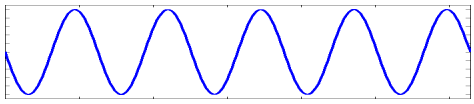
امواج عرضی (۲)

سرعت موج روی یک سیم کشیده

سرعت موج = سرعت انتشار آشفتگی در امتداد محیط انتشار

سرعت موج توسط چه عواملی کنترل می شود؟

- به نوسان درآمدن اجزا محیط با تاخیر
- قابلیت انتقال آشفتگی از طریق ارتباط المانهای سیم باهمدیگر
- قابلیت ارتجاع محیط انتشار موج



$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ → قابلیت ارتجاع فنر

→ جرم نوسانگر

$\omega = ?$

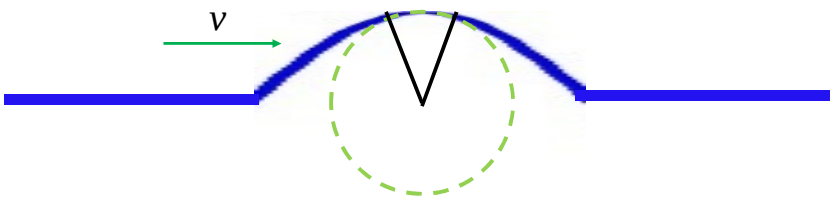
بدست آوردن رابطه سرعت موج روی یک سیم کشیده

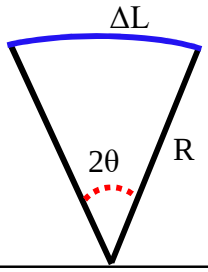
محاسبات براساس تحلیل نیروهای وارد بر یک المان هنگام عبور موج از روی آن می باشد

فرض می شود نیروی کشش موجود در سیم τ باشد.

فرض می شود یک پالس از سمت چپ به راست و با سرعت ثابت v در حال حرکت است

فرض می شود که می توان داخل پالس یک دایره بگونه ای محیط کرد که بخش بالایی پالس به طول بسیار کوچک ΔL کمانی از آن باشد (مقابل به زاویه 2θ).

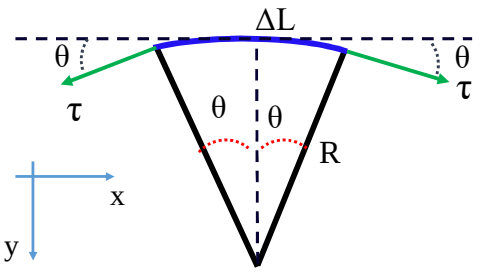




تحلیل نیروهای وارد بر المان به طول ΔL و جرم Δm :

المان از دو طرف با نیروی کشش τ کشیده می شود.

اگر چگالی جرم خطی سیم μ باشد آنگاه $\Delta m = \mu \Delta L$



$$\begin{cases} \sum F_x = \tau\cos\theta - \tau\cos\theta = 0 \\ \sum Fy = \tau\sin\theta + \tau\sin\theta = 2\tau\sin\theta \\ \sin\theta = \dfrac{\Delta L/2}{R} = \dfrac{\Delta L}{2R} \end{cases}$$

$$\sum F_y = 2\tau\frac{\Delta L}{2R} = \tau\frac{\Delta L}{R}$$

$$\sum F_y = ma_r = \mu\Delta L \times \frac{v^2}{R}$$

$$\tau\frac{\Delta L}{R} = \mu\Delta L \times \frac{v^2}{R} \quad \Rightarrow \quad v^2 = \frac{\tau}{\mu}$$

$$v = \sqrt{\frac{\tau}{\mu}}$$

انرژی و توان یک موج در حال انتشار در امتداد یک سیم مرتعش

در انتشار موج:

- ❖ انتقال انرژی داریم
- ❖ انتقال ماده نداریم

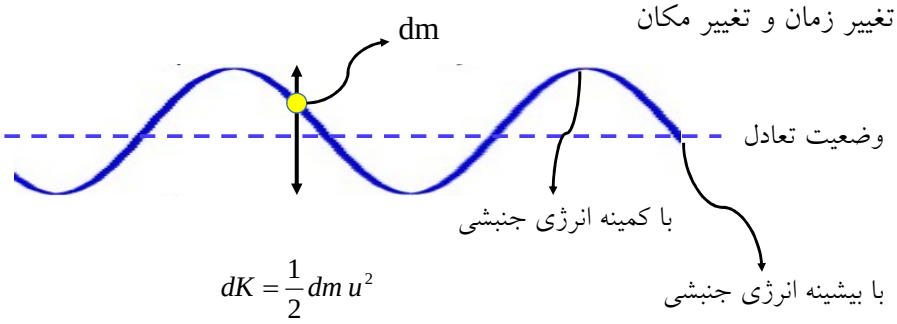
انرژی انتقال یافته در شکل

- ❑ انرژی جنبشی
- ❑ انرژی پتانسیل

منشاء انرژی جنبشی و پتانسیل

منشاء انرژی جنبشی، نوسان المانهای سیم مرتعش است

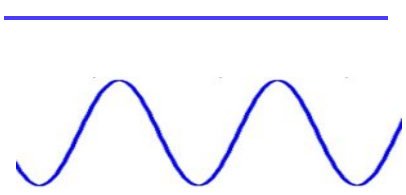
- نوسان هر المان سیم حول وضعیت تعادل
- انرژی هر المان از سیم وابسته به سرعت عرضی المان است
- تغییر سرعت با تغییر زمان و تغییر مکان



$$dK = \frac{1}{2} dm\, u^2$$

منشاء انرژی جنبشی و پتانسیل (۲)

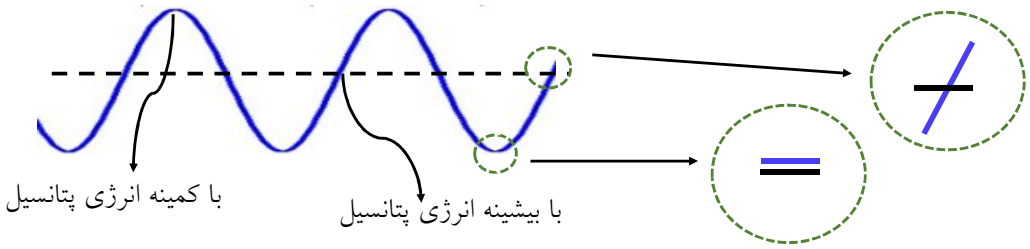
منشاء انرژی پتانسیل، کشیده شدن المانهای سیم مرتعش نسبت به طول اولیه خودشان است



منشاء انرژی جنبشی و پتانسیل (۳)

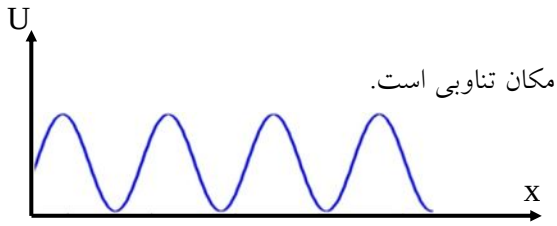
کیفیت انرژی پتانسیل المانهای مختلف سیم مرتعش:

- در یک لحظه؛ بخشهایی از سیم متناظر با نقاط قله و دره موج دارای کشیدگی صفر می باشند. زیرا شیب سیم در آن نقاط صفر است. در این نقاط انرژی پتانسیل ذخیره شده در المان صفر است.
- در یک لحظه؛ نقاط از سیم که در نزدیک وضعیت تعادل می باشند به دلیل برخورداری از بیشینه شیب، دارای بیشینه کشیدگی بوده و لذا انرژی پتانسیل منسوب به آن المانها بیشینه است.

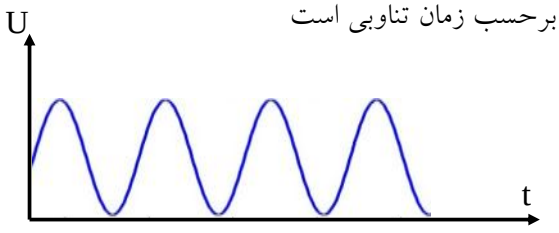


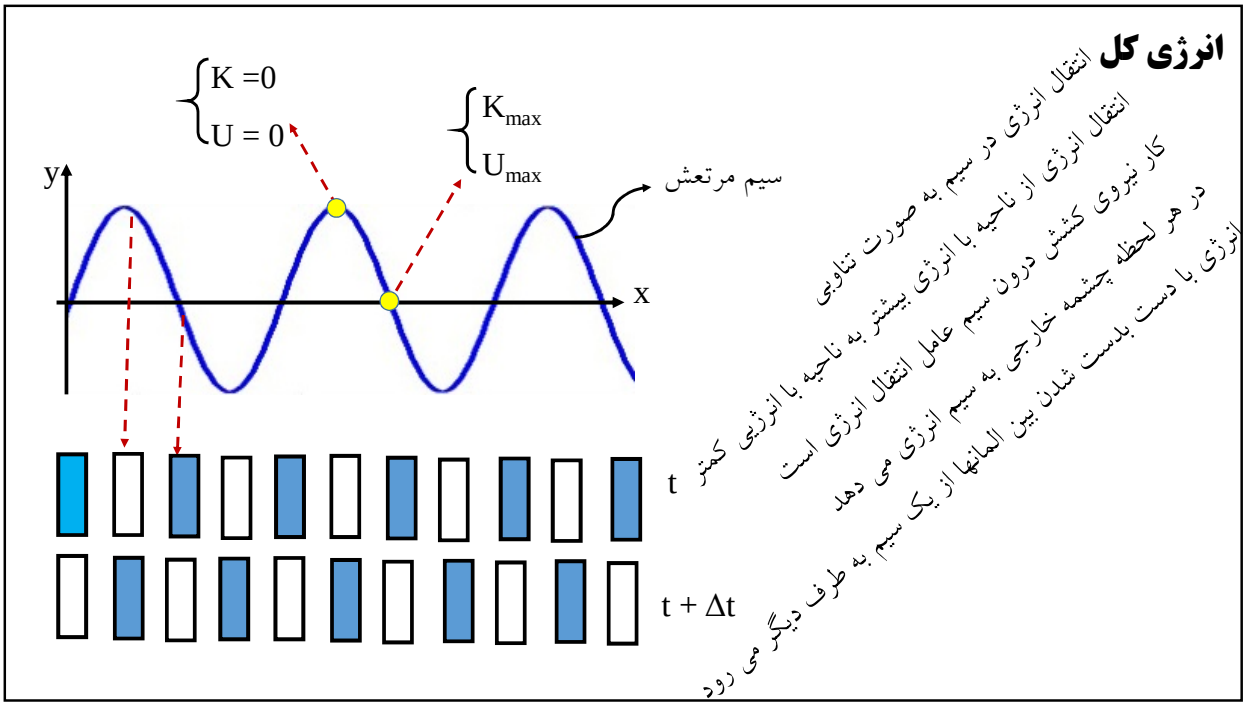
منشاء انرژی جنبشی و پتانسیل (۴)

- در یک لحظه؛ نمودار تغییر انرژی پتانسیل برحسب مکان تناوبی است.



- در یک مکان خاص؛ نمودار تغییر انرژی پتانسیل برحسب زمان تناوبی است





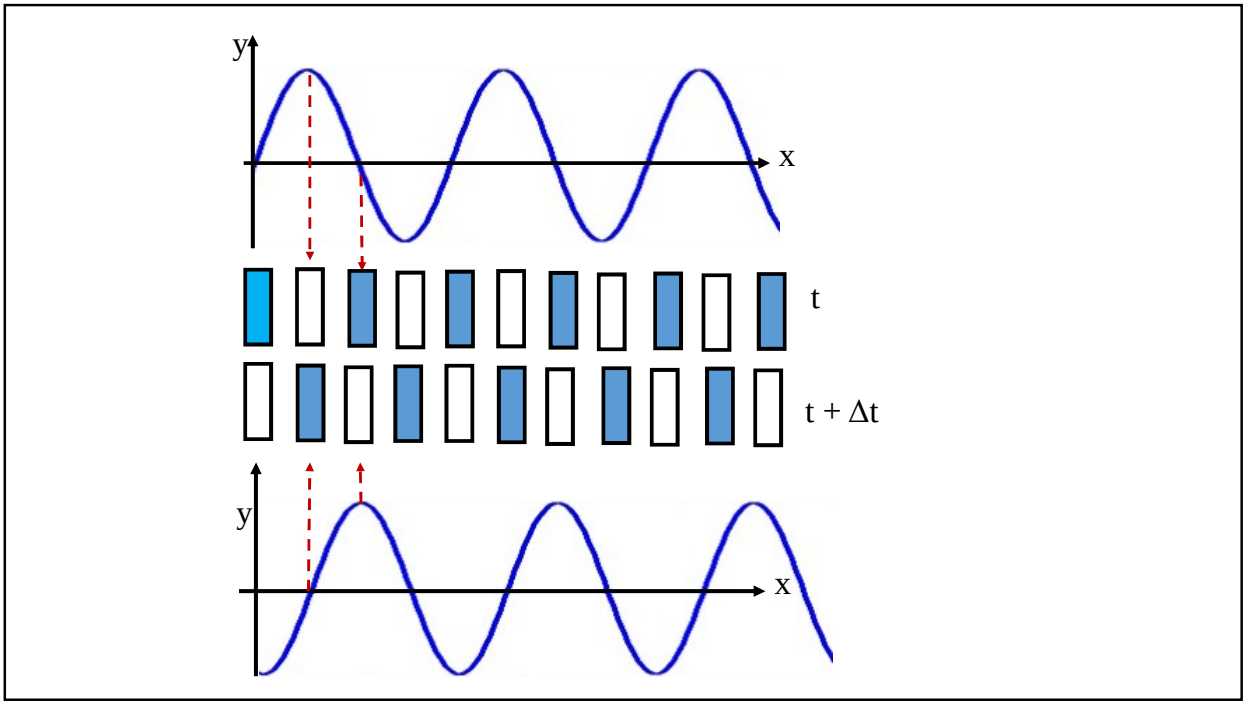
انرژی کل انتقال انرژی در سیم به صورت تناوبی

انتقال انرژی از ناحیه با انرژی بیشتر به ناحیه با انرژی کمتر

کار نیروی کشش درون سیم عامل انتقال انرژی است

در هر لحظه چشمه خارجی به سیم انرژی می دهد

انرژی با دست بدست شدن بین المانها از یک سیم به طرف دیگر می رود



محاسبه نرخ متوسط انرژی کل انتقال داده شده (۱)

$$E = K + U$$

الف) متوسط انرژی جنبشی

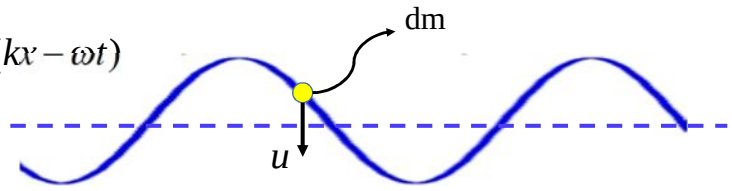
در نظر گرفتن یک المان به جرم dm و طول dx و سرعت u

$$dm = \mu\, dx$$

$$dK = \frac{1}{2} dm\, u^2$$

$$u = \frac{\partial y}{\partial t} = -\omega\, y_m \cos(kx - \omega t)$$

$$dK = \frac{1}{2}\mu\, dx\, \omega^2\, y_m^2 \cos^2(kx - \omega t)$$



محاسبه نرخ متوسط انرژی کل انتقال داده شده (۲)

$$dK = \frac{1}{2}\mu\, dx\, \omega^2\, y_m^2 \cos^2(kx - \omega t)$$

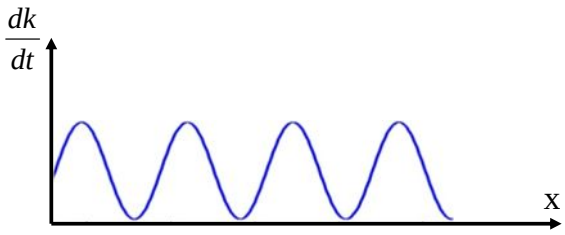
$$\frac{dK}{dt} = \frac{1}{2}\mu \frac{dx}{dt} \omega^2\, y_m^2 \cos^2(kx - \omega t)$$

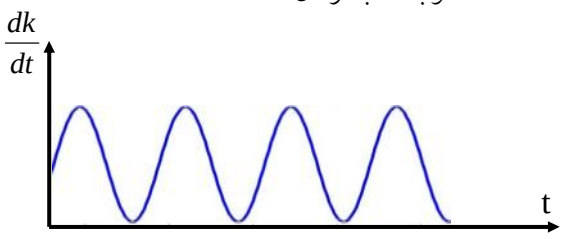
$$\frac{dK}{dt} = \frac{1}{2}\mu\, v\, \omega^2\, y_m^2 \cos^2(kx - \omega t)$$

نرخ انتقال انرژی جنبشی درون سیم

وابسته به مکان

وابسته به زمان





محاسبه نرخ متوسط انرژی کل انتقال داده شده (۳)

محاسبه متوسط نرخ انتقال انرژی جنبشی

متوسط نرخ انتقال انرژی جنبشی در یک دوره تناوب = متوسط نرخ انتقال انرژی جنبشی در یک طول موج

$$\frac{dK}{dt}|_{average} = \frac{1}{T}\int_{t=0}^{t=T}\frac{1}{2}\mu\, v\,\omega^2\, y_m^2\cos^2(kx-\omega t)dt$$

$$= \frac{1}{2T}\mu\, v\,\omega^2\, y_m^2\int_{t=0}^{t=T}\cos^2(kx-\omega t)dt = \frac{1}{2}\mu\, v\,\omega^2\, y_m^2\int_{t=0}^{t=T}\frac{1}{2}[\cos 2(kx-\omega t)+1]dt$$

$$= \frac{1}{4T}\mu\, v\,\omega^2\, y_m^2\{\frac{\sin 2(kx-\omega t)}{-2\omega}+t\}|_{t=0}^{t=T}$$

$$= \frac{1}{4T}\mu\, v\,\omega^2\, y_m^2\{\frac{1}{-2\omega}\underbrace{[\sin 2(kx-\omega T)-\sin 2(kx)]}_{0}+[T-0]\}$$

$$\frac{dK}{dt}|_{average} = \frac{1}{4}\mu\, v\,\omega^2\, y_m^2$$

محاسبه نرخ متوسط انرژی کل انتقال داده شده (۴)

ب) متوسط انرژی پتانسیل

$$\frac{dK}{dt}|_{average} = \frac{dU}{dt}|_{average} = \frac{1}{4}\mu\, v\,\omega^2\, y_m^2$$

$$\frac{dE}{dt}|_{average} = 2\frac{dK}{dt}|_{average} = \frac{1}{2}\mu\, v\,\omega^2\, y_m^2$$

توان متوسط انتقال انرژی در سیم مرتعش وابسته به:

$$P_{average} = \frac{1}{2}\mu\, v\,\omega^2\, y_m^2$$

چگالی جرمی سیم (محیط انتقال موج) μ

سرعت موج v $\quad v=\sqrt{\frac{\tau}{\mu}}$

بسامد زاویه ای موج ω

دامنه نوسان المانهای محیط انتشار موج y_m

معادله موج (۱)

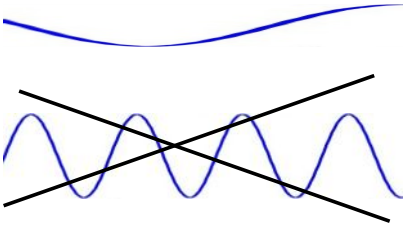
بررسی حرکت نوسانی المانهای از سیم براساس قوانین نیوتن

معادله دیفرانسیلی موج که جواب آن تابع موج را می دهد

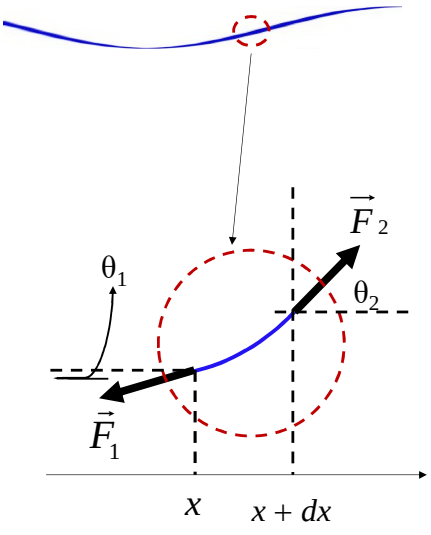
$$y = f(x \pm vt)$$

فرضها:

- المانی به طول dx و جرم dm در بازه x تا x+dx
- چگالی خطی جرم سیم μ
- دامنه موج کوچک باشد به گونه ای که در هر نقطه از سیم شیب سیم نسبت خط تعادل بسیار کم باشد



معادله موج (۲)



خروجیها:

۱- با توجه وجود یک نیروی کشش در سیم کشیده شده، هر المان از دو طرف با نیروی F_1 و F_2 کشیده می شود

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 \neq 0$$

$$F_1 = F_2 = \tau$$

۲- قانون دوم نیوتن

هر المان در راستای x بدون جابه جایی و فقط در راستای y نوسان دارد

$$\sum F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{1x} = F_{2x}$$

$$\sum F_y = dm\, a_y \quad \Rightarrow \quad F_{2y} - F_{1y} = dm\, a_y \quad (1)$$

معادله موج (۳)

۳- تکمیل قانون دوم

$$\left.\begin{aligned} F_{2y}-F_{1y}&=dm\,a_y\\ dm&=\mu dx\\ a_y&=\frac{d^2y}{dt^2}\end{aligned}\right\}\Rightarrow F_{2y}-F_{1y}=\mu dx\frac{d^2y}{dt^2}\quad (2)$$

٤- بررسی شیب سیم در هر نقطه

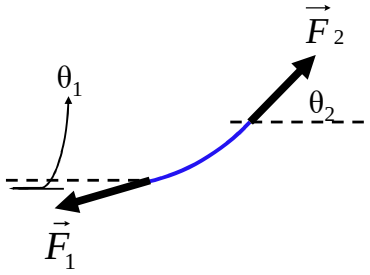
$$\frac{F_{2y}}{F_{2x}}=\tan\theta_2=S_2\quad (3)$$

شیب سیم در مکان x+dx

$$F_2=\sqrt{F_{2x}^2+F_{2y}^2}=\tau$$

$$F_{2y}\ll F_{2x}\quad\rightarrow\quad F_{2x}=\tau\quad (4)$$

شیب سیم خیلی کم است



معادله موج (۴)

(3) $\frac{F_{2y}}{F_{2x}}=S_2\quad\rightarrow\quad F_{2y}=S_2F_{2x}$ (4) $\rightarrow\quad F_{2y}=S_2\tau$ (5)

و همین طور برای شیب سیم در نقطه x داریم:

$$F_{1y}=S_1F_{1x}\quad\rightarrow\quad F_{1y}=S_1\tau\quad (6)$$

۵- اختلاف شیب بین دو سر dS

(2) (5) (6)

$$\tau(S_2-S_1)=\mu dx\frac{d^2y}{dt^2}\quad\rightarrow\quad\frac{S_2-S_1}{dx}=\frac{\mu}{\tau}\frac{d^2y}{dt^2}\quad (7)$$

$$S_2-S_1=dS\quad (8)$$

$$S=\frac{dy}{dx}\quad (9)$$

(9) (8) (7)

$$\frac{dS}{dx}=\frac{\mu}{\tau}\frac{d^2y}{dt^2}\quad\rightarrow\quad\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\mu}{\tau}\frac{d^2y}{dt^2}\quad (10)$$

معادله موج (۵)

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\mu}{\tau}\frac{d^2y}{dt^2} \rightarrow \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=\frac{\mu}{\tau}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

$$v=\sqrt{\frac{\tau}{\mu}}$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

۱- جواب این معادله خطی به صورت تابع $y = f(x-vt)$ است.

۲- معادله دیفرانسیلی خطی موج به صورت کامل حرکت موج را توضیح می دهد.

۳- از این معادله سرعت یک موج درحال انتشار با تابع معلوم و در یک محیط را نشان می دهد.

٤- این معادله را می توان برای انوع موج ها بکار برد:

برای یک سیم مرتعش، y جابه جایی سیم از وضعیت تعادلی آن است

برای صوت، y جابه جایی طولی المانهای هوا یا گاز نسبت به حالت تعادلی است.

برای امواج الکترومغناطیسی، y میدان های الکتریکی یا مغناطیسی است

۵- برای هر تابع ریاضی برقرار باشد این تابع یک آشفتگی در حال انتشار با سرعت v و در امتداد x را نشان می دهد.

٦-

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=\frac{1}{v^2}\underbrace{\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}}_{a_y}$$

$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}>0$ → تقعر مثبت → شتاب مثبت → نیرو مثبت

$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}<0$ → تقعر منفی → شتاب منفی → نیرو منفی