بسم الله الرحمن الرحیم

فصل دوم – بخش ۳

نیروی وابسته به سرعت

۴.۲ نیروهای وابسته به سرعت: مقاومت شاره و سرعت حدی

نمونه ای از نیروهای وابسته به سرعت:

جسمی در داخل شاره‌ای حرکت می‌کند و مقاومت چسبنده‌ای بر آن وارد می‌آید

اگر بتوان نیرو را فقط به‌صورت تابعی از v بیان کرد، معادلهٔ دیفرانسیل حرکت را می‌شود به یکی از دو صورت زیر نوشت:

$$F_{\circ} + F(v) = m\frac{dv}{dt}$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}\cdot\frac{dx}{dt} = v\frac{dv}{dx} \longrightarrow F_{\circ} + F(v) = mv\frac{dv}{dx}$$

در اینجا، $\mathbf{F}_{\circ}$ نیروی ثابتی است که به v بستگی ندارد. بعد از جداسازی متغیرها، از طریق انتگرال‌گیری t یا x به‌صورت توابعی از سرعت به‌دست می‌آیند، در این صورت، انتگرال‌گیری دوم می‌تواند رابطه‌ای تابعی بین x و t به‌دست دهد.

$F(v) = -c_{۱}v - c_{۲}v|v| = -v(c_{۱} + c_{۲}|v|)$: تقریبی از نیروی مقاومت عادی شاره

که در آن $c_{۱}$ و $c_{۲}$ ثابتهایی‌اند که مقادیرشان به ابعاد و شکل جسم بستگی دارد (علامت قدرمطلق روی جملهٔ آخری ضروری است زیرا نیروی مقاومت شاره، همواره در خلاف جهت v عمل می‌کند.)

برای اجسام کروی که در هوا حرکت می‌کنند

مقادیر تقریبی $\quad c_{۱} = ۱٫۵۵ \times ۱۰^{-۴}D \quad c_{۲} = ۰٫۲۲D^{۲} \quad$ D قطرکره به متر

$$\frac{c_2 v|v|}{c_1 v} = \frac{۰٫۲۲v|v|D^{۲}}{۱٫۵۵ \times ۱۰^{-۴}vD} = ۱٫۴ \times ۱۰^{۳}|v|D$$

یعنی، مثلاً، در مورد اجسامی با اندازهٔ توپ بیسبال ($D \sim ۰٫۰۷\mathrm{m}$)، جملهٔ درجهٔ دوم در سرعتهای بیشتر از $۰٫۰۱\mathrm{m/s}(۱\mathrm{cm/s})$ غالب است و جملهٔ خطی در سرعتهای کمتر از این مقدار غلبه خواهد داشت. به‌ازای سرعتهایی در اطراف این مقدار، هر دو جمله را باید به حساب آورد (مسئلهٔ

حرکت افقی با مقاومت خطی

فرض کنید قطعه جسمی با سرعت اولیهٔ v_0 روی یک سطح صاف افقی پرتاب شده است. مقاومت هوا چنان است که جملهٔ خطی غالب باشد

$$F_0 + F(v) = m\frac{dv}{dt}$$

$$F(v) = -c_1 v - c_2 v|v| \Rightarrow -c_1 v = m\frac{dv}{dt}$$

$F(v) = -c_1 v$ و $F_0 = 0$

$$t = \int_{v_0}^{v} -\frac{m\,dv}{c_1 v} = -\frac{m}{c_1}\ln\left(\frac{v}{v_0}\right) \Rightarrow v = v_0 e^{-c_1 t/m}$$

$$v = v_0 e^{-c_1 t/m}$$

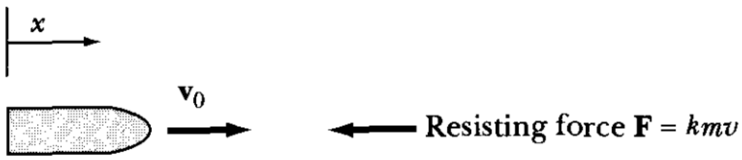
$$v = \frac{dx}{dt}$$

$$x = \int_0^t v_0 e^{-c_1 t/m} dt = \frac{m v_0}{c_1}(1 - e^{-c_1 t/m})$$

$$t \to \infty \qquad x_{\lim} = m v_0 / c_1$$

مثال)

As the simplest example of the resisted motion of a particle, find the displacement and velocity of horizontal motion in a medium in which the retarding force is proportional to the velocity.



$$ma = m\frac{dv}{dt} = -kmv \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dv}{v} = -k\int dt \quad \Rightarrow \quad \ln v = -kt + C_1$$

initial condition $v(t = 0) \equiv v_0$ $\Rightarrow$ $C_1 = \ln v_0$

$$\Rightarrow \quad v = v_0 e^{-kt}$$

obtain the displacement x as a function of time:

$$v = \frac{dx}{dt} = v_0 e^{-kt} \quad \Rightarrow \quad x = v_0 \int e^{-kt} dt = -\frac{v_0}{k} e^{-kt} + C_2$$

initial condition $x(t = 0) \equiv 0$ $\Rightarrow$ $C_2 = v_0/k.$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{v_0}{k}(1 - e^{-kt})$$

$x = v_0/k$ as $t \rightarrow \infty.$

obtain the velocity as a function of displacement

$$\frac{dv}{dx} = \frac{dv}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{dv}{dt}\cdot\frac{1}{v}$$

$$v\frac{dv}{dx} = \frac{dv}{dt} = -kv$$

$$\frac{dv}{dx} = -k$$

$$v = v_0 - kx$$

حرکت افقی با مقاومت درجهٔ دوم

به‌ازای مقادیر مثبت v

$$F(v) = -c_{۱}v - c_{۲}v|v| \longrightarrow \begin{matrix} F(v) = -c_{۲}v^{۲} \\ F(v) = m\dfrac{dv}{dt} \end{matrix} \longrightarrow -c_{۲}v^{۲} = m\frac{dv}{dt}$$

$$t = \int_{v_n}^{v} \frac{-m\,dv}{c_{۲}v^{۲}} = \frac{m}{c_{۲}}\left(\frac{۱}{v} - \frac{۱}{v_{۰}}\right)$$

$$\frac{1}{v} - \frac{1}{v_0} = \frac{c_2 t}{m} \rightarrow \frac{1}{v} = \frac{1}{v_0} + \frac{c_2 t}{m} = \frac{m + c_2 v_0 t}{m v_0} \quad \rightarrow v = \frac{m v_0}{m + c_2 v_0 t}$$

$$v=\frac{mv_0}{m+c_2v_0t}\rightarrow v=\frac{v_0}{1+\frac{c_2v_0}{m}t} \Rightarrow v=\frac{v_\circ}{۱+kt}$$

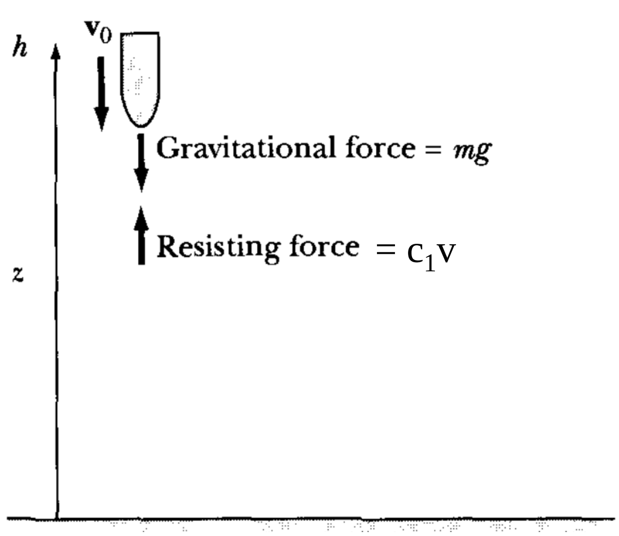
$$k=c_۲v_\circ/m$$

$$t\rightarrow\infty \quad v\propto\frac{1}{t}$$

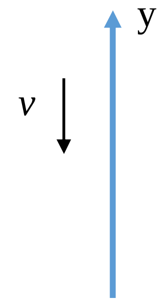
$$v=\frac{dx}{dt}=\frac{v_\circ}{۱+kt} \Rightarrow x(t)=\int_\circ^t\frac{v_\circ dt}{۱+kt}=\frac{v_\circ}{k}\ln(۱+kt)$$

سقوط قائم به داخل شاره: سرعت حدی

(الف) حالت خطی. در مورد شیئی که دریک شارهٔ مقاوم به‌طور قائم سقوط کند



$$\left.\begin{array}{l} F_0 + F(v) = m\dfrac{dv}{dt} \\ F(v) = -c_1 v \\ F_0 = -mg \end{array}\right\} -mg - c_1 v = m\frac{dv}{dt}$$



$$t = \int_{v_0}^{v} \frac{m\,dv}{-mg - c_1 v} = -\frac{m}{c}\ln\frac{mg + c_1 v}{mg + c_1 v_0}$$

?

$$v = -\frac{mg}{c_1} + \left(\frac{mg}{c_1} + v_0\right) e^{-c_1 t/m}$$

$$v = -\frac{mg}{c_1} + \left(\frac{mg}{c_1} + v_0\right) e^{-c_1 t/m}$$

جملهٔ نمایی بعد از گذشت زمانی کافی $(t \gg m/c_1)$ به‌مقداری چشم‌پوشیدنی کاهش می‌یابد

$v_t = \dfrac{mg}{c_1}$ بزرگی سرعت حدی $v = -\dfrac{mg}{c_1}$ سرعت حدی

سرعت حدی عبارت است از سرعتی که در آن نیروی مقاومت دقیقا با وزن جسم مساوی و مختلف‌العلامت می‌شود به‌طوری که نیروی کل صفر است، از این‌رو شتاب صفر می‌شود.

$$v = -\frac{mg}{c_1} + \frac{mg}{c_1} e^{-c_1 t/m} + v_0 e^{-c_1 t/m} \quad \to \quad v = -v_t(1 - e^{-t/\tau}) + v_0 e^{-t/\tau}$$

$\tau = \dfrac{m}{c_1}$ زمان مشخصه

$$v = -v_t(1 - e^{-t/\tau}) + v_0 e^{-t/\tau}$$

$$t = 0 \quad \rightarrow \quad v = v_0$$
$$t \rightarrow \infty \quad \rightarrow \quad v = -v_t$$

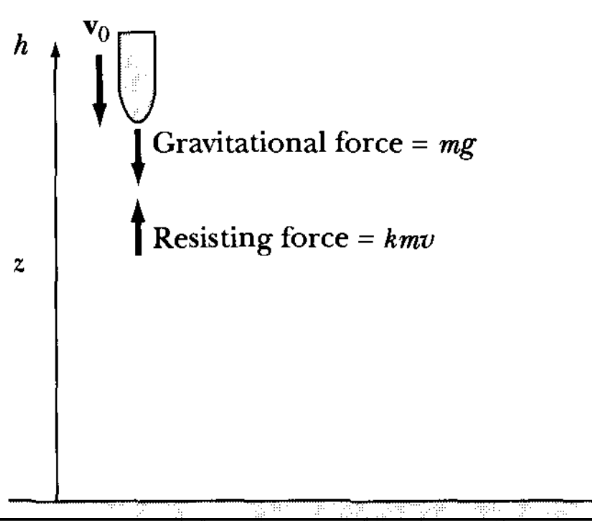
در حالت خاص، برای جسمی که در زمان $t = ۰$ از حال سکون فرومی‌افتد، داریم $v_۰ = ۰$،
و خواهیم رسید به

$$v = -v_t(۱ - e^{-t/\tau})$$

$$t = \tau \quad \rightarrow \quad (1 - e^{-1}) = 0.63$$
$$t = 2\tau \quad \rightarrow \quad (1 - e^{-2}) = 0.86$$
$$t = 5\tau \quad \rightarrow \quad (1 - e^{-5}) = 0.99 \longrightarrow (۱ - e^{-۵})v_t = ۰٫۹۹۳ v_t$$

مثال)

Find the displacement and velocity of a particle undergoing vertical motion in a medium having a retarding force proportional to the velocity.



$$F = m\frac{dv}{dt} = -mg - kmv \qquad \frac{dv}{kv + g} = -dt$$

$$\frac{1}{k}\ln(kv + g) = -t + c \xrightarrow{v(t=0)\equiv v_0} kv + g = e^{-kt+kc}$$

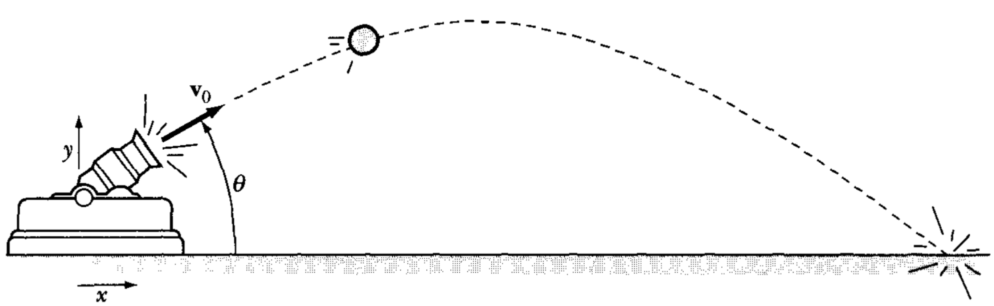
$$v = \frac{dz}{dt} = -\frac{g}{k} + \frac{kv_0 + g}{k}e^{-kt}$$

$$z(t=0) \equiv h \qquad z = h - \frac{gt}{k} + \frac{kv_0 + g}{k^2}(1 - e^{-kt})$$

مثال)

Next, we treat projectile motion in two dimensions, first without considering air resistance. Let the muzzle velocity of the projectile be v_0 and the angle of elevation be θ (Figure 2-7). Calculate the projectile's displacement, velocity, and range.

Solution. Using $\mathbf{F} = m\mathbf{g}$, the force components become



$$\begin{cases} \ddot{x} = 0 \\ \dot{x} = v_0 \cos\theta \\ x = v_0 t \cos\theta \end{cases} \qquad \begin{cases} \ddot{y} = -g \\ \dot{y} = -gt + v_0 \sin\theta \\ y = \dfrac{-gt^2}{2} + v_0 t \sin\theta \end{cases}$$

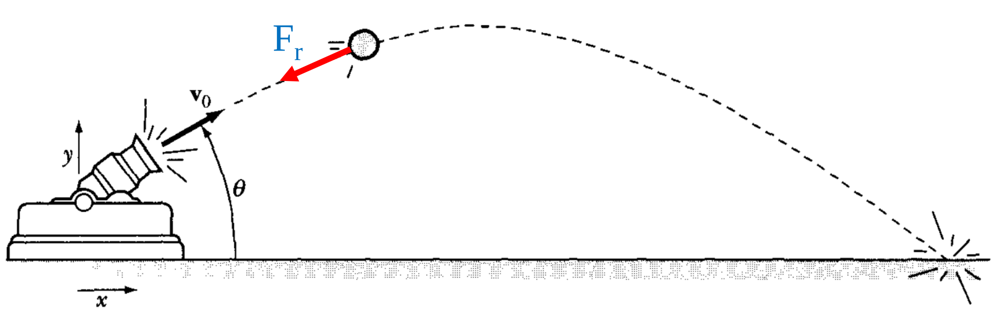
$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \left(v_0^2 t^2 + \frac{g^2 t^2}{4} - v_0 g t^3 \sin\theta\right)^{1/2}$$

$$v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = (v_0^2 + g^2 t^2 - 2 v_0 g t \sin\theta)^{1/2}$$

$$T = \frac{2v_0 \sin\theta}{g} \qquad R = \text{range} = \frac{v_0^2}{g}\sin 2\theta$$

مثال)

Next, we add the effect of air resistance to the motion of the projectile in the previous example. Calculate the decrease in range under the assumption that the force caused by air resistance is directly proportional to the projectile's velocity.



initial conditions

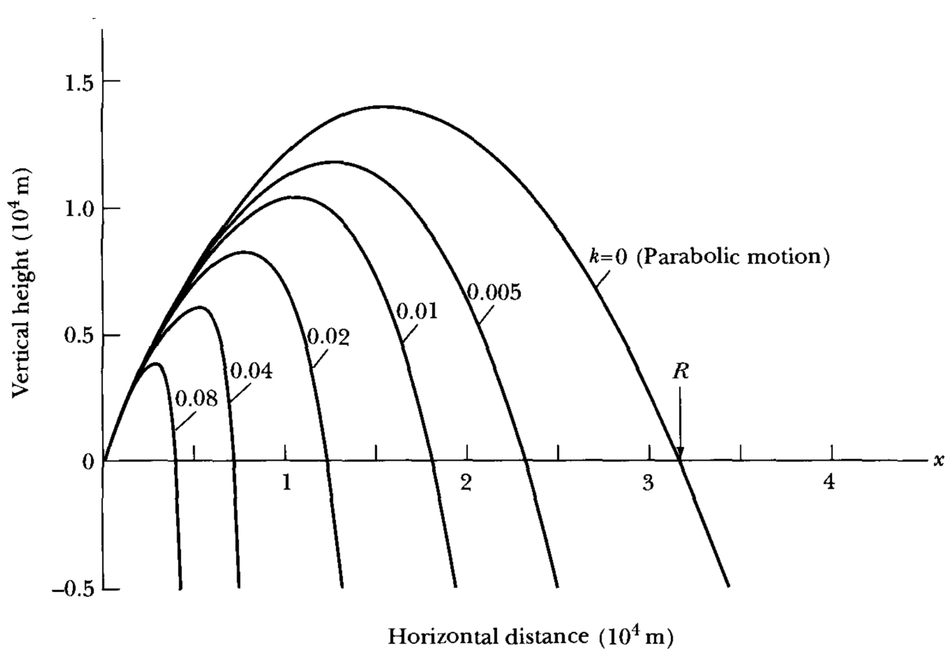
$$\left.\begin{aligned} x(t=0) &= 0 = y(t=0) \\ \dot{x}(t=0) &= v_0 \cos\theta \equiv U \\ \dot{y}(t=0) &= v_0 \sin\theta \equiv V \end{aligned}\right\}$$

$$m\ddot{x} = -km\dot{x}$$
$$m\ddot{y} = -km\dot{y} - mg$$

$$x = \frac{U}{k}(1 - e^{-kt})$$

$$y = -\frac{gt}{k} + \frac{kV + g}{k^2}(1 - e^{-kt})$$

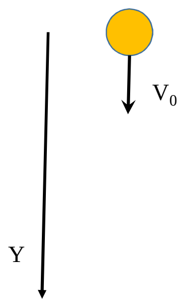
$$T = \frac{kV + g}{gk}(1 - e^{-kT})$$



(ب) حالت درجهٔ دوم. در این حالت، بزرگی $F(v)$ با v^2 متناسب است

نیروی مقاوم

جسم از حال سکون فرومی‌افتد یا با سرعت اولیهٔ v_0 به پایین پرتاب می‌شود



$$m\frac{dv}{dt} = mg - c_2 v^2 = mg\left(1 - \frac{c_2}{mg}v^2\right)$$

$$= mg\left(1 - \frac{v^2}{v_t^2}\right) \qquad v_t = \sqrt{\frac{mg}{c_2}} \text{ (سرعت حدی)}$$

$$\frac{dv}{dt} = g\left(1 - \frac{v^2}{v_t^2}\right)$$

$$\frac{dv}{dt} = g\left(1 - \frac{v^2}{v_t^2}\right)$$

$$t - t_0 = \int_{v_0}^{v} \frac{dv}{g\left(1 - \frac{v^2}{v_t^2}\right)} = \tau\left(\tanh^{-1}\frac{v}{v_t} - \tanh^{-1}\frac{v_0}{v_t}\right)$$

$$\tau = \frac{v_t}{g} = \sqrt{\frac{m}{c_2 g}} \text{ (زمان مشخصه)} \qquad \int \frac{dx}{1-x^2} = \tanh^{-1}(x)$$

$$v = v_t \tanh\left(\frac{t - t_0}{\tau} - \tanh^{-1}\frac{v_0}{v_t}\right)$$

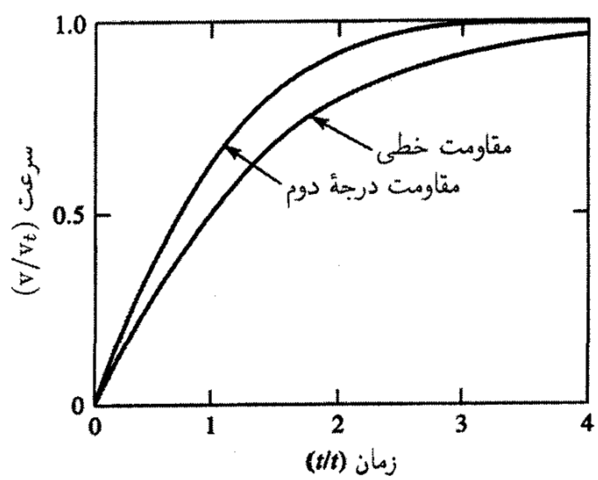
اگر جسم از حال سکون در زمان $t = ۰$ رها شود، $(v_0 = 0)$

$$v = v_t \tanh\left(\frac{t - t_۰}{\tau} - \tanh^{-۱}\frac{v_۰}{v_t}\right)$$

$$v = v_t \tanh\frac{t}{\tau} = v_t\left(\frac{e^{۲t/\tau} - ۱}{e^{۲t/\tau} + ۱}\right)$$

به‌ازای $t = ۵\tau$

$$v = ۰{,}۹۹۹۹۱ v_t$$



شکل ۱.۴.۲ نمودارهای سرعت (یکاهای سرعت حدی) برحسب زمان (یکاهای زمان مشخصهٔ τ) برای جسم افتان.

جسم پس از پیمودن مسافت سقوطی معینی، به چه سرعتی می‌رسد

تغییر سرعت در بازه dt برابر با dv است که معادل با
تغییر سرعت در بازه تغییر مکان در نرخ تغییر مکان

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dy}\underbrace{\frac{dy}{dt}}_{v} = \frac{۱}{۲}\frac{dv^۲}{dy}$$

$$\frac{dv^۲}{dy} = ۲\,\frac{dv}{dt}$$

در بالاتر داشتیم $\frac{dv}{dt} = g\left(۱ - \frac{v^۲}{v_t^۲}\right)$

$$\frac{dv^۲}{dy} = ۲g\left(۱ - \frac{v^۲}{v_t^۲}\right)$$

حل معادله:

تغیر متغییر : $u = ۱ - \frac{v^۲}{v_t^۲}$

$$\frac{du}{dy} = -\frac{۱}{v_t^۲}\frac{dv^۲}{dy} = -\left(\frac{۲g}{v_t^۲}\right)u$$

با توجه به بالا

$$\underbrace{\frac{dv^۲}{dy}}_{-v_t^۲\frac{du}{dy}} = ۲g\underbrace{\left(۱ - \frac{v^۲}{v_t^۲}\right)}_{u}$$

معادله تبدیل می شود

$$\frac{du}{dy} = -\left(\frac{۲g}{v_t^۲}\right)u$$

$$\frac{du}{dy} = -\left(\frac{۲g}{v_t^۲}\right) u$$

$$\frac{du}{u} = -\frac{2g}{v_t^2} dy \rightarrow \int_{y=0}^{y} \frac{du}{u} = \int_{y=0}^{y} -\frac{2g}{v_t^2} dy \rightarrow Ln \frac{u(y)}{u(y=0)} = -\frac{2g}{v_t^2} y$$

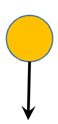
$$u = u(y = ۰) e^{-۲gy/v_t^۲}$$

$$u(y = ۰) = ۱ - \frac{v_۰^۲}{v_t^۲}$$

$$u = \left(۱ - \frac{v_۰^۲}{v_t^۲}\right) e^{-۲gy/v_t^۲} = ۱ - \frac{v^۲}{v_t^۲}$$

$$v^۲ = v_t^۲ \left(۱ - e^{-۲gy/v_t^۲}\right) + v_۰^۲ e^{-۲gy/v_t^۲}$$

بعد از طی یک طول مشخصهٔ $v_t^۲/۲g$



یک طول مشخصهٔ $v_t^۲/۲g$

$$\frac{-2gy}{v_t^2} = -1 \rightarrow y = \frac{v_t^2}{2g}$$

$$v_t = \sqrt{\frac{mg}{c_۲}} \text{ (سرعت حدی)}$$

$$v^2 = v_t^2 (1 - e^{-1}) + v_0^2 e^{-1}$$

مثال ۳.۴.۲ سقوط قطرات باران و توپ بسکتبال

سرعت حدی در هوا و زمان مشخصه را برای (الف) یک قطرهٔ باران کروی خیلی کوچک به قطر $\text{۰٫۱mm} = \text{۱۰}^{-\text{۴}}\text{m}$ و (ب) یک توپ بسکتبال بهٔ قطر ۰٫۲۵m و جرم ۰٫۶kg محاسبه کنید.

بحث پیرامون نوع نیروی مقاوم (خطی یا درجه دو)

برای اجسام کروی که در هوا حرکت می‌کنند

$$\frac{c_2}{c_1} = \frac{\text{۰٫۲۲}v|v|D^{\text{۲}}}{\text{۱٫۵۵} \times \text{۱۰}^{-\text{۴}} vD} = \text{۱٫۴} \times \text{۱۰}^{\text{۳}}|v|D$$

قطره باران: $\text{۰٫۱۴}v$

توپ بستکبال: $\text{۳۵۰}v$

$$\frac{c_2}{c_1} = 1$$ (شرط غالب بودن جمله دوم)

$$v = \frac{1}{0.14} = 7.1\, m/s$$

$$v = \frac{1}{350} = 0.0029\, m/s$$

نتیجه می‌گیریم

حالت خطی باید در قطرهٔ باران در حال سقوط منظور شود

در مورد توپ بسکتبال حالت درجهٔ دوم صادق است

در حالتهای حدیِ مقدارکم و زیاد v، به‌ترتیب، جملهٔ خطی یا جملهٔ درجهٔ دوم در $F(v)$ غالب است

محاسبه سرعت حدی قطره باران

$$v_t = \frac{mg}{c_\text{۱}}$$

محاسبه جرم قطره :

حجم قطرهٔ باران $\pi D^{\text{۳}}/\text{۶} = \text{۰٫۵۲} \times \text{۱۰}^{-\text{۱۲}}\text{m}^{\text{۳}}$

$< \text{۱۰}^{-\text{۹}}\text{kg}$

$$v_t = \left(\frac{mg}{c_\text{۲}}\right)^{\text{۱}/\text{۲}} = \left(\frac{\text{۰٫۶} \times \text{۹٫۸}}{\text{۰٫۰۱۳۸}}\right)^{\text{۱}/\text{۲}} \text{m/s} = \text{۲۰٫۶m/s}$$ ضریب پس کن

سرعت حدی $$v_t = \frac{mg}{c_\text{۱}} = \frac{\text{۰٫۵۲} \times \text{۱۰}^{-\text{۹}} \times \text{۹٫۸}}{\text{۱٫۵۵} \times \text{۱۰}^{-\text{۸}}} \text{m/s} = \text{۰٫۳۳m/s}$$

زمان مشخصه $$\tau = \frac{v_t}{g} = \frac{\text{۰٫۳۳m/s}}{\text{۹٫۸m/s}^{\text{۲}}} = \text{۰٫۰۳۴s}$$

محاسبه سرعت حدی توپ بسکتبال

$$v_t = \left(\frac{mg}{c_۲}\right)^{۱/۲}$$

ضریب پس کشی توپ $c_۲ = ۰٫۲۲D^۲ = ۰٫۲۲ \times (۰٫۲۵)^۲ = ۰٫۰۱۳۸\mathrm{N.s^۲/m^۳}$

سرعت حدی $v_t = \left(\frac{mg}{c_۲}\right)^{۱/۲} = \left(\frac{۰٫۶ \times ۹٫۸}{۰٫۰۱۳۸}\right)^{۱/۲} \mathrm{m/s} = ۲۰٫۶\mathrm{m/s}$

زمان مشخصه $\tau = \frac{v_t}{g} = \frac{۲۰٫۶\mathrm{m/s}}{۹٫۸\mathrm{m/s^۲}} = ۲٫۱\mathrm{s}$

بنابراین، قطرهٔ باران در مدتی کمتر از یک ثانیه پس از لحظهٔ شروع به سقوط از حال سکون عملاً به‌سرعت حدی خود می‌رسد، درصورتی که توپ بسکتبال برای اینکه به یک درصد سرعت حدی خود برسد چند ثانیه طول می‌کشد.