیت تعادل با بسامد زاویه‌ای مشروح در زیر، نوسان هماهنگ اجرا خواهد کرد

$$\omega = \sqrt{\frac{V_۰''}{M}} \qquad (۵.۲.۱۱)$$

مثال ۱.۲.۱۱

حرکت جسم تەگردی که در مثال ۱.۱.۱۱ (شکل ۲.۱.۱۱) دربارهٔ آن بحث کردیم، در نظر می‌گیریم. اگر سطح تماس کاملاً ناصاف باشد، غلتش خالص داریم، و سرعت مرکز جرم به‌ازای مقادیر کوچک θ تقریباً عبارت خواهد بود از $b\dot{\theta}$. بنابراین، انرژی جنبشی، T، عبارت است از

$$T = \frac{۱}{۲}m(b\dot{\theta})^۲ + \frac{۱}{۲}I_{cm}\dot{\theta}^۲$$

که I_{cm} گشتاور لختی حول مرکز جرم است. نیز، می‌توانیم تابع انرژی پتانسیل V را به این صورت بیان کنیم:

$$\begin{aligned} V(\theta) &= mg[a - (a-b)\cos\theta] \\ &= mg\left[a - (a-b)\left(۱ - \frac{\theta^۲}{۲!} + \frac{\theta^۴}{۲!} - \dots\right)\right] \\ &= \frac{۱}{۲}mg(a-b)\theta^۲ + \text{ثابت} + \text{جملات بالاتر} \end{aligned}$$

پس، می‌توان نوشت

$$L = \frac{1}{2}(mb^2 + I_{cm})\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}mg(a-b)\theta^2$$

که در آن از ثابتها و جمله‌های مرتبه‌های بالاتر چشم پوشیده‌ایم. این عبارت را با معادلهٔ (۲.۲.۱۱) مقایسه می‌کنیم،

$$M = mb^2 + I_{cm}$$
$$V_0'' = mg(a-b)$$

بنابراین، حرکت حول نقطهٔ تعادل $\theta = 0$ با بسامد زاویه‌ای زیر، تقریباً هماهنگ است

$$\omega = \sqrt{\frac{mg(a-b)}{mb^2 + I_{cm}}}$$

مثال ۲.۲.۱۱ پایداری وضعیت و نوسان ماهوارهٔ مداری

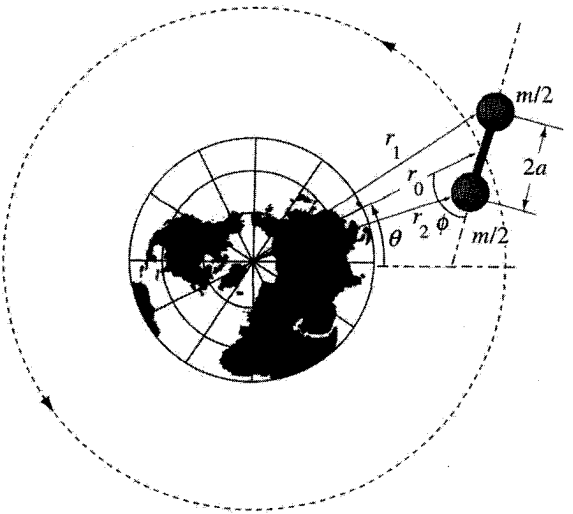
در این مثال حرکت نوسانی ماهواره‌ای ناکروی را تحلیل می‌کنیم که در مدار دایره‌ای حرکت می‌کند. برای سادگی، فرض می‌کنیم این ماهواره دَمبلی و متشکل از دو کرهٔ کوچک، هر یک به جرم $m/2$، باشد که میلهٔ سبکی به طول $2a$ آنها را به‌هم متصل کرده است (شکل ۱.۲.۱۱). مختصات قطبی r و θ مرکز جرم ماهواره را مشخص می‌کنند، و زاویهٔ ϕ «وضعیت» محور ماهواره را نسبت به بردار شعاعی $\mathbf{r}_0$ تعیین می‌کند. دو کرهٔ انتهایی را به‌صورت دو ذره در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم حرکت در یک تک صفحه، صفحهٔ مدار، صورت گیرد. در مدار دایره‌ای داریم: ثابت$= r_0 = r$، و ثابت$= \dot{\theta} = \omega_0 = v_{cm}/r_0$.

مهمترین کمیتی که در این مثال محاسبه می‌شود، تابع انرژی پتانسیل ماهواره است. این انرژی از عبارت زیر به‌دست می‌آید

$$V = -\frac{GM_e m}{2}\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right)$$

که در آن M_e جرم زمین و r_1 و r_2، مطابق شکل، به‌ترتیب، فواصل دو کرهٔ انتهایی از مرکز زمین به‌شمار می‌آیند. از قانون کسینوسها داریم

$$r_{1,2} = (r_0^2 + a^2 \pm 2r_0 a\cos\phi)^{1/2} = (r_0^2 + a^2)^{1/2}(1 \pm \epsilon\cos\phi)^{1/2}$$



شکل ۱.۲.۱۱ ماهوارهٔ دَمبلی‌شکل در مدار دایره‌ای.

که $\epsilon = ۲r_۰a/(r_۰^۲ + a^۲)$. حال $a \ll r_۰$؛ از این‌رو ϵ کمیت خیلی کوچکی است. بنابراین تابع انرژی پتانسیل را با استفاده از سری دو جمله‌ای $(۱+x)^{-۱/۲} = ۱ - \frac{۱}{۲}x + \frac{۳}{۸}x^۲ + \dots$ بسط می‌دهیم که در آن $x = \pm\epsilon\cos\phi$. بعد از جمع و حذف جمله‌ها، نتیجه عبارت خواهد بود از

$$V(\phi) = -\frac{GM_em}{r_۰}\left(۱ + \frac{۳a^۲}{۲r_۰^۲}\cos^۲\phi + \dots\right)$$

که در تمام جملات شامل کمیت $r_۰^۲ + a^۲$ از $a^۲$ در مقایسه با $r_۰^۲$ چشم پوشیده‌ایم.

با گرفتن مشتق اول و دوم عبارت بالا نسبت به ϕ، داریم

$$V'(\phi) = \frac{GM_em}{r_۰^۳}۳a^۲\sin\phi\cos\phi$$

$$V''(\phi) = \frac{GM_em}{r_۰^۳}۳a^۲\cos(۲\phi)$$

به این ترتیب، $\phi = ۰$ و $\phi = \pi/۲$ دو وضعیت تعادل‌اند: $V'(۰) = V'(\pi/۲) = ۰$. اولی پایدار است، چون $V''(۰) > ۰$. در این حالت جهت وضعی (وضعیت) ماهواره چنان است که محورش (خط واصل بین دو جرم) در امتداد بردار شعاعی $\mathbf{r}_۰$ قرار می‌گیرد. در وضعیت دوم،

تعادل ناپایدار است، زیرا $V''(\pi/2) < 0$؛ در این حالت، محور ماهواره بر بردار شعاعی عمود است.

حرکت نوسانی ماهواره حول وضعیت تعادل پایدارش به کمک معادلهٔ (۴.۲.۱۱) با $q = \phi$، $M = I_{cm} = ma^2$، و $V_0'' = 3a^2GM_em/r_0^3$ بیان می‌شود. بنابراین، بسامد زاویه‌ای نوسان عبارت است از

$$\omega = \sqrt{\frac{V_0''}{I_{cm}}} = \sqrt{\frac{3GM_e}{r_0^3}}$$

(توجه کنید که ω از m و a مستقل است.) حال، بسامد زاویه‌ای مدار دایره‌ای حول زمین از رابطهٔ $\omega_0^2 = v_{cm}^2/r_0^2 = GM_e/r_0^3$ به‌دست می‌آید. (مثال ۳.۵.۶) بنابراین، می‌توانیم بنویسیم

$$\omega = \omega_0\sqrt{3}$$

در مورد ماهواره‌های زمینگرد، زمان تناوب مداری عبارت است از $T_0 = 2\pi/\omega_0 = 23{,}934\text{h}$.[1] در نتیجه، زمان تناوب حرکت نوسانی ماهوارهٔ دمبلی یادشده در مدار زمینگرد عبارت است از

$$\frac{2\pi}{\omega} = \frac{T_0}{\sqrt{3}}\text{h} = 13{,}818\text{h}$$

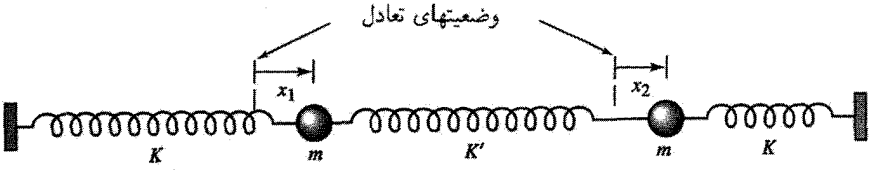
۳.۱۱ نوسانگرهای هماهنگ جفت‌شده: مختصات بهنجار (عادی)

قبل از بسط نظریهٔ کلی سیستمهای نوسانی با هر تعداد درجهٔ آزادی، یک مثال خاص ساده، یعنی سیستمی متشکل از دو نوسانگر هماهنگ را که به هم جفت شده‌اند، بررسی خواهیم کرد.

مدلی شامل ذرات متصل به فنرهای کشسان را به کار می‌بریم، گرچه از هر نوع نوسانگری می‌توانیم بهره گیریم. برای سادگی فرض می‌کنیم که نوسانگرها یکسان‌اند و حرکتشان در امتداد یک خط مستقیم صورت می‌گیرد (شکل ۱.۳.۱۱). مطابق شکل، جفت‌شدگی با فنری به ضریب سفتی K' نمایش داده می‌شود؛ سیستم دارای دو درجهٔ آزادی است. مختصات x_1 و x_2، جابه‌جایی ذرات از وضعیتهای تعادل مربوطه‌شان، را برای نمایاندن پیکربندی سیستم اختیار می‌کنیم.

پیش از پرداختن به توصیف ریاضی این سیستم، می‌خواهیم ببینیم دقیقاً چه نوع رفتاری را می‌توانیم انتظار داشته باشیم. باید حدس بزنیم که حرکت واقعی به‌طوری بحرانی به شرایط اولیهٔ

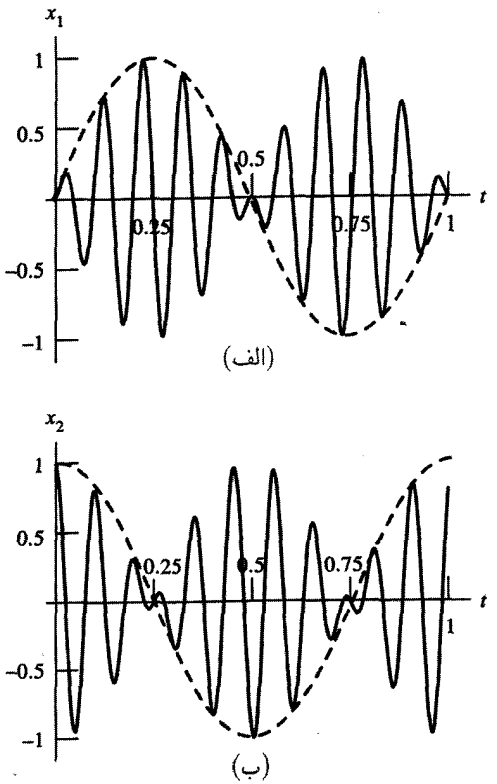
۱. روز نجومی، مطابق با یک چرخش کامل 360° زمین نسبت به ستاره‌ها، برابر است با ۲۳ ساعت و ۵۶ دقیقه و ۴٫۳ ثانیه، حدود ۴ دقیقه از روز نجومی متوسط کوتاهتر است.



شکل ۱.۳.۱۱ مدل دو نوسانگر هماهنگ جفت‌شده.

سیستم بستگی دارد، در صورتی که بسامد (یا بسامدهای) ارتعاشی نباید به شرایط اولیه بستگی داشته باشد. مثلاً فرض کنید جرمی را در موضع $x_1 = 0$ در نظر بگیریم و جرم دیگر را کمی به طرف راست، مثلاً به اندازهٔ $x_2 = 1$، بکشیم و بعد هر دو را از حال سکون رها کنیم. درست بعد از رهاشدن، m_2 تحت‌تأثیر نیروی بازگردانندهٔ ناشی از تراکم فنر سمت راست و کشیدگی در فنر میانی قرار می‌گیرد. گرچه m_1 در $x_1 = 0$ ساکن است، تحت‌تأثیر نیروی مربوط به کشیدگی فنر میانی قرار دارد. بنابراین، هر دو جرم شروع به حرکت می‌کنند؛ m_1 از $x_1 = 0$ دور و m_2 به $x_2 = 0$ نزدیک می‌شود. حرکت حاصل نسبتاً پیچیده به نظر می‌رسد، اما نکتهٔ قطعی این است که کلاً انرژی پایستار است. بنابراین، وقتی m_1، که ابتدا ساکن است، دور از $x_1 = 0$ حرکت می‌کند، انرژی خود را از m_2 دریافت می‌کند. با گذشت زمان می‌توانیم پیش‌بینی کنیم که m_1 سرانجام به چپ در $x_1 = -1$ می‌رسد و m_2 به مکان $x_2 = 0$ جابه‌جا می‌شود و هر دو به‌طور لحظه‌ای در این مکانها در حال سکون قرار می‌گیرند. این پیکربندی کاملاً با پیکربندی اولیه متقارن است، به این ترتیب که m_1 و m_2 انرژی خود را با هم عوض کرده‌اند. سیستم باید تکرار این حرکت را ادامه دهد و انرژی بین m_1 و m_2 از طریق فنر جفت‌کننده به پس و پیش جابه‌جا شود. در اینجا نکتهٔ مهم از این قرار است که x_1 و x_2 هرگز به‌طور همزمان صفر نمی‌شوند و وقتی m_1 و m_2 در آن پیکربندی باشند، فنر جفت‌کننده هرگز از حرکت باز نمی‌ایستد. بنابراین، دو جرم به تبادل انرژی با یکدیگر ادامه می‌دهند.

جنبهٔ مهم دوم این حرکت آن است که هر جرم با شیوهٔ چندبسامدی ارتعاش می‌کند. این را می‌توان با تحلیل حرکت تک بسامدی، خیلی آسان ملاحظه کرد. چنین حرکتی زمانی روی می‌دهد که شتاب (یا نیرو بر واحد جرم) جرم متناسب با منفی جابه‌جایی آن باشد. در این وضعیت، هر جرم تحت‌تأثیر دو نیرو قرار دارد؛ هر فنر متصل به جرم یک نیرو بر آن وارد می‌آورد. فنر میانی بر هر جرم یک نیرو وارد می‌آورد که با اختلاف در جابه‌جایی جرمها متناسب است. بنابراین، باید انتظار داشته باشیم که حرکت کلی هر جرم باید ترکیبی از دو بسامد متفاوت باشد و به‌زودی خواهیم دید که همین‌طور هم هست.



شکل ۲.۳.۱۱ جابه‌جایی دو نوسانگر هماهنگ جفت‌شده.

در شکل ۲.۳.۱۱ حرکت دو جرم توصیف‌شدهٔ قبلی را مشاهده می‌کنید. مقادیر ثابتهای فنر عبارت‌اند از $K = ۴$ و $K' = ۱$ (با یکای دلخواه)، از این‌رو این وضعیت، حالت جفت‌شدگی جزئی است. دامنهٔ نوسان $m_۱$ به آرامی شکل می‌گیرد و سپس همگام با میراشدن و شکل‌گیری دامنهٔ نوسان جرم $m_۲$، میرا می‌شود. منحنی نمایش تغییرات این حرکت در مدت یک زمان تناوب کامل ترسیم شده است. هر یک از این حرکتها مانند حالت «زنشهای» بین دو تک‌بسامد متفاوت با دامنهٔ یکسان دیده می‌شود. و این دقیقاً خصوصیت آنها را دارد.

پدیدهٔ زنشها وقتی پیش می‌آید که امواج (یا ارتعاشات) دو بسامد مختلف به یکدیگر افزوده می‌شوند. مثلاً، فرض کنیم $x_۱$ و $x_۲$ را بتوان با مجموع (یا اختلاف) دو حرکت هماهنگ ساده، هم دامنه، و هماهنگ نمایش داد که بسامدهایشان متفاوت است. مجموع حاصل با حاصلضرب سینوسها (یا کسینوسها)ی یک مجموع یا تفاضل بسامدها برابر است.

مثلاً، فرض کنید Q_1 و Q_2، بنا بر تعریف، عبارت باشند از

$$Q_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\omega_1 t \qquad Q_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\omega_2 t \tag{۱.۳.۱۱}$$

(ضریب $\frac{1}{\sqrt{2}}$ که در هر یک از تعاریف معادلهٔ (۱.۳.۱۱) گنجیده است صرفاً به منظور بهنجارش است). اکنون اگر Q_1 و Q_2 را با هم جمع کنیم (در اینجا نیز بهنجارشده با ضریب $\frac{1}{\sqrt{2}}$)، می‌رسیم به

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{2}}(Q_1+Q_2) &= \frac{1}{2}(\cos\omega_1 t+\cos\omega_2 t)\\ &= \cos\left[\frac{1}{2}(\omega_1+\omega_2)t\right]\cos\left[\frac{1}{2}(\omega_1-\omega_2)t\right]\\ &= x_2\end{aligned} \tag{۲.۳.۱۱ الف}$$

حاصل‌جمع به‌دست‌آمده با x_2 برابر، و در واقع تابعی است که در شکل ۲.۳.۱۱ (ب) رسم شده است. این جمع به‌درستی بهنجار شده است تا شرط $x_2(0) = 1$ را تأمین کند.

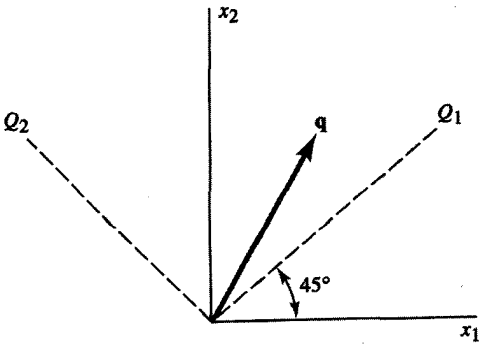
حال Q_2 را از Q_1 کم می‌کنیم

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{2}}(Q_1-Q_2) &= \frac{1}{2}(\cos\omega_1 t-\cos\omega_2 t)\\ &= \sin\left[\frac{1}{2}(\omega_1+\omega_2)t\right]\sin\left[\frac{1}{2}(\omega_1-\omega_2)t\right]\\ &= x_1\end{aligned} \tag{۲.۳.۱۱ ب}$$

حاصل تفریق مساوی x_1 و تابعی است که نمایش تغییرات آن را در شکل ۲.۳.۱۱ (الف) مشاهده می‌کنید. این حاصل تفریق شرط $x_1(0) = 0$ را تأمین می‌کند.

نکتهٔ جالب توجه در اینجا از این قرار است که، هر چند مختصات x_1 و x_2 در این نوسان ترکیب تبادل انرژی درگیرند، Q_1 و Q_2 در این امر دخالتی ندارند. این کمیتها فقط توابعی از تک بسامدهای ω_1 و ω_2 هستند. چون x_1 و x_2 به‌صورت جمع و تفریق Q_1 و Q_2 بیان می‌شوند، می‌توانیم آنها را در نمادگذاری ماتریسی از این قرار بنویسیم

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{pmatrix} = \mathbf{A}\mathbf{Q} \tag{۳.۳.۱۱ الف}$$



شکل ۳.۳.۱۱ برداری که مؤلفه‌هایش جابه‌جایی دو نوسانگر جفت‌شده را نمایش می‌دهند. مختصات Q_1 و Q_2 با چرخش مختصات x_1 و x_2 به اندازهٔ $45°$ به‌دست می‌آیند.

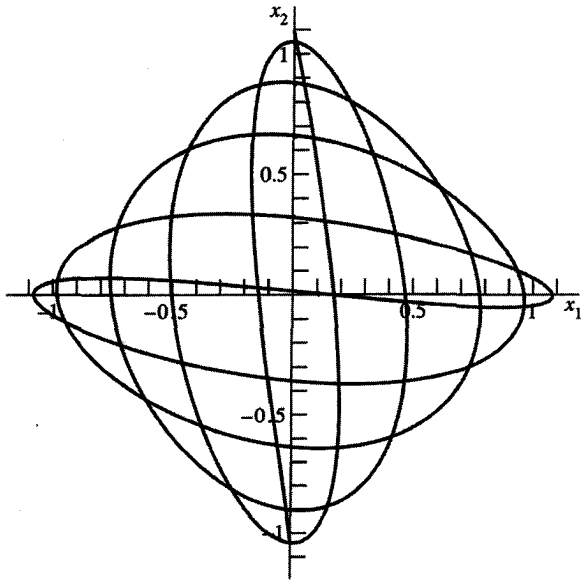
این رابطه را می‌توان برای دستیابی به Q_1 و Q_2 به‌صورت توابعی از x_1 و x_2 وارونه کرد

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{x} \qquad \text{(ب ۳.۳.۱۱)}$$

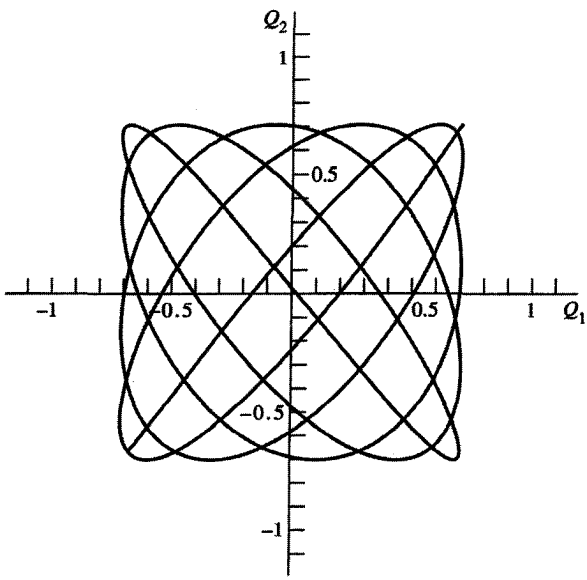
این معادلات ماتریسی با چرخشهای $\pm 45°$ دستگاه مختصات دوبعدی معادل‌اند. این گزاره بیانگر آن است که می‌توانیم x_1 و x_2 یا Q_1 و Q_2 را مؤلفه‌های یک تک‌بردار $\mathbf{q}$ تعبیر کنیم که نقطهٔ انتهایی آن پیکربندی لحظه‌ای نوسانگرهای جفت‌شده در هر یک از دو دستگاه مختصات را به نمایش می‌گذارد. نمایش هندسی برداری چون $\mathbf{q}$ را در شکل ۳.۳.۱۱ مشاهده می‌کنید.

با سپری‌شدن زمان، نقطهٔ انتهایی $\mathbf{q}$ مسیری در فضای پیکربندی ترسیم می‌کند که مؤلفه‌هایش با $x_1(t)$ و $x_2(t)$، یعنی جوابهای معادلات حرکت، نشان داده می‌شوند. آنچه در شکل ۴.۳.۱۱ الف مشاهده می‌کنید، نمودار این مسیر برای نوسانگر جفت شده است. این مسیر در جعبه (محفظه)ای محدود می‌شود که مرزهای آن خطوطی‌اند که با محورهای مختصات زاویهٔ $45°$ می‌سازند. چون دستگاه مختصات Q_i صرفاً از چرخش دستگاه مختصات x_i به اندازهٔ $45°$ به‌دست می‌آیند، نمودار مشابهی که در دستگاه Q_i انجام می‌شود باید مسیری محدود در جعبه‌ای را ترسیم کند که مرزهایش با محورهای مختصات موازی باشند. نمودار ترسیم‌شده در شکل ۴.۳.۱۱ ب این حالت را نمایش می‌دهد. این امر که مرزها در دستگاه مختصات Q_i به موازات محورها قرار می‌گیرند حاکی است از اینکه ممکن است مبانی مناسبتری برای بیان معادلات حرکت این سیستم باشند.

اگر از خود بپرسیم که آیا سیستم می‌تواند به نحوی شروع به حرکت کند که دو جرم با یک تک‌بسامد ثابت ارتعاش کنند و هیچ‌گونه تبادل انرژی صورت نگیرد، یا خیر، معنای مختصات



(الف)



(ب)

شکل ۴.۳.۱۱ حرکت دو نوسانگر جفت‌شده در فضای پیکربندی. محورهای مختصات عبارت‌اند از (الف) جابه‌جایی x_1 و x_2 هر جرم از حالت تعادل. (ب) مجموع خطی $Q_1 = (x_1 + x_2)/\sqrt{2}$ و $Q_2 = (x_2 - x_1)/\sqrt{2}$.

$(Q_۱, Q_۲)$ روشن می‌شود. دو راه برای انجام این کار وجود دارد. اولاً، فرض کنید جرمها را بعد از جابه‌جایی به مقدار مساوی از وضعیت تعادلشان رها کنیم. شرایط اولیهٔ حرکت حاصل عبارت‌اند از

$$x_۱(۰) = x_۲(۰) = ۱ \qquad \dot{x}_۱(۰) = \dot{x}_۲(۰) = ۰ \tag{۴.۳.۱۱}$$

اگر معادلات (۳.۳.۱۱ الف و ب) را بررسی کنیم، می‌بینیم که $Q_۲(۰) = ۰$ ولی $Q_۱(۰) = \sqrt{۲}$. در خلال جابه‌جایی اولیه، فنر میانی نه کشیده و نه متراکم می‌شود و از این‌رو هیچ نیرویی برای جداکردن یا کشیدن جرمها از هم یا به سوی یکدیگر بیشتر از فاصله‌ای که قبلاً داشته‌اند، تأثیر خود را نمی‌گذارد. افزون بر این، دو جرم باید همزمان، در یک جهت و با سرعتهای مساوی حرکت کنند و به وضعیت تعادلشان بازگردند، زیرا نیروی بازگردانندهٔ وارد بر هر جسم یکسان است. اما اگر فنر میانی همواره در حالت شُل از حرکت نوسانی باز ایستد، هیچ انرژی‌ای نمی‌تواند بین دو جرم رفت و آمد کند. به این ترتیب، در زمانهای بعدی داریم

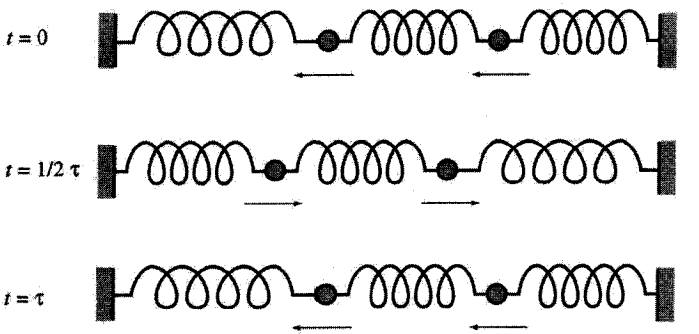
$$\begin{aligned} x_۱(t) &= x_۲(t) = \cos \omega_۱ t \\ Q_۱(t) &= \sqrt{۲} \cos \omega_۱ t \\ Q_۲(t) &= ۰ \end{aligned} \tag{۵.۳.۱۱}$$

این دو جرم به پس و پیش ارتعاش می‌کنند گویی نوسانگرهای هماهنگ سادهٔ کاملاً مستقل با بسامد همسان $\omega_۱ = \sqrt{K/m}$، هستند. همین که سیستم در این مد نوسان قرار داده شد، به همان وضع باقی می‌ماند. سیستم یک مد بهنجار نوسان را اجرا می‌کند که مد متقارن نامیده می‌شود و در شکلهای ۵.۳.۱۱ (الف) تا (د) تصویرش را مشاهده می‌کنید.

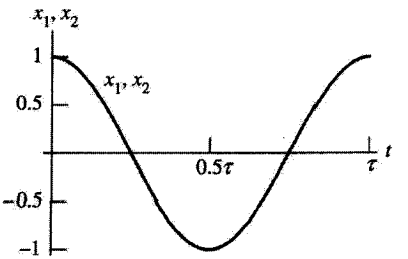
راه دوم برای اینکه این دو جرم با یک تک‌بسامد به نوسان درآیند، از این قرار است که ابتدا آنها را به اندازه‌ای یکسان و در خلاف جهت یکدیگر، از وضعیت تعادلشان جابه‌جا و آنگاه از حال سکون رهایشان کنیم. به این ترتیب

$$x_۲(۰) = -x_۱(۰) = ۱ \qquad \dot{x}_۱(۰) = \dot{x}_۲(۰) = ۰ \tag{۶.۳.۱۱}$$

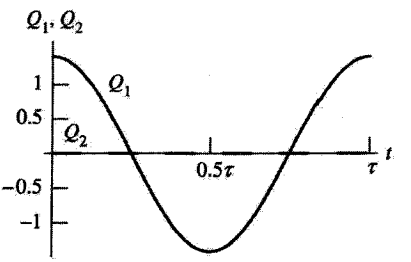
حال اگر معادلات (۳.۳.۱۱ الف و ب) را بررسی کنیم، می‌بینیم که $Q_۱(۰) = ۰$ ولی $Q_۲(۰) = \sqrt{۲}$. اما، این‌بار فنر میانی متصل‌کنندهٔ دو جرم ابتدا کشیده می‌شود. اما اگر به نقطهٔ وسط فنر متصل‌کننده به‌دقت توجه کنید، می‌بینید که آن نقطه حرکت نمی‌کند. فنر میانی با نیروهای مساوی و در خلاف جهت یکدیگر کشیده می‌شود. وقتی این دو جرم رها می‌شوند، نقطهٔ وسطی حرکت نمی‌کند مگر اینکه یکی از جرمها نسبت به جرم دیگر به آن نقطه نزدیکتر شود، و عدم توازنی



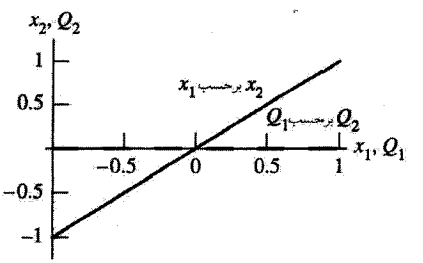
(الف)



(ب)



(ج)



(د)

شکل ۵.۳.۱۱ (الف) نمودار نوسان جفت‌شده در مد متقارن. (ب) جابه‌جاییها برحسب زمان. (ج) مختصات بهنجار برحسب زمان. (د) مسیر در فضای پیکربندی: مختصات تعمیم‌یافته و مختصات بهنجار.

را در این دو نیروی مختلف‌الجهت برقرار کند. به علت تقارن، این وضعیت نمی‌تواند پیش بیاید. در اینجا نیز، نیروهای بازگرداننده که بر هر جرم وارد می‌آیند مساوی و در خلاف جهت یکدیگرند و به همین طریق هم در سراسر حرکت باقی می‌مانند. نقطهٔ وسطی نقطهٔ گره ارتعاش است و هیچ انرژی‌ای نمی‌تواند از طریق این نقطه از جرمی به جرم دیگر عبور کند.

تا آنجا که به هر یک از این جرمها مربوط می‌شود، می‌توانیم فنر میانی را به دو نصفهٔ مساوی ببریم و سر آزادشدهٔ آنها را به مرزی ثابت و بی‌حرکت، دقیقاً مانند اتصال مربوط به سر فنرها، متصل کنیم. ثابت فنر مؤثر حاصل برای هر جرم عبارت است از $K + 2K'$ (بررسی درستی این ادعا را برای تمرین به دانشجو وامی‌گذاریم). راه دیگر بررسی مسئله از این قرار است که به این نکته توجه کنیم وقتی دو جرم از وضعیت تعادل خود عبور می‌کنند، فنر میانی نه کشیده است و نه متراکم. بنابراین، هیچ انرژی‌ای منتقل نمی‌شود و هر جرم با اختلاف فاز ۱۸۰° نسبت به جرم دیگر در تک‌بسامد $\omega_2 = \sqrt{(K + 2K')/m}$ به ارتعاش در می‌آید. این مد بهنجار نوسان است که مد پادمتقارن، یا به دلایل واضح، «مد تنفسی» نامیده می‌شود. همین که سیستم در این مد قرار داده شود، در آن باقی می‌ماند. حرکتش در قالب معادلات زیر توصیف می‌شود

$$\begin{aligned} x_2(t) &= -x_1(t) = \cos \omega_2 t \\ Q_1(t) &= 0 \\ Q_2(t) &= \sqrt{2} \cos \omega_2 t \end{aligned} \qquad (۷.۳.۱۱)$$

و منحنی نمایش تغییرات آن را در شکل ۶.۳.۱۱ (الف) تا (د) مشاهده می‌کنید.

مختصات Q_i را مختصات بهنجار می‌گویند و اگر نوسانگر جفت‌شده چنان ارتعاش کند که بردار فضای پیکربندی آن، $\mathbf{q}$، دارای مؤلفه‌های (Q_1, Q_2) باشد که به این قرار:

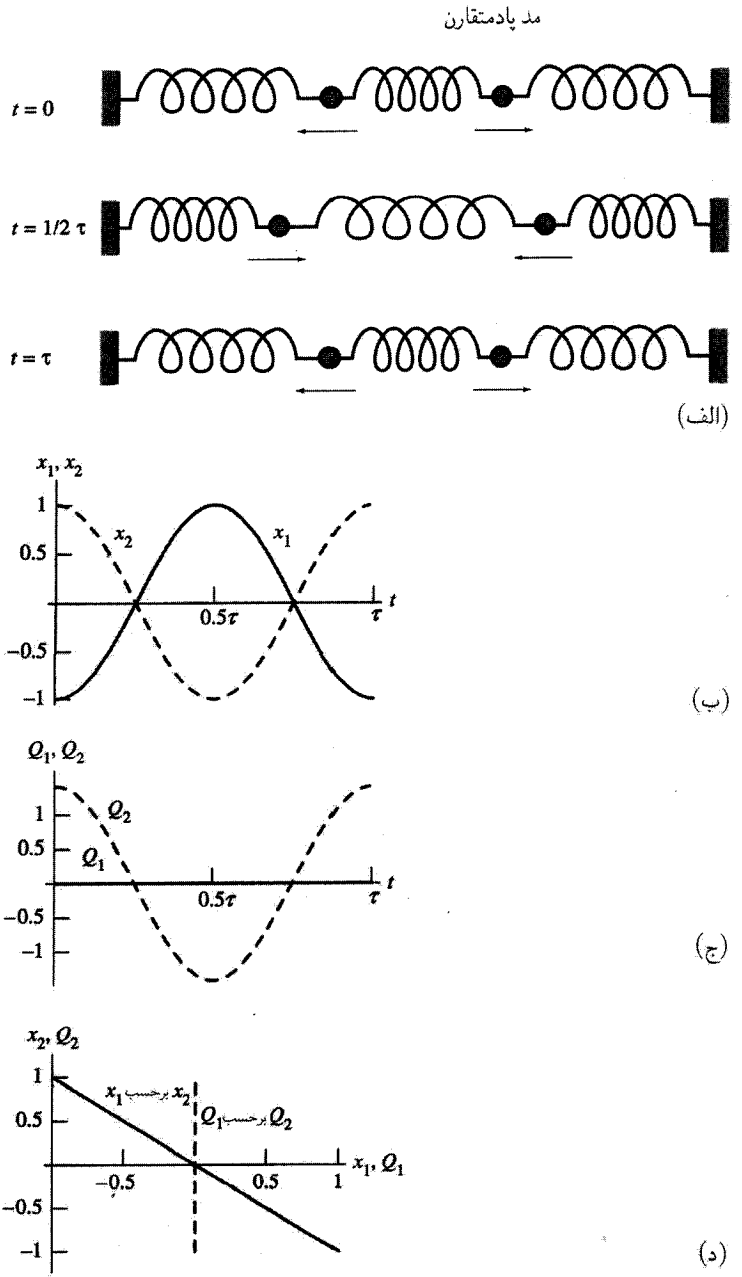
$$q = \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} B_2 \cos(\omega_2 t - \delta_2) \quad \text{یا} \quad q = \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} B_1 \cos(\omega_1 t - \delta_1)$$

(۸.۳.۱۱ الف)

یا معادل آن، مؤلفه‌های (x_1, x_2)، به‌صورت زیر بیان شوند:

$$q = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} A_2 \cos(\omega_2 t - \delta_2) \quad \text{یا} \quad q = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} A_1 \cos(\omega_1 t - \delta_1)$$

(۸.۳.۱۱ ب)



شکل ۶.۳.۱۱ (الف) نمودار نوسان جفت‌شده در مُد پادمتقارن. (ب) جابه‌جاییها برحسب زمان. (ج) مختصات بهنجار برحسب زمان. (د) مسیر در فضای پیکربندی؛ مختصات تعمیم‌یافته و مختصات بهنجار.

که A_i، B_i دامنه و δ_i زوایای فاز هستند و بستگی دارند به اینکه حرکت چگونه آغاز شده است، در این صورت، $\mathbf{q}$ با $\mathbf{Q}_1$ یا $\mathbf{Q}_2$ مساوی است و سیستم در یکی از مدهای بهنجار ممکن خود ارتعاش می‌کند (شکلهای ۵.۳.۱۱ (ج) و ۶.۳.۱۱ (ج)).

روش حل

حال به پشتوانهٔ بحث نوسانگر جفت‌شدهٔ شکل ۱.۳.۱۱، معادلات حرکت آن را حل می‌کنیم. لاگرانژی سیستم عبارت است از:

$$L = T - V = \frac{1}{2}m\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}_2^2 - \frac{1}{2}Kx_1^2 - \frac{1}{2}K'(x_2 - x_1)^2 - \frac{1}{2}Kx_2^2 \quad (۹.۳.۱۱)$$

در این صورت، معادلهٔ لاگرانژ به معادلات حرکت می‌انجامد

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_1 + (K + K')x_1 - K'x_2 &= 0 \\ m\ddot{x}_2 - K'x_1 + (K + K')x_2 &= 0 \end{aligned} \quad (۱۰.۳.۱۱ \text{ الف})$$

که می‌توانیم در نمادگذاری ماتریسی آن را به این صورت بنویسیم

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = 0 \quad (۱۰.۳.۱۱ \text{ ب})$$

که $\mathbf{q}$ برداری است که مؤلفه‌های (x_1, x_2) آن پیکربندی، یا حالت، سیستم را به نمایش می‌گذارند. معادلهٔ ماتریسی به شکل مؤلفه‌ای عبارت است از

$$\begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} K + K' & -K' \\ -K' & K + K' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 \quad (۱۰.۳.۱۱ \text{ ج})$$

مطابق آنچه پیش‌بینی کردیم، معادلات حرکت حاصل با هم جفت می‌شوند، که از جملات ضربی در معادلهٔ (۱۰.۳.۱۱ الف)، یا عناصر ناصفر و غیرقطری در «ماتریس $\mathbf{K}$» معادلهٔ (۱۰.۳.۱۱ ج)، آشکار است.

از حل کاملاً عمومی باید بردار حالت $\mathbf{q}$ که مؤلفه‌های (x_1, x_2) آن توابعی از بسامدهای ω_1 و ω_2 هستند، به‌دست آید. اما، می‌دانیم که می‌توانیم برای یافتن جوابهای تک بسامدی خاص که مطابق با مدهای بهنجار نوسان هستند، نیز جستجو کنیم. در این حالت، بردار $\mathbf{q}$ باید یکی از بردارهای مد بهنجار $\mathbf{Q}_i$ باشد که جهت آن متوجه یکی از محورهای مختصات (Q_1, Q_2) است. اما، همین که جوابهای بردارهای مد بهنجار را یافتیم، یک جواب برای بردار حالت کلی

$\mathbf{q}(x_1, x_2)$ می‌تواند به‌صورت ترکیبی خطی از دو بردار مُد بهنجار، دقیقاً مانند آنچه در قالب معادلات (۲.۳.۱۱ الف و ب) توصیف شد، حاصل شود. سپس، با جستجو برای یافتن جوابهایی به شکل

$$\mathbf{q} = \mathbf{a}\cos(\omega t - \delta) \qquad \text{(۱۱.۳.۱۱ الف)}$$

اقدام می‌کنیم. بنابراین، مؤلفه‌های آن عبارت‌اند از

$$x_1 = a_1\cos(\omega t - \delta) \qquad x_2 = a_2\cos(\omega t - \delta) \qquad \text{(۱۱.۳.۱۱ ب)}$$

از این‌رو، مؤلفه‌ها دارای بسامدها و فازهای یکسان‌اند ولی دامنهٔ آنها متفاوت است. با گنجاندن جواب مفروض در معادلهٔ (۱۰.۳.۱۱ ب)، می‌رسیم به

$$\mathbf{Ka} = \omega^2\mathbf{Ma}$$

$$\begin{pmatrix} K+K' & -K' \\ -K' & K+K' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \omega^2\begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \qquad \text{(۱۲.۳.۱۱ الف)}$$

a_i (دامنه‌های نوسان مربوط به مختصات x_i) مؤلفه‌های بردار مستقل از زمان $\mathbf{a}$ هستند که در معادلهٔ (۱۲.۳.۱۱ الف) صدق می‌کنند. این بردار را ویژه‌بردار می‌گویند و ω^2 ویژه‌مقدار آن یا، در این حالت، ویژه‌بسامد (مجذورشدهٔ) آن است. روشی که با آن می‌توان ویژه‌بردارها و ویژه‌بسامدها را یافت از این قرار است که ماتریسهای $\mathbf{K}$ و $\mathbf{M}$ در معادلهٔ (۱۲.۳.۱۱ الف) همزمان قطری شوند.[۱] دربارهٔ چنین روشی بعداً بحث خواهیم کرد. ابتدا، روشی مستقیمتر را که عموماً کاربردی است ولی از شهود فیزیکی کمتری برخوردار است، ارائه می‌کنیم.

معادلهٔ (۱۲.۳.۱۱ الف) با دستگاهی از معادلات خطی همگن معادل است که به‌صورت زیر بیان می‌شوند:

$$\begin{pmatrix} K+K'-\omega^2 m & -K' \\ -K' & K+K'-\omega^2 m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = 0 \qquad \text{(۱۲.۳.۱۱ ب)}$$

۱. این مسئله معادل با قطری‌کردن ماتریس گشتاور لختی است که در بخش ۲.۹ درباره‌اش بحث کردیم. برای انجام این کار، خواننده می‌تواند به کتابهایی از این دست رجوع کند:

(1) J. Matthews and R. L. Walker, *Mathematical Methods of Physics*, W. A. Benjamin, New York (1970).

یا

(2) S. I. Grossman and W. R. Derrick, *Advanced Engineering Mathematics*, Harper-Collins Publ., New York (1988).

این معادلات جواب غیربدیهی (یعنی جوابهایی غیر از $a_1 = a_2 = 0$) دارند، اگر و فقط اگر

$$\det|\mathbf{K} - \omega^2\mathbf{M}| = 0 \qquad (۱۳.۳.۱۱ \text{ الف})$$

یا

$$\begin{vmatrix} K + K' - \omega^2 m & -K' \\ -K' & K + K' - \omega^2 m \end{vmatrix} = 0 \qquad (۱۳.۳.۱۱ \text{ ب})$$

با بسط دترمینان، می‌رسیم به

$$(K + K' - \omega^2 m)^2 - K'^2 = 0 \qquad (۱۳.۳.۱۱ \text{ ج})$$

که آن را می‌توانیم به این قرار بازآرایی کنیم

$$(\omega^2 m - K)[\omega^2 m - (K + 2K')] = 0 \qquad (۱۳.۳.۱۱ \text{ د})$$

و اکنون ویژه‌بسامدها ظاهر می‌شوند.[1] این ویژه‌بسامدها ریشه‌های معادلهٔ (۱۳.۳.۱۱ د) هستند و در قالب عبارتهای زیر بیان می‌شوند

$$\omega_1^2 = \frac{K}{m} \qquad \omega_2^2 = \frac{K + 2K'}{m} \qquad (۱۴.۳.۱۱)$$

این کمیتها بسامدهای ویژهٔ مُد بهنجارند که قبلاً آنها را به‌تنهایی بر مبنای ملاحظات فیزیکی به‌دست آوردیم.

اکنون با برگشت به معادلهٔ (۱۲.۳.۱۱ الف یا ب)، می‌توانیم هر ویژه‌بسامد را برای یافتن جوابهای مربوط به a_1 و a_2، یعنی مؤلفه‌های ویژه‌بردارها، جایگزین کنیم. اما، دو ویژه‌بردار، هر یک با دو مؤلفه، یافت می‌شوند، به‌طوری که این مؤلفه‌ها را دوباره a_{ij} نام‌گذاری می‌کنیم که به‌معنی مؤلفه iام ویژه‌بردار jام است.[2] قرار می‌دهیم $\omega = \omega_1$ و با واردکردن مقدار آن در معادلهٔ

۱. ما اصطلاح ویژه‌بسامد را برای ω یا ω^2 به‌کار می‌بریم. آنچه منظور ماست از متن روشن می‌شود.

۲. وقتی یک ویژه‌بردار عمومی n بعدی $\mathbf{a}$ را توصیف می‌کنیم، این کار را با نمایش‌دادن مؤلفه‌هایش، a_1، a_2، ...، a_n، انجام می‌دهیم؛ اما، n ویژه‌بردار خاص $\mathbf{a_1}$، $\mathbf{a_2}$، ...، $\mathbf{a_n}$ یافت می‌شود که جوابهای معادلات حرکت برای یک سیستم نوسانگر جفت‌شده به‌شمار می‌آیند، که با n مختصهٔ تعمیم‌یافته توصیف شده است. بنابراین، وقتی یکی از ویژه‌بردارهای خاص $\mathbf{a_k}$ را توصیف می‌کنیم، آن را با مؤلفه‌هایش، a_{1k}، a_{2k}، ...، a_{nk}، نشان می‌دهیم. ویژه‌بردار خاص $\mathbf{a_k}$ را با مؤلفهٔ a_k مربوط به ویژه‌بردار تعمیم‌یافتهٔ $\mathbf{a}$ اشتباه نکنید.

(۱۲.۳.۱۱ الف) می‌رسیم به

$$\mathbf{K}\mathbf{a}_1 = \omega_1^2 \mathbf{M}\mathbf{a}_1$$

$$\begin{pmatrix} K+K' & -K' \\ -K' & K+K' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix} = \omega_1^2 \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix} \qquad (۱۵.۳.۱۱)$$

و با بهره‌گیری از معادلهٔ اول دو معادله در معادلهٔ ماتریسی (۱۵.۳.۱۱)،

$$[(K+K') - \omega_1^2 m]a_{11} - K'a_{21} = 0 \qquad (۱۶.۳.۱۱)$$

که جواب $a_{21} = a_{11}$ را می‌دهد.

فرایند قبلی را با ویژه‌بسامد دوم ω_2 تکرار می‌کنیم که مؤلفه‌های $a_{12} = -a_{22}$ را برای ویژه‌مقدار دوم $\mathbf{a}_2$ به‌دست می‌دهد. بنابراین، مؤلفه‌های (x_1, x_2) این دو بردار مد بهنجار عبارت‌اند از

$$\mathbf{Q}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} a_{11}\cos(\omega_1 t - \delta_1) \qquad \mathbf{Q}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} a_{12}\cos(\omega_2 t - \delta_2) \qquad (۱۷.۳.۱۱)$$

که می‌تواند با مؤلفه‌های (x_1, x_2) بردارهای مد بهنجار که قبلاً در معادلهٔ (۸.۳.۱۱ ب) ارائه شده بود، مقایسه شود.

مؤلفه‌های $[x_1(t), x_2(t)]$، بردار حالت $\mathbf{q}$ که به‌طور کلی حرکت سیستم را نشان می‌دهند، ترکیبات خطی مؤلفه‌های (x_1, x_2) بردارهای مد بهنجار $\mathbf{Q}_1$ و $\mathbf{Q}_2$ هستند. ما این مؤلفه‌ها را در قالب جدول زیر نمایش می‌دهیم:

$\mathbf{Q}_2$	$\mathbf{Q}_1$	
$-a_{12}\cos(\omega_2 t - \delta_2)$	$a_{11}\cos(\omega_1 t - \delta_1)$	x_1
$a_{12}\cos(\omega_2 t - \delta_2)$	$a_{11}\cos(\omega_1 t - \delta_1)$	x_2

که مشاهدهٔ جوابهای عمومی به‌ازای $x_1(t)$ و $x_2(t)$ را به‌صورت زیر آسان می‌کند

$$x_1(t) = A_1\cos(\omega_1 t - \delta_1) - A_2\cos(\omega_2 t - \delta_2)$$
$$x_2(t) = A_1\cos(\omega_1 t - \delta_1) + A_2\cos(\omega_2 t - \delta_2) \qquad (۱۸.۳.۱۱)$$

برای ساده‌کردن نمادگذاری، دو ثابت جدید A_1 و A_2 را تعریف می‌کنیم به طریقی که $\frac{A_1}{A_2} = \frac{a_{11}}{a_{12}}$. چهار مجهول A_1، A_2، δ_1، و δ_2 را می‌توان از مقادیر اولیهٔ مکانها و سرعتهای هر جرم تعیین کرد.

شرایط اولیه

اکنون به حل مسئلهٔ خاصی می‌پردازیم که بحث را با آن شروع کردیم، یعنی جرم $m_۲$ در ابتدا به اندازهٔ یک واحد به سمت راست جابه‌جا می‌شود، جرم $m_۱$ در $x_۱ = ۰$ واقع است، و سپس همزمان از حال سکون رها می‌شوند. اینها شرایط اولیهٔ این مسئله‌اند. ابتدا روابطی برای ثابتهای موجود در معادلهٔ (۱۸.۳.۱۱) برحسب هر مجموعهٔ کلی از شرایط اولیه به‌دست می‌آوریم و سپس از شرایط اولیهٔ خاص یادشدهٔ قبلی برای یافتن این ثابتها در این مسئلهٔ خاص کمک می‌گیریم. در لحظهٔ $t = ۰$، معادلهٔ (۱۸.۳.۱۱) به‌صورت زیر در می‌آید

$$\begin{aligned} x_۱(۰) &= A_۱ \cos\delta_۱ - A_۲ \cos\delta_۲ \\ x_۲(۰) &= A_۱ \cos\delta_۱ + A_۲ \cos\delta_۲ \end{aligned} \qquad \text{(۱۹.۳.۱۱ الف)}$$

با مشتق‌گرفتن از معادلهٔ (۱۸.۳.۱۱) و ارزیابی نتیجهٔ آن در $t = ۰$، می‌رسیم به

$$\begin{aligned} \dot{x}_۱(۰) &= \omega_۱ A_۱ \sin\delta_۱ - \omega_۲ A_۲ \sin\delta_۲ \\ \dot{x}_۲(۰) &= \omega_۱ A_۱ \sin\delta_۱ + \omega_۲ A_۲ \sin\delta_۲ \end{aligned} \qquad \text{(۱۹.۳.۱۱ ب)}$$

با کمی عملیات جبری، جوابهای زیر برای ثابتها پیدا می‌شوند:

$$\begin{aligned} A_۱^۲ &= \frac{۱}{۴}[x_۱(۰) + x_۲(۰)]^۲ + \frac{۱}{۴\omega_۱^۲}[\dot{x}_۱(۰) + \dot{x}_۲(۰)]^۲ \\ A_۲^۲ &= \frac{۱}{۴}[x_۲(۰) - x_۱(۰)]^۲ + \frac{۱}{۴\omega_۲^۲}[\dot{x}_۲(۰) - \dot{x}_۱(۰)]^۲ \end{aligned} \qquad \text{(۲۰.۳.۱۱ الف)}$$

و برای ثابتهای فاز:

$$\tan\delta_۱ = \frac{\dot{x}_۱(۰)+\dot{x}_۲(۰)}{\omega_۱[x_۱(۰)+x_۲(۰)]} \qquad \tan\delta_۲ = \frac{\dot{x}_۲(۰)-\dot{x}_۱(۰)}{\omega_۲[x_۲(۰)-x_۱(۰)]} \qquad \text{(۲۰.۳.۱۱ ب)}$$

حال، شرایط خاص برای این مسئله

$$x_۱(۰) = ۰ \qquad x_۲(۰) = ۱ \qquad \dot{x}_۱(۰) = \dot{x}_۲(۰) = ۰ \qquad \text{(۲۱.۳.۱۱)}$$

را در معادلات (۲۰.۳.۱۱ الف و ب) وارد می‌کنیم و با بهره‌گیری از معادلهٔ (۱۹.۳.۱۱ الف)، علامتهای $A_۱$ و $A_۲$ را تعیین می‌کنیم؛ می‌رسیم به

$$\delta_۱ = \delta_۲ = ۰ \qquad A_۱ = A_۲ = \frac{۱}{۲} \qquad \text{(۲۲.۳.۱۱)}$$

این کمیتها را در معادلهٔ (۱۸.۳.۱۱) وارد می‌کنیم و جوابهایی را که می‌خواستیم، به‌صورت زیر به‌دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \frac{1}{2}(\cos\omega_1 t - \cos\omega_2 t) \\ x_2(t) &= \frac{1}{2}\cos(\omega_1 t + \cos\omega_2 t) \end{aligned} \qquad (۲۳.۳.۱۱)$$

که باید با معادلات (۲.۳.۱۱ الف و ب) مقایسه شوند، که در خلال توصیف اولیه حرکت که برای نوسانگر جفت‌شده پیش‌بینی کردیم، به‌کار برده شدند.

معادلات حرکت در مختصات بهنجار

تلاش برای بررسی این واقعیت که آیا لاگرانژی می‌تواند در دستگاه مختصاتی بیان شود که هیچ جملهٔ ضربی وجود نداشته باشد یا خیر، به انجامش می‌ارزد. معادلات حرکتی که به‌دست می‌آیند وقتی در چنین مختصاتی بیان می‌شوند، جفت‌شده نیستند. این معادلات به دو معادلهٔ دیفرانسیل خطی مرتبهٔ دوم مجزا تجزیه می‌شوند که جوابهای دو نوسانگر هماهنگ مجزا را ارائه می‌کنند. اما دقیقاً مشخصهٔ مدهای بهنجار همین است. بنابراین، فرض می‌کنیم که تبدیل لاگرانژی به تابعی از مختصات Q_1 و Q_2، باید به جداسازی مطلوب ما منجر شود.

در ضمن مطالب زیر، چنین تبدیلی را با بهره‌گیری از روشهای ماتریسی اجرا می‌کنیم. ابتدا انرژیهای جنبشی و پتانسیل نوسانگر جفت‌شده را با استفاده از نمادگذاری ماتریسی می‌نویسیم:

$$\begin{aligned} T = \frac{1}{2}\tilde{\mathbf{x}}\mathbf{M}\dot{\mathbf{x}} &= \frac{1}{2}(\dot{x}_1\ \dot{x}_2)\begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}m\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}_2^2 \end{aligned} \qquad (۲۴.۳.۱۱)$$

انرژی پتانسیل عبارت است از

$$\begin{aligned} V = \frac{1}{2}\tilde{\mathbf{x}}\mathbf{K}\mathbf{x} &= \frac{1}{2}(x_1\ x_2)\begin{pmatrix} K+K' & -K' \\ -K' & K+K' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}(K+K')x_1^2 + \frac{1}{2}(K+K')x_2^2 - K'x_1x_2 \end{aligned} \qquad (۲۵.۳.۱۱)$$

با بهره‌گیری از تبدیل بین مختصات x_i و Q_i در معادلات (۳.۳.۱۱ الف)، می‌رسیم به:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}\tilde{\mathbf{Q}}\tilde{\mathbf{A}}\mathbf{M}\mathbf{A}\dot{\mathbf{Q}} \\ &= \frac{1}{4}(\dot{Q}_1\ \dot{Q}_2)\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dot{Q}_1 \\ \dot{Q}_2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}(\dot{Q}_1\ \dot{Q}_2)\begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dot{Q}_1 \\ \dot{Q}_2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}m\dot{Q}_1^2 + \frac{1}{2}m\dot{Q}_2^2 \end{aligned} \qquad (۲۶.۳.۱۱)$$

که در آن از تساوی ماتریسی $\widetilde{\mathbf{AQ}} = \tilde{\mathbf{Q}}\tilde{\mathbf{A}}$ بهره برده‌ایم.

انرژی پتانسیل عبارت است از

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{2}\tilde{\mathbf{Q}}\tilde{\mathbf{A}}\mathbf{K}\mathbf{A}\mathbf{Q} \\ &= \frac{1}{4}(Q_1\ Q_2)\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} K+K' & -K' \\ -K' & K+K' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}(Q_1\ Q_2)\begin{pmatrix} K & 0 \\ 0 & K+2K' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}KQ_1^2 + \frac{1}{2}(K+2K')Q_2^2 \end{aligned} \qquad (۲۷.۳.۱۱)$$

بنابراین، لاگرانژی عبارت است از

$$L = \frac{1}{2}m\dot{Q}_1^2 + \frac{1}{2}m\dot{Q}_2^2 - \frac{1}{2}KQ_1^2 - \frac{1}{2}(K+2K')Q_2^2 \qquad (۲۸.۳.۱۱)$$

مطابق پیش‌بینی، این لاگرانژی فاقد جملات ضربی است و معادلات حرکت حاصل عبارت‌اند از

$$m\ddot{Q}_1 + KQ_1 = 0 \qquad m\ddot{Q}_2 + (K+2K')Q_2 = 0 \qquad (۲۹.۳.۱۱ \text{ الف})$$

که در نمادگذاری ماتریسی به‌صورت زیر در می‌آیند:

$$\begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \ddot{Q}_1 \\ \ddot{Q}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} K & 0 \\ 0 & K+2K' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{pmatrix} = 0 \qquad (۲۹.۳.۱۱ \text{ ب})$$

اینها معادلات حرکت دو نوسانگر هماهنگ سادهٔ مجزا از یکدیگرند که جوابهای آنها عبارت‌اند از

$$Q_۱ = b_۱ \cos(\omega_۱ t - \epsilon_۱) \qquad Q_۲ = b_۲ \cos(\omega_۲ t - \epsilon_۲) \qquad (۳۰.۳.۱۱ \text{ الف})$$

که

$$\omega_۱^۲ = \frac{K}{m} \qquad \omega_۲^۲ = \frac{K + ۲K'}{m} \qquad (۳۰.۳.۱۱ \text{ ب})$$

$b_۱$، $b_۲$، $\epsilon_۱$، و $\epsilon_۲$ ثابتهای انتگرال‌گیری‌اند. در دستگاه مختصات Q_i، بردارهای مد بهنجار عبارت‌اند از

$$\mathbf{Q}_۱ = \begin{pmatrix} ۱ \\ ۰ \end{pmatrix} b_۱ \cos(\omega_۱ t - \epsilon_۱) \qquad \mathbf{Q}_۲ = \begin{pmatrix} ۰ \\ ۱ \end{pmatrix} b_۲ \cos(\omega_۲ t - \epsilon_۲) \qquad (۳۱.۳.۱۱)$$

که باید با حالتهای مربوطه در معادلهٔ (۸.۳.۱۱ الف)، مقایسه شوند.

جوابی برحسب $x_۱$ و $x_۲$ با تبدیل وارونه به مختصات $Q_۱$ و $Q_۲$، با استفاده از معادلهٔ (۳.۳.۱۱ الف)، به‌دست می‌آید

$$\begin{aligned} x_۱ &= \frac{۱}{\sqrt{۲}}(Q_۱ - Q_۲) \\ &= B_۱ \cos(\omega_۱ t - \epsilon_۱) - B_۲ \cos(\omega_۲ t - \epsilon_۲) \\ x_۲ &= \frac{۱}{\sqrt{۲}}(Q_۱ + Q_۲) \\ &= B_۱(\cos \omega_۱ t - \epsilon_۱) + B_۲(\cos \omega_۲ t - \epsilon_۲) \end{aligned} \qquad (۳۲.۳.۱۱)$$

که در آنها $B_۱$، $B_۲$، $\epsilon_۱$، و $\epsilon_۲$ ثابتهای انتگرال‌گیری‌اند. ضریب $\frac{۱}{\sqrt{۲}}$ در ثابتهای $B_۱$ و $B_۲$ گنجانده شده است. این جوابها با جوابهای معادلهٔ (۱۸.۳.۱۱) یکسان‌اند که با حل معادلات حرکت جفت‌شده برحسب مختصات x_i در مرحلهٔ نخست به‌دست آمدند.

قطری‌کردن لاگرانژی

معادلات (۲۹.۳.۱۱ الف) عبارت‌اند از معادلات حرکت دو نوسانگر هماهنگ سادهٔ مجزا و معادلهٔ (۲۹.۳.۱۱ ب) نمایش ماتریسی آنهاست. ماتریسهای $\mathbf{K}$ و $\mathbf{M}$ در آن معادله، هر دو، به شکل قطری‌اند، یعنی عناصر غیرقطری ناصفر ندارند. هر کدام از این ماتریسها با تبدیل همنهشت به‌صورت زیرقطری می‌شود، یعنی،

$$\mathbf{K}_{\text{قطری}} = \tilde{\mathbf{A}}\mathbf{K}\mathbf{A} \qquad \mathbf{M}_{\text{قطری}} = \tilde{\mathbf{A}}\mathbf{M}\mathbf{A} \qquad (۳۳.۳.۱۱)$$

می‌ارزد که برای یافتن ماتریسی چون $\mathbf{A}$ در هر مسئلهٔ نوسانگر جفت‌شده‌ای تلاش کنیم، زیرا تمام کاری که باید انجام دهیم این است که مسئله را به مسئلهٔ ساده‌تر نوسانگرهای جفت‌نشده تبدیل کنیم که عبارت است از قطری‌سازی ماتریسهای $\mathbf{K}$ و $\mathbf{M}$ از طریق تبدیل در معادلهٔ (۳۳.۳.۱۱). این پرسش پیش می‌آید: ماتریس $\mathbf{A}$ چیست؟ وارسی دقیق $\mathbf{A}$ در معادلهٔ (۳.۳.۱۱ الف) نشان می‌دهد که ستونهای آن مؤلفه‌های (x_1, x_2) ویژه‌بردارهای $\mathbf{a}_i$ هستند، یعنی،

$$\mathbf{A} = (\mathbf{a}_1\ \mathbf{a}_2) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \qquad (۳۴.۳.۱۱)$$

در ماتریس بالا هر $\mathbf{a}_i$ بردار ستونی است که جواب معادلهٔ حرکت تبدیل‌شده به ویژه‌بردار معادلش (معادلهٔ ۱۲.۳.۱۱ الف) به‌شمار می‌آید، و در اینجا به‌صورت زیر نوشته می‌شود

$$\mathbf{K}\mathbf{a}_i = \omega_1^2 \mathbf{M}\mathbf{a}_i$$

$$\begin{pmatrix} K+K' & -K' \\ -K' & K+K' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \end{pmatrix} = \omega_i^2 \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \end{pmatrix} \qquad (۳۵.۳.۱۱)$$

که a_{ji} مؤلفهٔ jام ویژه‌بردار $\mathbf{a}_i$ و ω_i^2 ویژه‌بسامد آن است. بنابراین می‌بینیم که

$$\tilde{\mathbf{a}}_i \mathbf{K} \mathbf{a}_i = \omega_i^2 \tilde{\mathbf{a}}_i \mathbf{M} \mathbf{a}_i \qquad (۳۶.۳.۱۱ \text{ الف})$$

یا

$$\frac{\tilde{\mathbf{a}}_i \mathbf{K} \mathbf{a}_i}{\tilde{\mathbf{a}}_i \mathbf{M} \mathbf{a}_i} = \omega_i^2 \qquad (۳۶.۳.۱۱ \text{ ب})$$

به این ترتیب، ماتریس تشکیل‌شده با هر ویژه‌بردار آن به‌صورت یکی از ستونهایش، ماتریس مطلوب $\mathbf{A}$ است و این ماتریس $\mathbf{A}$ مختصات تعمیم‌یافته را به مختصات بهنجار تبدیل می‌کند و ماتریسهای $\mathbf{M}$ و $\mathbf{K}$ را که لاگرانژی سیستم را می‌سازند، قطری می‌کند. به‌علاوه، توجه کنید که ویژه‌بسامدهای ω_1^2 و ω_2^2 که با ویژه‌بردارهای مد بهنجار متناظرند، صرفاً از نسبتهای عناصر ماتریسهای قطری قطری$\mathbf{K}$ و قطری$\mathbf{M}$ به‌دست می‌آیند. مثلاً، بررسی ماتریسهای قطری$\mathbf{K}$ و قطری$\mathbf{M}$ در معادلات (۲۶.۳.۱۱) و (۲۷.۳.۱۱)، آشکار می‌سازد که نسبتهای عناصر قطری آنها، البته مساوی ω_1^2 و ω_2^2 هستند.

اما، یافتن ماتریس تبدیل $\mathbf{A}$ که $\mathbf{K}$ و $\mathbf{M}$ را قطری، و بنابراین مسئله را حل کند، به این معنی است که اولاً معادلات جفت‌شدهٔ حرکت، که در قالب معادلات (۱۰.۳.۱۱ ب) یا معادل آن (۱۲.۳.۱۱ الف)، یا (۳۵.۳.۱۱)، برای ویژه‌بسامدهای ω_1 و ω_2 نمایش داده شده‌اند، باید

حل شوند و ثانیاً با بهره‌گیری از آن جوابها ویژه‌بردارهای مدهای بهنجار متناظر با آنها، $\mathbf{a}_1$ و $\mathbf{a}_2$، را به‌دست آورند. به بیان دیگر، اول باید دستگاه معادلات (معادلات جفت‌شدهٔ) حرکت را قبل از یافتن مدهای بهنجار حل کنیم که برای جداکردن آن معادلات به آن مدها نیاز داریم. یک وضعیت «متناقض» کلاسیک، که ناگزیر است.[۱] چگونه ابتدا مدهای بهنجار را، جز از طریق حدس و گمان «فرا گرفته‌شده» به‌دست می‌آوریم؟ هیچ راه کلی برای انجام آن وجود ندارد، مگر یک روش که در چند وضعیت خوب عمل می‌کند. این واقعیت روشن می‌شود که تابع لاگرانژی تحت برخی عملیات تقارنی ناورداست و از خصوصیات عملگرهای تقارنی می‌توان سود جست تا مختصات مدهای بهنجار به‌دست آید. ببینیم این روش چگونه عمل می‌کند.

لاگرانژی هر نوسانگر جفت‌شدهٔ دو مؤلفه‌ای، در نمادگذاری ماتریسی به شکل کلی زیر، مشابه با معادلهٔ (۹.۳.۱۱)، است:

$$L = T - V = \frac{1}{2}\tilde{\dot{\mathbf{x}}}\mathbf{M}\dot{\mathbf{x}} - \frac{1}{2}\tilde{\mathbf{x}}\mathbf{K}\mathbf{x}$$

$$= \frac{1}{2}(\dot{x}_1\ \dot{x}_2)\begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{12} & M_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}(x_1\ x_2)\begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{12} & K_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

(۳۷.۳.۱۱ الف)

ماتریسهای $\mathbf{M}$ و $\mathbf{K}$ همیشه حقیقی و متقارن‌اند. به این ترتیب، $K_{21} = K_{12}$ و $M_{21} = M_{12}$، حقایقی‌اند که در نوشتن عناصر ماتریسی در خارج از قطر معادلهٔ (۳۷.۳.۱۱ الف)، از آنها بهره برده‌ایم. ضرب ماتریسی را اجرا می‌کنیم، L به قرار زیر به‌دست می‌آید

$$L = \frac{1}{2}M_{11}\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}M_{22}\dot{x}_2^2 + M_{12}\dot{x}_1\dot{x}_2 - \frac{1}{2}K_{11}x_1^2 - \frac{1}{2}K_{22}x_2^2 - K_{12}x_1x_2$$

(۳۷.۳.۱۱ ب)

اکنون فرض کنید، در لاگرانژی قبلی، به جای x_2 کمیت $\pm\alpha x_1$ و به جای x_1 کمیت $\pm x_2/\alpha$ را بنشانیم. اگر پارامتر α مقدار مناسبی داشته باشد، لاگرانژی بدون تغییر باقی می‌ماند. این لاگرانژی تحت این عمل تبادل ناوردا می‌ماند. اجرای مبادلهٔ ($x_2 \to \alpha x_1$ و $x_2/\alpha \to x_1$) لاگرانژی را تبدیل می‌کند به

---

۱. یعنی باید کاری را قبل از کار دوم انجام دهید و نمی‌توانید کار اول را انجام دهید قبل از آنکه کار دوم انجام شود. این وضعیت را اصطلاحاً "catch-22" می‌گویند. (مثلاً، شغل ندارم چون مسکن ندارم و مسکن نمی‌توانم داشته باشم قبل از آنکه شغل پیدا کنم.)ـم.

$$L' = \frac{1}{2}(\dot{x}_2/\alpha \ \alpha\dot{x}_1)\begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{12} & M_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dot{x}_2/\alpha \\ \alpha\dot{x}_1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}(x_2/\alpha \ \alpha x_1)$$

$$\begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{12} & K_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_2/\alpha \\ \alpha x_1 \end{pmatrix} \qquad \text{(۳۸.۳.۱۱ الف)}$$

$$= \frac{1}{2}(\dot{x}_1 \ \dot{x}_2)\begin{pmatrix} \alpha^2 M_{22} & M_{12} \\ M_{12} & M_{11}/\alpha^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}(x_1 \ x_2)$$

$$\begin{pmatrix} \alpha^2 K_{22} & K_{12} \\ K_{12} & K_{11}/\alpha^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

یا، بعد از اجرای ضرب ماتریسی

$$L' = \frac{1}{2}M_{11}\frac{\dot{x}_2^2}{\alpha^2} + \frac{1}{2}M_{22}\alpha^2\dot{x}_1^2 + M_{12}\dot{x}_2\dot{x}_1 - \frac{1}{2}K_{11}\frac{x_2^2}{\alpha^2} + \frac{1}{2}K_{22}\alpha^2 x_1^2 - K_{12}x_2x_1 \qquad \text{(۳۸.۳.۱۱ ب)}$$

دو جملهٔ ضربی در L' با دو جملهٔ ضربی در L یکسان‌اند و تابع لاگرانژی تبدیل‌شدهٔ L' با تابع اصلی L مساوی است، اگر

$$\frac{M_{11}}{M_{22}} = \frac{K_{11}}{K_{22}} \qquad \text{(۳۹.۳.۱۱ الف)}$$

$$\alpha^2 = \frac{M_{11}}{M_{22}}\left(= \frac{K_{11}}{K_{22}}\right) \qquad \text{(۳۹.۳.۱۱ ب)}$$

شرط اول باید یکی از خواص لاگرانژی برای سیستم موردنظر باشد. شرط دوم نسبت مؤلفه‌های x را تعیین می‌کند که باید در فرایند تبادل به‌کارگرفته شود، اگر لاگرانژی تحت تبادل ناوردا باشد. چون این شرط اخیر روی α^2 انجام می‌شود، تبدیلی که $-\alpha$ را به‌صورت پارامتر به‌کار می‌برد نیز این شرط را برآورده می‌کند.

از این موضوع برمی‌آید که دو ویژه‌بردار $\mathbf{a}_1$ و $\mathbf{a}_2$، که ماتریس تبدیل $\mathbf{A}$ی مطلوب ما را تشکیل می‌دهند، مؤلفه‌های (x_1, x_2) را دارند که در آنها مؤلفهٔ دوم $\pm\alpha$ برابر مؤلفهٔ اول است، یعنی

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \end{pmatrix} \qquad \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ \alpha \end{pmatrix} \qquad \text{(۴۰.۳.۱۱ الف)}$$

بنابراین، ماتریس $\mathbf{A}$ که تبدیل از مختصات تعمیم‌یافته به مختصات بهنجار را به وجود می‌آورد، عبارت است از

$$\mathbf{A} = (\mathbf{a}_1\ \mathbf{a}_2) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ \alpha & \alpha \end{pmatrix} \qquad (۴۰.۳.۱۱ \text{ ب})$$

لاگرانژی $L' = \tilde{\mathbf{A}}L\mathbf{A}$ می‌تواند هیچ جملهٔ ضربی نداشته باشد، اگر تحت هر گونه عملیات تبادلی یادشده درگذشته ناوردا باقی بماند. توجه کنید که برای دو ویژه‌بردار $\mathbf{a}_i$ در خلال تبادل چه اتفاقی می‌افتد: (۱) برای مبادلهٔ $\alpha x_1 \to x_2$ و $x_2/\alpha \to x_1$، پی می‌بریم که $\mathbf{a}_1 \to +\mathbf{a}_1$ اما $\mathbf{a}_2 \to -\mathbf{a}_2$، اما (۲) برای مبادلهٔ $\alpha x_1 \to -x_2$ و $x_2/\alpha \to -x_1$، پی می‌بریم که $\mathbf{a}_2 \to +\mathbf{a}_2$ اما $\mathbf{a}_1 \to -\mathbf{a}_1$. در هر یک از این حالتها، یکی از بردارهای مد بهنجار تغییر علامت می‌دهد، اما دیگری به همان صورت باقی می‌ماند. اگر لاگرانژی تبدیل‌یافته جمله‌های ضربی داشته باشد، این جمله‌ها باید تغییر علامت دهند، اما جمله‌های مجذوری تغییر علامت نمی‌دهند. به این ترتیب، تابع لاگرانژی تبدیل‌شدهٔ L' دیگر نباید تحت تبادل ناوردا باشد. نتیجه می‌گیریم که لاگرانژی تبدیل‌شدهٔ L' باید تابعی از مختصات بهنجار بدون جملات ضربی باشد، اگر $\mathbf{a}_i$ها واقعاً ویژه‌بردارهای مطلوب ما باشند و ماتریس $\mathbf{A}$ی متناظر آن ماتریس، تبدیل مطلوب است.

می‌ارزد که مثال پیشین را در پرتو این بحث دوباره بررسی کنیم. به عناصر قطری ماتریسهای $\mathbf{M}$ و $\mathbf{K}$ مربوط به معادلهٔ (۱۰.۳.۱۱ ج) نظر کنید. این عناصر شرط (۳۹.۳.۱۱ الف) را تأمین می‌کنند. اگر $\alpha = 1$ شرط (۳۹.۳.۱۱ ب) تأمین می‌شود. بنابراین، ماتریس $\mathbf{A}$ که $\mathbf{K}$ و $\mathbf{M}$ را قطری می‌سازد، در قالب معادلهٔ (۴۰.۳.۱۱ ب) بیان شده و عبارت است از

$$\mathbf{A} = (\mathbf{a}_1\ \mathbf{a}_2) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad (۴۱.۳.۱۱)$$

$\mathbf{K}$ و $\mathbf{M}$، مطابق تبدیلات اعمال‌شده در معادلهٔ (۳۳.۳.۱۱)، از این قرار قطری می‌شوند

$$\mathbf{K}_{\text{قطری}} = \tilde{\mathbf{A}}\mathbf{K}\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K+K' & -K' \\ -K' & K+K' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$
$$= 2\begin{pmatrix} K & 0 \\ 0 & K+2K' \end{pmatrix} \qquad (۴۲.۳.۱۱ \text{ الف})$$

و

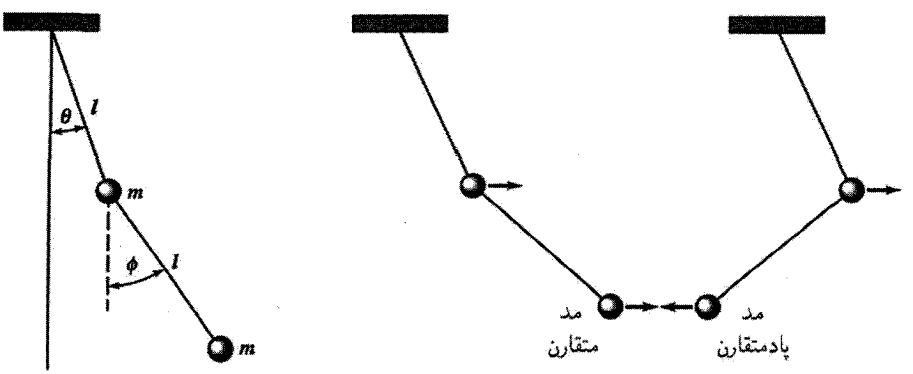
$$\mathbf{M}_{\text{قطری}} = \tilde{\mathbf{A}}\mathbf{M}\mathbf{A} = \begin{pmatrix} ۱ & ۱ \\ -۱ & ۱ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m & ۰ \\ ۰ & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ۱ & -۱ \\ ۱ & ۱ \end{pmatrix}$$

$$= ۲ \begin{pmatrix} m & ۰ \\ ۰ & m \end{pmatrix} \qquad (۴۲.۳.۱۱ \text{ ب})$$

نسبت عناصر قطری $\mathbf{K}_{\text{قطری}}$ و $\mathbf{M}_{\text{قطری}}$ ویژه‌بسامدهای $\omega_۱^۲$ و $\omega_۲^۲$ راکه قبلاً در معادلهٔ (۱۴.۳.۱۱) به‌دست آمده بود، نتیجه می‌دهند. (ضریب ۲ که در معادلات (۴۲.۳.۱۱ الف و ب) وجود دارد، در این نسبتها حذف می‌شود و بنابراین نامربوط است. می‌شد این ضریب را با بهنجارکردن ویژه‌بردارهای $\mathbf{a}_۱$ و $\mathbf{a}_۲$ به وسیلهٔ ضریب $\frac{۱}{\sqrt{۲}}$ حذف کرد.)

مثال ۱.۳.۱۱ آونگ دوگانه (یا دو صخره‌نوردی که پشت سرهم از طنابی آویخته‌اند.)

حرکت آونگ مرکب (دوگانه) متشکل از دو آونگ ساده، هرکدام به جرم m و طول l، را در نظر می‌گیریم. آونگ اول به یک تکیه‌گاه ثابت، و آونگ دوم به گلولهٔ آونگ اول متصل می‌شود (شکل ۷.۳.۱۱ الف). به فرض آنکه آونگ نوسانهایی کم‌دامنه اجرا کند و حرکت در تک‌صفحه صورت گیرد، مدهای بهنجار و بسامدهای مد بهنجار مربوط به آنها را بیابید.



شکل ۷.۳.۱۱ آونگ مرکب و مُدهای بهنجار آن.

حل ۱: «حدس‌زدن» مدهای بهنجار

پیکربندی سیستم را با دو زاویهٔ θ و ϕ، مطابق شکل، مشخص می‌کنیم. انرژی جنبشی آونگ دوگانه از این قرار است

$$T = \frac{1}{2}m\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1 + \frac{1}{2}m\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_2 \qquad (۴۳.۳.۱۱)$$

سرعتهای هر جرم، $\mathbf{v}_1$ و $\mathbf{v}_2$، را می‌توان برحسب سرعتهای زاویه‌ای $\dot{\theta}$ و $\dot{\phi}$ بیان کرد

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{e}_\theta l\dot{\theta} \qquad \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1 + \mathbf{e}_\phi l\dot{\phi} \qquad (۴۴.۳.۱۱)$$

که جملهٔ دوم در عبارت اخیر، سرعت جرم دوم نسبت به جرم اول است.

بنابراین، انرژی جنبشی عبارت است از

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m(\mathbf{e}_\theta l\dot{\theta} + \mathbf{e}_\phi l\dot{\phi}) \cdot (\mathbf{e}_\theta l\dot{\theta} + \mathbf{e}_\phi l\dot{\phi}) \\ &\approx \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}ml^2(\dot{\theta} + \dot{\phi})^2 \\ &= \frac{1}{2}ml^2(2\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 + 2\dot{\theta}\dot{\phi}) \end{aligned} \qquad (۴۵.۳.۱۱)$$

که در آن از $\mathbf{e}_\theta \cdot \mathbf{e}_\phi \approx 1$ سود جسته‌ایم، زیرا این دو بردار یکه مادام که جابه‌جاییهای زاویه‌ای کوچک‌اند، تقریباً موازی یکدیگر باقی می‌مانند. می‌توانیم ماتریس $\mathbf{M}$ را، از طریق مقایسهٔ معادلهٔ (۴۵.۳.۱۱) با معادلات (۳۷.۳.۱۱ الف و ب)، محاسبه کنیم

$$\mathbf{M} = ml^2\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad (۴۶.۳.۱۱)$$

مجموع انرژیهای پتانسیل دو جرم نسبت به وضعیت تعادلشان عبارت است از

$$\begin{aligned} V &= mgl(1 - \cos\theta) + mgl[2 - (\cos\theta + \cos\phi)] \\ &\approx \frac{1}{2}mgl(2\theta^2 + \phi^2) \end{aligned} \qquad (۴۷.۳.۱۱)$$

که در آن از تقریب زاویه‌های کوچک برای توابع کسینوسی سود جسته‌ایم. می‌توانیم ماتریس $\mathbf{K}$ را از طریق مقایسهٔ معادلهٔ (۴۷.۳.۱۱) با معادلات (۳۷.۳.۱۱ الف و ب)، محاسبه کنیم

$$\mathbf{K} = mgl\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (۴۸.۳.۱۱)$$

شرط بیان‌شده در معادلهٔ (۳۹.۳.۱۱ الف) به‌طور خودبه‌خود تأمین می‌شود. ولی شرطی که در معادلهٔ (۳۹.۳.۱۱ ب) آمده، در صورتی تأمین می‌شود که $\alpha^۲ = ۲$. بنابراین، «حدس می‌زنیم» که دو ویژه‌بردار برای این سیستم جفت‌شده، بنابر معادلهٔ (۴۰.۳.۱۱ الف)، عبارت‌اند از

$$\mathbf{a}_۱ = \begin{pmatrix} ۱ \\ \sqrt{۲} \end{pmatrix} \qquad \mathbf{a}_۲ = \begin{pmatrix} -۱ \\ \sqrt{۲} \end{pmatrix} \qquad (۴۹.۳.۱۱ \text{ الف})$$

پس، ماتریس $\mathbf{A}$ عبارت است از

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} ۱ & -۱ \\ \sqrt{۲} & \sqrt{۲} \end{pmatrix} \qquad (۴۹.۳.۱۱ \text{ ب})$$

که با بهره‌گیری از آن $\mathbf{M}$ را قطری می‌کنیم

$$\mathbf{M}_{\text{قطری}} = \tilde{\mathbf{A}}\mathbf{M}\mathbf{A} = ml^۲ \begin{pmatrix} ۱ & \sqrt{۲} \\ -۱ & \sqrt{۲} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ۲ & ۱ \\ ۱ & ۱ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ۱ & -۱ \\ \sqrt{۲} & \sqrt{۲} \end{pmatrix}$$

$$= ۲ml^۲ \begin{pmatrix} ۲+\sqrt{۲} & ۰ \\ ۰ & ۲-\sqrt{۲} \end{pmatrix} \qquad (۵۰.۳.۱۱ \text{ الف})$$

آنگاه $\mathbf{K}$

$$\mathbf{K}_{\text{قطری}} = \tilde{\mathbf{A}}\mathbf{K}\mathbf{A} = mgl \begin{pmatrix} ۱ & \sqrt{۲} \\ -۱ & \sqrt{۲} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ۲ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ۱ & -۱ \\ \sqrt{۲} & \sqrt{۲} \end{pmatrix}$$

$$= ۴mgl \begin{pmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{pmatrix} \qquad (۵۰.۳.۱۱ \text{ ب})$$

لاگرانژی که برحسب مختصات بهنجار بیان شود، از این قرار است

$$L = T - V = \frac{۱}{۲}\tilde{\dot{\mathbf{Q}}}\mathbf{M}_{\text{قطری}}\dot{\mathbf{Q}} - \frac{۱}{۲}\tilde{\mathbf{Q}}\mathbf{K}_{\text{قطری}}\mathbf{Q}$$

$$= ml^۲(\dot{Q}_۱ \; \dot{Q}_۲) \begin{pmatrix} ۲+\sqrt{۲} & ۰ \\ ۰ & ۲-\sqrt{۲} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{Q}_۱ \\ \dot{Q}_۲ \end{pmatrix} - ۲mgl(Q_۱ \; Q_۲) \begin{pmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_۱ \\ Q_۲ \end{pmatrix}$$

$$= ml^۲[(۲+\sqrt{۲})\dot{Q}_۱^۲ + (۲-\sqrt{۲})\dot{Q}_۲^۲] - ۲mgl(Q_۱^۲ + Q_۲^۲) \qquad (۵۱.۳.۱۱)$$

و این عبارت هیچ جملهٔ ضربی دربر ندارد. نسبت عناصر قطری قطری $\mathbf{K}$ و قطری $\mathbf{M}$ ویژه‌بسامدهای ω_1^2 و ω_2^2 را به‌دست می‌دهد

$$\omega_1^2 = \frac{2mgl}{ml^2}\left(\frac{1}{2+\sqrt{2}}\right) = (2-\sqrt{2})\frac{g}{l} \qquad \text{مد متقارن}$$

(۵۲.۳.۱۱ الف)

$$\omega_2^2 = \frac{2mgl}{ml^2}\left(\frac{1}{2-\sqrt{2}}\right) = (2+\sqrt{2})\frac{g}{l} \qquad \text{مد پادمتقارن}$$

نسبت دو بسامد مُد بهنجار، مستقل از تمام پارامترهای m، l، و g و مساوی است با

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \left[\frac{(2+\sqrt{2})}{(2-\sqrt{2})}\right]^{1/2} = 2{,}414 \qquad (۵۲.۳.۱۱ \text{ ب})$$

از این‌رو، نوسان در مد پادمتقارن سریعتر، دارای بسامد تقریباً دو و نیم برابر بسامد مد متقارن کندتر است.

حل ۲: روش کلی

معادلات حرکت به شکل ماتریسی (با بهره‌گیری از ماتریسهای $\mathbf{M}$ و $\mathbf{K}$ که در معادلات (۴۶.۳.۱۱) و (۴۸.۳.۱۱) یافته شدند) به این صورت نوشته می‌شوند

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = 0$$

$$ml^2\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\ddot{\theta}\\ \ddot{\phi}\end{pmatrix} + mgl\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\theta\\ \phi\end{pmatrix} = 0 \qquad (۵۳.۳.۱۱)$$

که مختصات تعمیم‌یافتهٔ (θ, ϕ) مؤلفه‌های بردار حالت مختصهٔ تعمیم‌یافتهٔ $\mathbf{q}$ را نمایش می‌دهند. مانند قبل، فرض کنیم جوابی برای مد بهنجار وجود دارد که شکلی به خود می‌گیرند، مشابه آنهایی که برای نوسانگر جفت‌شده یافتیم و در بخش قبل مورد بحث قرار دادیم و با معادلات (۱۱.۳.۱۱ الف و ب) نمایش دادیم

$$\begin{aligned}\mathbf{q} &= \mathbf{a}\cos\omega t\\ &= \begin{pmatrix}a_1\\ a_2\end{pmatrix}\cos\omega t\end{aligned} \qquad (۵۴.۳.۱۱)$$

(برای سادگی، فقط جملهٔ کسینوسی بدون زاویهٔ فاز را به‌کار می‌بریم.)

جواب تک‌بسامدی برای مد بهنجار را در معادلهٔ حرکت وارد می‌کنیم و به این نتیجه می‌رسیم

$$\begin{pmatrix} -2\omega^2+2 & -\omega^2 \\ -\omega^2 & -\omega^2+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = 0 \qquad (۵۵.۳.۱۱)$$

که در آن عملیات جبری بعدی را با حذف‌کردن ضرایب l و g بیشتر ساده کرده‌ایم. مانند قبل، جواب نابدیهی ($a_1, a_2 \neq 0$) تنها در صورتی وجود دارد که دترمینان ماتریس در معادلهٔ (۵۵.۳.۱۱) صفر باشد، یعنی

$$\begin{vmatrix} -2\omega^2+2 & -\omega^2 \\ -\omega^2 & -\omega^2+1 \end{vmatrix} = 0 \qquad (۵۶.۳.۱۱ \text{ الف})$$

یا

$$\omega^4 - 4\omega^2 + 2 = 0 \qquad (۵۶.۳.۱۱ \text{ ب})$$

جواب این معادلهٔ درجهٔ دوم (برحسب ω^2) دو ویژه‌بسامد ω_1^2 و ω_2^2 است که قبلاً در معادلات (۵۲.۳.۱۱ الف) به‌دست آمد. اکنون می‌توانیم نسبت a_1/a_2 را برای دو ویژه‌بردار با واردکردن این بسامدها، یکی‌یکی، در هر یک از معادلات همگنی محاسبه کنیم که در معادلهٔ ماتریسی (۵۵.۳.۱۱) گنجانده شدند؛ مثلاً، اولین معادله عبارت است از

$$(-2\omega^2+2)a_1 = \omega^2 a_2$$
$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{\omega^2}{-2\omega^2+2} \qquad (۵۷.۳.۱۱ \text{ الف})$$

واردکردن دو ویژه‌بسامد ω_1^2 و ω_2^2 از معادلات (۵۲.۳.۱۱ الف) در معادلهٔ (۵۷.۳.۱۱ الف)، شرایط زیر روی مختصات ویژه‌بردارها را به‌دست می‌دهد

$$\frac{a_1}{a_2} = +\frac{1}{\sqrt{2}} (\omega = \omega_1) \qquad \frac{a_1}{a_2} = -\frac{1}{\sqrt{2}} (\omega = \omega_2) \qquad (۵۷.۳.۱۱ \text{ ب})$$

به‌دلخواه قرار می‌دهیم $a_1 = 1$، که در این انتخاب آزادیم زیرا جواب فقط نسبت a_1/a_2 را می‌دهد.

بنابراین، می‌رسیم به

$$\theta = \cos\omega_1 t \quad \phi = +\sqrt{2}\cos\omega_1 t \quad \mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} \qquad \text{مد متقارن}$$

$$\theta = -\cos\omega_2 t \quad \phi = +\sqrt{2}\cos\omega_2 t \quad \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} \qquad \text{مد پادمتقارن} \tag{۵۸.۳.۱۱}$$

که دقیقاً ویژه‌بردارهایی‌اند که در ابتدا حدس زدیم.

مثال ۲.۳.۱۱

آونگی به جرم m و طول r به نگهدارنده‌ای به جرم m وصل شده است؛ این نگهدارنده می‌تواند در طول مسیر افقی، بدون اصطکاک حرکت کند. فنری با ثابت نیروی k بین نگهدارنده و دیوار مجاور قرار دارد (شکل ۸.۳.۱۱). مقادیر m، ثابت فنر، و طول آونگ، r، چنان‌اند که $2mg = kr$؛ یعنی، اگر این فنر را برای نگهداری وزن دو جرم به‌کار می‌گرفتیم، باید به اندازهٔ طول آونگ کشیده می‌شد. بسامدهای مد بهنجار را پیدا کنید.

حل:

انرژیهای جنبشی پتانسیل سیستم را (منهای فنر) مانند سیستم بخش ۳.۱۰ محاسبه می‌کنیم. انرژی جنبشی این سیستم نیز همان است. مقدار این انرژی عبارت است از

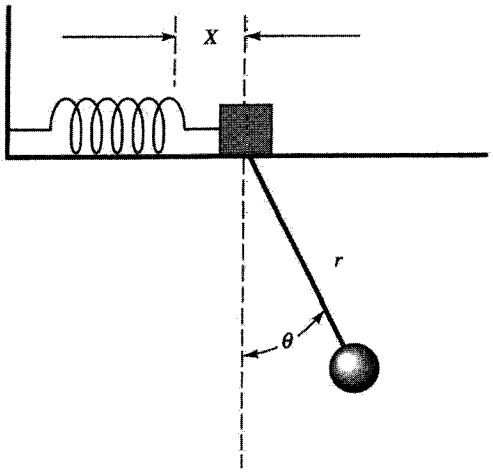
$$T = \frac{1}{2}m\dot{X}^2 + \frac{1}{2}m[\dot{X}^2 + (r\dot{\theta})^2 + 2\dot{X}(r\dot{\theta})\cos\theta]$$

انرژی پتانسیل (که در پیکربندی تعادل صفر تعریف می‌شود) عبارت است از

$$V = mgr(1 - \cos\theta) + \frac{1}{2}kX^2$$

با فرض کوچک‌بودن θ و $\dot{\theta}$، می‌توانیم روابط بالا را به‌صورت تقریبی زیر بیان کنیم

$$T \approx \frac{1}{2}m\dot{X}^2 + \frac{1}{2}m[\dot{X}^2 + (r\dot{\theta})^2 + 2\dot{X}(r\dot{\theta})]$$
$$V \approx mgr\frac{\theta^2}{2} + k\frac{X^2}{2}$$



شکل ۸.۳.۱۱ آونگ متصل به نگهدارندهٔ متحرکی که با فنری به دیوار متصل است.

با قراردادن $q_1 = X$، $q_2 = r\theta$، با بهره‌گیری از شرایط داده‌شده در این مسئله، و اختیارکردن $\omega_0^2 \equiv g/r = k/2m$، می‌توانیم این روابط را ساده‌تر کنیم. بنابراین، می‌رسیم به

$$T = \frac{1}{2}m[2\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + 2\dot{q}_1\dot{q}_2]$$
$$V \approx \frac{1}{2}m\omega_0^2[2q_1^2 + q_2^2]$$

این دو رابطهٔ اخیر به شکل معادلات (۴۵.۳.۱۱) و (۴۷.۳.۱۱) در مثال (۱.۳.۱۱) هستند؛ بنابراین، جواب با جوابی که در آنجا به‌دست آوردیم، یکسان است. بسامدهای بهنجار حاصل عبارت‌اند از

$$\omega_1^2 = (2 - \sqrt{2})\omega_0^2 \quad \text{و} \quad \omega_2^2 = (2 + \sqrt{2})\omega_0^2$$

آیا این جواب به نظر شما مقعول است؟

۴.۱۱ نظریهٔ کلی سیستمهای ارتعاشی

حال به بررسی سیستمی با n درجهٔ آزادی برمی‌گردیم. در بخش ۳.۱۰ نشان دادیم که انرژی جنبشی، T، تابع درجهٔ دوم همگنی از سرعتهای تعمیم‌یافته است. می‌توان این معادله را در قالب

ماتریسی نوشت:

$$T = \frac{1}{2}\tilde{\dot{\mathbf{q}}}\mathbf{M}\dot{\mathbf{q}} = \frac{1}{2}\sum_{j,k}^{n} M_{jk}\dot{q}_j\dot{q}_k \qquad (۱۱.۴.۱۱)$$

به شرط آنکه قیدهای متحرک وجود نداشته باشند. M_{jk}ها عناصر حقیقی ماتریس $n \times n$ متقارن $\mathbf{M}$ هستند، و $\dot{q}_j$ها n سرعت تعمیم‌یافته‌اند که مؤلفه‌های بردار $\dot{\mathbf{q}}$ به‌شمار می‌آیند. چون می‌خواهیم حرکت حول پیکربندی تعادل را بررسی کنیم، مانند کاری که در بخش ۲.۱۱ انجام دادیم، فرض می‌کنیم که M_{jk}ها ثابت و برابر باشند با همان مقدارشان در پیکربندی تعادل؛ به‌علاوه، فرض می‌کنیم که مبدأهای مختصات چنان اختیار شده باشند که پیکربندی تعادل در قالب این عبارت بیان شود

$$q_1 = q_2 = \ldots = q_n = 0 \qquad (۲.۴.۱۱)$$

بنابراین، انرژی پتانسیل V با استفاده از معادلهٔ (۸.۱.۱۱ الف)، به‌صورت زیر خواهد بود

$$V = \frac{1}{2}\tilde{\mathbf{q}}\mathbf{K}\mathbf{q} = \frac{1}{2}\sum_{j,k} K_{jk}q_jq_k \qquad (۳.۴.۱۱)$$

K_{jk}ها عناصر حقیقی ماتریسی $n \times n$ متقارن $\mathbf{K}$ هستند و q_jها، n مختصهٔ تعمیم‌یافته‌اند که بردار حالت $\mathbf{q}$ برحسب آنها بیان می‌شود.

از این‌رو، لاگرانژی این صورت را پیدا می‌کند

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2}\tilde{\dot{\mathbf{q}}}\mathbf{M}\dot{\mathbf{q}} - \frac{1}{2}\tilde{\mathbf{q}}\mathbf{K}\mathbf{q} \\ &= \frac{1}{2}\sum_{j,k}^{n}(M_{jk}\dot{q}_j\dot{q}_k - K_{jk}q_jq_k) \end{aligned} \qquad (۴.۴.۱۱)$$

و معادلات حرکت حاصل عبارت‌اند از

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, n) \qquad (۵.۴.۱۱)$$

که برابرند با

$$\sum_{j}^{n}(M_{jk}\ddot{q}_j + K_{jk}q_j) \qquad (k = 1, 2, \ldots, n) \qquad (۶.۴.۱۱)$$

یا به شکل ماتریسی

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = 0 \qquad (۷.۴.۱۱)$$

اگر جوابی به‌صورت زیر وجود داشته باشد

$$\mathbf{q} = \mathbf{a}\cos\omega t \qquad (۸.۴.۱۱)$$

که $\mathbf{a}$ برداری با n مؤلفهٔ a_j است، معادلهٔ (معادلات) زیر باید برقرار باشد:

$$(\mathbf{K} - \omega^۲\mathbf{M})\mathbf{a} = ۰ \qquad (۹.۴.۱۱)$$

این نمایش ماتریسی، یک مجموعهٔ همگن از معادلات خطی برای n مؤلفهٔ ویژه‌بردار $\mathbf{a}$ است

$$\begin{pmatrix} K_{۱۱} - \omega^۲M_{۱۱} & K_{۱۲} - \omega^۲M_{۱۲} & \dots \\ K_{۲۱} - \omega^۲M_{۲۱} & K_{۲۲} - \omega^۲M_{۲۲} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_۱ \\ a_۲ \\ \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ۰ \\ ۰ \\ \dots \end{pmatrix} \qquad (۱۰.۴.۱۱)$$

برای اینکه جواب نابدیهی داشته باشیم، باید دترمینال ضرایب $\mathbf{a}$ صفر شوند، یعنی

$$\det(\mathbf{K} - \omega^۲\mathbf{M}) = ۰ \qquad (۱۱.۴.۱۱)$$

یا

$$\begin{vmatrix} K_{۱۱} - \omega^۲M_{۱۱} & K_{۱۲} - \omega^۲M_{۱۲} & \dots \\ K_{۲۱} - \omega^۲M_{۲۱} & K_{۲۲} - \omega^۲M_{۲۲} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = ۰ \qquad (۱۲.۴.۱۱)$$

معادلهٔ مشخصهٔ بالا (۱۲.۴.۱۱)، معادله‌ای درجهٔ n برحسب $\omega^۲$ است. n ریشهٔ آن ویژه‌مقادیر یا ویژه‌بسامدهای سیستم به‌شمار می‌آیند.

به این ترتیب، اگر سیستم مفروض n درجهٔ آزادی داشته باشد، به‌طور کلی ممکن است n ویژه‌بسامد نوسان متفاوتی حول پیکربندی تعادل وجود داشته باشد که هر یک با ویژه‌بردار مخصوص خودش، متناظر با یک مد بهنجار، مشخص شود. یافتن ریشه‌ها، یا ویژه‌بسامدها، از معادلهٔ مشخصه اغلب متضمن کار کسل‌کنندهٔ حل معادلات جبری درجهٔ بالا، درجهٔ سوم به‌ازای $n = ۳$، درجهٔ چهارم به‌ازای $n = ۴$، و مانند آنهاست. در برخی وضعیتهای خاص، ریشه‌های معادلهٔ مشخصه یا تکرار می‌شوند، یا صفرند، یا هر دو. در چنین حالتهایی، یافتن ریشه‌ها نباید چندان دشوار باشد. چنین موردی را در پایان همین بخش ملاحظه خواهید کرد. در بخش بعدی، یکی از روشهای تعیین بسامدهای مد بهنجار شبکه‌ای خطی از نوسانگرهای جفت‌شده را بیان خواهیم کرد، که به‌ازای آنها n می‌تواند هر مقداری باشد.

مانند حالت قبل در مورد دو نوسانگر جفت‌شده، جواب کامل معادلهٔ (۱۲.۴.۱۱)، n ویژه‌بسامد ω_k^2 را می‌دهد، که اینها را بعداً می‌توان در معادلهٔ (۹.۴.۱۱) یا (۱۰.۴.۱۱) به‌کارگرفت تا مؤلفه‌های a_{ik} مربوط به n ویژه‌بردار $\mathbf{a}_k$ محاسبه شوند. این ویژه‌بردارها و ویژه‌بسامدها را بعداً می‌توان به‌کار گرفت تا n بردار مد بهنجار $\mathbf{Q}_k$ را از این قرار تشکیل دهند

$$\mathbf{Q}_k(t) = \mathbf{a}_k \cos(\omega_k t - \delta_k) \qquad \mathbf{a}_k = \begin{pmatrix} a_{1k} \\ a_{2k} \\ \dots \\ \dots \\ a_{nk} \end{pmatrix} \qquad (k = 1, 2, \dots, n) \quad (۱۳.۴.۱۱)$$

دامنه‌ها، یا مؤلفه‌های a_{ik}، مستقل نیستند بلکه بین آنها رابطه برقرار است، زیرا برای هر ویژه‌بسامد ω_k، در معادلهٔ ویژه‌بردار همگن (۹.۴.۱۱) یا (۱۰.۴.۱۱) صدق می‌کنند. از اینجا امکان پیدا می‌کنیم که فقط نسبتهای مؤلفه‌های ویژه‌بردار $a_{nk} : \dots : a_{2k} : a_{1k}$ را تعیین کنیم. ما آزادیم آنها را مطابق دلخواه خود بهنجارکنیم. برای سادگی، این کار بیشتر با مساوی یک قراردادن مؤلفهٔ اول انجام می‌شود.

جابه‌جایی هر نوسانگر از وضعیت تعادلش به کمک مختصهٔ تعمیم‌یافتهٔ آن، q_k، یکی از مؤلفه‌های بردار حالت $\mathbf{q}$ برای سیستم، نمایش داده می‌شود. این جواب کلی را می‌خواهیم به‌دست آوریم. هر کدام از این مؤلفه‌ها ترکیبی خطی از مؤلفه‌های بردار مد بهنجار $\mathbf{Q}_k$ هستند که در بسامدهای مربوطه‌شان ω_k نوسان می‌کنند. مؤلفه‌های این بردارهای مد بهنجار در قالب معادلهٔ (۱۳.۴.۱۱) داده شده‌اند و می‌توانند برای ساختن جدولی، مانند جدولی که به جوابهای داده‌شده در معادلهٔ (۱۸.۳.۱۱) برای نوسانگر جفت‌شده منجر شد، به‌کارگرفته شوند. ترکیبهای خطی که جوابهای مطلوب q_k را می‌سازند، در این جدول درج شده‌اند.

	$\mathbf{Q}_1$	$\mathbf{Q}_2$	... ...	$\mathbf{Q}_n$
q_1	$a_{11}\cos(\omega_1 t - \delta_1)$	$a_{12}\cos(\omega_2 t - \delta_2)$	... ...	$a_{1n}\cos(\omega_n t - \delta_n)$
q_2	$a_{21}\cos(\omega_1 t - \delta_1)$	$a_{22}\cos(\omega_2 t - \delta_2)$	... ...	$a_{2n}\cos(\omega_n t - \delta_n)$
...	...	...	... ...	...
...	...	...	... ...	...
q_n	$a_{n1}\cos(\omega_1 t - \delta_1)$	$a_{n2}\cos(\omega_2 t - \delta_2)$	... ...	$a_{nn}\cos(\omega_n t - \delta_n)$

به این ترتیب، جواب کلی برای هر مختصهٔ تعمیم‌یافتهٔ q_k از این قرار است

$$q_k = \sum_{i=1}^{n} a_{ki} \cos(\omega_i t - \delta_i) \qquad (k = 1, 2, \ldots, n) \qquad (۱۴.۴.۱۱)$$

تأکید می‌کنیم که مخصوصاً به‌ازای $n > 2$، می‌ارزد که بردارهای مد بهنجار حدس زده شوند، زیرا تشکیل ماتریس تبدیل $\mathbf{A}$ در این صورت سرراست است و جواب کامل مسئله را می‌توان با عملیاتی نسبتاً ساده با به‌کاربردن این ماتریس یافت.

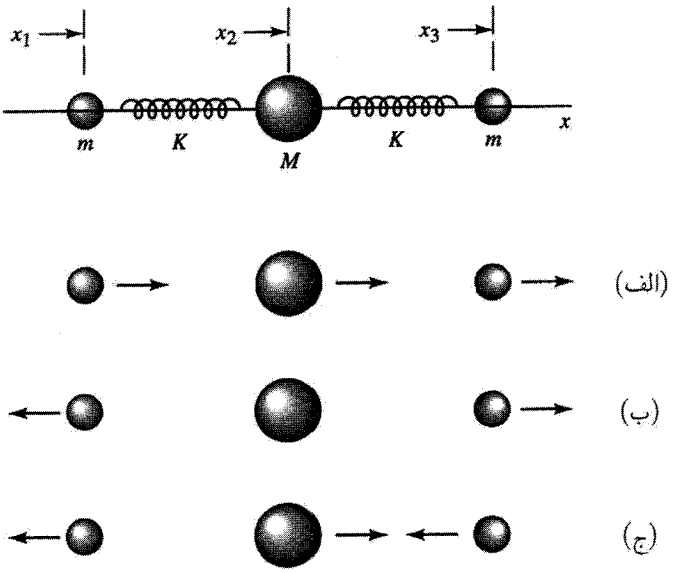
مثال ۱.۴.۱۱ حرکت خطی مولکول سه اتمی

حرکت سیستمی سه‌ذره‌ای را در نظر بگیرید که تمام این ذرات بر یک خط مستقیم واقع‌اند. مثالی از این سیستم همخط، مولکول کربن دیوکسید، CO_2 با ساختار $O - C - O$، است. حرکت را فقط در یک بعد، در امتداد محور x در نظر می‌گیریم (شکل ۱.۴.۱۱). دو ذرهٔ انتهایی، هر یک به جرم m، از طریق تابع پتانسیل که معادل دو فنر به ضریب سفتی K است، به ذرهٔ مرکزی، به جرم M متصل می‌شوند (شکل ۱.۴.۱۱). این مختصات جابه‌جاییهای جرمی x_1، x_2، و x_3 را بیان می‌کنند.

حل:

در این مسئله به آسانی می‌توانیم مدهای بهنجار را حدس بزنیم. تصویر این مدها را در شکلهای ۱.۴.۱۱ (الف) تا (ج) مشاهده می‌کنید. اگر اندکی در این خصوص فکر کنید، پی می‌برید که آنچه در اینجا می‌گذرد از این قرار است که مرکز جرم مولکول شتاب نمی‌گیرد. در مد (ج) جرم مرکزی با اختلاف فاز $180°$ نسبت به دو جرم انتهایی ارتعاش می‌کند. نسبت دامنه‌های ارتعاشی چنان است که مرکز جرم در حال سکون باقی می‌ماند. مُد (ب) با اختلاف فاز $180°$ نسبت به یکدیگر، با دامنه‌های مساوی ارتعاش می‌کنند که در اینجا نیز مرکز جرم ثابت است. مُد (الف) کلاً انتقال مرکز جرم با سرعت ثابت را ترسیم می‌کند.

می‌توانیم این بحث را ادامه دهیم و مسئله را با استفاده از این حدس حل کنیم. ولی این کار را نمی‌کنیم، این مسئله را با بهره‌گیری از روش کلی معرفی‌شده در مثال قبل، حل و فرض می‌کنیم مدهای بهنجار مجهول‌اند. سرانجام، معادلهٔ مشخصه‌ای به‌وجود می‌آوریم که، در این مثال، برحسب ω^2 درجهٔ سوم باشد. (به این صورت سه مختصه، سه مد بهنجار، و سه ویژه‌بسامد در جواب وجود دارد.) حل این معادلهٔ درجهٔ سوم خیلی آسان از کار در می‌آید. سپس، با به‌دست‌آوردن بسامدهای هر مد بهنجار، آنها را در هر یک از معادلاتی قرار می‌دهیم که بین دامنه‌های مختصات جابه‌جایی



شکل ۱.۴.۱۱ مدل مولکول سه اتمی و سه مد بهنجارش برای حرکت روی یک تک‌خط.

با یکدیگر (ماتریس معادل معادلهٔ ویژه برحسب ω^2) رابطه برقرار می‌کنند و، به این ترتیب، مدهای بهنجار به‌دست می‌آیند.

لاگرانژی این سیستم عبارت است از

$$\begin{aligned} L &= T - V \\ &= \left(\frac{m}{2}\dot{x}_1^2 + \frac{M}{2}\dot{x}_2^2 + \frac{m}{2}\dot{x}_3^2\right) - \left[\frac{K}{2}(x_2 - x_1)^2 + \frac{K}{2}(x_3 - x_2)^2\right] \end{aligned} \tag{۱۵.۴.۱۱}$$

و سه معادلهٔ لاگرانژ حرکت به‌صورت زیرند

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_1 + Kx_1 \quad -Kx_2 \quad &= 0 \\ -Kx_1 \quad +M\ddot{x}_2 + 2Kx_2 \quad -Kx_3 \quad &= 0 \\ -Kx_2 \quad +m\ddot{x}_3 + Kx_3 \quad &= 0 \end{aligned} \tag{۱۶.۴.۱۱}$$

اگر جوابی به‌صورت $x_1 = a_1 \cos \omega t$، $x_2 = a_2 \cos \omega t$، $x_3 = a_3 \cos \omega t$ وجود داشته

باشد، در این صورت،

$$\begin{pmatrix} K-m\omega^2 & -K & 0 \\ -K & 2K-M\omega^2 & -K \\ 0 & -K & K-m\omega^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = 0 \qquad (۱۷.۴.۱۱)$$

از این‌رو، معادلهٔ مشخصه عبارت است از

$$\begin{vmatrix} K-m\omega^2 & -K & 0 \\ -K & 2K-M\omega^2 & -K \\ 0 & -K & K-m\omega^2 \end{vmatrix} = 0 \qquad (۱۸.۴.۱۱ \text{ الف})$$

که خوشبختانه، با بسط دترمینال و جمع‌وجورکردن جملات، حاصل به‌صورت ضرب سه عامل در می‌آید

$$\omega^2(-m\omega^2+K)(-mM\omega^2+KM+2Km)=0 \qquad (۱۸.۴.۱۱ \text{ ب})$$

با مساوی صفر قراردادن هر یک از این سه عامل، سه بسامد بهنجار سیستم به‌دست می‌آید:

$$\omega_1=0 \qquad \omega_2=\left(\frac{K}{m}\right)^{1/2} \qquad \omega_3=\left(\frac{K}{m}+2\frac{K}{M}\right)^{1/2} \qquad (۱۹.۴.۱۱)$$

دربارهٔ مدهای متناظر با این سه ریشه بحث می‌کنیم.

۱. اولین مد اصلاً نوسانی نیست، بلکه کلاً انتقال خالص سیستم به‌شمار می‌آید. اگر $\omega=0$ را در معادلات (۱۷.۴.۱۱) قرار دهیم، برای این مد می‌یابیم: $a_1=a_2=a_3$.

۲. با قراردادن $\omega=\omega_2$ در معادلات (۱۷.۴.۱۱)، می‌رسیم به $a_2=0$ و $a_1=-a_3$. در این مد، ذرهٔ مرکزی در حال سکون است، در صورتی که دو ذرهٔ انتهایی در جهتهای مخالف (به‌صورت پادمتقارن) با دامنهٔ یکسان ارتعاش می‌کنند.

۳. سرانجام، با قراردادن $\omega=\omega_3$ در معادلات (۱۷.۴.۱۱)، به این روابط می‌رسیم: $a_1=a_3$ و $a_2=-2a_1(m/M)=-2a_3(m/M)$. بنابراین، در این مد دو ذرهٔ انتهایی به‌طور هماهنگ ارتعاش می‌کنند، در صورتی که ذرهٔ مرکزی به‌طور مخالف و با دامنهٔ متفاوت ارتعاش می‌کند. نمودار این سه مد را در شکل ۱.۴.۱۱ مشاهده می‌کنید.

نسبت ω_3/ω_2 از ثابت K مستقل است، یعنی،

$$\frac{\omega_3}{\omega_2}=\left(1+2\frac{m}{M}\right)^{1/2}$$

در مولکول کربن دیوکسید نسبت m/M برای CO_2 معمولی (اتمهای C_{12} و O_{16}) خیلی نزدیک به ۱۲ : ۱۶ است. بنابراین، نسبت بسامدها عبارت خواهد بود از

$$\frac{\omega_3}{\omega_2} = \left(1 + 2 \times \frac{16}{12}\right)^{1/2} = \left(\frac{11}{3}\right)^{1/2} = 1{,}915$$

۵.۱۱ ارتعاش نخ باردار یا آرایهٔ خطی نوسانگرهای هماهنگ جفت‌شده

هر سیستم جامد و حقیقی شامل چندین ذره است که هرکدام از طریق پتانسیلهای اتمی به ناحیهٔ کوچکی از فضا متصل شده، نه اینکه فقط دو یا سه ذره باشد که فنرها آنها را به یکدیگر متصل کرده باشند. اما، پتانسیل بستگی که هر ذره آن را «احساس می‌کند»، با تابع درجهٔ دومی از اختلاف بین جابه‌جایی هر ذره از وضعیت تعادلش و جابه‌جایی متناظرش برای ذره‌ای که بلافاصله درکنارش قرار دارد، به‌خوبی نمایش داده می‌شود. به این ترتیب، چنین سیستمی اساساً یکی از چندین نوسانگر جفت‌شده است. تحلیل این سیستم می‌تواند به توصیف نوسانهای محیطی پیوسته، انتشار امواج در یک محیط پیوسته، یا ارتعاشات شبکه‌ای بلورین منجر شود. در این بخش، نخستین گام را به سوی تجهیزکردن شما با جنگ‌افزار نظری لازم برای حمله به چنین مسائلی، برمی‌داریم. حرکت سیستم مکانیکی ساده‌ای را بررسی می‌کنیم که شامل یک نخ کشسان سبک است و دوسر آن به دو نقطه محکم بسته شده و در فواصل مساوی n ذره به جرم مساوی m روی آن سوار شده‌اند. اما، پیش از اقدام به این تحلیل، یک گریز تاریخی مختصر در این زمینه انجام می‌دهیم.[۱]

تحلیل دینامیک جرمهایی را که در یک ردیف به هم بسته شده‌اند، ابتدا خود نیوتون انجام داد. دو جانشین او، برنولیها (یوهان و پسرش دانیل)، سرانجام در حل این مسئله موفق شدند. آنان نشان دادند که سیستم متشکل از n جرم، دقیقاً n مُد مستقل دارد (فقط برای حرکت یک‌بعدی). در سال ۱۷۵۳، دانیل برنولی (۱۷۸۲ـ۱۷۰۰) نشان داد که حرکت کلی این سیستم مرتعش به‌صورت برهم‌نهی مدهای بهنجارش توصیف می‌شود. به قول لئون بریلوئن؛ کسی که در نظریهٔ ارتعاشات شبکه بلوری سهم بسزایی دارد[۲]:

> می‌توان گفت این پژوهش برنولیها، آغاز فیزیک نظری را، جدا از مکانیک، به این معنا شکل می‌دهد که نخستین تلاش برای تدوین قوانین حرکت سیستمی از ذرات، و نه یک تک‌ذره، به‌شمار می‌آید.

---

۱. مثلاً ر. ک.

A. P. French, *Vibrations and Waves*, The MIT Introductory Physics Series. Norton, New York (1971).

2. L. Brillouin, *wave Propagation in Periodic Structures*, Dover, New York (1953).

اصل برهم‌نهی اهمیت دارد، زیرا حالت خاصی از سری فوریه است، و به موقع وضع و تدوین شد تا بیانی از قضیهٔ فوریه باشد.

اکنون، به اتکای این کلمات مؤثر تحلیل را آغاز می‌کنیم.

جابه‌جاییهای ذرات مختلف از وضعیت تعادل را با مختصات q_1، q_2، ...، q_n مشخص می‌کنیم. عملاً دو نوع جابه‌جایی می‌تواند پیش بیاید، یعنی، جابه‌جایی طولی که ذره در امتداد نخ حرکت می‌کند، و جابه‌جایی عرضی که در این حالت ذره در امتداد عمود بر طول نخ به حرکت در می‌آید. نمودار این دو نوع حرکت را در شکل ۱.۵.۱۱ مشاهده می‌کنید. برای سادگی فرض می‌کنیم که حرکت، طولی خالص یا عرضی خالص باشد، هر چند که در وضعیت فیزیکی واقعی می‌تواند ترکیب این دو حرکت پیش آید. بنابراین، انرژی جنبشی عبارت است از

$$T = \frac{m}{2}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + \ldots + \dot{q}_n^2) \qquad (۱.۵.۱۱)$$

اگر حرف k را برای نمایاندن ذرهٔ معینی به‌کار بریم، در این صورت، در مورد حرکت طولی، کش‌آمدن قسمتی از نخ بین ذرهٔ k و $k+1$ عبارت است از

$$q_{k+1} - q_k \qquad (۲.۵.۱۱)$$

به این ترتیب، انرژی پتانسیل این قسمت نخ عبارت است از

$$\frac{1}{2}K(q_{k+1} - q_k)^2 \qquad (۳.۵.۱۱)$$

K ضریب سفتی کشسانی جزئی از نخ است که بین دو ذرهٔ مجاور رابطه برقرار می‌کند.

در مورد حرکت عرضی، فاصلهٔ بین ذرهٔ k و $k+1$ عبارت است از

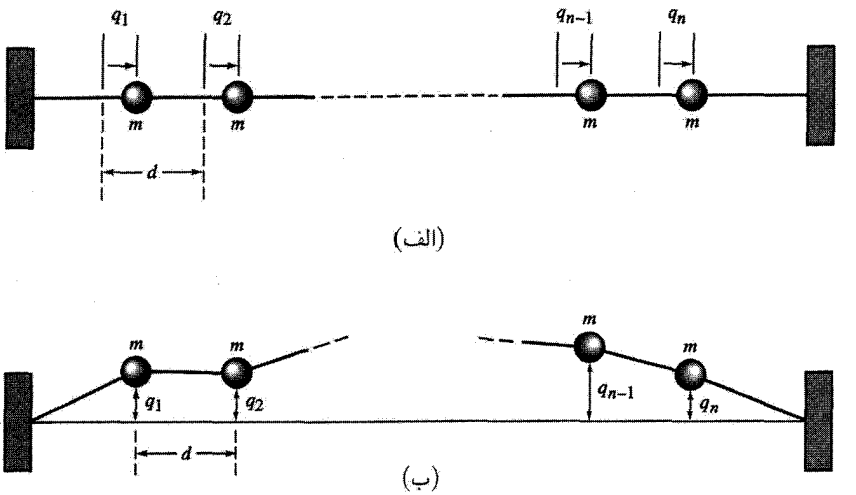
$$[d^2 + (q_{k+1} - q_k)^2]^{1/2} = d + \frac{1}{2d}(q_{k+1} - q_k)^2 + \ldots \qquad (۴.۵.۱۱)$$

که d فاصلهٔ بین دو ذرهٔ مجاور در وضعیت تعادل است، بنابراین، کشیدگی قسمتی از نخ واصل بین دو ذره تقریباً عبارت است از

$$\Delta l = \frac{1}{2d}(q_{k+1} - q_k)^2 \qquad (۵.۵.۱۱)$$

به این ترتیب، اگر F نیروی کشسان نخ باشد، انرژی پتانسیل این بخش موردنظر از این قرار به‌دست می‌آید

$$F\Delta l = \frac{F}{2d}(q_{k+1} - q_k)^2 \qquad (۶.۵.۱۱)$$



شکل ۱.۵.۱۱ آرایهٔ خطی ذرات با نخ باردار مرتعش. (الف) حرکت طولی. (ب) حرکت عرضی.

در نتیجه، انرژی پتانسیل کل سیستم چه عرضی و چه طولی، به‌صورت تابع درجهٔ دوم زیر بیان می‌شود

$$V = \frac{K}{2}[q_1^2 + (q_2 - q_1)^2 + \ldots + (q_n - q_{n-1})^2 + q_n^2] \qquad (۷.۵.۱۱)$$

که در آن

$$K = \frac{F}{d} = \frac{\text{کشش}}{\text{فاصلهٔ جدایی}} \qquad \text{ارتعاش عرضی}$$

یا

$$K = \text{ثابت کشسانی} \qquad \text{ارتعاش طولی}$$

پس، تابع لاگرانژی هر یک از دو حالت از این قرار خواهد بود

$$L = \frac{1}{2}\sum_k [m\dot{q}_k^2 - K(q_{k+1} - q_k)^2] \qquad (۸.۵.۱۱)$$

بنابراین، معادلات لاگرانژ حرکت

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial L}{\partial q_k} \qquad (۹.۵.۱۱)$$

به‌صورت زیر در می‌آیند

$$m\ddot{q}_k = -K(q_k - q_{k-1}) + K(q_{k+1} - q_k) \qquad (۱۰.۵.۱۱)$$

که $k = 1, 2, \ldots, n$.

برای حل دستگاه n معادله‌ای بالا، از جوابی آزمایشی بهره می‌گیریم که در آن فرض می‌شود qها به‌طور هماهنگ با زمان تغییر می‌کنند:

$$q_k = a_k \cos \omega t \qquad \text{(۱۱.۵.۱۱ الف)}$$

که a_k دامنهٔ ارتعاش ذرّهٔ kام است. با نشاندن این جواب آزمایشی (معادلهٔ ۱۱.۵.۱۱ الف) در معادلات دیفرانسیل (معادلات ۱۰.۵.۱۱) فرمول بازگشتی زیر برای دامنه‌ها حاصل می‌شود:

$$-m\omega^2 a_k = K(a_{k-1} - 2a_k + a_{k+1}) \qquad \text{(۱۱.۵.۱۱ ب)}$$

اگر قرار دهیم

$$a_0 = a_{n+1} = 0 \qquad \text{(۱۱.۵.۱۱ ج)}$$

فرمول بالا شامل نقاط انتهایی نیز خواهد بود. بنابراین، دترمینان مشخصه عبارت است از

$$\begin{vmatrix} 2K - m\omega^2 & -K & 0 & \dots & 0 \\ -K & 2K - m\omega^2 & -K & \dots & 0 \\ 0 & -K & 2K - m\omega^2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2K - m\omega^2 \end{vmatrix} = 0 \qquad \text{(۱۲.۵.۱۱)}$$

این دترمینان از مرتبهٔ nام است و بنابراین n مقدار ω که در معادله صدق می‌کنند وجود خواهد داشت. ولی به جای اینکه با عملیات جبری n ریشهٔ معادله را پیدا کنیم، ثابت شده است که با انجام عملیات مستقیم روی رابطهٔ بازگشتی (معادلهٔ ۱۱.۵.۱۱ ب) می‌توانیم آنها را بیابیم.

برای انجام این کار، کمیت ϕ را تعریف می‌کنیم که رابطهٔ آنها از طریق معادلهٔ زیر با دامنه‌های a_k برقرار می‌شود:

$$a_k = A \sin k\phi \qquad \text{(۱۳.۵.۱۱)}$$

پس، با نشاندن مستقیم این رابطه در فرمول بازگشتی (۱۱.۵.۱۱ ب)، می‌رسیم به

$$-m\omega^2 A \sin(k\phi) = KA[\sin(k\phi - \phi) - 2\sin(k\phi) + \sin(k\phi + \phi)]$$

(۱۴.۵.۱۱ الف)

که به

$$m\omega^2 = K(2 - 2\cos\phi) = 4K\sin^2\frac{\phi}{2} \qquad (ب\ ۱۴.۵.۱۱)$$

یا

$$\omega = 2\omega_0 \sin\frac{\phi}{2} \qquad (ج\ ۱۴.۵.۱۱)$$

تبدیل می‌شود، که در آن داریم

$$\omega_0 = \left(\frac{K}{m}\right)^{1/2} \qquad (د\ ۱۴.۵.۱۱)$$

معادلهٔ (۱۴.۵.۱۱ ج) بسامدهای بهنجار را برحسب کمیت ϕ به‌دست می‌دهد، که هنوز ϕ را تعیین نکرده‌ایم. اکنون، در واقع، با نشاندن a_k به‌صورتهای: $A\cos k\phi$، $Ae^{ik\phi}$، و $Ae^{-ik\phi}$ یا هر ترکیب خطی از این کمیتها در فرمول بازگشتی، همان رابطه به‌دست می‌آید ولی فقط جاگذاری $a_k = A\sin(k\phi)$ شرط نهایی $a_0 = 0$ را تأمین می‌کند. به منظور تعیین مقدار واقعی پارامتر ϕ، و بنابراین یافتن بسامد بهنجار نخ مرتعش، از شرط نهایی دیگر، یعنی $a_{n+1} = 0$، استفاده می‌کنیم. اگر قرار دهیم

$$(n+1)\phi = N\pi \qquad (۱۵.۵.۱۱)$$

این شرط برقرار خواهد بود، که در آن N عدد صحیح است؛ زیرا

$$a_{n+1} = A\sin N\pi = 0 \qquad (۱۶.۵.۱۱)$$

اینک، با یافتن ϕ می‌توانیم بسامدهای بهنجار را محاسبه کنیم. این بسامدها عبارت‌اند از

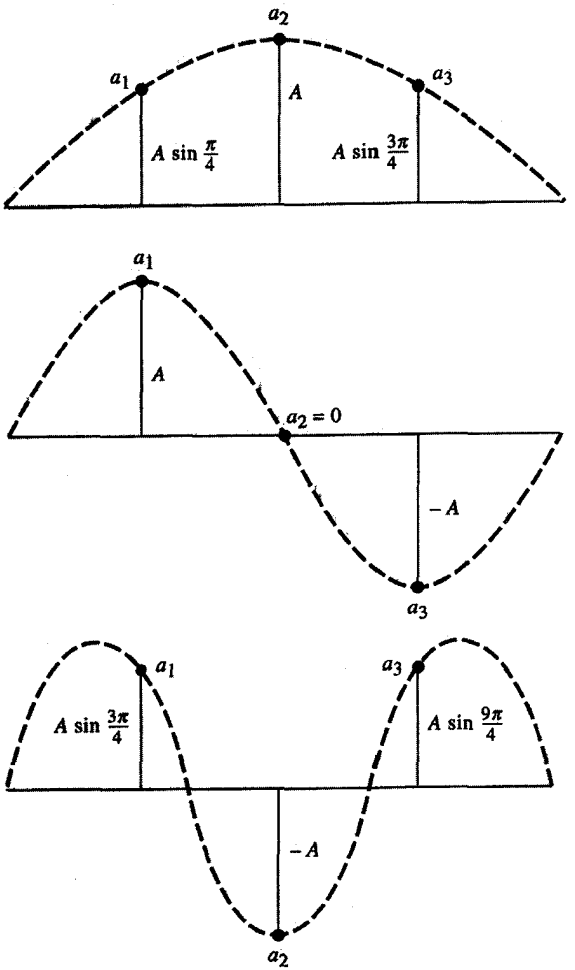
$$\omega_N = 2\omega_0 \sin\left(\frac{N\pi}{2n+2}\right) \qquad (۱۷.۵.۱۱)$$

به‌علاوه، با توجه به معادلات (۱۳.۵.۱۱) و (۱۵.۵.۱۱)، می‌بینیم که دامنهٔ مدهای بهنجار عبارت‌اند از

$$a_k = A\sin\left(\frac{N\pi k}{n+1}\right) \qquad (۱۸.۵.۱۱)$$

در اینجا، مقدار n، ...، ۲، ۱ $= k$، ذرهٔ خاصی را در آرایهٔ خطی مشخص می‌کند و مقدار n، ...، ۲، ۱ $= N$ به مد بهنجاری مربوط می‌شود که سیستم در آن مُد ارتعاش می‌کند.

نمایش تغییرات مدهای بهنجار مختلف از طریق ترسیم دامنه‌ها که از معادلهٔ (۱۸.۵.۱۱) به‌دست آمده‌اند، نشان داده می‌شود. این دامنه‌ها، مطابق شکل ۲.۵.۱۱، روی منحنی سینوسی



شکل ۲.۵.۱۱ سه مد بهنجار یک آرایهٔ سه‌ذره‌ای.

قرار می‌گیرند، که در این شکل حالت سه ذره $n = ۳$ نمایش داده شده است. حرکت واقعی این سیستم، وقتی در یک تک‌مد ارتعاش می‌کند، در قالب این معادله بیان می‌شود

$$q_k = a_k \cos \omega_N t = A \sin \left(\frac{\pi N k}{n + ۱} \right) \cos \omega_N t \qquad (۱۹.۵.۱۱)$$

نوع کلی حرکت ترکیبی خطی از تمام مدهای بهنجار است. این معنا را می‌توان به این صورت بیان کرد

$$q_k = \sum_{N=1}^{n} A_N \sin\left(\frac{N\pi k}{n+1}\right) \cos(\omega_N t - \epsilon_N) \qquad (۲۰.۵.۱۱)$$

که در آن، مقادیر A_N و ϵ_N از روی شرایط اولیه تعیین می‌شوند.

فرض کنید حالتی را بررسی می‌کنیم که تعداد جرمهای روی نخ خیلی زیاد باشد. نخی واقعی مجموعه‌ای از تعداد خیلی زیادی اتم است که به یکدیگر بسیار نزدیک‌اند.

فرض کنید n افزایش یابد، اما در عین حال فاصلهٔ d بین ذرات مجاور کاهش یابد، به‌طوری که طول نخ، $L = (n+1)d$، ثابت گرفته شود. بنابراین، به‌ازای $N \ll n$، شناسهٔ جملهٔ سینوسی، $N\pi/[2(n+1)]$، در معادلهٔ (۱۷.۵.۱۱) کوچک است. از این‌رو، به‌طور تقریب داریم

$$\omega_N = \omega_0 \left(\frac{N\pi}{n+1}\right) \qquad (۲۱.۵.۱۱)$$

اما برای نوسانهای عرضی داریم

$$\omega_0 = \left(\frac{K}{m}\right)^{1/2} = \left(\frac{F}{md}\right)^{1/2} \qquad (۲۲.۵.۱۱)$$

و با نشاندن آن در معادلهٔ (۲۱.۵.۱۱)، می‌رسیم به

$$\omega_N \approx \left(\frac{F}{m/d}\right)^{1/2} \frac{N\pi}{(n+1)d} \qquad (۲۳.۵.۱۱ \text{ الف})$$

اما $(n+1)d = L$ طول کل نخ، و m/d جرم واحد طول آن، μ، (چگالی جرم خطی) است. بنابراین، به‌طور تقریب داریم

$$\omega_N = N\frac{\pi}{L}\left(\frac{F}{\mu}\right)^{1/2} \qquad (N = 1, 2, \ldots) \qquad (۲۳.۵.۱۱ \text{ ب})$$

در حالت خاص،

$$\omega_1 = \frac{\pi}{L}\left(\frac{F}{\mu}\right)^{1/2} \qquad (۲۳.۵.۱۱ \text{ ج})$$

و $\omega_N = N\omega_1$. بسامدهای بهنجار مضارب صحیحی از پایینترین بسامد، یا بسامد پایه، ω_1، هستند. به‌یاد داشته باشید، که این فقط یک تقریب است، اما به‌ازای $N \ll n$، تقریب بسیار خوبی است.

اکنون جابه‌جاییهای ذرات را تحت این شرایط بررسی می‌کنیم. ممکن است چه حدسی بزنیم؟ این جابه‌جاییها باید تقریب خیلی نزدیکی از ارتعاش نخ واقعی باشند. برای مُد Nام جابه‌جایی

ذرهٔ k در قالب معادلهٔ (۱۹.۵.۱۱) بیان می‌شود. اما، به جای مشخص‌کردن ذره با مقدار k، آن‌را با فاصله‌اش تا انتهای ثابت نخ، $x = kd$، مشخص می‌کنیم. از این‌رو

$$\frac{kN\pi}{(n+1)} = \frac{N\pi(kd)}{(n+1)d} = \frac{N\pi x}{L} \qquad (۲۴.۵.۱۱)$$

نشاندن شناسهٔ جملهٔ سینوسی در معادلهٔ (۱۹.۵.۱۱) به جای این عامل بالا، این امکان را فراهم می‌کند که آن را چنین بازنویسی کنیم

$$q_N(x,t) = A\sin\left(\frac{N\pi x}{L}\right)\cos\omega_N t \quad (N = 1, 2, \ldots)$$

$$= A\sin\left(\frac{2\pi x}{\lambda_N}\right)\cos 2\pi f_N t \qquad (۲۵.۵.۱۱ \text{ الف})$$

که در آن طول موج λ_N و بسامد f_N را به‌صورت زیر تعریف کرده‌ایم

$$\lambda_N = \frac{2L}{N} \qquad f_N = \frac{\omega_N}{2\pi} \qquad (۲۵.۵.۱۱ \text{ ب})$$

معنی این جملات که در مورد حرکت موج در امتداد محیطی پیوسته اعمال شد، در بخش بعد دقیقتر بیان خواهد شد. معادلهٔ (۲۵.۵.۱۱ ب) جابه‌جایی هر نقطه را در طول نخ پیوسته وقتی بیان می‌کند که در مُد Nام ارتعاش می‌کند. این معادله موج ایستاده‌ای به طول موج λ_N را باز می‌نمایاند. هر مد ارتعاشی شامل تعداد صحیحی واحدهای نیم طول موج است که مقیدند در طول L بگنجند، به‌طوری که نقاط انتهایی گره باشند، یعنی ارتعاش نکنند. معنی بسامد پایه جمله ــ هماهنگهای اول، دوم، سوم و الی آخر چیزی شبیه تارهای مرتعش سیم ویلن ــ باید واضح باشد. تعجبی ندارد که فیثاغورثیان اولیه به اعداد صحیح توجه زیادی نشان می‌دادند.

در بخش بعد، وضعیت قبلی را مستقیماً به عنوان محیط پیوسته، به جای اینکه از تعداد زیادی جرمهای مجزا تشکیل شده باشد، بررسی می‌کنیم. معادلهٔ «موج» دیفرانسیل حاکم بر حرکت محیط پیوسته را تشکیل می‌دهیم، و جوابهای موج ایستادهٔ یکسان با جوابهای نشان داده‌شدهٔ قبلی را به‌دست می‌آوریم.

۶.۱۱ ارتعاش سیستم پیوسته: معادلهٔ موج

حال حرکت آرایه‌ای خطی از ذرات متصل به یکدیگر را در نظر می‌گیریم که تعداد آنها بینهایت زیاد و فاصلهٔ بین ذرات مجاور بینهایت کوچک باشد. به بیان دیگر، یک طناب سنگین پیوسته یا یک

میله داریم. برای تحلیل این نوع سیستم، بهتر است معادلات دیفرانسیل حرکت سیستم متناهی (معادلهٔ ۱۰.۵.۱۱) را دوباره به‌صورت زیر بنویسیم:

$$m\ddot{q} = Kd\left[\left(\frac{q_{k+1}-q_k}{d}\right)-\left(\frac{q_k-q_{k-1}}{d}\right)\right] \qquad (۱.۶.۱۱)$$

که در آن d فاصلهٔ بین نقاط تعادل هر دو ذرهٔ مجاور است. حال اگر متغیر x فواصل کلی در امتداد طولی را نشان دهد، و اگر تعداد ذرات n خیلی زیاد شود به طریقی که d در مقایسه با طول کل طناب ناچیز باشد، می‌توانیم بنویسیم

$$\begin{aligned}\frac{q_{k+1}-q_k}{d} &\approx \left(\frac{\partial q}{\partial x}\right)_{x=kd+d/2}\\ \frac{q_k-q_{k-1}}{d} &\approx \left(\frac{\partial q}{\partial x}\right)_{x=kd-d/2}\end{aligned} \qquad (۲.۶.۱۱)$$

در نتیجه، تفاضل این دو عبارت در معادلهٔ (۲.۶.۱۱) برابر است با مشتق دوم ضرب‌در d، یعنی

$$\frac{q_{k+1}-q_k}{d}-\frac{q_k-q_{k-1}}{d} \approx d\left(\frac{\partial^2 q}{\partial x^2}\right)_{x=kd} \qquad (۳.۶.۱۱)$$

از این‌رو، می‌توان معادلهٔ حرکت را به این قرار نوشت

$$\frac{\partial^2 q}{\partial t^2} = \frac{Kd^2}{m}\frac{\partial^2 q}{\partial x^2} \qquad (۴.۶.۱۱ \text{ الف})$$

یا

$$\frac{\partial^2 q}{\partial t^2} = v^2\frac{\partial^2 q}{\partial x^2} \qquad (۴.۶.۱۱ \text{ ب})$$

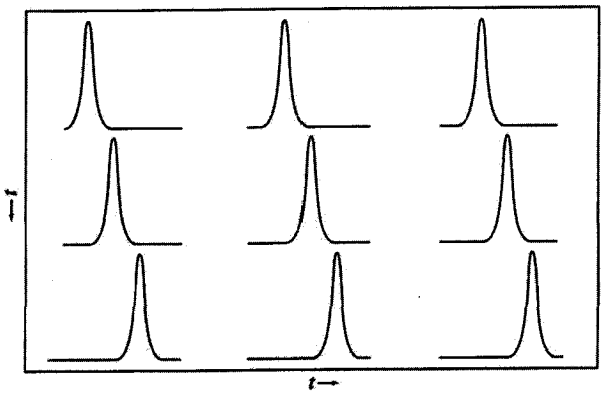
که در آن کوتاه‌نویسی زیر را وارد می‌کنیم

$$v^2 = \frac{Kd^2}{m} \qquad (۴.۶.۱۱ \text{ ج})$$

معادلهٔ (۴.۶.۱۱ ب) یکی از معادلات دیفرانسیل شناخته‌شدهٔ فیزیک ریاضیاتی است. این معادله را معادلهٔ موج یک‌بعدی می‌گویند. در موارد گوناگون و فراوانی با این معادله مواجه می‌شویم. جوابهای این معادلهٔ موج، نوعی آشفتگیهای پیشرونده را بازگو می‌کنند. کار آسانی است که تحقیق کنیم نوع بسیار کلی جواب معادلهٔ موج از این قرار به‌دست می‌آید:

$$q = f(x+vt) \qquad (۵.۶.۱۱ \text{ الف})$$

یا



شکل ۱.۶.۱۱ ردیف تصاویر موجی که به سمت راست منتشر می‌شوند. این ردیف با به‌کاربردن تابع اَنیمیت متماتیکا [1] ایجاد شده است.

$$q = f(x - vt) \qquad \text{(ب ۵.۶.۱۱)}$$

که f عبارت است از هر تابع قابل دیفرانسیل‌گیری با شناسهٔ $x \pm vt$. جواب اول یک آشفتگی را نشان می‌دهد که در جهت منفی x با سرعت v منتشر می‌شود و معادلهٔ دوم آشفتگی پیشرونده‌ای را با سرعت v در جهت مثبت x به نمایش می‌گذارد. در مسئلهٔ خاص مورد بحث ما، آشفتگی q جابه‌جایی جزء کوچکی از سیستم نسبت به پیکربندی تعادل آن به‌شمار می‌آید (شکل ۱.۶.۱۱). در مورد ریسمان، این جابه‌جایی می‌تواند برآمدگی و فرورفتگی‌ای باشد که در طول طناب سیر می‌کند و در مورد میلهٔ صلب، آشفتگی نام‌برده می‌تواند ناحیهٔ متراکم یا منبسطی باشد که در طول میله حرکت می‌کند.

محاسبهٔ سرعت موج

در بخش قبل برای حرکت عرضی نخ باردار ثابت K را پیدا کردیم که عبارت بود از نسبت F/d که F کشش نخ است. البته، در مورد نخ پیوسته، چون d به صفر میل می‌کند، باید این نسبت بینهایت شود، ولی، اگر چگالی خطی با جرم واحد طول μ را وارد کنیم، داریم

$$\mu = \frac{m}{d} \qquad (۶.۶.۱۱)$$

در نتیجه، عبارت مربوط به v^2 (معادلهٔ ۴.۶.۱۱ ج) را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$v^2 = \frac{(F/d)d^2}{\mu d} = \frac{F}{\mu} \qquad \text{(الف ۷.۶.۱۱)}$$

1. *Mathematica's* Animate function

که d حذف می‌شود. در این صورت، سرعت انتشار امواج عرضی در نخ پیوسته عبارت است از

$$v = \left(\frac{F}{\mu}\right)^{1/2} \qquad (۷.۶.۱۱ \text{ ب})$$

در مورد ارتعاشات طولی، مدول کشسانی Y را وارد می‌کنیم که بنا بر تعریف عبارت است از نسبت نیرو به کشیدگی در واحد طول. بنابراین، K، یعنی ضریب سفتی قسمت کوچکی به طول d، عبارت است از

$$K = \frac{Y}{d} \qquad (۸.۶.۱۱)$$

در نتیجه، معادلهٔ (۴.۶.۱۱ ج) را می‌توان به‌صورت زیر نوشت

$$v^2 = \frac{(Y/d)d^2}{\mu d} = \frac{Y}{\mu} \qquad (۹.۶.۱۱ \text{ الف})$$

و مجدداً می‌بینیم که d حذف می‌شود. از این‌رو، سرعت انتشار امواج طولی در میلهٔ کشسان عبارت است از

$$v = \left(\frac{Y}{\mu}\right)^{1/2} \qquad (۹.۶.۱۱ \text{ ب})$$

امواج سینوسی

در بررسی حرکت موجی، جوابهای خاص معادلهٔ موج

$$\frac{\partial^2 q}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} \qquad (۱۰.۶.۱۱)$$

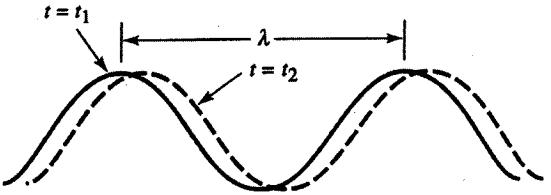
که در آن q تابعی سینوسی از x و t است، یعنی،

$$q = A^{\sin}_{\cos}\left[\frac{2\pi}{\lambda}(x + vt)\right] \qquad (۱۱.۶.۱۱ \text{ الف})$$

$$q = A^{\sin}_{\cos}\left[\frac{2\pi}{\lambda}(x - vt)\right] \qquad (۱۱.۶.۱۱ \text{ ب})$$

از اهمیت زیادی برخوردارند. این جوابها نمایانگر آشفتگیهای، یا موجهای، پیشرونده‌اند، که در یک نقطهٔ معین x، جابه‌جایی به‌طور هماهنگ با زمان تغییر می‌کند. دامنهٔ این حرکت ثابت A است، و بسامد f از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{v}{\lambda} \qquad (۱۲.۶.۱۱)$$



شکل ۲.۶.۱۱ موج سینوسی پیشرونده.

به‌علاوه، در طول معینی از زمان t، مثلاً $t = ۰$، جابه‌جایی به‌صورت سینوسی برحسب فاصلهٔ x تغییر می‌کند. فاصلهٔ بین دو جابه‌جایی بیشینه یا کمینهٔ متوالی، عبارت است از ثابت λ که طول موج نامیده می‌شود. امواجی که با معادلهٔ (۱۱.۶.۱۱ الف) بیان می‌شوند، در جهت منفی x انتشار می‌یابند و آنها که در قالب معادلهٔ (۱۱.۶.۱۱ ب) بیان می‌شوند، در جهت مثبت x انتشار می‌یابند (شکل ۲.۶.۱۱). این دو نوع موج حالتهای خاصی از جواب نوع کلی‌اند که قبلاً از آنها یاد کردیم.

امواج ایستاده

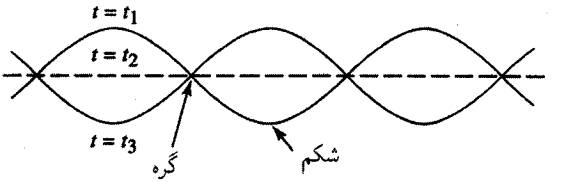
چون معادلهٔ موج (معادلهٔ ۴.۶.۱۱ ب) خطی است، می‌توانیم با تشکیل ترکیبهای خطی از جوابهای معلوم، هر تعداد جواب جدید که بخواهیم به‌دست آوریم. یکی از ترکیبهای خطی ممکن که دارای مفهوم خاصی است، از طریق برهم‌نهی دو موج هم‌دامنهٔ A که در جهتهای مخالف حرکت می‌کنند، به‌دست می‌آید. در نمادگذاری ما، چنین جوابی از این قرار است

$$q = A\sin\left[\frac{۲\pi}{\lambda}(x+vt)\right] + A\sin\left[\frac{۲\pi}{\lambda}(x-vt)\right] \qquad (۱۳.۶.۱۱)$$

با بهره‌گیری از تساوی مثلثاتی مناسب و جمع‌کردن جملات، پی می‌بریم که معادله به‌صورت زیر تبدیل می‌شود

$$q = ۲A\sin\left(\frac{۲\pi}{\lambda}x\right)\cos\omega t \qquad (۱۴.۶.۱۱)$$

که در آن $\omega = ۲\pi v/\lambda$. دامنهٔ آشفتگی برایند برابر است با $۲A$. توجه کنید که این معادله با معادلهٔ (۲۵.۵.۱۱ الف) یکسان است (فقط در آنجا دامنهٔ خالص، A بود) که حرکت نخ باردار را در حالتی نشان می‌دهد که تعداد جرمهای مجزا به بینهایت و فاصلهٔ آنها به صفر نزدیک شود، به‌طوری که طول کل نخ ثابت باقی بماند. در اینجا نیز، معادلهٔ (۱۴.۶.۱۱) موج ایستاده را نمایش می‌دهد. دامنهٔ جابه‌جایی همواره با x تغییر می‌کند. به‌ازای $x = ۰$، $\lambda/۲$، λ، $۳\lambda/۲$، ...، جابه‌جایی همیشه



شکل ۳.۶.۱۱ یک موج ایستاده.

صفر است، زیرا جملهٔ سینوسی در این نقاط صفر می‌شود. این نقاط با دامنهٔ صفر را، گره‌های موج نامند. به‌ازای ...، $5\lambda/4$، $3\lambda/4$، $x = \lambda/4$ دامنهٔ نخ مرتعش بیشینه است. این نقاط شکمهای موج‌اند. فاصلهٔ بین دو گره (یا دو شکم) مجاور، $\lambda/2$ است. نکات بالا را در شکل ۳.۶.۱۱ به روشنی مشاهده می‌کنید.

باز هم توجه کنید که قید خوش‌تعریفی دربارهٔ مقادیر طول موجهای λ وجود دارد. چون نقاط انتهایی نخ ثابت‌اند، شرایط مرزی از این قرار است

$$q = 0 \qquad (x = 0, L) \tag{۱۵.۶.۱۱}$$

که جواب ما (معادلهٔ ۱۴.۶.۱۱) باید در این شرایط صدق کند. شرط اول خودبه‌خود برقرار می‌شود. شرط مرزی دوم در $x = L$ برقرار می‌شود، اگر

$$L = N\left(\frac{\lambda}{2}\right) \qquad \lambda = \frac{2L}{N} \tag{۱۶.۶.۱۱}$$

اگر قرار است نقاط انتهایی گره باشند، باید تعداد صحیحی از نیم‌طول موج در طول L بگنجد. این دقیقاً شرطی است که قبلاً برای مدهای بهنجار نخ باردار به‌دست آوردیم.

مسائل

۱.۱۱ ذره‌ای به جرم m در یک بعد با توابع انرژی پتانسیل زیر حرکت می‌کند:

(الف) $V(x) = \frac{k}{2}x^2 + \frac{k^2}{x}$

(ب) $V(x) = kxe^{-bx}$

(ج) $V(x) = k(x^4 - b^2x^2)$

تمام ثابتها حقیقی و مثبت‌اند. وضعیت تعادل را برای هر حالت بیابید و پایداری آنها را تعیین کنید.

(د) بسامد زاویه‌ای ω را برای نوسانهای کم‌دامنه، به‌ترتیب، حول وضعیت تعادل پایدار بندهای (الف)، (ب)، و (ج) بیابید و زمان تناوب را برحسب ثانیه برای هر حالت به‌دست آورید، در صورتی که $m = ۱g$، و k و b هر یک در یکاهای cgs مقدار واحد داشته باشند.

۲.۱۱ ذره‌ای در دو بعد تحت تابع انرژی پتانسیل

$$V(x, y) = k(x^۲ + y^۲ - ۲bx - ۴by)$$

حرکت می‌کند که k ثابتی مثبت است. نشان دهید که یک وضعیت تعادل دارد. آیا این تعادل پایدار است یا ناپایدار؟

۳.۱۱ تابع انرژی پتانسیل ذره‌ای به جرم m، در حرکت یک‌بعدی عبارت است از

$$V(x) = -\frac{k}{۲}x^۲$$

و بنابراین، نیرو از نوع پادبازگرداننده است

$$F(x) = kx$$

که در $x = ۰$ یک وضعیت تعادل ناپایدار به‌شمار می‌آید، در صورتی که k ثابت مثبتی است. اگر شرایط اولیه در $t = ۰$ عبارت باشند از $x = x_۰$ و $\dot{x} = ۰$، نشان دهید حرکت حاصل به‌صورت «عنان گسیختگی» نمایی

$$x(t) = x_۰(e^{\alpha t} + e^{-\alpha t})/۲$$

بیان می‌شود که کمیت $\alpha = \sqrt{k/m}$ ثابت است.

۴.۱۱ دو سر یک ریسمان کشسان سبک به طول $۲l$ و ضریب سفتی k در وضعیت افقی به فاصلهٔ $۲l$ از هم ثابت شده‌اند. سپس قطعه‌جسم m را به وسط ریسمان می‌آویزند. نشان دهید که تابع انرژی پتانسیل این سیستم در قالب این عبارت بیان می‌شود:

$$V(y) = ۲k[y^۲ - ۲l(y^۲ + l^۲)^{۱/۲}] - mgy$$

که y شکم‌دادگی قائم وسط ریسمان است. به کمک این رابطه نشان دهید که وضعیت تعادل از ریشهٔ معادلهٔ

$$u^۴ - ۲au^۳ + a^۲u^۲ - ۲au + a^۲ = ۰$$

به‌دست می‌آید که $u = y/l$ و $a = mg/۴kl$.

۵.۱۱ یک قطعه‌جسم مکعبی‌شکل یکنواخت به جرم m و ابعاد $2a$ بر بالای یک کرهٔ ناصاف به شعاع b در وضعیت تعادل است. نشان دهید که تابع انرژی پتانسیل را می‌توان به این قرار بیان کرد:

$$V(\theta) = mg[(a+b)\cos\theta + b\theta\sin\theta]$$

که θ زاویهٔ کجی قطعه‌جسم است. از این رابطه نتیجه بگیرید که تعادل در $\theta = 0$ پایدار یا ناپایدار است، بسته به اینکه a، به‌ترتیب، کمتر یا بیشتر از b باشد.

۶.۱۱ تابع انرژی پتانسیل مسئلهٔ ۵.۱۱ را به‌صورت یک سری توانی برحسب θ بسط دهید. به کمک آن برای حالت $a = b$، پایداری را تعیین کنید.

۷.۱۱ نیمکرهٔ یکنواخت توپری به شعاع a بر بالای یک سرپوش نیمکره‌مانند ناصاف به شعاع b در حال سکون است. وجوه انحنادار با هم در تماس‌اند. نشان دهید در صورتی که $a < \frac{3b}{5}$، تعادل پایدار است.

۸.۱۱ بسامد نوسانات قائم را حول وضعیت تعادل مسئلهٔ ۴.۱۱ تعیین کنید.

۹.۱۱ زمان تناوب نوسان قطعه‌جسم مسئلهٔ ۵.۱۱ را تعیین کنید.

۱۰.۱۱ زمان تناوب نوسان نیمکرهٔ مسئلهٔ ۷.۱۱ را تعیین کنید.

۱۱.۱۱ یک گوی فولادی کوچک حول وضعیت تعادلش در داخل یک کاسهٔ کروی ناصاف به جلو و عقب می‌غلتد؛ نشان دهید زمان تناوب نوسان عبارت است از $2\pi[7(b-a)/5g]^{1/2}$، که a شعاع گلوله و b شعاع کاسه است. اگر b یک متر و a یک سانتی‌متر باشد، زمان تناوب را برحسب ثانیه بیابید.

۱۲.۱۱ برای یک ماهوارهٔ مداری به شکل میلهٔ نازک، نشان دهید که حالت تعادل پایدار و زمان تناوب نوسان با آنهایی که در مثال ۲.۲.۱۱ برای ماهوارهٔ دمبلی به‌دست آمد، یکسان‌اند.

۱۳.۱۱ در سیستمی متشکل از دو نوسانگر متصل به هم (شکل ۱.۳.۱۱) یک نوسانگر با دامنهٔ اولیهٔ A_0 شروع به حرکت می‌کند، در حالی که نوسانگر دیگر در وضعیت تعادلش در حال سکون است، به‌طوری که شرایط اولیه عبارت‌اند از

$$t = 0 \quad x_1(0) = A_0 \quad x_2(0) = 0 \quad \dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0) = 0$$

نشان دهید که در این حالت دامنهٔ مؤلفهٔ متقارن با دامنهٔ مؤلفهٔ پادمتقارن برابر است و جواب کامل را می‌توان به‌صورت زیر بیان کرد:

$$x_1(t) = \frac{1}{2}A_0(\cos\omega_a t + \cos\omega_b t) = A_0\cos\bar{\omega}t\cos\Delta t$$

$$x_2(t) = \frac{1}{2}A_0(\cos\omega_a t - \cos\omega_b t) = A_0\sin\bar{\omega}t\sin\Delta t$$

که در آن $\bar{\omega} = (\omega_a + \omega_b)/2$ و $\Delta = (\omega_b + \omega_a)/2$. بنابراین، اگر جفت‌شدگی خیلی ضعیف باشد، به‌طوری که $K' \ll K$، در این صورت $\bar{\omega}$ با تقریب خوبی با $\omega_a = (K/m)^{1/2}$ برابر خواهد شد و Δ خیلی کوچک است. در نتیجه، تحت شرایط اولیه‌ای که بیان شد، نوسانگر اولی سرانجام به سکون می‌رسد، در حالی که نوسانگر دوم با دامنهٔ A_0 نوسان می‌کند. بعداً سیستم به شرایط اولیهٔ باز خواهد گشت، و وضع به همین ترتیب ادامه می‌یابد. بنابراین، انرژی بین دو نوسانگر به‌طور نامتناهی رفت و آمد می‌کند.

۱۴.۱۱ در مسئلهٔ ۱۳.۱۱، نشان دهید که برای جفت‌شدگی ضعیف، زمان تناوبی که با آن انرژی رفت و آمد می‌کند، تقریباً $T_a(2K/K')$ است که $T_a = 2\pi/\omega_a = 2\pi/(m/K)^{1/2}$ زمان تناوب نوسان متقارن است.

۱۵.۱۱ دو آونگ سادهٔ یکسان به وسیلهٔ نیروی جاذبهٔ خیلی ضعیف که با عکس مجذور فاصلهٔ بین دو وزنهٔ آنها تغییر می‌کند، به هم جفت شده‌اند. (مثلاً، این نیرو ممکن است جاذبهٔ گرانشی بین دو ذره باشد.) نشان دهید که برای حرکات جزئی حول پیکربندی تعادل، تابع لاگرانژی می‌تواند با ثابتهای مناسب، به شکل ریاضی مشابهی با تابع لاگرانژی دو نوسانگر متصل به هم که در بخش ۳.۱۱ و در مسئلهٔ ۱۳.۱۱ فوق مورد بحث قرار گرفت، تبدیل شود. (راهنمایی: معادلهٔ (۹.۳.۱۱) را ببینید.)

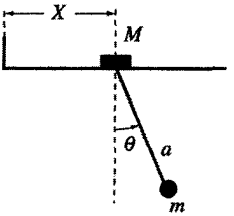
۱۶.۱۱ بسامدهای بهنجار سیستم نوسانگر هماهنگ متصل به هم (شکل ۱.۳.۱۱) را برای حالت کلی که دو ذرهٔ آن جرمهای نامساوی و فنرها ضریب سفتی مختلف داشته باشند، به‌دست آورید. در حالت خاص، به‌ازای $m_1 = m$، $m_2 = 2m$، $K_1 = K$، $K_2 = 2K$، و $K' = 2K$ بسامدها را بیابید. نتیجه را برحسب کمیت $\omega_0 = (K/m)^{1/2}$ بیان کنید.

۱۷.۱۱ سربالایی فنرکشسان سبکی به ضریب سفتی K به نقطه‌ای محکم و ذره‌ای به جرم m به سر پایینی آن آویخته شده است. فنر دومی با ضریب سفتی K به این ذره بسته شده و به‌نوبهٔ خود ذره‌ای به جرم $2m$ را در انتهای پایینیش نگاه می‌دارد؛ بسامدهای بهنجار این سیستم را برای نوسانات قائم حول پیکربندی تعادل به‌دست آورید؛ همچنین مختصات بهنجار را بیابید.

۱۸.۱۱ حالتی از آونگ مرکب، شکل ۷.۳.۱۱ (الف)، را در نظر بگیرید که دو جزء آن طولهای مختلفی دارند؛ یعنی جزء بالایی به طول l_1 و جزء پایینی به طول l_2 باشد. جرم هر دو ذره مساوی m است. بسامدهای بهنجار این سیستم و مختصات بهنجار را به‌دست آورید.

۱۹.۱۱ معادلهٔ مشخصه را برای سه ذره‌ای به‌دست آورید که در یک آرایهٔ خطی به هم متصل شده‌اند و نشان دهید که بسامدهای بهنجار با بسامدهایی که در قالب معادلهٔ (۱۷.۵.۱۱) بیان می‌شوند، یکسان‌اند.

۲۰.۱۱ آونگ ساده‌ای به جرم m و طول a به قطعه‌ای به جرم M که مقید است روی مسیر افقی بدون اصطکاک بلغزد، مطابق شکل م۱۱ ۲۰، متصل می‌شود. بسامدهای بهنجار و مدهای بهنجار نوسان را پیدا کنید.



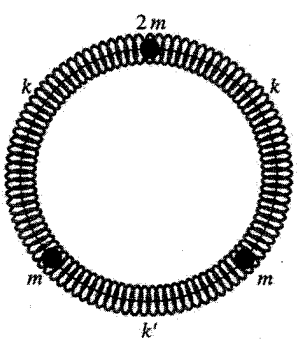
شکل م۱۱.۲۰

۲۱.۱۱ در مثال ۲.۳.۱۱

(الف) مدهای بهنجار نوسان را بیابید.

(ب) از فرض $2mg = kr$ دست بکشید. در عوض، جرم نگهدارنده را M و جرم آونگ را m قرار دهید و فرض کنید $\alpha = m/(m+M) \ll 1$. اینک مدهای بهنجار نوسان و بسامدهای مد بهنجار را پیدا کنید.

۲۲.۱۱ سه دانهٔ تسبیح به جرم m، m، و $2m$ مقیدند در طول حلقهٔ دایره‌ای بدون اصطکاک بلغزند. دو جرم کوچک هر کدام به جرم بزرگ و به یکدیگر از طریق فنرهایی به طول a و با ثابت نیروی، به‌ترتیب، k و k' متصل می‌شوند. جرمها مطابق شکل م۱۱ ۲۲ در وضعیت تعادلشان‌اند



شکل م۱۱.۲۲

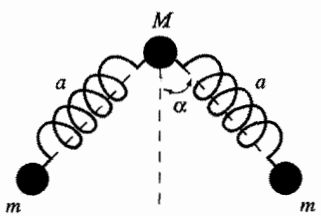
که به فاصلهٔ زاویه‌ای ۱۲۰° از یکدیگر قرار دارند. جرم بزرگتر در ابتدا به اندازهٔ ۱۰° در جهت ساعتگرد از مکان تعادلش جابه‌جا می‌شود، و دو جرم دیگر سرجایشان ثابت نگه داشته می‌شوند. بعد سه جرم همزمان از حال سکون رها می‌شوند.

(الف) بسامدهای بهنجار و مدهای بهنجار نوسان را بیابید.

(ب) مسئله را برای یافتن حرکت برایند هر جرم حل کنید.

۲۳.۱۱ در مورد مولکول سه‌اتمی خطی مثال ۱.۴.۱۱، ماتریس $\mathbf{A}$ را به‌دست آورید که ماتریسهای $\mathbf{K}$ و $\mathbf{M}$ را قطری می‌کند. نشان دهید نسبت عناصر قطری آنها با ویژه‌بسامدهای مدهای بهنجار نوسان برابر است.

۲۴.۱۱ مولکولی سه‌اتمی، مانند هیدروژن سولفید (H_2S)، شامل دو اتم هیدروژن هر یک به جرم m و یک اتم گوگرد به جرم M است که به وسیلهٔ نیروهای بستگی در پیکربندیی که مثلثی فرض می‌شود، مطابق شکل م۱۱ ۰ ۲۴، به هم بسته شده‌اند. فرض کنید که به جای نیروهای بستگی بتوان فنرهایی با ثابت نیروی k به‌طور تقریب نشانید. وقتی سه اتم در پیکربندی تعادلشان هستند، فاصلهٔ HS برابر $a = ۱٫۶۷ \times ۱۰^{-۱۰}\,\mathrm{m}$، و زاویهٔ رأس H—S—H تقریباً عبارت است از $۲\alpha = ۹۰^\circ$. بسامدهای بهنجار و مدهای بهنجار نوسان را پیدا کنید. فرض کنید اتمهای هیدروژن با یکدیگر برهم‌کنش مستقیم ندارند.



شکل م۱۱.۲۴

۲۵.۱۱ دو موج در محیطی حرکت می‌کنند. فرض کنید جابه‌جاییها از حالت تعادل ذراتی که محیط را تشکیل می‌دهند در قالب توابع زیر بیان شوند

$$q_۱(x,t) = Ae^{i(\omega t - kx)}$$
$$q_۲(x,t) = Ae^{i(\Omega t - Kx)}$$

که قسمت حقیقی آنها موج فیزیکی را نشان می‌دهد.

(الف) نشان دهید که هر یک از این توابع جوابهای معادلهٔ موج‌اند.
(ب) فرض کنید بسامدها و اعداد موج با این مقادیر کم با هم اختلاف داشته باشند

$$\Omega = \omega + \Delta\omega \qquad K = k + \Delta k$$

با صرفنظرکردن از اختلافهای کم مرتبهٔ دوم، نشان دهید که جزء حقیقی تابع موج برایند به‌طور تقریبی در قالب رابطهٔ زیر داده می‌شود

$$Q(x,t) = q_1 + q_2 \approx 2\cos\left[\frac{(\Delta\omega)t - (\Delta k)x}{2}\right]\cos(\omega t - kx)$$

موج برایند همان بسامد و همان عدد موجی را دارد که موج اصلی، اما دامنه‌اش مدوله شده است (عدد موج عبارت است از $k = 2\pi/\lambda$.)

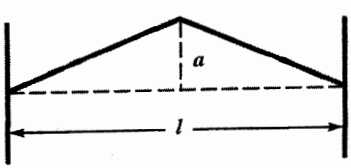
(ج) سرعت انتشار مدولاسیون دامنه را محاسبه کنید (این سرعت) سرعت گروه موج، v_g، نامیده می‌شود).

۲۶.۱۱ مدهای بهنجار برای حالت چهار ذره در آرایهٔ خطی را با شکل نشان دهید. مقادیر عددی نسبتهای دومین، سومین، و چهارمین بسامد به پایینترین یا اولین بسامد بهنجار را بیابید.

۲۷.۱۱ ریسمان کشسان سبکی به طول طبیعی l و ضریب سفتی K تا طول $l + \Delta l$ کشیده‌شده با n ذره در فواصل مساوی در امتداد طولش باردار می‌شود. اگر m جرم کل تمام n ذره باشد، سرعت امواج عرضی و طولی را در ریسمان به‌دست آورید.

۲۸.۱۱ مسئلهٔ ۲۷.۱۱ را در حالتی حل کنید که ریسمان به جای باردارشدن، با چگالی جرم خطی، μ، سنگین شده باشد.

۲۹.۱۱ در بخش ۹.۳، نشان دادیم که چگونه سری فوریه را می‌توان به‌کار برد تا توابع تناوبی را نمایش دهند. در اینجا می‌خواهیم آن تحلیل را در مورد نخ مرتعش به‌کار بریم. فرض کنید نخی به طول l و جرم واحد طول μ بین دو نگهدارنده به‌طور افقی و با کشش F_0 قرارگرفته است. فرض



شکل م۲۹.۱۱

کنید وسط نخ به اندازهٔ a (که $a \ll l$) در راستای قائم جابه‌جا شود. وقتی نخ رها شود، به‌صورت موج ایستاده ارتعاش می‌کند. تحلیل فوریه را برای محاسبهٔ این نوع ارتعاش به‌صورت تابعی از زمان (شکل م۱۱ ۰ ۲۹) به‌کار برید، یعنی، ضرایب سری فوریه را محاسبه کنید که برای توصیف حرکت لازم می‌شود.

۳۰.۱۱ جواب مسئلهٔ ۲۹.۱۱ را برحسب امواج متحرک پیدا کنید.

مسائل کامپیوتری

ک۱.۱۱ یک پالس متحرک به سمت انتهای نخ بینهایت درازی حرکت می‌کند. فرض کنید در $t = ۰$، شکل پالس، یا جابه‌جایی قائم نخ، عبارت است از

$$y(x) = \frac{۱}{۱ + x^۲} \qquad (۱)$$

مشابه با بحث سری فوریه در بخش ۹.۳، این پالس را می‌توان به‌صورت برهم‌نهی امواج هماهنگ با عدد موجهای مختلف k در نظر گرفت. اما، جمع نامتناهی بخش ۹.۳، که با تابع تکرارپذیری تقریب‌بندی می‌شود، در اینجا باید به وسیلهٔ انتگرال روی تعداد نامتناهی امواج هماهنگی جایگزین شود که هرکدام با تابع دامنهٔ مناسب وزن داده شده‌اند؛ یعنی

$$y(x) = \int_۰^\infty a(k)\cos(kx)dk \qquad (۲)$$

از توابع کسینوسی به این علت بهره می‌گیریم که $y(x)$ تابع زوجی از x است. تابع دامنهٔ $a(k)$ در قالب رابطهٔ زیر بیان می‌شود

$$a(k) = \frac{۲}{\pi}\int_۰^\infty y(x)\cos(kx)dx \qquad (۳)$$

(الف) $a(k)$ را با بهره‌گیری از معادلهٔ (۳) محاسبه کنید.

(ب) $a(k)$ را در معادلهٔ (۲) بنشانید و نشان دهید که $y(x)$ به‌دست می‌دهد.

(ج) معادلهٔ (۲) را برای مقادیر x از ۰ تا ۳ به‌طور عددی انتگرال‌گیری کنید و نشان دهید که نتایج با مقادیر دقیق $y(x)$ سازگار است. فرض کنید سرعت پالس عبارت است از $v = \omega/k = ۱$. در چنین حالتی، شکل پالس همچنان که در امتداد نخ حرکت می‌کند، حفظ می‌شود.

(د) رابطه‌ای دقیق برای $y(x,t)$ بنویسید، با فرض اینکه در $t = ۰$، $y(x,۰)$ با معادلهٔ (۱) داده شود.

(ه) با بهره‌گیری از معادلهٔ (۲) رابطهٔ انتگرالی مناسبی برای $y(x,t)$ بنویسید.

(و) اکنون فرض کنید پالس در امتداد ریسمان «پاشنده‌ای» حرکت می‌کند که سرعت موج در ریسمان ثابت نیست، بلکه به عدد موج بستگی دارد. فرض کنید $\omega/k = ۱ + ۰٫۲۵k^۲$. بستگی فازی امواج بسیاری با kهای مختلف، در هنگام حرکت در ریسمان، تغییر می‌کند و برهم‌نهی آنها پالس متحرک را به‌وجود می‌آورد. بنابراین، شکل پالس تغییر می‌کند. برای ملاحظهٔ این اثر، رابطهٔ انتگرال برای $y(x,t)$ را که در بند (ه) با به‌کاربردن مقدار پاشندهٔ ω/k به‌دست آمد، اصلاح کنید. رابطهٔ حاصل را به‌طور عددی انتگرال‌گیری کنید تا $y(x,t)$ به‌ازای $t = ۲٫۵, ۵٫۰, ۱۰$ ثانیه، به‌دست آید. دامنهٔ وسیعی از x را حول موضع قلهٔ پالس در هر یک از این زمانها اختیار کنید.

(ز) این شکلهای موجی برایند را ترسیم و آنها را با $y(x,۰)$ مقایسه کنید. نتیجه را تفسیر کنید.

پیوست الف

یکاها

یکاهای اصلی SI (دستگاه بین‌المللی)

یکا	نماد	کمیت فیزیکی
متر	m	طول
کیلوگرم	kg	جرم
ثانیه	s	زمان
آمپر	A	جریان الکتریکی
کِلوین	K	دما
مُول	mol	مقدار ماده
شمع	cd	شدت نور

بعضی یکاهای فرعی SI

یکا	نماد	کمیت فیزیکی	معادل
نیوتون	N	نیرو	$kg \cdot m/s^2$
ژول	J	کار یا انرژی	$N \cdot m$
وات	W	توان	J/s
پاسکال	Pa	فشار	N/m^2
ولت	V	اختلاف پتانسیل	W/A
کولن	C	بار الکتریکی	$A \cdot s$
هرتز	Hz	بسامد	s^{-1}

یکاهای SI سایر کمیتهای فیزیکی

کمیت فیزیکی	یکای SI
سرعت	m/s
شتاب	m/s^2
سرعت زاویه‌ای	$(rad)s^{-1}$
سرعت زاویه‌ای	$(rad)s^{-2}$
گشتاور	$kg\,m^2/s^2$

یکاهای غیر SI که به یکاهای SI تبدیل شده‌اند

کمیت فیزیکی	یکای SI
انرژی	
۱eV (الکترون ولت)	$۱٫۶۰۲۲ \times ۱۰^{-۱۹}J$
۱erg	$۱۰^{-۷}J$
۱BTU (یکای انگلیسی گرما)	$۱۰۵۵J$
۱cal (کالری)	$۴٫۱۸۶J$
۱KWH (کیلووات ساعت)	$۳٫۶ \times ۱۰^{۶}J$

یکاهای غیر SI که به یکاهای SI تبدیل شده‌اند

کمیت فیزیکی	یکای SI
جرم	
۱g (گرم)	$۱۰^{-۳}$kg
۱u (یکای جرم اتمی)	$۱٫۶۶۱ \times ۱۰^{-۲۷}$kg
۱eV/$c^۲$	$۱٫۷۸۳ \times ۱۰^{-۳۶}$kg
۱lb (پوند جرمی)	۰٫۴۵۳۶kg
نیرو	
۱dyne (دین)	$۱۰^{-۵}$kg m/$s^۲$
۱lb (پوند نیرو)	۴٫۴۴۸kg m/$s^۲$
طول	
۱cm (سانتی‌متر)	$۱۰^{-۲}$m
۱km (کیلومتر)	$۱۰^{۳}$m
۱in (اینچ)	۰٫۰۲۵۴m
۱ft (فوت)	۰٫۳۰۴۸m
۱yd (یارد)	۰٫۹۱۴۴m
۱mi (مایل)	۱۶۰۹٫۳m
۱AU (یکای نجومی)	$۱٫۴۹۶ \times ۱۰^{۱۱}$m
۱ly (سال نوری)	$۹٫۴۶ \times ۱۰^{۱۵}$m
۱pc (پارسک)	$۳٫۰۹ \times ۱۰^{۱۶}$m
حجم	
۱L (لیتر)	$۱۰^{-۳}$$m^۳$
۱qt (کوارت)	$۰٫۹۴۶۳ \times ۱۰^{-۳}$$m^۳$
۱gal (گالُن)	$۳٫۷۸۵ \times ۱۰^{-۳}$$m^۳$
۱$ft^۳$ (فوت مکعب)	۰٫۰۲۸۳۲$m^۳$
زاویه	
۱° (درجه)	$۱٫۷۴۵ \times ۱۰^{-۲}$rad
۱′ (دقیقهٔ قوس)	$۲٫۹۰۹ \times ۱۰^{-۴}$rad
۱″ (ثانیهٔ قوس)	$۴٫۸۴۸ \times ۱۰^{-۶}$rad

یکاهای غیر SI که به یکاهای SI تبدیل شده‌اند

کمیت فیزیکی	یکای SI
زمان	
۱y (سال)	$۳٫۱۵۶ \times ۱۰^{۷}$s
۱d (روز)	$۸٫۶۴۰ \times ۱۰^{۴}$s
۱hr (ساعت)	۳۶۰۰s
۱min (دقیقه)	۶۰s
توان	
۱KW (کیلووات)	$۱۰^{۳}$W
۱hp (اسب بخار)	۷۴۵٫۷W
سرعت	
۱ft/s (فوت بر ثانیه)	۰٫۳۰۴۸m/s
۱mph (مایل بر ساعت)	۰٫۴۴۷m/s

پیشوندهای مربوط به ضرب توان ده

نام	نماد	ضریب	نام	نماد	ضریب
هکتو	h	$۱۰^{۲}$	سانتی	c	$۱۰^{-۲}$
کیلو	k	$۱۰^{۳}$	میلی	m	$۱۰^{-۳}$
مگا	M	$۱۰^{۶}$	میکرو	μ	$۱۰^{-۶}$
گیگا	G	$۱۰^{۹}$	نانو	n	$۱۰^{-۹}$
ترا	T	$۱۰^{۱۲}$	پیکو	p	$۱۰^{-۱۲}$
پتا	P	$۱۰^{۱۵}$	فمتو	f	$۱۰^{-۱۵}$
اگزا	E	$۱۰^{۱۸}$	آتو	a	$۱۰^{-۱۸}$
زتا	Z	$۱۰^{۲۱}$	زپتو	z	$۱۰^{-۲۱}$

پیوست ب

اعداد مختلط

کمیت

$$z = x + iy$$

را عدد مختلط گویند در صورتی که x و y حقیقی باشند و $i = \sqrt{-1}$. مزدوج مختلط، بنابر تعریف، عبارت است از

$$z^* = x - iy$$

قدرمطلق $|z|$ عبارت است از

$$|z|^2 = zz^* = x^2 + y^2$$

عبارتهای زیر برقرارند

$$z + z^* = 2x = 2\mathrm{Re}z$$

$$z - z^* = 2y = 2\mathrm{Im}z$$

نمادگذاری نمایی

$$z = x + iy = |z|e^{i\theta} = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$$
$$z^* = x - iy = |z|e^{-i\theta} = |z|(\cos\theta - i\sin\theta)$$

که

$$\tan\theta = \frac{y}{x}$$

(برای اثبات رابطهٔ $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$، در پیوست د مطلب تحت عنوان بسطهای سری را ببینید.)

توابع دایره‌ای و هذلولوی

روابط زیر غالباً مفیدند

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{۲}$$

$$\sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{۲i}$$

$$\cosh\theta = \frac{e^{\theta} + e^{-\theta}}{۲} \qquad \text{(کسینوس هذلولوی)}$$

$$\sinh\theta = \frac{e^{\theta} - e^{-\theta}}{۲} \qquad \text{(سینوس هذلولوی)}$$

$$\tanh\theta = \frac{\sinh\theta}{\cosh\theta} = \frac{e^{\theta} - e^{-\theta}}{e^{\theta} + e^{-\theta}} \qquad \text{(تانژانت هذلولوی)}$$

روابط بین توابع دایره‌ای و هذلولوی

$$\sin i\theta = i\sinh\theta$$
$$\cos i\theta = \cosh\theta$$
$$\sinh i\theta = i\sin\theta$$
$$\cosh i\theta = \cos\theta$$

مشتقها

$$\frac{d}{d\theta}\sin\theta=\cos\theta \qquad \frac{d}{d\theta}\sinh\theta=\cosh\theta$$

$$\frac{d}{d\theta}\cos\theta=-\sin\theta \qquad \frac{d}{d\theta}\cosh\theta=\sinh\theta$$

اتحادهای مثلثاتی

$$\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$$

$$1+\tan^2\theta=\sec^2\theta$$

$$1+\cot^2\theta=\csc^2\theta$$

$$\sin(\theta\pm\phi)=\sin\theta\cos\phi\pm\cos\theta\sin\phi$$

$$\cos(\theta\pm\phi)=\cos\theta\cos\phi\mp\sin\theta\sin\phi$$

$$\tan(\theta\pm\phi)=\frac{\tan\theta\pm\tan\phi}{1\mp\tan\theta\tan\phi}$$

$$\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta$$

$$\cos 2\theta=\cos^2\theta-\sin^2\theta$$

$$\tan 2\theta=\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$$

$$\sin^2\frac{\theta}{2}=\frac{1}{2}(1-\cos\theta)$$

$$\cos^2\frac{\theta}{2}=\frac{1}{2}(1+\cos\theta)$$

$$\tan^2\frac{\theta}{2}=\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}$$

$$\sin\theta+\sin\phi=2\sin\left(\frac{\theta+\phi}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta-\phi}{2}\right)$$

$$\cos\theta+\cos\phi=2\cos\left(\frac{\theta+\phi}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta-\phi}{2}\right)$$

$$\tan\theta\pm\tan\phi=\frac{\sin(\theta\pm\phi)}{\cos\theta\cos\phi}$$

اتحادهای هذلولوی

$$\cosh^2\theta-\sinh^2\theta=1$$

$$\tanh^2\theta+\operatorname{sech}^2\theta=1$$

$$\coth^2\theta-\operatorname{csch}^2\theta=1$$

$$\sinh(\theta\pm\phi)=\sin\theta\cos\phi\pm\cosh\theta\sinh\phi$$

$$\cosh(\theta\pm\phi)=\cosh\theta\cos\phi\pm\sinh\theta\sinh\phi$$

$$\tanh(\theta\pm\phi)=\frac{\tanh\theta\pm\tanh\phi}{1\pm\tanh\theta\tanh\phi}$$

$$\sinh 2\theta=2\sinh\theta\cosh\theta$$

$$\cosh 2\theta=\cosh^2\theta+\sinh^2\theta$$

$$\tanh 2\theta=\frac{2\tanh\theta}{1+\tanh^2\theta}$$

$$\sinh^2\frac{\theta}{2}=\frac{1}{2}(\cosh\theta-1)$$

$$\cosh^2\frac{\theta}{2}=\frac{1}{2}(\cosh\theta+1)$$

$$\tanh^2\frac{\theta}{2}=\frac{\cosh\theta-1}{\cosh\theta+1}$$

$$\sinh\theta+\sinh\phi=2\sinh\left(\frac{\theta+\phi}{2}\right)\cosh\left(\frac{\theta-\phi}{2}\right)$$

$$\cosh\theta+\cosh\phi=2\cosh\left(\frac{\theta+\phi}{2}\right)\cosh\left(\frac{\theta-\phi}{2}\right)$$

$$\tanh\theta+\tanh\phi=\frac{\sinh(\theta+\phi)}{\cosh\theta\cosh\phi}$$

پیوست ج

مقاطع مخروطی

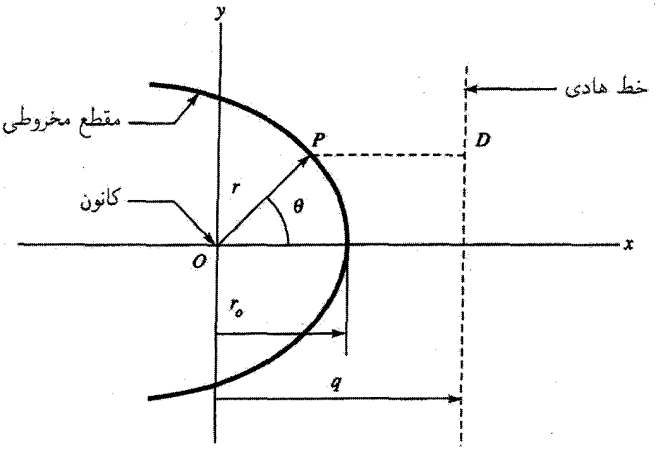
مقطع مخروطی عبارت است از یک منحنی که مکان هندسی نقطه‌ای است که چنان حرکت می‌کند که نسبت فاصله‌اش از یک نقطهٔ ثابت تا فاصله‌اش از یک خط ثابت، مقدار ثابتی باشد. این نسبت را خروج از مرکز، نقطهٔ ثابت را کانون، و خط ثابت را خط هادی منحنی نامند. مثالی از مقطع مخروطی را در شکل ج.۱الف مشاهده می‌کنید. چهار مقطع مخروطی ممکن یا خروج از مرکزشان مشخص می‌شوند، آنها را در شکل ج.۱ب مشاهد می‌کنید.

معادلهٔ کلی مقطع مخروطی (شکل ج.۱الف) که کانون در مبدأ مختصات O واقع باشد:

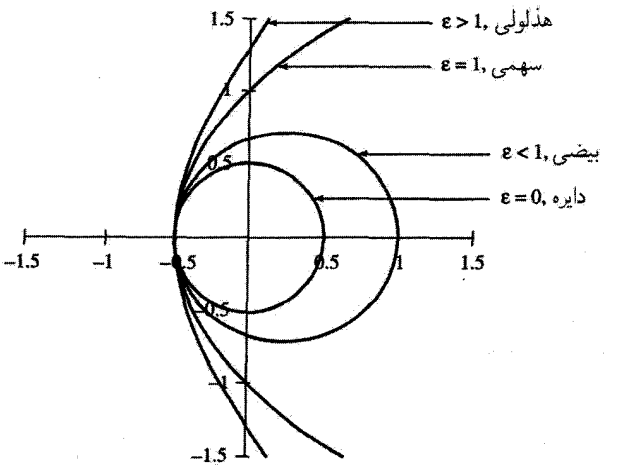
مختصات دکارتی: $$(1-\varepsilon^2)x^2+2\varepsilon^2 qx+y^2=\varepsilon^2 q^2$$

مختصات قطبی: $$r=\frac{\varepsilon q}{1+\varepsilon\cos\theta} \quad \text{یا} \quad \frac{1}{r}=\frac{1+\varepsilon\cos\theta}{r_0(1+\varepsilon)}$$

که $$\varepsilon=\frac{\overline{OP}}{\overline{PD}} \quad \text{یا} \quad r_0=\frac{\varepsilon q}{1+\varepsilon}$$



شکل ج.۱.الف مقطع مخروطی.

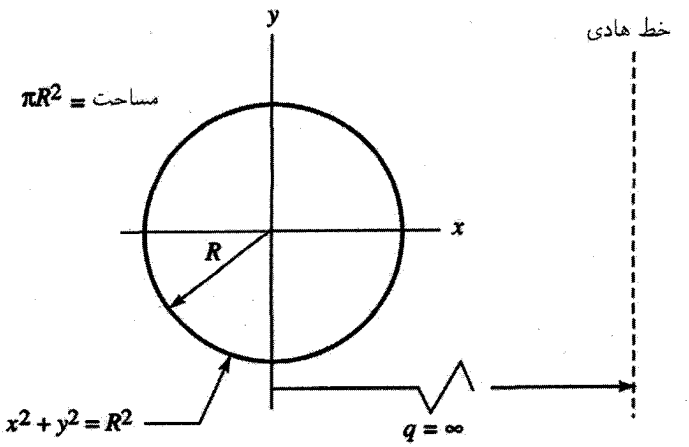


شکل ج.۱.ب چهار مقطع مخروطی.

معادلهٔ دایره

برای دایره: $\varepsilon = 0$، $q = \infty$، و $\varepsilon q = R$

(**گوشزد:** در شکل منحنیها (بیضی، سهمی، و هذلولی) که خواهیم دید، مبدأ مختصات برکانونها منطبق نیست. معادله‌ای که در بالا برای این منحنیها در مختصات قطبی داده شده است، فقط وقتی به‌کار می‌روند که کانون و مبدأ دستگاه مختصات برهم منطبق باشند.)



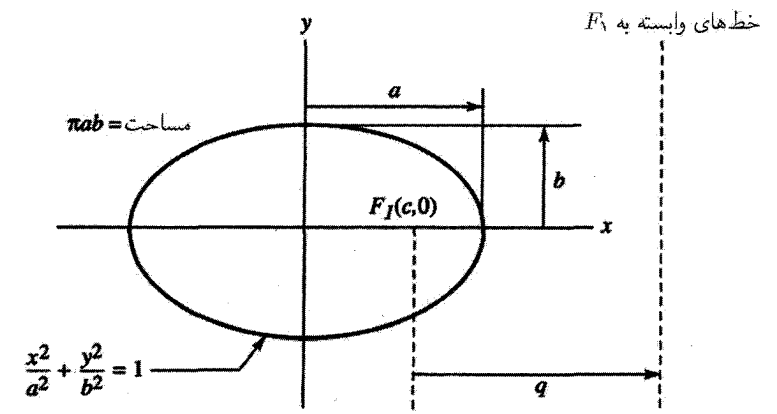
معادلهٔ بیضی

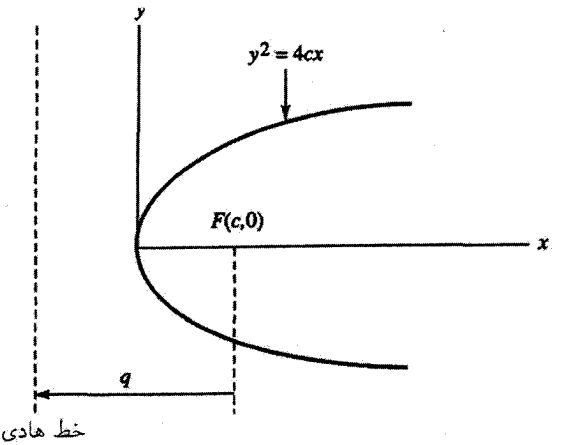
برای بیضی: $a^2 - b^2 = c^2$، $\varepsilon = c/a$، $b = a\sqrt{1 - \varepsilon^2}$، و $q = \pm b^2/c$.

(**گوشزد**: **(الف)** فقط یک کانون، F_1، مطابق شکل در $(c, 0)$ قرارگرفته است. کانون دومی، F_2، نیز وجود دارد که به‌طور متقارن در $(-c, 0)$ قرار دارد. خط هادی آن متقارن در سمت مقابل قرار می‌گیرد.

(ب) اگر مبدأ دستگاه مختصات چنان اختیار شده باشد که بر F_1 منطبق شود، در این صورت می‌توان از معادلهٔ قطبی بیضی بهره گرفت تا بین نیم‌قطر بزرگ و خروج از مرکز ε رابطه برقرارکند:

$a = \frac{r_0}{1-\varepsilon}$ که r_0 کمترین فاصلهٔ r است (شکل ج.۱. الف).)



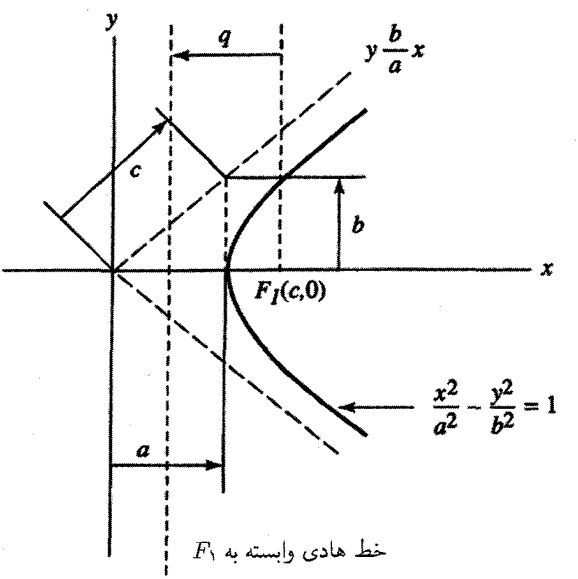


معادلهٔ سهمی

برای سهمی: $\varepsilon = ۱$ و $q = -۲c$.

معادلهٔ هذلولی

برای هذلولی: $a^۲ + b^۲ = c^۲$، $\varepsilon = c/a$، $b = a\sqrt{\varepsilon^۲ - ۱}$، و $q = \pm b^۲/c$.



(**گوشزد:** فقط یک کانون، $F_۱$، که در $(c, ۰)$ قرارگرفته نشان داده شده است. به‌طور متقارن کانون $F_۲$ در دسترس است که در $(-c, ۰)$ واقع شده و خط هادی آن به‌طور متقارن قرار دارد.)

پیوست د

بسطهای سری

سری تیلور

$$f(x+a) = f(a) + xf'(a) + \frac{x^2}{2!}f''(a) + \ldots + \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(a) + \ldots$$

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \ldots + \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0) + \ldots$$

که

$$f^{(n)}(a) = \frac{d^n}{dx^n}f(x)\Big|_{x=a}$$

بسطهایی که غالباً به‌کار می‌رود

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots$$

$$\cos x = ۱ - \frac{x^۲}{۲!} + \frac{x^۴}{۴!} - \dots$$

$$\sinh x = x + \frac{x^۳}{۳!} + \frac{x^۵}{۵!} + \dots$$

$$\cosh x = ۱ + \frac{x^۲}{۲!} + \frac{x^۴}{۴!} + \dots$$

$$\ln(۱ + x) = x - \frac{x^۲}{۲} + \frac{x^۳}{۳} - \dots \qquad |x| < ۱$$

$$\tan x = x + \frac{x^۳}{۳} + \frac{۲}{۱۵}x^۵ + \dots \qquad |x| < \frac{\pi}{۲}$$

تابع نمایی مختلط

با قراردادن $x = i\theta$، بسط مربوط به e^x نتیجه می‌دهد

$$e^{i\theta} = ۱ + i\theta + \frac{i^۲\theta^۲}{۲!} + \frac{i^۳\theta^۳}{۳!} + \dots + \frac{i^n\theta^n}{n!} + \dots$$

چون $i = \sqrt{-۱}$

$$i^n = \begin{cases} +۱ : n = ۰, ۴, \dots \\ -۱ : n = ۲, ۶, \dots \\ +i : n = ۱, ۵, \dots \\ -i : n = ۳, ۷, \dots \end{cases}$$

به این ترتیب

$$e^{i\theta} = \left(۱ - \frac{\theta^۲}{۲!} + \frac{\theta^۴}{۴!} - \dots\right) + i\left(\theta - \frac{\theta^۳}{۳!} + \frac{\theta^۵}{۵!} - \dots\right)$$
$$= \cos\theta + i\sin\theta$$

که از بسط سری کسینوس و سینوس در بالا بهره گرفته‌ایم.

سری دوجمله‌ای

$$(a+x)^n = a^n + na^{n-1}x + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}x^2 + \ldots + \binom{n}{m} a^{n-m}x^m + \ldots$$

که ضریب دوجمله‌ای عبارت است از

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{(n-m)!m!}$$

این سری به‌ازای $|x/a| < 1$ همگراست.

چند تقریب مفید

به‌ازای x کوچک، تقریبهای زیر غالباً به‌کار می‌آیند

$$e^x \approx 1 + x$$

$$\sin x \approx x$$

$$\cos x \approx 1 - \frac{1}{2}x^2$$

$$\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{1}{2}x$$

$$\frac{1}{1+x} \approx 1 - x$$

$$\frac{1}{1-x} \approx 1 + x$$

سه رابطهٔ آخر براساس سری دوجمله‌ای به‌دست آمده است و فهرست بالا را می‌توان به‌ازای سایر مقادیر توان بسط داد:

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{1}{2}n(n-1)x^2 + \ldots$$

پیوست ه

توابع خاص

انتگرالهای بیضوی

انتگرال بیضوی نوع اول در قالب روابط زیر بیان می‌شود

$$F(k,\phi) = \int_{۰}^{\phi} \frac{d\phi}{(۱ - k^{۲}\sin^{۲}\phi)^{۱/۲}}$$
$$= \int_{۰}^{x} \frac{dx}{(۱ - x^{۲})^{۱/۲}(۱ - k^{۲}x^{۲})^{۱/۲}}$$

و انتگرال بیضوی نوع دوم در قالب این عبارت بیان می‌شود

$$E(k,\phi) = \int_{۰}^{\phi} (۱ - k^{۲}\sin^{۲}\phi)^{۱/۲} d\phi$$
$$= \int_{۰}^{x} \frac{(۱ - k^{۲}x^{۲})^{۱/۲}}{(۱ - x^{۲})^{۱/۲}} dx$$

که، هر دو، به‌ازای $|k| < ۱$ همگرایند. به‌ازای $x = \sin\phi < ۱$ آنها را ناکامل و به‌ازای

$x = \sin\phi = ۱$ آنها را کامل نامند. بسط سری انتگرالهای کامل عبارت‌اند از

$$F(k) = F\left(k, \frac{\pi}{۲}\right) = \frac{\pi}{۲}\left(۱ + \frac{k^۲}{۴} + \frac{۹}{۶۴}k^۴ + \dots\right)$$

$$E(k) = E\left(k, \frac{\pi}{۲}\right) = \frac{\pi}{۲}\left(۱ - \frac{k^۲}{۴} - \frac{۹}{۶۴}k^۴ - \dots\right)$$

تابع گاما

تابع گاما بنابر تعریف عبارت است از

$$\Gamma(n) = \int_۰^\infty x^{n-۱}e^{-x}dx$$

به‌ازای هر مقدار n

$$n\Gamma(n) = \Gamma(n+۱)$$

اگر n عدد صحیح مثبتی باشد،

$$\Gamma(n) = (n-۱)!$$

مقادیر خاص

$$\Gamma\left(\frac{۱}{۲}\right) = \sqrt{\pi}$$

$$\Gamma(۱) = ۱$$

$$\Gamma\left(\frac{۳}{۲}\right) = \frac{۱}{۲}\sqrt{\pi}$$

$$\Gamma(۲) = ۱$$

انتگرالهایی که برحسب توابع گاما بیان‌کردنی‌اند، عبارت‌اند از

$$\int_۰^۱ \frac{dx}{\sqrt{۱-x^n}} = \frac{\sqrt{\pi}}{n}\frac{\Gamma(۱/n)}{\Gamma\left[\left(\frac{۱}{۲}\right) + (۱/n)\right]}$$

$$\int_۰^۱ (۱-x^۲)^n x^m dx = \frac{\Gamma(n+۱)\Gamma[(m+۱)/۲]}{۲\Gamma[(۲n+m+۳)/۲]}$$

پیوست و

مختصات خمیده‌خط

دستگاه مختصات متعامد کلی u، v، و w را با بردارهای یکهٔ $\mathbf{e}_1$، $\mathbf{e}_2$، و $\mathbf{e}_3$ در نظر می‌گیریم. عنصر حجم عبارت است از

$$dV = h_1 h_2 h_3 du\, dv\, dw$$

و عنصر خط از این قرار است

$$d\mathbf{r} = \mathbf{e}_1 h_1 du + \mathbf{e}_2 h_2 dv + \mathbf{e}_3 h_3 dw$$

گرادیان، دیورژانس، و تاو از این قرارند:

$$\boldsymbol{\nabla} f = \mathrm{grad} f = \frac{\mathbf{e}_1}{h_1}\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\mathbf{e}_2}{h_2}\frac{\partial f}{\partial v} + \frac{\mathbf{e}_3}{h_3}\frac{\partial f}{\partial w}$$

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{Q} = \mathrm{div}\mathbf{Q} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\left[\frac{\partial}{\partial u}(h_2 h_3 Q_1) + \frac{\partial}{\partial v}(h_3 h_1 Q_2) + \frac{\partial}{\partial w}(h_1 h_2 Q_3)\right]$$

$$\nabla \times \mathbf{Q} = \text{curl}\mathbf{Q} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \begin{vmatrix} h_1\mathbf{e}_1 & h_2\mathbf{e}_2 & h_3\mathbf{e}_3 \\ \dfrac{\partial}{\partial u} & \dfrac{\partial}{\partial v} & \dfrac{\partial}{\partial w} \\ h_1 Q_1 & h_2 Q_2 & h_3 Q_3 \end{vmatrix}$$

توابع h برای بعضی دستگاههای مختصات معمولی در ادامه بیان می‌شوند.

مختصات راستگوشه: x, y, z

$$h_x = 1 \qquad h_y = 1 \qquad h_z = 1$$

مختصات استوانه‌ای: R, ϕ, z

$$x = R\cos\phi \qquad y = R\sin\phi$$
$$h_R = 1 \qquad h_\phi = R \qquad h_z = 1$$

مختصات کروی: r, θ, ϕ

$$x = r\sin\theta\cos\phi \qquad y = r\sin\theta\sin\phi \qquad z = r\cos\theta$$
$$h_r = 1 \qquad h_\theta = r \qquad h_\phi = r\sin\theta$$

مختصات سهموی: u, v, θ

$$x = uv\cos\theta \qquad y = uv\sin\theta \qquad z = \frac{1}{2}(u^2 - v^2)$$
$$h_u = h_v = \sqrt{u^2 + v^2} \qquad h_\theta = uv$$

مثال: تاو در مختصات کروی عبارت است از

$$\text{curl}\mathbf{Q} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_r & r\mathbf{e}_\theta & r\sin\theta\mathbf{e}_\phi \\ \dfrac{\partial}{\partial r} & \dfrac{\partial}{\partial\theta} & \dfrac{\partial}{\partial\phi} \\ Q_r & rQ_\theta & r\sin\theta Q_\phi \end{vmatrix} \frac{1}{r^2\sin\theta}$$

پیوست ز

سری فوریه

برای یافتن ضرایب جمله‌ها در بسط مثلثاتی

$$f(t) = \frac{a_\circ}{۲} + \sum_{n=۱}^{\infty} [a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)]$$

هر دو طرف را در $\cos(n'\omega t)$ ضرب می‌کنیم و در فاصلهٔ $-\pi/\omega$ تا $+\pi/\omega$ انتگرال می‌گیریم:

$$\begin{aligned}\int_{-\pi/\omega}^{\pi/\omega} f(t)\cos(n'\omega t)dt = \frac{a_\circ}{۲}\int_{-\pi/\omega}^{\pi/\omega}\cos(n'\omega t)dt \\ + \sum_{n=۱}^{\infty}\left[a_n\int_{-\pi/\omega}^{\pi/\omega}\cos(n'\omega t)\cos(n\omega t)dt\right. \\ \left. + b_n\int_{-\pi/\omega}^{\pi/\omega}\cos(n'\omega t)\sin(n\omega t)dt\right]\end{aligned}$$

حال اگر n' و n اعداد صحیح باشند، این فرمولهای کلی خواهیم داشت

$$\int_{-\pi/\omega}^{\pi/\omega} \cos(n'\omega t)dt = 2\pi/\omega \qquad n' = 0$$
$$= 0 \qquad n' \neq 0$$
$$\int_{-\pi/\omega}^{\pi/\omega} \cos(n'\omega t)\cos(n\omega t)dt = \pi/\omega \qquad n' = n$$
$$= 0 \qquad n' \neq n$$
$$\int_{-\pi/\omega}^{\pi/\omega} \cos(n'\omega t)\sin(n\omega t)dt = 0 \qquad \text{به‌ازای تمام مقادیر } n' \text{ و } n$$

بنابراین، به‌ازای مقدار مشخص n'، تمام انتگرالهای معین در مجموعیابی بالا صفر می‌شوند جز یکی که به‌ازای آن: $n' = n$. در نتیجه می‌توانیم بنویسیم

$$a_n = \frac{\omega}{\pi}\int_{-\pi/\omega}^{\pi/\omega} f(t)\cos(n\omega t)dt \qquad n = 0, 1, 2, \ldots \quad \text{به‌ازای}$$

به همین ترتیب، اگر معادلهٔ $f(t)$ را در $\sin(n'\omega t)$ ضرب کنیم و جمله به جمله انتگرال بگیریم، علاوه بر فرمولهای بالا، از فرمول کلی زیر نیز بهره می‌گیریم

$$\int_{-\pi/\omega}^{\pi/\omega} \sin(n'\omega t)\sin(n\omega t)dt = \pi/\omega \qquad n' = n$$
$$= 0 \qquad n' \neq n$$

مانند قبل، تمام انتگرالها جز به‌ازای $n' = n$ صفر می‌شوند، و از این‌رو خواهیم داشت

$$b_n = \frac{\omega}{\pi}\int_{-\pi/\omega}^{\pi/\omega} f(t)\sin(n\omega t)dt \qquad n = 1, 2, \ldots$$

چون زمان تناوب عبارت است از $T = 2\pi/\omega$، حدود انتگرال را نیز می‌توان از $-T/2$ تا $T/2$ بیان کرد.[1]

۱. برای بهره‌گیری از اطلاعات جامعتری از زمینهٔ شرایط پیوستگی، قابلیت انتگرال‌گیری، و مانند آنها، خواننده باید به کتابهای درسی در خصوص سری فوریه مراجعه کند؛ از آن جمله،

R. V. Churchill, *Fourier Series and Boundary Value Problems*, McGraw-Hill, New York, 1963.

پیوست ح

ماتریسها

ماتریس $\mathbf{A}$ آرایه‌ای از عناصر a_{ij} است که به‌صورت زیر مرتب شده باشند:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{im} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

اگر $n = m$، آن را ماتریس مربعی نامند. در این پیوست فقط به ماتریسهای مربعی می‌پردازیم، مگر آنکه خلاف آن ذکر شود. ماتریس متقارن عبارت است از ماتریسی که در آن $a_{ij} = a_{ji}$. اگر $a_{ij} = -a_{ji}$، ماتریس پادمتقارن است.

مجموع دو ماتریس، بنابر تعریف، عبارت است از

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B})_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

حاصلضرب دو ماتریس از این قرار تعریف می‌شود

$$(\mathbf{AB})_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots = \sum_k a_{ik}b_{kj}$$

به‌طورکلی، حاصلضرب $\mathbf{AB}$ با $\mathbf{BA}$ برابر نیست. اگر $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$، گفته می‌شود که دو ماتریس جابه‌جا می‌شوند. ماتریس قطری، عبارت است از ماتریسی که عناصر ناقطری آن صفرند. به‌ازای $i \neq j$ داریم $a_{ij} = 0$. ماتریس یکه[1] عبارت است از ماتریسی قطری که تمام عناصر قطری آن برابر یک باشند

$$\mathrm{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \ldots & \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}$$

از تعریف حاصلضرب، به‌آسانی نشان می‌دهیم که

$$\mathbf{AI} = \mathbf{IA}$$

وارون، $\mathbf{A}^{-1}$، ماتریس $\mathbf{A}$، بنا بر تعریف، عبارت است از

$$\mathbf{AA}^{-1} = \mathrm{I} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}$$

ترانهاده، $\tilde{\mathbf{A}}$، ماتریس $\mathbf{A}$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$(\tilde{\mathbf{A}})_{ij} = (\mathbf{A})_{ji}$$

برای هر دو ماتریس $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ داریم، $\widetilde{(\mathbf{AB})} = \tilde{\mathbf{B}}\tilde{\mathbf{A}}$.

دترمینان ماتریس، دترمینان عناصر آن به‌شمار می‌آید

$$\det\mathbf{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots \\ a_{21} & a_{22} & \ldots \\ \cdot & \cdot & \ldots \end{vmatrix}$$

۱. این کمیت نباید با تانسور لختی که در فصل ۹ تعریف کردیم، اشتباه شود.

دترمینان حاصلضرب دو ماتریس مساوی حاصلضرب دترمینانهای آن دو ماتریس است

$$\det\mathbf{AB} = \det\mathbf{A}\det\mathbf{B}$$

می‌توان نشان داد که وارون ماتریس $\mathbf{A}$ با فرمول زیر بیان می‌شود

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\det\mathbf{A}_{11}}{\det\mathbf{A}} & \frac{\det\mathbf{A}_{21}}{\det\mathbf{A}} & \cdots \\ \frac{\det\mathbf{A}_{12}}{\det\mathbf{A}} & \frac{\det\mathbf{A}_{22}}{\det\mathbf{A}} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$

که ماتریس $\mathbf{A}_{ij}$ ماتریسی است که بعد از برداشتن سطر iام و ستون jام از ماتریس $\mathbf{A}$ حاصل می‌شود.

نمایش ماتریسی بردارها

بنا به تعریف، ماتریس با یک سطر، یا یک ستون، به‌ترتیب، عبارت است از بردار سطری، یا بردار ستونی. اگر $\mathbf{a}$ بردار ستونی باشد، پس $\tilde{\mathbf{a}}$ بردار سطری متناظر با آن خواهد بود

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \qquad \tilde{\mathbf{a}} = (a_1\ a_2\ \ldots\ a_n)$$

برای دو بردار ستونی $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ با تعداد عنصر یکسان، حاصلضرب $\tilde{\mathbf{a}}\mathbf{b}$، نظیر حاصلضرب نقطه‌ای دو بردار اسکالر است

$$\tilde{\mathbf{a}}\mathbf{b} = (a_1\ a_2\ \ldots) \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \end{pmatrix} = a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots$$

دو بردار $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ متعامدند اگر $\tilde{\mathbf{a}}\mathbf{b} = 0$

تبدیلهای ماتریسی

ماتریس $\mathbf{Q}$، طبق قاعدهٔ زیر، بردار $\mathbf{a}$ را به بردار دیگری مانند $\mathbf{a}'$ تبدیل می‌کند

$$\mathbf{a}' = \mathbf{Q}\mathbf{a} = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & \dots \\ q_{21} & q_{22} & \dots \\ \cdot & \cdot & \dots \\ \cdot & \cdot & \dots \\ \cdot & \cdot & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_{11}a_1 + q_{12}a_2 + \dots \\ q_{21}a_1 + q_{22}a_2 + \dots \\ \cdot \quad\quad \cdot \quad\quad \dots \\ \cdot \quad\quad \cdot \quad\quad \dots \\ \cdot \quad\quad \cdot \end{pmatrix}$$

بنابراین، ترانهاد $\mathbf{a}'$ عبارت است از

$$\tilde{\mathbf{a}'} = \tilde{\mathbf{a}}\tilde{\mathbf{Q}} = (a_1\ a_2\ \dots) \begin{pmatrix} q_{11} & q_{21} & \dots \\ q_{12} & q_{22} & \dots \\ \cdot & \cdot & \dots \end{pmatrix}$$

$$= (q_{11}a_1 + q_{12}a_2 + \dots, q_{21}a_1 + q_{22}a_2 + \dots, \dots)$$

ماتریس $\mathbf{Q}$ را متعامد می‌گویند اگر $\tilde{\mathbf{Q}} = \mathbf{Q}^{-1}$. این ماتریس بنابر تعریف عبارت است از تبدیل متعامد. با این تبدیل $\tilde{\mathbf{a}}\mathbf{b}$ بدون تغییر باقی می‌ماند، زیرا، $\tilde{\mathbf{a}}'\mathbf{b}' = \tilde{\mathbf{a}}\tilde{\mathbf{Q}}\mathbf{Q}\mathbf{b} = \tilde{\mathbf{a}}\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{Q}\mathbf{b} = \tilde{\mathbf{a}}\mathbf{b}$.

تبدیلی که با ضرب ماتریسی $\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{Q}$ تعریف می‌شود، تبدیل تشابهی می‌نامند. تبدیلی که به کمک حاصلضرب $\tilde{\mathbf{Q}}\mathbf{A}\mathbf{Q}$ تعریف می‌شود، تبدیل همنهشت می‌گویند.

هرگاه عناصر $\mathbf{Q}$ مختلط باشند، در این صورت، $\mathbf{Q}$ را هرمیتی می‌نامند وقتی $q^*_{ij} = q_{ji}$ باشد، یعنی $\tilde{\mathbf{Q}}^* = \mathbf{Q}$. اگر $\tilde{\mathbf{Q}}^* = \mathbf{Q}^{-1}$، $\mathbf{Q}$ را ماتریس یکانی و تبدیل $\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{Q}$ را تبدیل یکانی می‌گویند.

ویژه‌بردارهای ماتریس

ویژه‌بردار $\mathbf{a}$ از ماتریس $\mathbf{Q}$ برداری است که

$$\mathbf{Q}\mathbf{a} = \lambda\mathbf{a}$$

یا

$$(\mathbf{Q} - \mathbf{1}\lambda)\mathbf{a} = \mathbf{0}$$

که λ اسکالر است، و به آن ویژه‌مقدار می‌گویند. ویژه‌مقادیر با حل معادلهٔ مشخصهٔ زیر یافته می‌شوند

$$\det(\mathbf{Q}-\mathbf{1}\lambda)=\begin{vmatrix} q_{11}-\lambda & q_{12} & \cdots \\ q_{21} & q_{22}-\lambda & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdots \end{vmatrix}=0$$

که یک معادلهٔ جبری از درجهٔ n (تعداد سطرها یا ستونها یا مرتبهٔ ماتریس) است.

اگر ماتریس $\mathbf{Q}$ قطری باشد، در این صورت، ویژه‌مقادیر، عناصر آن به‌شمار می‌آیند.

دو ویژه‌بردار مختلف $\mathbf{a}_\alpha$ و $\mathbf{a}_\beta$ از ماتریس متقارن $\mathbf{Q}$ را در نظر بگیرید. در این صورت

$$\mathbf{Q}\mathbf{a}_\alpha=\lambda_\alpha\mathbf{a}_\alpha$$
$$\mathbf{Q}\mathbf{a}_\beta=\lambda_\beta\mathbf{a}_\beta$$

که λ_α و λ_β ویژه‌مقادیر به‌شمار می‌آیند. معادلهٔ اول را در $\tilde{\mathbf{a}}_\beta$ و ترانهادهٔ معادلهٔ دوم را $\mathbf{a}_\alpha$ ضرب می‌کنیم. در این صورت

$$\tilde{\mathbf{a}}_\beta\mathbf{Q}\mathbf{a}_\alpha=\lambda_\alpha\tilde{\mathbf{a}}_\beta\mathbf{a}_\alpha$$
$$\tilde{\mathbf{a}}_\beta\tilde{\mathbf{Q}}\mathbf{a}_\alpha=\lambda_\beta\tilde{\mathbf{a}}_\beta\mathbf{a}_\alpha$$

اما اگر $\mathbf{Q}$ متقارن باشد، آنگاه $\mathbf{Q}=\tilde{\mathbf{Q}}$، بنابراین سمت چپ این دو عبارت با هم مساوی‌اند. از این‌رو

$$(\lambda_\beta-\lambda_\alpha)\tilde{\mathbf{a}}_\beta\mathbf{a}_\alpha=0$$

در این صورت، اگر دو ویژه‌مقدار متفاوت باشند، باید دو ویژه‌بردار متعامد باشند.

تبدیل به‌صورت قطری

ماتریس $\mathbf{Q}$ مفروض است، ماتریس $\mathbf{A}$ را چنان می‌یابیم که

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{Q}\mathbf{A}=\mathbf{D}$$

که $\mathbf{D}$ قطری است. حال

$$\mathbf{D}-\lambda\mathbf{1}=\mathbf{A}^{-1}\mathbf{Q}\mathbf{A}-\lambda\mathbf{1}=\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{Q}-\lambda\mathbf{1})\mathbf{A}$$

بنابراین، ویژه‌مقادیر $\mathbf{Q}$ با ویژه‌مقادیر $\mathbf{D}$، یعنی با عناصر $\mathbf{D}$، یکسان‌اند. λ_k را ویژه‌مقدار خاصی می‌گیریم که با حل معادلهٔ مشخصهٔ $\det(\mathbf{Q} - \lambda \mathbf{I}) = 0$ به‌دست می‌آید. ویژه‌بردار $\mathbf{a}_k$ مربوط به آن در معادلهٔ

$$\mathbf{Q}\mathbf{a}_k = \lambda_k \mathbf{a}_k$$

صدق می‌کند که معادل n معادلهٔ جبری همگن خطی زیر است

$$\sum_j q_{ij} a_{jk} = \lambda_k a_{ik} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

این معادلات را می‌توان برای به‌دست‌آوردن نسبت مقادیر a که مؤلفه‌های ویژه‌بردار $\mathbf{a}_k$ به‌شمار می‌آیند، حل کرد. به‌ازای هر ویژه‌مقدار همین روش را به نوبهٔ خود تکرار می‌کنیم. بنابراین، ماتریس $\mathbf{A}$ را تشکیل می‌دهیم که ستونهای آن ویژه‌بردارهای $\mathbf{a}_k$ هستند، یعنی: $(\mathbf{A})_{ik} = a_{ik}$. از این‌رو ماتریس $\mathbf{A}$ باید در رابطهٔ زیر صدق کند

$$\mathbf{Q}\mathbf{A} = \mathbf{A} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots \\ 0 & \lambda_2 & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots \lambda_n \end{pmatrix} = \mathbf{A}\mathbf{D}$$

بنابراین داریم: $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{Q}\mathbf{A} = \mathbf{D}$، مطابق آنچه می‌خواستیم. در صورتی که $\mathbf{Q}$ متقارن باشد و ویژه‌مقادیر جملگی با هم متفاوت باشند، همواره می‌توان به روش بالا عمل کرد.

کاربرد ماتریسها در سیستمهای نوسانی

برای سیستمی با n درجهٔ آزادی، بردار جابه‌جایی تعمیم‌یافته عبارت است از

$$\mathbf{q} = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix}$$

در نمادگذاری ماتریسی انرژیهای پتانسیل و جنبشی (که در بخش ۳.۱۱ و ۴.۱۱ متن کتاب تعریف کردیم) به‌صورت فشردهٔ زیر در می‌آیند

$$T = \frac{1}{2}\tilde{\dot{\mathbf{q}}}\mathbf{M}\dot{\mathbf{q}} \qquad V = \frac{1}{2}\tilde{\mathbf{q}}\mathbf{K}\mathbf{q}$$

که در آنها،

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} & \dots \\ M_{21} & M_{22} & \dots \\ \cdot & \cdot & \dots \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} \kappa_{11} & \kappa_{12} & \dots \\ \kappa_{21} & \kappa_{22} & \dots \\ \cdot & \cdot & \dots \end{pmatrix}$$

ملاحظه می‌کنیم که $\mathbf{M}$ و $\mathbf{K}$ هر دو ماتریسهای متقارن‌اند. بنابراین، معادلات دیفرانسیل حرکت این سیستم را، که با معادلهٔ ۶.۴.۱۱ بیان شده‌اند، می‌توان به‌صورت (معادلهٔ ماتریسی ۷.۴.۱۱) زیر نوشت

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = 0$$

اگر یک جواب هماهنگ به‌صورت

$$\mathbf{q} = \mathbf{a}\cos\omega t$$

وجود داشته باشد، آنگاه

$$\ddot{\mathbf{q}} = -\omega^2\mathbf{q}$$

در نتیجه،

$$(-\mathbf{M}\omega^2 + \mathbf{K})\mathbf{a} = 0$$

برای اینکه جواب غیربدیهی داشته باشد، لازم است که دترمینان مشخصه صفر شود

$$\det(-\mathbf{M}\omega^2 + \mathbf{K}) = 0$$

یا

$$|-M_{ij}\omega^2 + \kappa_{ij}| = 0$$

که ریشه‌های آن بسامدهای بهنجار را به‌دست می‌دهند و ویژه‌بردارهای مربوط به آنها مدهای بهنجار را تعریف می‌کنند. برای مطالعهٔ بیشتر، در بخش مراجع برگزیدهٔ این کتاب، به یکی از هفت کتاب اول فهرست مراجع دربارهٔ مکانیک پیشرفته مراجعه کنید.

پیوست ط

ابزار نرم‌افزاری: مت‌کد و متماتیکا[1]

در متن کتاب چند مثال آوردیم که از نرم‌افزارهای موجود، در مت‌کد و متماتیکا برای حل بعضی مسائلی سود جستیم که از لحاظ ریاضی به‌سادگی حل‌کردنی نیستند و بارها در فیزیک با آنها مواجه می‌شویم. نرم‌افزارهای مشابه دیگری هم یافت می‌شوند؛ از جملهٔ مهمترین آنها مَپل[2] است که از آن هم می‌توانستیم به خوبی بهره گیریم. اینکه مت‌کد و متماتیکا را انتخاب کردیم، نباید تأییدی بر آن دو محصول به حساب آید. اینها صرفاً نرم‌افزارهایی‌اند که ما با آنها بیشتر آشناییم. روشهای تحلیلی که نرم‌افزارهای ریاضی پیش پای دانشمند تجربی نهاده‌اند؛ واقعاً بسیار زیاد است و ما فقط توانسته‌ایم به چند تایی از آنها دست پیدا کنیم. با این توضیح، نباید عجیب باشد که در این ویرایش کتاب، بیشتر از قبل بر بهره‌گیری از چنین ابزار کم‌هزینه و آسان دستیافتنی برای حل عددی مسائل تأکید کرده‌ایم.

۱. خوانندهٔ علاقه‌مند می‌تواند *Mathcad* یا *Mathematica* یا محصولات مربوطه را از اینترنت، به ترتیب، در آدرسهای زیر سفارش دهد:

[1] http://WWW.mathsoft.com/ [2] http://WWW.store.wolfram.com/

2. *Maple*

گاهگاهی توانسته‌ایم برخی برنامه‌های رایانه‌ای تجارتی مانند مایکروسافت اِکسل،[1] کوارترو پرو بُرلند[2] یا لوتس ۱ـ۲ـ۳[3] را برای تحلیل علمی به خدمت بگیریم. هر چند نوعاً استفاده از برنامه‌های رایانه‌ای تجاری در این حوزه از به‌کاربردن هر بستهٔ نرم‌افزار ریاضی که قبلاً نام بردیم پرزحمت‌تر است، در اینجا راجع به اینکه چگونه ممکن است در حوزه‌های علمی از آنها سود جست، صحبت نمی‌کنیم. در عوض، معتقدیم که دانشجویان ساعی فیزیک، باید یکی از نرم‌افزارهای محاسباتی عالی را که صرفاً برای حل مسائل مربوط به رشته‌شان طراحی شده است، به‌کار برند. علم چگونگی بهره‌گیری از چنین ابزارهایی، سلاحی است با ضرورتی روزافزون که هر فیزیکدان تجربی باید در اسلحه‌خانهٔ تحلیل خود آن را در اختیار داشته باشد.

کمبود جا ما را از اقدام به بحث کامل راجع به چگونگی استفاده از این نرم‌افزارها باز می‌دارد. شرکتهایی که آنها را تولید می‌کنند کتابهایی حجیم همراه این محصولات توزیع می‌کنند که کاربردشان را شرح می‌دهند. اکثر این کتابهای راهنمای مربوط به نرم‌افزارها، مرجعی کافی و گاه مرجعی عالی‌اند، اما بسیاری از آنها با کتابهای راهنمای فنی نقصهایی مشترک دارند: بیشتر به‌طور نامناسبی تنظیم و نوشته شده‌اند؛ تقریباً گفتار همهٔ آنها نامفهوم، پیچیده، و تعریف نشده‌اند؛ اطلاعات حساس، گاهی در جاهای ضروری بیان نمی‌شوند و به ندرت در آموزش مناسب برای کاربر مبتدی به‌خوبی عمل می‌کنند. کتاب راهنمای متکد، از این نقایص مبراست و خوب تنظیم و نوشته شده است. معمولاً، در این کتاب اصطلاحات نامفهوم قبل از به‌کاربردن تعریف می‌شوند، مطالب مهم و حساس به‌آسانی در دسترس‌اند، و کاربر مبتدی بدون زحمت زیادی می‌تواند «شروع به کار» کند. از سوی دیگر، کتاب راهنمای متماتیکا بیشتر مشکلات مذکور را دارد. در واقع، به نظر می‌رسد مؤلفانش با سهل‌انگاری محصول کار خود را غیرقابل‌استفاده ارائه کرده‌اند. متماتیکا علی‌رغم کتاب راهنمایش ابزار محاسباتی بسیار خوبی از کار در آمده است و رنج فراگیری روش استفاده از آن، ارزش دارد. اگر، همان‌طور که گمان می‌کنیم، توان محاسباتی متناسب با ارزش محصول باشد، در حقیقت، متماتیکا باید توانمندترین ابزاری باشد که اکنون در بازار موجود است.

خوشبختانه، برای پرکردن جای خای ایجادشده با نارسایی اکثر کتابهای راهنمای فنی، بسیاری شرکتهای مستقل تأسیس شده‌اند که در نوشتن برنامهٔ نرم‌افزاری معمولی برای چنین کتابهایی متخصص‌اند. بدنهٔ کامل چنین کتابهایی به ارائهٔ مثالهایی اختصاص می‌یابند که تأکید می‌کنند چگونه ابزار مناسب انتخاب شود و هم چگونه آن ابزار برای حل مسئلهٔ خاصی به‌کار رود. در هر مثال، مؤلفان برای توصیف شرح دقیق هر مرحلهٔ، فرایند حل، مسئله رنج زیادی برده‌اند.

1. Microsoft *Excel* 2. Borland's *Quattro Pro* 3. Lotus *1-2-3*

داشتن چنین کتابی در کتابخانهٔ کسی خیلی ارزش دارد که بخواهد از محصول نرم‌افزاری مربوطه استفادهٔ ماهرانه‌ای به عمل آورد. آنچه در اینجا ارائه می‌کنیم، از این جهت معنی ندارد، نقصی که برای آن هیچ عذری پذیرفته نیست، همان‌طور که در کلام ابتدایی این کتاب آمد. با وجود این، در آنچه دنبال می‌شود (و نیز در بخش ۲.۵) ما دو کاربرگه در متکد و متماتیکا ارائه می‌کنیم تا به‌طور چشمگیری استفاده از آنها را در حل مسائل نمایش دهیم؛ آنچه مسلماً فقط کمترین کمکی به دانشجو خواهد کرد. ما از دانشجوی جدی می‌خواهیم که یک بستهٔ نرم‌افزاری ریاضی (و در صورت امکان یک دستورالعمل را که توسط فروشندهٔ مستقل توزیع می‌شود) خریداری کند و آن را برای بررسی و حل مسائل رایانه‌ای به‌کار برد که در پایان هر فصل آورده شده است.

ترسیم سریع نمودارها با استفاده از متکد

غالباً ترسیم نمودار نمایش هندسی داده‌ها یا تابع برای واضح نشان‌دادن روابط بین متغیرها، بسیار مطلوب است. به نظر می‌رسد متکد مخصوصاً به این منظور خلق شده است. آسانی ترسیم نمودارها یکی از برجسته‌ترین جنبه‌های آن به‌شمار می‌آید، و تنها به این دلیل، ارزش خریدنش را دارد.

برای ترسیم نمودار در متکد، باید صرفاً مراحل زیر طی شود:

- متغیرهای x و y تعریف شوند.
- کلید @ تایپ شود تا ناحیهٔ نموداری را باز کند.
- نام متغیرهای x و y در نگاهدارندهٔ جا، مجاور محورهای x و y تایپ شود.
- مکان‌نما (cursor) خارج از ناحیهٔ نموداری حرکت داده شود و در این صورت متکد نموداری ترسیم می‌کند.

مثالی از این فرایند در کاربرگه‌ای که دنبال می‌کنیم نشان داده خواهد شد. این کاربرگه برای ترسیم نمودار فضای فاز نوسانگر هماهنگ ساده (بخش ۵.۳) تنظیم شده است. توجه کنید که هر مرحله در کاربرگه بحث مختصری همراه دارد که به آن اشاره می‌کند. چنین نواحی متنی، هرجا در کاربرگهٔ متکد با تایپ‌کردن کلید " به دنبال متن به‌آسانی ایجاد می‌شود. به این طریق، توصیف هر مرحله در محاسبه به این روش یا روشی مشابه، فرایندی است که ارزش شبیه‌سازی دارد. هرگز نمی‌دانید که چه موقع ممکن است دوباره کاربرگه‌ای را بخواهید اجرا کنید که زمانی در گذشتهٔ دور آن را ایجاد کرده‌اید و حضور متن توضیحی، بیشتر اوقات به معنی تفاوت بین بررسی الگوریتمی قابل‌فهم است با الگوریتمی که به الفبای هیروگلیف مصر باستان شباهت نزدیک دارد.

ترسیم نمودار فضای فاز برای نوسانگر هماهنگ ساده

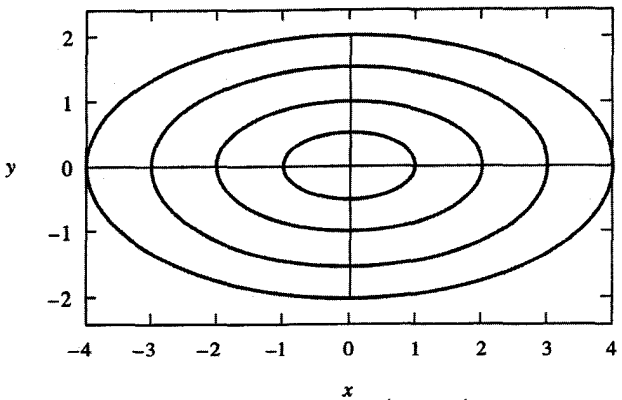
تعریف بسامد زاویه‌ای و زمان تناوب ← $\omega := \frac{2\cdot\pi}{T}$ $T := 4\cdot\pi$

تعریف ۴ دامنه، ۱ تا ۴ ← $A_j := j$ $j := 1 \ldots 4$

تقسیم زمان تناوب به ۱۰۰۰ فاصلهٔ زمانی ← $t_i := \frac{i\cdot T}{1000}$ $i := 0 \ldots 1000$

محاسبهٔ مختصهٔ x نقطه ← $x_{j,i} := A_j \cdot \sin(\omega \cdot t_i)$

محاسبهٔ مختصهٔ y نقطه ← $v_{j,i} := \omega \cdot A_j \cdot \cos(\omega \cdot t_i)$



شکل ۱.۵.۳ نمودار فضای فاز نوسانگر هماهنگ ساده ($\omega_0 = 0.5\,s^{-1}$). بدون نیروی میرایی ($\gamma = 0\,s^{-1}$).

معادلات دیفرانسیل جفت‌شده

معادلات دیفرانسیل حرکت ذره که به شکل مؤلفه‌ای بیان شده باشند، اغلب شامل جملات جفت شده‌اند که یافتن جواب تحلیلی آنها در بهترین حالت دشوار و در بدترین حالت ناممکن است. نوعاً، چنین جملاتی به علت تأثیر نیروهای ناشی از حرکت ذره در یک بعد بر حرکتش در بعد دیگر تشکیل می‌شوند. معمولاً، می‌توانیم شکل بسته‌ای، یعنی، جوابهای تحلیلی چنین معادلات دیفرانسیل جفت‌شده‌ای را فقط برای تعداد حالتهای محدودی بیابیم. هرکدام از این شرطها که به جفت‌شدگی می‌انجامد نمایانگر تقریبهایی تصادفی یا ریاضی‌اند که نشان می‌دهند نیروها به‌طور مناسبی پرداخته شده‌اند. در اکثر موارد، باید به روشهای عددی بازگردیم تا چنین معادلاتی را حل کنیم. معادلات جفت‌شدهٔ حرکت حاکم بر مسیر توپ بیسبال که در مثال ۲.۳.۴ در خصوص آن بحث شد، مثالی از حالت اخیر به‌شمار می‌آیند؛ این معادلات را فقط می‌توان به‌طور عددی حل کرد.

از متماتیکا برای حل مثال ۲.۳.۴ بهره می‌گیریم. این مثال مزیتهای دیگری هم دارد که نه تنها

چگونگی حل معادلات دیفرانسیل جفت‌شده را نشان می‌دهند، بلکه همچنین نشان می‌دهند که چگونه:

- نمودارها ترسیم می‌شوند
- جدولهای داده‌ها تشکیل می‌شوند
- توابع درون‌یابی برای برآورد مقادیر بین نقاط داده‌ای شکل می‌گیرند
- ریشه‌های معادلات یا محل تقاطع دو خط، یافته می‌شوند
- فرین یک تابع پیدا می‌شود.

جواب کاربرگهٔ متماتیکا در پایان این پیوست نشان داده می‌شود. این مراحل باید خود توضیح‌دهنده باشند زیرا همراه هر یک از آنها مقدار زیادی گزارش می‌آید. وقتی جواب مثال ۲.۳.۴، در متن درس بحث شد، نکتهٔ خاصی در اینجا باید تکرار شود: فرایند حل تکرارشونده است. متغیرهای θ_0 و $vMph_0$ در خلال هر تکرار ثابت باقی می‌مانند. در ابتدا چنان اختیار شدند که $\theta_0 = 40^\circ$ و $vMph_0 = 130\,\text{mph}$. در واقع مقادیر نشان داده‌شده در کاربرگه، مقادیر نهایی‌اند که از فرایند حل مسئلهٔ تکرارشونده به‌دست می‌آیند.

مراحل تکرارشونده که در حل مسئله عملی می‌شوند شامل تمام مراحلی‌اند که در این زیربخشها می‌آیند:

- **حل عددی مسیر با مقاومت هوای درجهٔ دوم**
- **یافتن برد توپ بیسبال**

برای شروع، مراحل این زیربخشها پی‌درپی با ثابت گرفتن $vMph_0$ در $130\,\text{mph}$ اجرا می‌شوند. هر آزمون مقدار متفاوتی از θ_0 را به‌کار می‌برد که از 35° تا 42° با افزایشهای یک‌درجه‌ای تغییر می‌کرد. برد توپ بیسبال برای هر یک از این آزمونها به‌دست می‌آمد و برد حاصل برحسب مقادیر θ_0 در جدول $thetaData$ وارد می‌شد. در آن موقع، این داده‌ها برای یافتن مقدار θ_0 در حالتی بودند که برد بیشینه به‌دست آمده بود. این محاسبه در این زیربخش انجام شد.

- **یافتن زاویهٔ بهینهٔ پرتاب توپ بیسبال**

سپس، این مراحل در زیربخش بالا مجدداً تکرار می‌شوند؛ فقط این‌بار θ_0 در مقدار بهینه‌ای که یافته شد (39°) ثابت گرفته می‌شود و مقدار $vMph_0$ از $130\,\text{mph}$ تا $155\,\text{mph}$ در نموهای $5\,\text{mph}$ تغییر می‌کند. در اینجا نیز، برد توپ برای هر یک از این آزمونها محاسبه و برد نتیجه برحسب مقادیر $vMph_0$ در جدول $RvsTheta$، وارد می‌شود. درون‌یابی این داده‌ها انجام می‌شود تا مقدار $vMph_0$ لازم برای بُرد $565\,\text{ft}(172.16\,\text{m})$ پیدا شود. این محاسبه در این زیربخش اجرا شد:

- **یافتن سرعت اولیه برای $R_{Mick} = 172.16\,\text{m}$**

مثال ۲.۳.۴

محاسبهٔ مسیر توپ بیسبال در پرتابی (پروازی) تحت تأثیر مقاومت هوای متناسب با مجذور سرعت.

متغیرها

$vMph_0$	سرعت اولیه (mph)
v_0	سرعت اولیه (ms^{-1})
u_0, w_0	مؤلفه‌های سرعت اولیه (x, z)
θ_0	زاویهٔ بلندی (رادیان)
R_{mick}	برد میکی مانتال ($۱۷۲٫۱۶m = ۵۶۵ft$)
TofF	زمان پرواز (s)
g	شتاب گرانشی ($۹٫۸ms^{-2}$)
γ	ضریب مقاومت هوا($۰٫۰۰۵۵m^{-1}$)

```
vMph0 = 143.23;
v0 = 0.447 vMph0;
u0 = v0 Cos[θ0]; w0 = v0 Sin[θ0];
θ0 = 39 (pi/180);
Rmick = 172.16;
TofF = 9;
g = 9.8;
γ = 0.0055;
```

جواب تحلیلی مسیر ــ بدون مقاومت هوا

$$z_1[t_] = w_0 t - \frac{g}{2}t^2;\quad x_1[t_] = u_0 t;$$

حل عددی مسیر با مقاومت هوای درجهٔ دوم

فراخوان معادلهٔ دیفرانسیل حل کنِ NDSolve.

ترسیم نمودار نتایج با سود جستن از ParametricPlot.

نشان‌دادن نمودار با منحنیهای علامت‌دارشده.

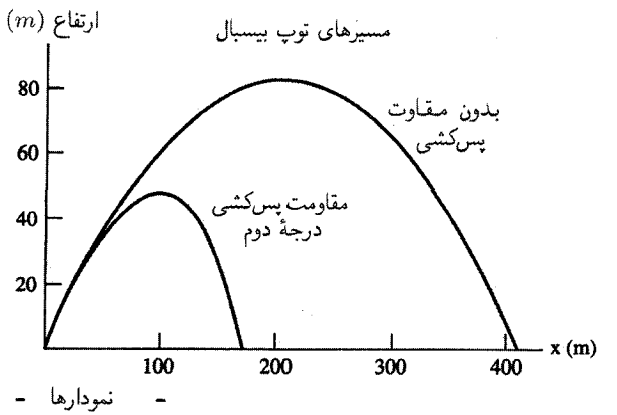
```
sol = NDSolve[
   {z''[t] == -g - γ(z'[t]^2 + x'[t]^2)^0.5 z'[t], x''[t] == -γ(z'[t]^2 + x'[t]^2)^0.5 x'[t],
   z[0] == 0, z'[0] == w0, x[0] == 0, x'[0] == u0}, {z, x}, {t, 0, TofF}]

trajectory = ParametricPlot[{{x1[t], z1 [t]}, {Evaluate[{x[t], z[t]}/.sol]}},
   {t, 0, TofF}, Compiled -> False, PlotRange -> {{0, 420}, {0, 90}},
   PlotStyle -> {Thickness[0.005]}, AxesLabel ->{"x(m)", "Height(m)"},
   PlotLabel -> " Baseball trajectories", DisplayFunction → Identity];

trajectory = Show[trajectory, Graphics[Text["no drag", {310, 80}]],
   Graphics[Text["Quadratic drag", {200, 50}]]];

show[trajectory, DisplayFunction → $DisplayFunction]

{{z → InterpolatingFunction[{{0., 9.}}, <>], x → InterpolatingFunction [{{0., 9.}}, <>]}}
```



- نمودارها -

یافتن برد توپ بیسبال

محاسبهٔ زمانی که طول می‌کشد تا توپ به زمین برخورد کند، یعنی، یافتن ریشهٔ $t_\circ$ تابع $z[t]$

محاسبهٔ برد برحسب متر: $\text{xDistance} = x[t_\circ]$

محاسبهٔ برد برحسب فوت: xFeet

```
Tzero = FindRoot[Evaluate[z[t] == 0/. sol], {t, 7.0}]
xDistance = x[t/. Tzero]/. sol
xFeet = xDistance 3.2808
{t → 6.23961}

{172.155}

{564.807}
```

یافتن زاویهٔ بهینه برای پرتاب توپ بیسبال

بهره‌گیری از نمودار برای برآورد زاویهٔ بلندی بهینه برای پرتاب توپ بیسبال با بُرد بیشینه (حدس‌زدن سرعت اولیه: ۱۳۰mph : $vMph_{\circ}$).

تعریف‌کردن جدول داده‌ها {برد، $\theta_{\circ}$} و تابع درون‌یابی RvsTheta.

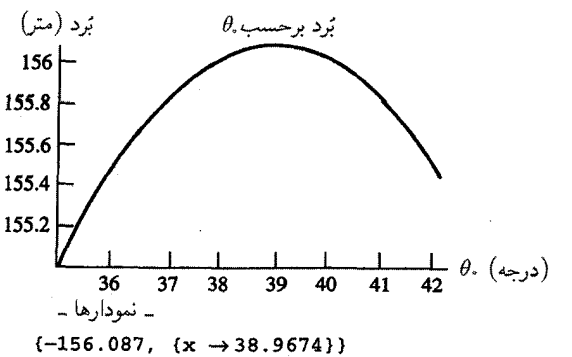
فراخوان ترسیم با تابع درون‌یابی به‌صورت شناسه.

یافتن زاویهٔ $\theta_{\circ}$ که به‌ازای آن برد بیشینه باشد (Call FindMinimum).

```
thetaData = {{35, 154.974}, {36, 155.467}, {37, 155.816}, {38, 156.022},
   {39, 156.087}, {40, 156.014}, {41, 155.802}, {42, 155.455}};

RvsTheta = Interpolation[thetaData];

Plot[RvsTheta[x], {x, 35, 42}, PlotStyle -> {Thickness[0.005]}, AxesOrigin->
   {35, 155}, AxesLabel -> {"θ₀(degrees)", "Range(m)"}, PlotLabel->" Range vs θ₀"]
FindMinimum[-RvsTheta[x], {x, 39}]
```



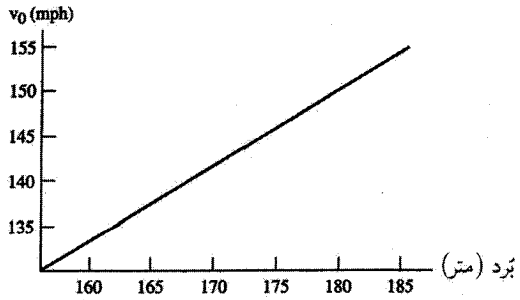

```
{-156.087, {x → 38.9674}}
```

یافتن سرعت اولیهٔ توپ بیسبال به ازای $R_{mick} = ۵۶۵\text{ft}(۱۷۲\text{ر}۱۶\text{m})$

به‌کار بردن نمودار برای یافتن سرعت اولیهٔ لازم توپ بیسبال برای رسیدن به بُرد R_{mick} (زاویهٔ بلندی $\theta_{\circ}$ در مقدار بهینه قرار داده شده است). جدول دادهٔ به‌دست‌آمده (داده‌های برد) با برد برحسب سرعت اولیهٔ $v_{\circ}$.

فراخوان ListPlot با داده‌های ورودی به‌صورت شناسه‌ها {بُرد، $v_{\circ}$}.

```
rangeData = {{156.087, 130}, {162.284, 135},
   {168.331, 140}, {174.23, 145}, {179.983, 150}, {185.595, 155}};
VvsR = ListPlot[rangeData, PlotJoined->True, AxesOrigin->{156.1, 130},
   AxesLabel->{"Range(m)", "v₀(mph)"}, PlotStyle->{Thickness[0.005]}]
```



ـ نمودارها ـ

یافتن سرعت اولیه به‌ازای $R_{mick} = ۱۷۲٫۱۶\text{m}$

تعریف‌کردن تابع درون‌یابی برای سرعت برحسب داده‌های بُرد.

یافتن سرعت بهینه به کمک درون‌یابی (Call Interpolation).

دستور Call Line primitive برای تعریف‌کردن تقاطعهای خط افقی و قائم.

```
initSpeed = Interpolation[rangeData];
speed = initSpeed[R_mick]

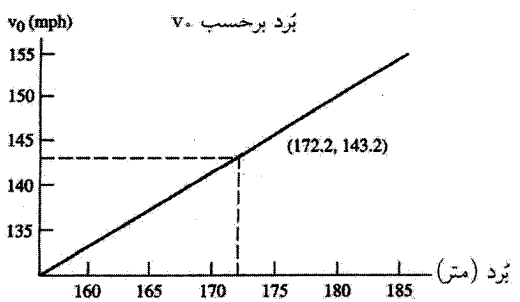
143.231

rangeIntercept = Line[{{R_mick, 130}, {R_mick, 145}}];
speedIntercept = Line[{{156, speed}, {174.0, speed}}];
```

بازنمایش نمودار نمایانگر بُرد و سرعت اولیهٔ متناظر با آن به‌صورت تقاطعها

فراخوان نمایش برای بازنمایی (Call Show for redisplay).

```
Show[VvsR, Graphics[{Dashing[{0.025, 0.025}], speedIntercept}],
 Graphics[{Dashing[{0.025, 0.025}], rangeIntercept}], AxesOrigin-> {156, 130},
 AxesLabel->{"Range(m)", "v0(mph)"}, PlotLabel->" v0 vs Range"]
```



ـ نمودارها ـ

پاسخ مسائل برگزیده

فصل ۱

۱.۱ (الف) $\sqrt{۶}$، (ب) $۳\mathbf{i}+\mathbf{j}-۲\mathbf{k}$، (ج) ۱، (د) $\mathbf{i}-\mathbf{j}+\mathbf{k}$

۳.۱ $\cos^{-۱}\sqrt{۵/۱۴} = ۵۳٫۳°$

۷.۱ $q = ۱$ یا ۲

۱۷.۱ $b\omega$ ،$۲b\omega$ ،$b\omega(\sin^۲\omega t + ۴\cos^۲\omega t)^{۱/۲}$

۲۷.۱ $\mathbf{v} = v\hat{\boldsymbol{\tau}}$، $a = \dot{v}\hat{\boldsymbol{\tau}} + \hat{\mathbf{n}}v^۲/\rho$، $|\mathbf{v}\times\mathbf{a}| = \mathbf{v}\cdot\mathbf{a}_n = vv^۲/\rho = v^۳/\rho$

فصل ۲

۱.۲ (الف) $\dot{x} = (F_۰/m)t + (c/۲m)t^۲$، $x = (F_۰/۲m)t^۲ + (c/۶m)t^۳$

(ب) $\dot{x} = (F_۰/cm)(۱-\cos ct)$، $x = (F_۰/c^۲m)(ct - \sin ct)$

(ج) $\dot{x} = -(F_۰/cm)(۱-e^{ct})$، $x = -(F_۰/c^۲m)(ct - e^{ct}+۱)$

۳.۲ (الف) $V = -F_۰x - (c/۲)x^۲ + C$، (ب) $V = (F_۰/c)e^{-cx} + C$،

(ج) $V = -(F_۰/c)\sin cx + C$،

۹.۲ (الف) ۵۴۱، (ب) ۸۷، (ج) ۴۵۴

فصل ۳

۱.۳ ۶٫۴۳m/s، $۲٫۰۷\times۱۰^۴\text{m/s}^۲$

۳.۳ برحسب متر $x(t) = ۰٫۲۵\cos(۲۰\pi t) + ۰٫۰۰۱۵۹\sin(۲۰\pi t)$

۵.۳ $[(x_1^2\dot{x}_2^2 - x_2^2\dot{x}_1^2)/(\dot{x}_2^2 - \dot{x}_1^2)]^{1/2}$، $[(\dot{x}_2^2 - \dot{x}_1^2)/(x_1^2 - x_2^2)]^{1/2}$

۱۹.۳ (الف) $T = 2\pi(l/g)^{1/2} \times$ ۱٫۰۴۱، (ب) معلوم می‌شود که مقدار g به‌دست‌آمده ۸ درصد کمتر است، (ج) $B/A =$ ۰٫۰۰۳۲

فصل ۴

۱.۴ (الف) $\mathbf{F} = -c(yz\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + xy\mathbf{k})$، (ب) $\mathbf{F} = -2(\alpha x\mathbf{i} + \beta y\mathbf{j} + \gamma z\mathbf{k})$، (ج) $\mathbf{F} = ce^{-(\alpha x+\beta y+\gamma z)}(\alpha\mathbf{i} + \beta\mathbf{j} + \gamma\mathbf{k})$، (د) $\mathbf{F} = -cn\, r^{n-1}\mathbf{e}_r$

۳.۴ (الف) $c =$ ۱/۲، (ب) $c = -$۱

۷.۴ $\theta = \sin^{-1}\left(-\dfrac{gb}{V_0^2}\right)$

۲۱.۴ در ارتفاع $h = b/3$ کره را ترک می‌کند

فصل ۵

۱.۵ بالا: ۱۵۰lb، پایین ۹۰lb

۳.۵ ۱٫۰۰۵mg، حدود ۵٫۷°

۵.۵ (الف) $g/6$ به جلو، (ب) $g/3$ به عقب

۹.۵ $(V_0^2/\rho)\mathbf{i}' + [(V_0^2/b) + (V_0^2 b/\rho^2)]\mathbf{j}$

فصل ۶

۱.۶ حدود 2×10^{-9}

۳.۶ حدود ۱٫۴h

۲۳.۶ $\psi = \pi[(1+c)/(1+4c)]^{1/2}$، که $c = \rho 4\pi a^3/3M$ خورشید

۲۵.۶ $a > (\epsilon/k)^{1/2}$

۲۹.۶ $\psi =$ ۱۸۰٫۷° برای مدارهای نزدیک به زمین

۳۱.۶ $\theta = -30°$

فصل ۷

۱.۷ $\mathbf{r}_{\rm cm} = (\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k})/3$، $v_{\rm cm} = (3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k})/3$، $\mathbf{p} = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$

۵.۷ جهت: به پایین با زاویهٔ ۲۶٫۶° نسبت به افق، سرعت ۱٫۱۱۸v_0

۷.۷ اتومبیل: ۲/۰v_0، کامیون: ۸/۰v_0. هر دو سرعت نهایی در جهت سرعت اولیهٔ کامیون‌اند.

۱۵.۷ پروتون: ۰٫۵۵۸v_0 $= v'_x = v'_y$؛ هلیم: $v'_x =$ ۰٫۱۱۰v_0، $v'_y =$ ۰٫۱۴۰v_0 $-$

۱۷.۷ تقریباً ۵۷٫۳°

۲۷.۷ $-mg = m\dot{v} + V\dot{m}$، $m_f/m_p = \exp(1/k - g/(kv_c)\cdot m_0/\dot{m}) - 1$،

$m_f/m_p = 77$

فصل ۸

۱.۸ (الف) روی خط تقارن به فاصلهٔ $b/3$ از نقطهٔ وسط قطعهٔ سیم میانی،

(ب) اگر ورقه در صفحهٔ xy واقع باشد، $x_{cm} = y_{cm} = 4b/3\pi$،

(ج) $x_{cm} = 0$، $y_{cm} = 3b/5$، (د) $x_{cm} = y_{cm} = 0$، $z_{cm} = 2b/3$،

(ه) $b/4$ از قاعده

۳.۸ $a/14$ از مرکز کرهٔ بزرگ

۵.۸ $(31/70)ma^2$

۱۱.۸ $2\pi(2a/g)^{1/2}$، $2\pi(3a/2g)^{1/2}$

۱۵.۸ $g(m_1 - m_2)/(m_1 + m_2 + I/a^2)$

۱۹.۸ $v_0 t - \frac{1}{2}gt^2(\sin\theta + \mu\cos\theta)$

$(2v_0^2/g)(\sin\theta + 6\mu\cos\theta)/(2\sin\theta + 7\mu\cos\theta)^2$

فصل ۹

۱.۹ (الف) $I_{xx} = \frac{m}{3}a^2$، $I_{yy} = \frac{4m}{3}a^2$، $I_{zz} = \frac{5m}{3}a^2$، $I_{xz} = I_{yz} = 0$، $I_{xy} = -\frac{m}{3}a^2$؛

(ب) $\frac{2}{15}ma^2$، (ج) $\mathbf{L} = (ma^2\omega/6\sqrt{5})(\mathbf{i} + 2\mathbf{j})$، (د) $T = \frac{1}{15}ma^2\omega^2$

۳.۹ (الف) زاویهٔ میل محور l عبارت است از $22{,}5° = 1\tan^{-1}\frac{1}{4}$؛

(ب) محورهای اصلی در صفحهٔ xy موازی لبه‌های ورق‌اند.

۹.۹ (الف) ۱٫۴۱۴s، ۰٫۶۳۲s؛ (ب) ۱٫۶۰۳s، ۰٫۶۶۳s

۱۳.۹ ثانیهٔ قوس $0{,}00065 = \alpha(I_s - I)/I_s \approx \alpha - \tan^{-1}[(I/I_s)\tan\alpha]$

۱۷.۹ $S > \left[\frac{128ga}{b^4}\left(\frac{a^2}{3} + \frac{b^2}{16}\right)\right]^{1/2} \approx 2910\,\text{rps}$

فصل ۱۰

۳.۱۰ $\ddot{x} = \left(\frac{5}{7}\right)g\sin\theta$

۵.۱۰ $m_1 : -\left(\frac{5}{11}\right)g$، $m_2 : \left(\frac{7}{11}\right)g$، $m_3 : \left(\frac{3}{11}\right)g$، $m_4 : -\left(\frac{5}{11}\right)g$

۷.۱۰ $x = x_0\cosh\omega t - (g/2\omega^2)\sin\omega t + (g/2\omega^2)\sin\omega t$

۹.۱۰ $F_x = m(\ddot{x} - ۲\omega\dot{y} - \omega^۲ x)$ ،$F_y = m(\ddot{y} + ۲\omega\dot{x} - \omega^۲ y)$ ،$F_z = m\ddot{z}$

۲۳.۱۰ $U(r) = \dfrac{l^۲ \sin^۲ \alpha}{۲r^۲} + gr\cos\alpha$ که ثابت$= l = r^۲\dot{\phi}$

۲۷.۱۰ (الف) $\dot{\theta} = p_\theta/ml^۲$ ،$\dot{p}_\theta = -mgl\sin\theta$؛

(ب) $\dot{x} = p_x/(m_۱ + m_۲)$ ،$\dot{p}_x = g(m_۱ - m_۲)$؛

(ج) $\dot{x} = p_x/m$ ،$\dot{p}_x = mg\sin\theta$.

فصل ۱۱

۱.۱۱ (الف) $x = k^{۱/۳}$ پایدار

(ب) $x = ۱/b$ ناپایدار

(ج) $x = ۰$ ناپایدار، $x = \pm b/\sqrt{۲}$ پایدار

(د) $(۳k/m)^{۱/۲}$، ۳٫۶۲۸s؛ $۲b(k/m)^{۱/۲}$، ۳٫۱۴s، به‌ترتیب، برای قسمتهای (الف) و (ج)

۹.۱۱ $۲\pi a[۵/۳g(b-a)]^{۱/۲}$

۱۱.۱۱ ۲٫۳۶۳s

۱۷.۱۱ $\omega = (k/m)^{۱/۲}\dfrac{(۵ \pm \sqrt{۱۷})^{۱/۲}}{۲}$

۲۷.۱۱ $v_{\text{طولی}} = \sqrt{\dfrac{k}{m}}(l + \Delta l)$

$v_{\text{عرضی}} = \sqrt{\dfrac{k}{m}(l + \Delta l)\Delta l}$

مراجع برگزیده

مکانیک

Barger, V., and Olsson, M., *Classical Mechanics*, McGraw-Hill, New York, 1973.
Becker, R. A., *Introduction to Theoretical Mechanics*, McGraw-Hill, New York, 1954.
Lindsay, R. B., *Physical Mechanics*, Van Nostrand, Princeton, NJ., 1961.
Rossberg, K., *A First Course in Analytical Mechanics*, Wiley, New York, 1983.
Rutherford, D. E., *Classical Mechanics*, Interscience, New York, 1951.
Slater, J. C., and Frank, N. H., *Mechanics*, McGraw-Hill, New York, 1947.
Smith, P., and Smith, R. C., *Mechanics*, John Wiley & Sons, New York, 1990.
Symon, K., *Mechanics*, 3rd ed., Addison-Wesley, Reading, Mass., 1971.
Synge, J. L., and Griffith, B. A., *Principles of Mechanics*, McGraw-Hill, New York, 1959.

مکانیک پیشرفته

Chow, T. L., *Classical Mechanics*, John Wiley & Sons, New York, 1995.
Corbin, H. C., and Stehle, P., *Classical Mechanics*, Wiley, New York, 1950.
Desloge, E., *Classical Mechanics* (two volumes), Wiley-Interscience, New York, 1982.
Goldstein, H., *Classical Mechanics*, 2nd ed., Addison-Wesley, Reading, Mass., 1980.
Hauser, W., *Introduction to the Principles of Mechanics*, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1965.
Landau, L. D., and Lifshitz, E. M., *Mechanics*, Pergamon, New York, 1976.

ماریون، جری بی. و استیون تی. تورنتون، دینامیک کلاسیک ذرات و سیستمها، ترجمهٔ جلال‌الدین پاشایی‌راد و بهرام معلمی، ج۳، تهران، مرکز نشر دانشگاهی، ۱۳۸۵.

Moore, E. N., *Theoretical Mechanics*, Wiley, New York, 1983.
Wells, D. A., *Lagrangian Dynamics*, Shaum, New York, 1967.
Whittaker, E. T., *Advanced Dynamics*, Cambridge University Press, London and New York, 1937.

روشهای ریاضی

Burden, R. L., and Faires, J. D., *Numerical Analysis*, Brooks Cole Publ., Pacific Grove, CA, 1997.
Churchill, R. V., *Fourier Series and Boundary Value Problems*, McGraw-Hill, New York, 1963.
Grossman, S. I., and Derrick, W. R., *Advanced Engineering Mathematics*, Harper Collins Publ., New York, 1988.
Jeffreys, H., and Jeffreys, B. S., *Methods of Mathematical Physics*, Cambridge University Press, London and New York, 1946.
Kaplan, W., *Advanced Calculus*, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1952.
Margenau, J., and Murphy, G. M., *The Mathematics of Physics and Chemistry*, 2nd ed., Van Nostrand, New York, 1956.
Mathews, J., and Walker, R. L., *Methods of Mathematical Physics*, W. A. Benjamin, New York, 1964.
Press, W. H., Teukolsky, S. A., Vetterling, W. T., and Flannery, B. T., *Numerical Recipes*, Cambridge University Press, New York, 1992.
Wylie, C. R., Jr., *Advanced Engineering Mathematics*, McGraw-Hill, New York, 1951.

آشوب

Baker, G. L., and Gollub, J. P., *Chaotic Dynamics*, Cambridge University Press, New York, 1990.
Hilborn, R. C., *Chaos and Nonlinear Dynamics*, Oxford University Press, New York, 1994.

جدولها

Dwight, H. B., *Mathematical Tables*, Dover, New York, 1958.
Handbook of Chemistry and Physics, Mathematical Tables, Chemical Rubber Co., Cleveland, Ohio, 1962 or after.
Pierce, B. O., *A Short Table of Integrals*, Ginn, Boston, 1929.