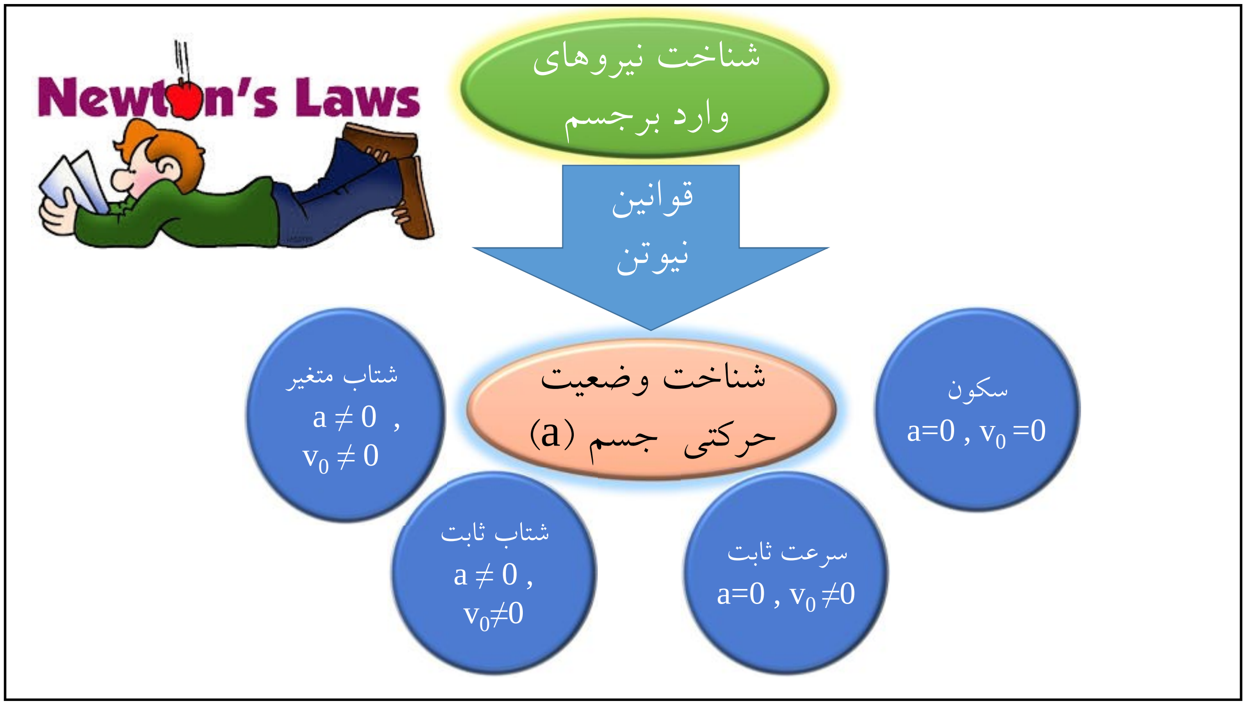
فصل دوم – بخش ۲

بررسی حرکت توسط قوانین نیوتن



۲.۲ حرکت راستخط: شتاب یکنواخت تحت تأثیر نیروی ثابت

$$F_x(x, \dot{x}, t) = m\ddot{x}$$

Position $x = x(t)$

Velocity $v = v(t) = \dot{x}$

Acceleration $a = a(t) = \ddot{x}$

انواع نیروها

- نیروی ثابت
- نیروی وابسته به زمان
- نیروی وابسته به مکان
- نیروی وابسته به سرعت

F = constant ⟶ a = constant

$$\ddot{x} = \frac{dv}{dt} = \frac{F}{m} = \text{ثابت} = a$$

معلوم = v_0 سرعت و x_0 مکان اولیه

انتگرال گیری نسبت به زمان

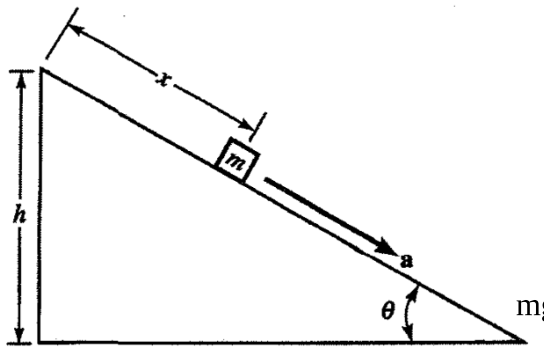
$$\int \ddot{x}dt = \int adt \quad \rightarrow \quad \dot{x} = v = at + v_0$$

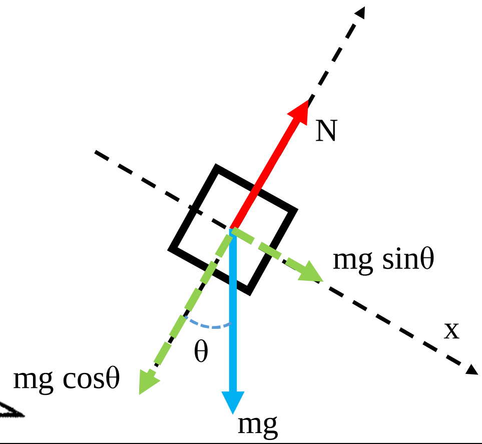
$$\int \dot{x}dt = \int (at + v_0)dt \quad \rightarrow \quad x = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + x_0$$

معادله مستقل از زمان $2a(x - x_0) = v^2 - v_0^2$

مثال

قطعه‌جسمی را در نظر بگیرید که، مطابق شکل ۱.۲.۲ (الف)، روی سطحی هموار و بدون اصطکاک به زاویهٔ شیب θ نسبت به سطح افق رو به پایین می‌لغزد. اگر ارتفاع سطح h باشد و این جسم از حال سکون از بالای سطح رها شود، وقتی به انتهای سطح شیبدار می‌رسد، سرعتش چقدر است؟

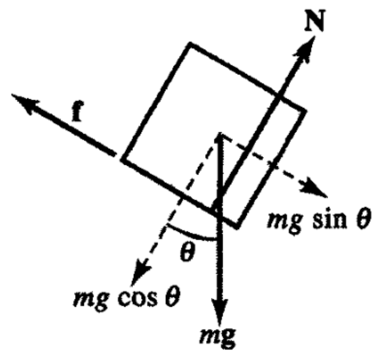




$$\begin{cases} \ddot{x} = a = \dfrac{F_x}{m} = g\sin\theta \\ x - x_\circ = \dfrac{h}{\sin\theta} \\ ۲a(x - x_\circ) = v^۲ - v_\circ^۲ \end{cases} \Rightarrow v^۲ = ۲(g\sin\theta)\left(\frac{h}{\sin\theta}\right) = ۲gh$$

مثال مثال قبل با فرض وجود اصطکاک

$$\begin{cases} mg\sin\theta - f_k = ma \\ N = mg\cos\theta \\ f_k = \mu_k N \end{cases}$$



$$\Rightarrow \quad mg\sin\theta - \mu_k\, mg\cos\theta = m\ddot{x}$$

$$\ddot{x} = \frac{F_x}{m} = g(\sin\theta - \mu_k\cos\theta)$$ شتاب حرکت جسم بر روی سطح شیبدار

$$\ddot{x} = \frac{F_x}{m} = g(\sin\theta - \mu_k\cos\theta)$$

اگر $\underbrace{\theta > \tan^{-1}\mu_K}_{\text{دارای بعد زاویه}}$ ⟵ عبارت داخل پرانتز مثبت ⟵ سرعت ذره افزایش

زاویهٔ اصطکاک جنبشی $\varepsilon = \tan^{-1}(\mu_k)$

اگر $\theta = \epsilon$ ⟵ $a = 0$ و ذره با سرعت ثابت به طرف پایین سطح شیبدار می‌لغزد

اگر $\theta < \epsilon$ ⟵ a منفی است و ذره سرانجام به حال سکون در می‌آید

۱. ضریب اصطکاک دیگری هم به‌نام ضریب اصطکاک ایستا، μ_s، وجود دارد، که وقتی در نیروی عمود بر سطح ضرب شود، نیروی اصطکاک بیشینه را تحت تماس ایستایی به‌دست می‌دهد. یعنی، نیروی لازم برای اینکه جسمی تازه در حالت شروع به حرکت قرارگیرد، هنگامی که ابتدا در حال سکون باشد. به‌طورکلی، داریم، $\mu_s > \mu_K$.

نیروهای وابسته به زمان F(t)

$$m\frac{dv}{dt} = F(t) \xrightarrow{v = v_0 \text{ at } t = t_0,} v = v_0 + \frac{1}{m}\int_{t_0}^{t} F(t)\,dt$$

$$v = v(t) = dx(t)/dt, \longrightarrow \frac{dx(t)}{dt} = v_0 + \frac{1}{m}\int_{t_0}^{t} F(t)\,dt$$

$$x = x_0 + v_0(t - t_0) + \frac{1}{m}\int_{t_0}^{t}\left[\int_{t_0}^{t} F(t)\,dt\right]dt$$

$$x = x_0 + v_0(t - t_0) + \frac{1}{m}\int_{t_0}^{t} dt' \int_{t_0}^{t'} F(t'')\,dt''$$

مثال)

We will illustrate this discussion by applying it to the interaction of radio waves with electrons in the ionosphere, resulting in the reflection of radio waves from the ionosphere. The ionosphere is a region that surrounds Earth at a height of approximately 200 km (about 125 miles) from the surface of Earth. The ionosphere consists of positively charged ions and negatively charged electrons forming a neutral gas. When a radio wave, which is an electromagnetic wave, passes through the ionosphere, it interacts with the charged particles and accelerates them. We are interested in the motion of an electron of mass m and charge $-e$ initially at rest when it interacts with the incoming electromagnetic wave of electric field intensity E, given by

$$E = E_0 \sin(\omega t + \phi)$$

where ω is the oscillation frequency in radians per second of the incident electromagnetic wave and ϕ is the initial phase. The interaction results in a force F on the electron given by

force F on the electron $\longrightarrow$ $F = -eE = -eE_0 \sin(\omega t + \phi)$

$$F = -eE = -eE_0 \sin(\omega t + \phi)$$

$$a = \frac{F}{m} = -\frac{eE_0}{m}\sin(\omega t + \phi)$$

$$a = -a_0 \sin(\omega t + \phi)$$

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{eE_0}{m}\sin(\omega t + \phi)$$

$t = t_0 = 0,\ v_0 = 0,$ $\longrightarrow$

$$v = -\frac{eE_0}{m\omega}\cos\phi + \frac{eE_0}{m\omega}\cos(\omega t + \phi)$$

$$v = -\frac{eE_0}{m\omega}\cos\phi + \frac{eE_0}{m\omega}\cos(\omega t + \phi)$$

$x = x_0$ at $t_0 = 0,$

$$x = \underbrace{-\frac{eE_0}{m\omega^2}\sin\phi - \left(\frac{eE}{m\omega}\cos\phi\right)t}_{\text{جمله رانشی}} + \underbrace{\frac{eE_0}{m\omega^2}\sin(\omega t + \phi)}_{\text{جمله تناوبی}}$$

Comparing Eq. (2.19) for F with Eq. (2.24) for x, it becomes quite clear that the oscillating part of the displacement x is 180° out of phase with the applied force that results from the electric field of incident electromagnetic waves. Ordinarily, in a dielectric at low frequencies, the charges are displaced in the direction of the applied force, resulting in the polarization of the charges in phase with the applied force. In such situations, the resulting dielectric coefficient of the material is greater than 1. In the case of the ionosphere, it can be shown that the resulting polarization is 180° out of phase with the electric field; hence the *dielectric coefficient of the ionosphere is less than 1.* This result has two consequences.

1. The phase velocity v of electromagnetic waves in the ionosphere is greater than the speed of light c.
2. The refractive index of the ionosphere for incoming electromagnetic waves is less than the refractive index of the free space from where the waves are coming (the incident medium, which is a vacuum in this case).

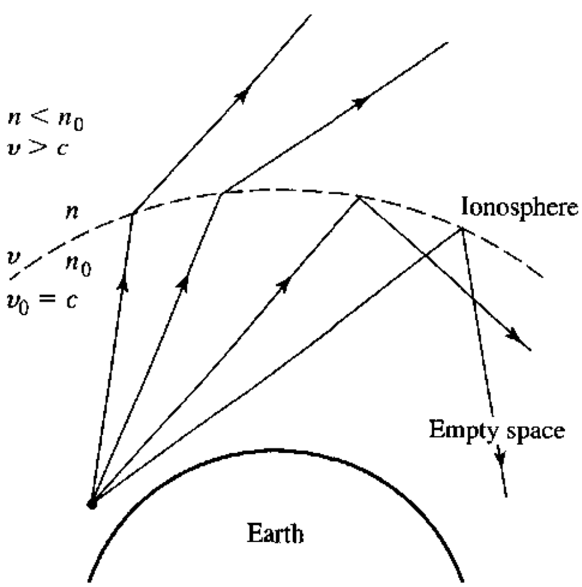


Figure 2.1 Reflection of radiowaves from the ionosphere. The total internal reflection of electromagnetic waves from the ionosphere.

مثال)

A block of mass m is initially at rest on a frictionless surface at the origin. At time t = 0, a decreasing force given by $F = F0\exp(-\lambda t)$, where $\lambda = 0.5$ is positive and less than 1, is applied. Calculate x(t) and v(t).

$$m\cdot\frac{d}{dt}v = F0\cdot e^{-\lambda\cdot t} \longrightarrow \int_0^{v1} 1\,dv = \int_0^{t1}\left(\frac{F0}{m}\right)\cdot e^{-\lambda\cdot t}\,dt \longrightarrow v1 = -F0\cdot\frac{(\exp(-\lambda\cdot t1)-1)}{(\lambda\cdot m)}$$

$$\int_0^{x1} 1\,dx = \int_0^{t1} -F0\cdot\frac{(\exp(-\lambda\cdot t)-1)}{(\lambda\cdot m)}\,dt \longrightarrow x1 = F0\cdot\frac{(\exp(-\lambda\cdot t1)+\lambda\cdot t1-1)}{\left(\lambda^2\cdot m\right)}$$

تكليف)

Exercise 2.1: A particle of mass m is at rest at the origin of the coordinate system. At $t = 0$, a force

$$F = F_0(1 - te^{-\lambda t})$$

is applied to the particle. Find the acceleration, velocity, and position of the particle as a function of time.

۳.۲ نیروهای وابسته به‌مکان: مفاهیم انرژی جنبشی و انرژی پتانسیل

نیروهای وابسته به مکان $\mathbf{F = F(x)}$:

- ❑نیروی گرانشی
- ❑نیروی الکتروستاتیکی
- ❑نیروی کشسانی
- ❑نیروی تراکمی

اگر نیرو مستقل از سرعت یا زمان باشد، معادلهٔ دیفرانسیل حرکت راستخط به‌صورت ساده زیر در می‌آید

$$F(x) = m\ddot{x}$$

حل به کمک قاعده زنجیری:

مرحله اول: ارتباط کار و انرژی جنبشی

$$\ddot{x} = \frac{d\dot{x}}{dt} = \frac{dx}{dt}\frac{d\dot{x}}{dx} = v\frac{dv}{dx}$$

$$F(x) = m\ddot{x} \longrightarrow F(x) = mv\frac{dv}{dx} = \frac{m}{۲}\frac{d(v^{۲})}{dx} = \frac{dT}{dx}$$

$$W = \int_{x_۰}^{x} F(x)dx = T - T_۰$$

انرژی جنبشی ذره $T = \frac{۱}{۲}mv^{۲}$

کار، W، که نیروی $F(x)$ وارد بر ذره روی آن انجام می‌دهد

کار عبارت است از تغییر انرژی جنبشی ذره

مرحله دوم: ارتباط کار و انرژی پتانسیل

حال تابع $V(x)$ را چنان تعریف می‌کنیم که $-\frac{dV(x)}{dx} = F(x)$

تابع $V(x)$ را انرژی پتانسیل می‌نامند

$$\begin{cases} W = \int_{x_\circ}^{x} F(x)dx = -\int_{x_\circ}^{x} dV = -V(x) + V(x_\circ) \\ W = \int_{x_\circ}^{x} F(x)dx = T - T_\circ \end{cases}$$

$$-V(x) + V(x_\circ) = T - T_\circ \Rightarrow T_\circ + V(x_\circ) = T + V(x)$$

چون حاصلجمع انرژی جنبشی و پتانسیل در حالت اولیه (لحظه صفر) با لحظات دیگر مساوی است لذا می توان گفت این حاصلجمع ثابت است

$$T_\circ + V(x_\circ) = \text{ثابت} = T + V(x) \equiv E$$

این عبارت معادلهٔ انرژی است. E، بنابر تعریف، عبارت است از انرژی کل ذره (واژهٔ تخصصی آن انرژی مکانیکی کل است). انرژی کل با مجموع انرژیهای جنبشی و پتانسیل برابر و در تمام طول حرکت ذره ثابت است. این ثابت‌بودن از آنجا ناشی می‌شود که نیروی وارد بر ذره فقط تابعی از مکان x (مربوط به ذره که در نتیجه می‌تواند از انرژی پتانسیلش نتیجه شود)، $V(x)$، است. چنین نیرویی را پایستار[1] گویند. معمولاً ماهیت نیروهای ناپایستار، یعنی نیروهایی که تابع انرژی پتانسیل در آنها برقرار نیست، مانند اصطکاک، اتلافی است.

بررسی حرکت ذره از طریق حل معادله انرژی

$$T + V(x) = E = \text{constant}$$

$$T = \frac{1}{2}mv^2$$

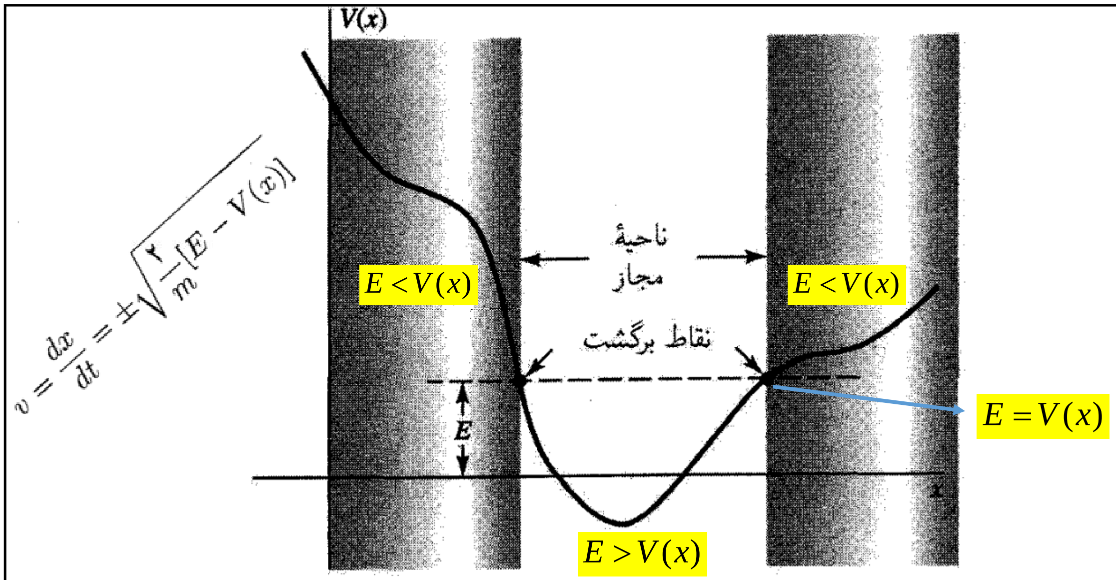
$$\longrightarrow \frac{1}{2}mv^2 = E - V(x) \longrightarrow v = \frac{dx}{dt} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}[E - V(x)]}$$

$$\int_{x_0}^{x} \frac{dx}{\pm\sqrt{\frac{2}{m}[E - V(x)]}} = t - t_0$$

این معادله t را به‌صورت تابعی از x به‌دست می‌دهد

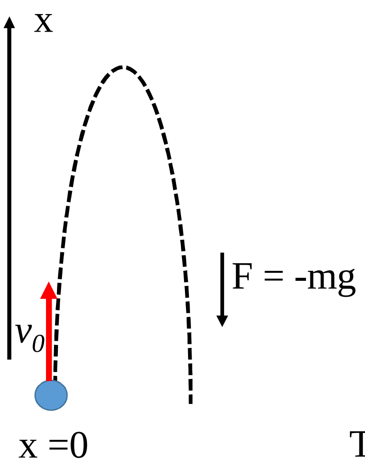
$$v = \frac{dx}{dt} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}[E - V(x)]}$$

- **چون زیر رادیکال باید مثبت باشد** رابطهٔ v فقط به‌ازای مقادیری از x حقیقی است که $V(x)$ را کمتر یا مساوی با انرژی کل، E، کند
- ذره در ناحیه، یا ناحیه‌هایی،محبوس می‌شود که شرط $V(x) \leq E$ نسبت به آنها برقرار باشد
- به‌ازای $V(x) = E$، v صفر می‌شود، یعنی ذره باید متوقف شود و جهت حرکت خود را در نقاطی که این تساوی درآنجا برقرار می‌شود، تغییر دهد. این نقاط را نقاط برگشت حرکت نامند



شکل ۱.۳.۲ نمودار تابع انرژی پتانسیل یک بعدی $V(x)$ که ناحیهٔ مجاز حرکت و نقاط برگشت را به‌ازای مقدار معینی از انرژی کل E نشان می‌دهد.

مثال ۱.۳.۲ سقوط آزاد



$$-\frac{dV(x)}{dx}=F(x)$$

$$\Rightarrow\ -dV/dx=-mg$$

$$\Rightarrow\ V=mgx+C \ \Rightarrow\ V=mgx$$

C، مقداری اختیاری است و فقط به انتخاب تراز مرجع اندازه‌گیری V بستگی دارد.
می‌توانیم بگیریم $C=0$، یعنی هرگاه $x=0$ آنگاه $V=0$

$$T+V=E \longrightarrow \frac{1}{2}mv^2+mgx=E$$

فرض کنیم جسم با سرعت اولیهٔ $v_۰$ از مبدأ $x = ۰$ به بالا پرتاب شود

$$E = \underbrace{mv_۰^۲/۲}_{\text{در لحظه اولیه}} = \underbrace{mv^۲/۲ + mgx}_{\text{در ارتفاع } x}$$

$$v^۲ = v_۰^۲ - ۲gx$$

نقطهٔ برگشت حرکت، که در این حالت در حداکثر ارتفاع واقع است، با قرار دادن $v = ۰$

$$۰ = v_۰^۲ - ۲gx_{max}$$

$$\Rightarrow \quad h = x_{max} = \frac{v_۰^۲}{۲g}$$

قانون گرانش نیوتون

تغییر نیروی گرانی با ارتفاع

نیروی گرانی بین دو ذره با عکس مجذور فاصلهٔ بین آنها متناسب است

$$F_r = -\frac{GMm}{r^2}$$

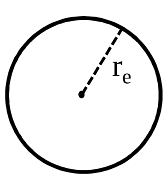
نیروی گرانشی زمین بر جسمی به جرم m

G ثابت گرانش نیوتون

M جرم زمین

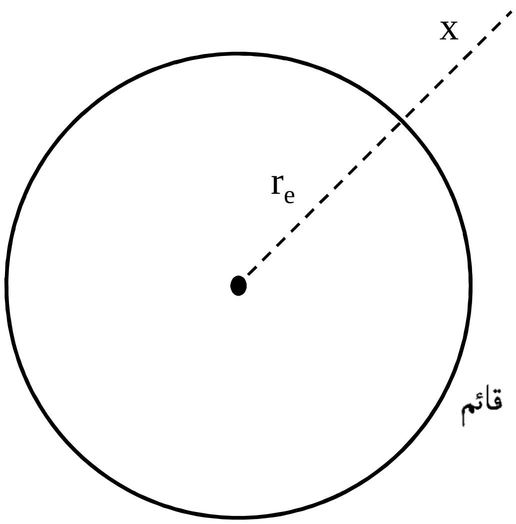
r فاصلهٔ جسم تا مرکز زمین

وقتی جسم در سطح زمین واقع باشد



$$F_r = -\frac{GMm}{r_e^2} = -mg \quad \rightarrow \quad g = \frac{GM}{r_e^2}$$

$\mathbf{R_e}$ شعاع کره زمین و g شتاب گرانی در سطح زمین



$$r = r_e + x$$

$$F_r = -\frac{GMm}{r^2} = -\frac{GMm}{(r_e + x)^2}$$

$$g = \frac{GM}{r_e^2} \quad \rightarrow \quad GM = gr_e^2$$

$$F(x) = -mg\frac{r_e^{۲}}{(r_e + x)^{۲}} = m\ddot{x}$$

معادلهٔ دیفرانسیل حرکت جسمی با سقوط (یا صعود) قائم

حل معادله دیفرانسیل

$$F(x) = -mg\frac{r_e^{۲}}{(r_e + x)^{۲}} = m\ddot{x}$$

$$\ddot{x} = vdv/dx$$

$$-mgr_e^{۲}\int_{x_۰}^{x}\frac{dx}{(r_e + x)^{۲}} = \int_{v_۰}^{v} mvdv$$

$$mgr_e^{۲}\left(\frac{۱}{r_e + x} - \frac{۱}{r_e + x_۰}\right) = \frac{۱}{۲}mv^{۲} - \frac{۱}{۲}mv_۰^{۲}$$

$$\int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x}$$

این عبارت دقیقاً همان معادلهٔ انرژی به شکل معادلهٔ (۶.۳.۲) است. در اینجا، به جای اینکه انرژی پتانسیل برابر mgx باشد، عبارت است از $V(x) = -mg[r_e^{۲}/(r_e + x)]$.

$$E = T + V = \frac{1}{2}mv^2 - mg\frac{r_e^2}{r_e + x}$$

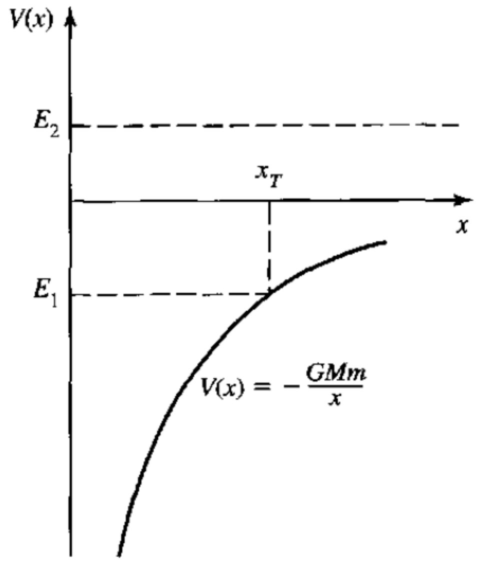


Figure 2.6 Particle of energy E in a gravitational potential $V(x)$ versus x.

ارتفاع بیشینه: سرعت گریز

الف)

فرض کنید جسمی با سرعت اولیهٔ v_0 در سطح زمین، $x_0 = 0$، به بالا پرتاب شود.

$$mgr_e^2\left(\frac{1}{r_e + x} - \frac{1}{r_e + x_0}\right) = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2$$

$$v^2 = v_0^2 - 2gx\left(1 + \frac{x}{r_e}\right)^{-1}$$

اگر x در مقایسه با r_e خیلی کوچک باشد، به‌طوری که بتوان از جملهٔ x/r_e چشم پوشید

$$v^2 = v_0^2 - 2gx$$

ب) یافتن بیشینه ارتفاع (نقطه بازگشت)

با قرار دادن $v = ۰$ و حل معادلهٔ بالا برحسب x

$$v^۲ = v_۰^۲ - ۲gx\left(۱ + \frac{x}{r_e}\right)^{-۱}$$

$$\frac{2gx}{(1+\frac{x}{r_e})} = v_0^2 \quad \rightarrow \quad 2gx = v_0^2(1+\frac{x}{r_e}) \quad \rightarrow \quad x(2g - \frac{v_0^2}{r_e}) = v_0^2$$

$$\rightarrow \quad x = \frac{v_0^2}{2g - \frac{v_0^2}{r_e}} = \frac{v_0^2}{2g(1-\frac{v_0^2}{2gr_e})} \quad \rightarrow \mathrm{x}_{\max} = \mathrm{h}_{\mathrm{O}} = \frac{\mathrm{v}_0^2}{2\mathrm{g}}(1-\frac{\mathrm{v}_0^2}{2\mathrm{gr}_\mathrm{e}})^{-1}$$

ج) یافتن سرعت گریز

هنگامی x نامتناهی است که مخرج رابطه x صفر شود

$$x = \frac{v_0^2}{2g(1-\frac{v_0^2}{2gr_e})}$$

$$(1-\frac{v_0^2}{2gr_e}) = 0 \quad \rightarrow \quad v_0^2 = 2gr \quad \rightarrow \quad v_0 = \sqrt{2gr}$$

به‌ازای، $g = ۹٫۸\mathrm{m/s}^۲$ و $r_e = ۶٫۴ \times ۱۰^۶\mathrm{m}$، مقدار عددی سرعت گریز از سطح زمین

$$v_e \simeq ۱۱\mathrm{km/s}$$

در جوّ زمین، میانگین سرعت مولکولهای هوا (O_2 و N_2) در حدود $0.5 km/s$، به‌نحو چشمگیری کوچکتر از سرعت گریز، است، و به این علت است که زمین جو را پیرامون خود نگه می‌دارد. از سوی دیگر، ماه جوی ندارد زیرا بزرگی سرعت گریز از سطح ماه، به علت کمی جرمش نسبت به بزرگی سرعت گریز از سطح زمین به میزان قابل‌ملاحظه‌ای کمتر است. به این جهت، هر اکسیژن یا نیتروژنی [در اطراف ماه م.] سرانجام ناپدید می‌شود. حال حتی اگرچه هیدروژن روی‌هم‌رفته فراوانترین عنصر در عالم است، جو زمین هیدروژن قابل‌ملاحظه‌ای در خود نگه نمی‌دارد. هیدروژن جو باید مدتها قبل از زمین گریخته باشد، زیرا سرعت مولکولی هیدروژن (به‌علت جرم اندک این مولکول) چندان زیاد است که در هر لحظه سرعت تعداد چشمگیری از مولکولهای هیدروژن از بزرگی سرعت گریزشان بیشتر است.

مثال

تابع مورس، $V(x)$، انرژی پتانسیل یک مولکول دو اتمی مرتعش را به‌صورت تابعی از x، فاصلهٔ بین دو اتم تشکیل‌دهندهٔ آن، با تقریب نشان می‌دهد و با رابطهٔ زیر بیان می‌شود

$$V(x) = V_0[1 - e^{-(x-x_0)/\delta}]^2 - V_0$$

V_0، x_0، و δ پارامترهایی‌اند که برای توصیف رفتار مشاهده‌شدهٔ زوج خاصی از اتمها برگزیده می‌شوند. نیرویی که هر اتم بر اتم دیگر وارد می‌آورد با مشتق این تابع نسبت به x بیان می‌شود. نشان دهید که x_0 فاصلهٔ دو اتم است، هنگامی که تابع انرژی پتانسیل کمینه، و مقدار انرژی پتانسیل برای این فاصله عبارت باشد از $V(x_0) = -V_0$. (وقتی مولکول در این پیکربندی واقع شود، می‌گوییم در حال تعادل است.)

حل:

انرژی پتانسیل مولکول دو اتمی وقتی کمینه است که مشتقش نسبت به x، فاصلهٔ بین اتمها، صفر باشد. بنابراین

$$F(x) = -\frac{dV(x)}{dx} = 0$$

$$2\frac{V_0}{\delta}(1 - e^{-(x-x_0)/\delta})(e^{-(x-x_0)/\delta}) = 0$$

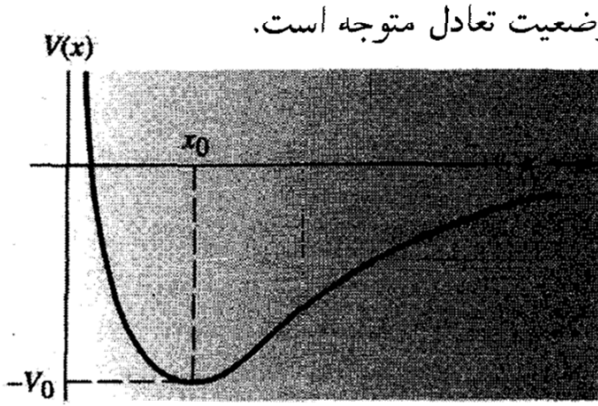
$$1 - e^{-(x-x_0)/\delta} = 0$$

$$\ln(1) = -(x - x_0)/\delta = 0 \longrightarrow x = x_0$$

کمینهٔ انرژی پتانسیل را می‌توان با قراردادن $x = x_0$ در رابطهٔ $V(x)$ یافت، که حاصل عبارت است از $V(x_0) = -V_0$.

مثال

شکل ۲.۳.۲، تابع انرژی پتانسیل یک مولکول دواتمی را مشاهده می‌کنید. نشان دهید که به‌ازای فواصل x نزدیک به x_0، تابع انرژی پتانسیل سهموی و نیروی برایند وارد بر هر یک از اتمهای این زوج، خطی، و همواره به‌طرف وضعیت تعادل متوجه است.



$$V(x) = V_\circ[\text{۱} - e^{-(x-x_\circ)/\delta}]^{\text{۲}} - V_\circ$$ انرژی پتانسیل یک مولکول دو اتمی مرتعش

بسط تیلور یک تابع

$$f(x) = \sum \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \sum \frac{1}{2!} f''(x_0)(x-x_0)^2 + \ldots$$

بسط تابع انرژی پتانسیل در نزدیکی وضعیت تعادل $x \approx x_0$

$$e^{-(x-x_0)/\delta} = 1 - (\frac{x-x_0}{\delta})$$

$$V(x) \approx V_\circ\left[\text{۱} - \left(\text{۱} - \left(\frac{x-x_\circ}{\delta}\right)\right)\right]^{\text{۲}} - V_\circ$$

$$\approx \frac{V_\circ}{\delta^{\text{۲}}}(x-x_\circ)^{\text{۲}} - V_\circ$$

نیرو خطی است و سمتگیری آن چنان است که مولکول دو اتمی به‌وضعیت تعادلش برگردد

$$F(x) = -\frac{dV(x)}{dx} = -\frac{\text{۲}V_\circ}{\delta^{\text{۲}}}(x-x_\circ)$$

MOTION UNDER A LINEAR RESTORING FORCE

$$F(x) = -kx \qquad \textit{Hooke's law}$$

$$V(x) = -\int_{x_s}^{x} F(x)\,dx = -\int_0^x (-kx)\,dx$$

$$V(x) = \tfrac{1}{2}kx^2$$

$$\int_{x_\circ}^{x} \frac{dx}{\pm\sqrt{\frac{\text{۲}}{m}[E - V(x)]}} = t - t_\circ$$

$$t = \int \frac{dx}{\sqrt{(2/m)(E - \frac{1}{2}kx^2)}} = \int \frac{dx}{\sqrt{\frac{2E}{m}\left(1 - \frac{k}{2E}x^2\right)}}$$

$$t = \int \frac{dx}{\sqrt{(2/m)(E - \frac{1}{2}kx^2)}} = \int \frac{dx}{\sqrt{\frac{2E}{m}\left(1 - \frac{k}{2E}x^2\right)}}$$

$$\sqrt{\frac{k}{2E}}\,x = \sin\theta \quad \text{and} \quad \sqrt{\frac{k}{2E}}\,dx = \cos\theta\, d\theta$$

$$t = +\sqrt{\frac{m}{k}}\int_{\theta_0}^{\theta} d\theta = \sqrt{\frac{m}{k}}(\theta - \theta_0)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$t = \frac{1}{\omega}(\theta - \theta_0)$$

$$\theta = \omega t + \theta_0$$

$$\sin^{-1}\left(\sqrt{\frac{k}{2E}}\,x\right) = \omega t + \theta_0$$

$$x = A\sin(\omega t + \theta_0)$$

$$A = \sqrt{\frac{2E}{k}} \qquad E = \frac{1}{2}kA^2$$

بررسی توابع پتانسیل

$$\int_{x_0}^{x} \frac{dx}{\pm\sqrt{\frac{2}{m}[E - V(x)]}} = t - t_0$$

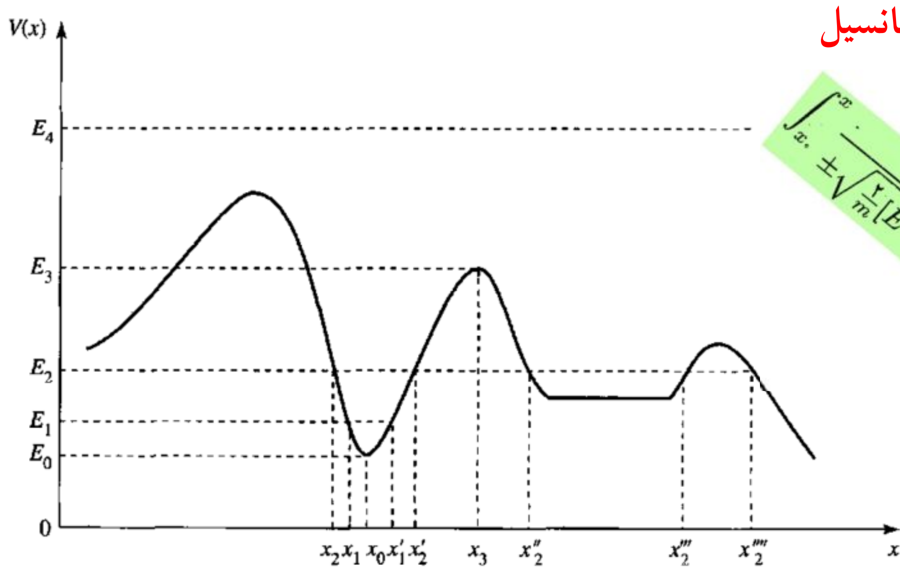


Figure 2.5 The solid curve corresponds to a potential function V(x), and E0, E1, . . . , are different energies of a particle moving in such a potential.

E_0: The particle is in stable equilibrium.
E_1: The particle moves between the turning points x_1 and x_1'.
E_2: The particle moves between the turning points x_2 and x_2' with changing velocity. While moving between the turning points x_2'' and x_2''', the particle has constant velocity and hence is in the region of neutral equilibrium. The particle can also exist in the region for $x > x_2''''$.
E_3: When a particle with this energy is at x_3, it is at a position of unstable equilibrium. It can also move in the valley on the left with a motion similar to that of a particle with energy E_2. Once it starts moving to the right, it keeps on moving, first with increasing velocity to x_2'' and then with constant velocity up to x_2'''.
E_4: A particle with this energy can move anywhere. When passing over the hills, it slows down, while over the valleys, it speeds up, as it should.

تابع پتانسیل کلی

In general, we can express the potential $U(x)$ in a Taylor series about a certain equilibrium point. For mathematical simplicity, let us assume that the equilibrium point is at $x = 0$ rather than $x = x_0$ (if not, we can always redefine the coordinate system to make it so). Then we have

$$U(x) = U_0 + x\left(\frac{dU}{dx}\right)_0 + \frac{x^2}{2!}\left(\frac{d^2U}{dx^2}\right)_0 + \frac{x^3}{3!}\left(\frac{d^3U}{dx^3}\right)_0 + \cdots$$

U_0 at $x = 0$ is simply a constant that we can define to be zero

$\left(\frac{dU}{dx}\right)_0 = 0$ Equilibrium point

$$U(x) = \frac{x^2}{2!}\left(\frac{d^2U}{dx^2}\right)_0 + \frac{x^3}{3!}\left(\frac{d^3U}{dx^3}\right)_0 + \cdots$$

$$U(x) = \frac{x^2}{2!}\left(\frac{d^2U}{dx^2}\right)_0 + \frac{x^3}{3!}\left(\frac{d^3U}{dx^3}\right)_0 + \cdots$$

Near the equilibrium point $x = 0$, the value of x is small,

$$U(x) = \frac{x^2}{2}\left(\frac{d^2U}{dx^2}\right)_0$$

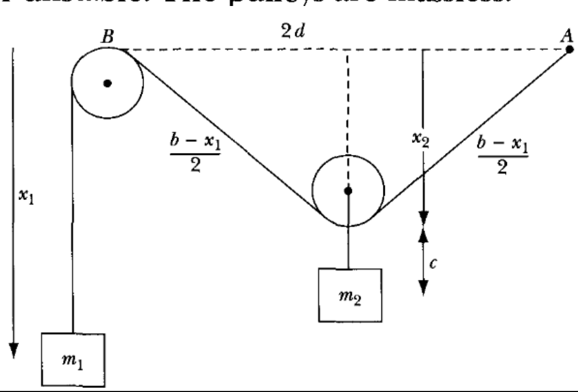
$$\left(\frac{d^2U}{dx^2}\right)_0 > 0 \quad \text{Stable equilibrium}$$

$$\left(\frac{d^2U}{dx^2}\right)_0 < 0 \quad \text{Unstable equilibrium}$$

شرط تعادل

مثال

Consider the system of pulleys, masses, and string shown in Figure 2-15. A light string of length b is attached at point A, passes over a pulley at point B located a distance $2d$ away, and finally attaches to mass m_1. Another pulley with mass m_2 attached passes over the string, pulling it down between A and B. Calculate the distance x_1 when the system is in equilibrium, and determine whether the equilibrium is stable or unstable. The pulleys are massless.



$U = 0$ along the line AB. $U = -m_1 g x_1 - m_2 g(x_2 + c)$

$$x_2 = \sqrt{[(b - x_1)^2/4] - d^2}$$
$$U = -m_1 g x_1 - m_2 g\sqrt{[(b - x_1)^2/4] - d^2} - m_2 g c$$

equilibrium position $(x_1)_0 \equiv x_0$:

$$\left(\frac{dU}{dx_1}\right)_0 = -m_1 g + \frac{m_2 g(b - x_0)}{4\sqrt{[(b - x_0)^2/4] - d^2}} = 0$$

$$4m_1\sqrt{[(b - x_0)^2/4] - d^2} = m_2(b - x_0)$$
$$(b - x_0)^2(4m_1^2 - m_2^2) = 16m_1^2 d^2$$

$$\Rightarrow \quad x_0 = b - \frac{4m_1 d}{\sqrt{4m_1^2 - m_2^2}}$$

real solution exists only when $4m_1^2 > m_2^2$.

Under what circumstances will the mass m_2 pull the mass m_1 up to the pulley B(i.e., $x_1 = 0$)? We can use Equation 2.103 to determine whether the equilibrium is stable or unstable:

$$\frac{d^2U}{dx_1^2} = \frac{-m_2 g}{4\{[(b - x_1)^2/4] - d^2\}^{1/2}} + \frac{m_2 g(b - x_1)^2}{16\{[(b - x_1)^2/4] - d^2\}^{3/2}}$$

Now insert $x_1 = x_0$.

$$\left(\frac{d^2U}{dx_1^2}\right)_0 = \frac{g(4m_1^2 - m_2^2)^{3/2}}{4m_2^2 d}$$

The condition for the equilibrium (real motion) previously was for $4m_1^2 > m_2^2$, so the equilibrium, when it exists, will be stable, because $(d^2U/dx^2)_0 > 0$.