بسم الله الرحمن الرحیم

فصل سوم – بخش اول

نوسانها

همه‌جا اطراف خود سیستمهایی را می‌بینیم که به رقصی تناوبی مشغول‌اند:

نوسانهای کم‌دامنهٔ آونگ ساعت، کودکی نشسته بر تاب، حرکت جزرومدی
تکان‌خوردن درخت در باد، ارتعاشهای تارهای ویولون
ارتعاشات مولکولهای هوا در سازهای بادی یک سمفونی،
ارتعاشات اتمها و مولکولهای تشکیل‌دهندهٔ بدن ما

چهره‌ای اساسی که تمام این پدیده‌ها در آن مشترک‌اند، تناوبی‌بودن آنهاست

حرکت یا جابه‌جایی به‌شمار می‌آید که دوباره روی خودش تکرار می‌شود

در طبیعت شکل های پیچیده ای از حرکت تناوبی وجود دارد اما ساده ترین آنها حرکت هماهنگ ساده است

حرکت هماهنگ ساده دو مشخصهٔ عمده را بروز می‌دهد (۱) معادلهٔ دیفرانسیل خطی مرتبهٔ دوم با ضرایب ثابت آن را توصیف می‌کند. بنابراین، اصل برهم‌نهی در آن صادق است؛ یعنی، اگر دو جواب خاص برای آن به‌دست آید، جمع آنها نیز یکی از جوابهای معادله است. شاهدی بر این مدعا را در مثالهایی خواهیم دید که آورده می‌شود. (۲) زمان تناوب حرکت، یا زمان لازم برای اینکه پیکربندی خاصی (نه تنها مکان، بلکه سرعت نیز) خودش را تکرار کند، از بیشینهٔ انحراف نسبت به حالت تعادل مستقل است. قبلاً ملاحظه کردیم که گالیله نخستین کسی بود که از این جنبهٔ

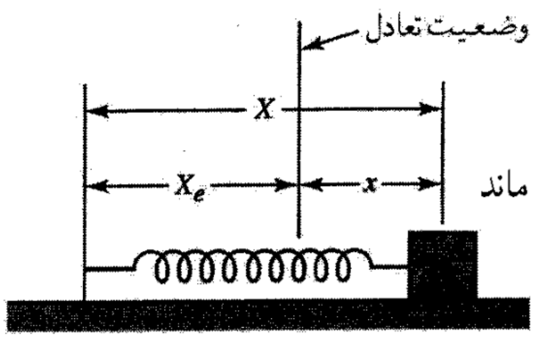
چه زمانی این دو جنبه صادق می باشند:

که انحراف نسبت به حالت تعادل «کوچک» باشد. جابه‌جایی (یا انحراف)های «بزرگ» به ظهور جمله‌های غیرخطی در معادلات دیفرانسیل حرکت می‌انجامند، و جوابهای نوسانی حاصل دیگر از اصل برهم‌نهی پیروی نمی‌کنند یا زمانهای تناوب مستقل از دامنه را نشان نمی‌دهند. این وضعیت را در اواخر این فصل به‌اختصار ملاحظه خواهیم کرد.

۲.۳ نیروی بازگردانندهٔ خطی: حرکت هماهنگ

ساده ترین مدل دارای حرکت هماهنگ ساده:

عبارت است از جرمی که روی سطحی بدون اصطکاک به‌وسیلهٔ فنر به دیوار متصل شده است



الف) پیکربندی حالت تعادل

طول کشیده‌نشدهٔ فنر X_e

بدون ایجاد اختلال، جرم در مکان خود باقی خواهد ماند

مکانی که در آن انرژی پتانسیل کمینه
نیروی خالص وارد بر جرم صفر

نقطه تعادل

ب) پیکربندی خارج از حالت تعادل

با هل‌دادن یا کشیده‌شدن فنر متراکم یا کشیده

بر جرم نیرو وارد خواهد آورد

این نیرو همواره می‌کوشد جرم را به پیکربندی حالت تعادلش بازگرداند

اگر بخواهیم حرکت جرم را محاسبه کنیم، به‌رابطه‌ای برای این نیروی بازگرداننده نیاز داریم

مشخص سازی

مبتنی بر ماهیت فرض‌شدۀ انرژی پتانسیل این سیستم

تابع انرژی پتانسیل سیستم نوسانگر

هر تابع انرژی پتانسیل را می‌توان به‌طور تقریب به‌کمک تابع چندجمله‌ای جابه‌جایی x، به‌ازای جابه‌جاییهایی که از وضعیت تعادل خیلی دور باشند، توصیف کرد

$$V(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots$$

$a_0 = 0$ با انتخاب مرجع انرژی پتانسیل مناسب

$a_1 = 0$ مشتق اول تابع در کمینه اش صفر است

$$V(x) = a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots$$

بحثی پیرامون تابع پتانسیل مولکول دو اتمی هیدروژن (پتانسیل مورس)

$$V(x) = V_\circ(\text{۱} - \exp(-x/\delta))^{\text{۲}} - V_\circ$$

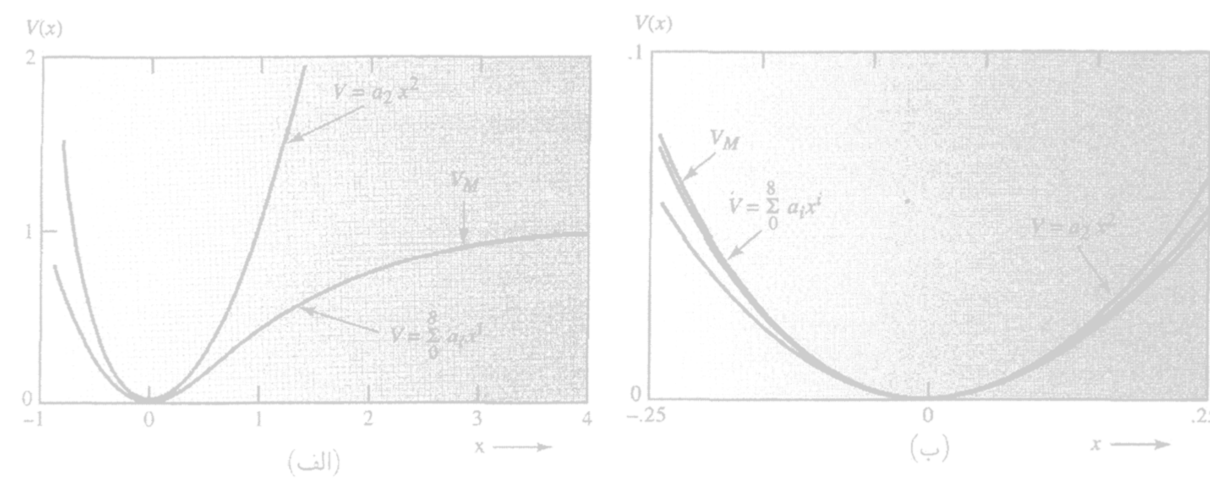
این تابع در نزدیکی کمینه‌اش رفتاری درجهٔ دوم بروز می‌دهد

نیروی برایند بین دو اتم خطی است و همواره برای بازگرداندن آنها به پیکربندی تعادلشان وارد می‌آید

به‌ازای جابه‌جاییهای کوچک

بین جملهٔ صرفاً درجهٔ دوم، برازش چندجمله‌ای مرتبهٔ هشتم، و پتانسیل مورس واقعی وجود ندار

در واقع، به‌ازای چنین جابه‌جاییهای کم‌دامنه‌ای تابع انرژی پتانسیل صرفا درجهٔ دوم است



شکل ۲.۲.۳ (الف) پتانسیل مورس، چندجمله‌ای تقریبی مرتبهٔ هشتم و فقط جملهٔ درجهٔ دوم. (ب) مانند حالت (الف) اما مقیاس اطراف $x = \circ$ بزرگنمایی شده است.

بررسی نیروی بازگرداننده

molecular chain. The restoring force is, in general, some complicated function of the displacement and perhaps of the particle's velocity or even of some higher time derivative of the position coordinate. We consider here only cases in which the restoring force F is a function only of the displacement: $F = F(x)$.

We assume that the function $F(x)$ that describes the restoring force possesses continuous derivatives of all orders so that the function can be expanded in a Taylor series:

$$F(x) = F_0 + x\left(\frac{dF}{dx}\right)_0 + \frac{1}{2!}x^2\left(\frac{d^2F}{dx^2}\right)_0 + \frac{1}{3!}x^3\left(\frac{d^3F}{dx^3}\right)_0 + \cdots \quad \textbf{(3.1)}$$

$$F(x) = F_0 + x\left(\frac{dF}{dx}\right)_0 + \frac{1}{2!}x^2\left(\frac{d^2F}{dx^2}\right)_0 + \frac{1}{3!}x^3\left(\frac{d^3F}{dx^3}\right)_0 + \cdots \quad \textbf{(3.1)}$$

where F_0 is the value of $F(x)$ at the origin ($x = 0$), and $(d^nF/dx^n)_0$ is the value of the nth derivative at the origin. Because the origin is defined to be the equilibrium point, F_0 must vanish, because otherwise the particle would move away from the equilibrium point and not return. If, then, we confine our attention to displacements of the particle that are sufficiently small, we can normally neglect all terms involving x^2 and higher powers of x. We have, therefore, the approximate relation

$$\boxed{F(x) = -kx} \quad \textbf{(3.2)}$$

approximation is a *linear* force.

Physical systems described in terms of Equation 3.2 obey **Hooke's Law.*** One of the classes of physical processes that can be treated by applying Hooke's Law is that involving elastic deformations. As long as the displacements are small and the elastic limits are not exceeded, a linear restoring force can be used for problems of stretched springs, elastic springs, bending beams, and the like. But we must emphasize that such calculations are only approximate, because essentially every real restoring force in nature is more complicated than the simple Hooke's Law force. Linear forces are only useful approximations, and their validity is limited to cases in which the amplitudes of the oscillations are small (but see Problem 3-8).

سیستم فنر و جرم

تابع انرژی پتانسیل برای سیستم فنر و جرم در مجاورت وضعیت تعادل در X_e باید رفتار مشابهی را بروز دهد که جملهٔ خالصاً درجهٔ دومی بر آن حاکم و مسلط است. بنابراین، نیروی بازگردانندهٔ فنر از طریق قانون آشنای هوک بیان می‌شود:

$$V(x) = a_۲ x^۲ \qquad F(x) = -\frac{dV(x)}{dx} = -(۲a_۲)x = -kx$$

$k = ۲a_۲$ ثابت فنر

نیروی بازگرداننده در آنها خطی

نیروی به‌دست‌آمده از طریق مشتق‌گیری باید نیروی بازگرداننده باشد، نتیجه‌ای از این واقعیت است که مشتق تابع انرژی پتانسیل باید به‌ازای جابه‌جاییهای مثبت از وضعیت تعادل منفی، و برعکس و برعکس، به‌ازای جابه‌جاییهای منفی، مثبت باشد

نوشتن قانون دوم برای جرم m

$$F = m\ddot{x}$$
$$F = -kx$$

$$m\ddot{x} + kx = 0$$

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

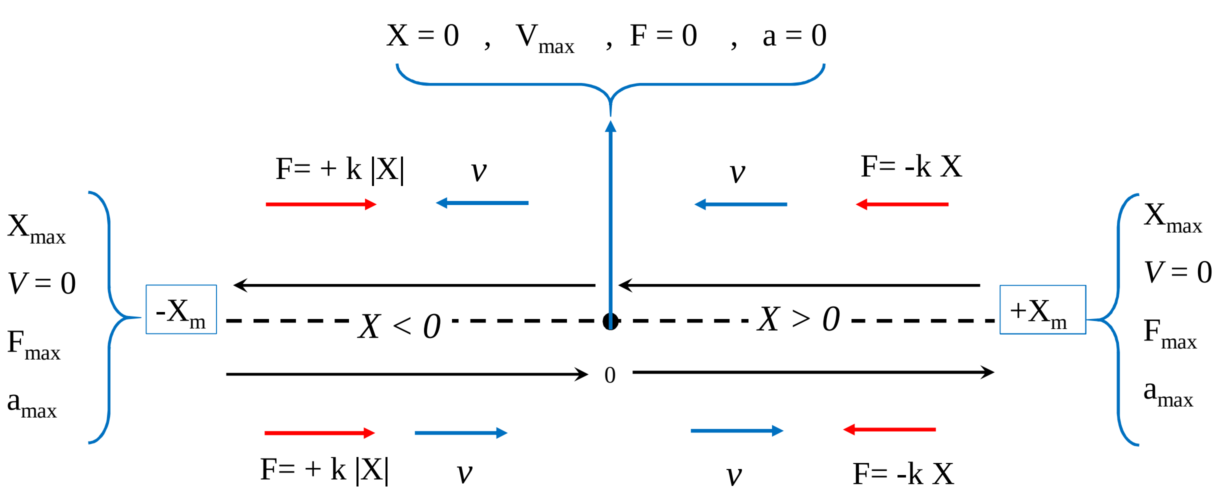
معادلهٔ دیفرانسیل خطی مرتبهٔ دوم با ضرایب ثابت

مشخصات حرکت:

حرکت تناوبی و مقید

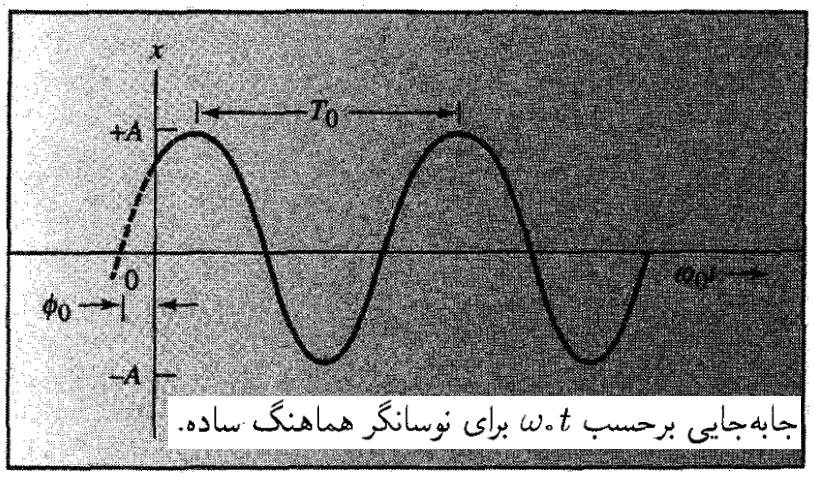
جرم با جلو و عقب رفتن بین دو مکان حدی ارتعاش می‌کند

$x \propto \sin\omega t \quad , \quad x \propto \cos\omega t$



معادله حرکت به صورت توابع **سینوسی یا کسینوسی یا توابع نمایی موهومی**

یکی از جوابها $x = A\sin(\omega_\circ t + \phi_\circ)$ $\omega_\circ = \sqrt{\frac{k}{m}}$



جابه‌جایی برحسب $\omega_\circ t$ برای نوسانگر هماهنگ ساده.

جنبه های حرکت:

۱– با یک تک‌بسامد زاویه‌ای $\omega_\circ$ مشخص می‌شود

در یک دوره تناوب، شناسه زاویه ای $\omega_0 t + \phi_0$ به اندازه 2π جلو می رود

$$\omega_\circ(t + T_\circ) + \phi_\circ = \omega_\circ t + \phi_\circ + 2\pi$$

$$T_\circ = \frac{2\pi}{\omega_\circ}$$

۲– این حرکت مقید است، یعنی بین حدود $+A \geq x \geq -A$ محدود می‌شود.

A جابه‌جایی بیشینه از حالت تعادل است و دامنهٔ حرکت نامیده می‌شود

دامنه از بسامد زاویه‌ای $\omega_\circ$ مستقل است

Note that the period of the simple harmonic oscillator is independent of the amplitude (or total energy); a system exhibiting this property is said to be **isochronous.**

۳– زاویهٔ فاز $\phi_\circ$

مقدار اولیهٔ شناسهٔ زاویه‌ای تابع سینوس است

$$x(t=\circ) = A\sin(\phi_\circ)$$

جابه‌جایی بیشینه از حالت تعادل در زمان t_m ⇐ شناسهٔ زاویه‌ای تابع سینوسی $\pi/۲$

$$\omega_\circ t_m = \frac{\pi}{۲} - \phi_\circ$$

بسامد

$f_\circ$ تعداد چرخه‌های ارتعاش در واحد زمان (Hz)

$$f_\circ = \frac{۱}{T_\circ} \longrightarrow ۲\pi f_\circ = \omega_\circ \longrightarrow f_\circ = \frac{۱}{T_\circ} = \frac{۱}{۲\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

ثابتهای حرکت و شرایط اولیه

شامل دو ثابت دلخواه A و $\phi_\circ$ $\qquad x(t=\circ) = A\sin(\phi_\circ)$

این ثابتها را می‌توان از اطلاعات مربوط به شرایط اولیهٔ مسئلهٔ خاص موردنظر تعیین کرد

مثلا:

جابه‌جایی در $t=\circ$ بیشینه است؛ بنابراین $A = x_m$ و $\phi_\circ = \pi/۲$

مثلا:

در مثالی از یک وضعیت سادهٔ دیگر، فرض کنیم نوسانگر در $x=\circ$ در حال سکون است و در $t=\circ$ و ضربه‌ای شدید بر آن وارد می‌آید تا سرعت اولیهٔ $v_\circ$ را در جهت مثبت x به آن بدهد.

$$\phi_\circ = \circ \qquad v(\circ) = v_\circ = \omega_\circ A$$

$$v(t) = \dot{x}(t) = \omega_\circ A\cos(\omega_\circ t + \phi_\circ) \qquad \therefore A = \frac{v_\circ}{\omega_\circ}$$

مثلا: حالت کلی تر

در ابتدا تا مکانی به‌اندازهٔ $x_\circ$ جابه‌جا شده و سرعت اولیهٔ $v_\circ$

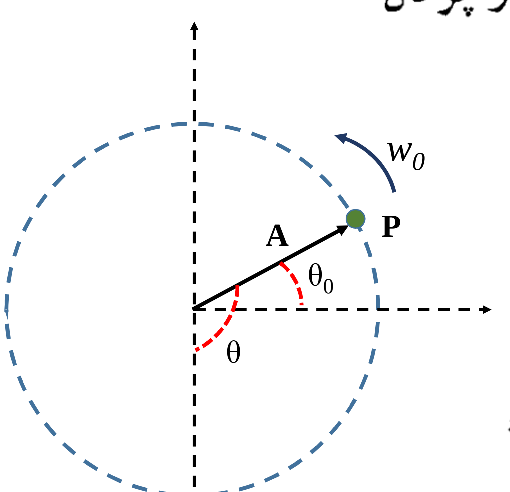
$$x(\circ) = A\sin\phi_\circ = x_\circ \qquad *$$

$$\dot{x}(\circ) = \omega_\circ A\cos\phi_\circ = v_\circ \qquad **$$

$$\frac{*}{**} \rightarrow \frac{A\sin\phi_0}{\omega_0 A\cos\phi_0} = \frac{x_0}{v_0} \rightarrow \tan\phi_\circ = \frac{\omega_\circ x_\circ}{v_\circ}$$

$$x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega_0^2} \rightarrow A^۲ = x_\circ^۲ + \frac{v_\circ^۲}{\omega_\circ^۲}$$

حرکت هماهنگ ساده به‌صورت تصویر بردار چرخان



بردار $\mathbf{A}$ را که با سرعت زاویه‌ای ثابت $\omega_\circ$ می‌چرخد

بردار $\mathbf{A}$ در لحظهٔ t با محور x زاویهٔ θ بسازد

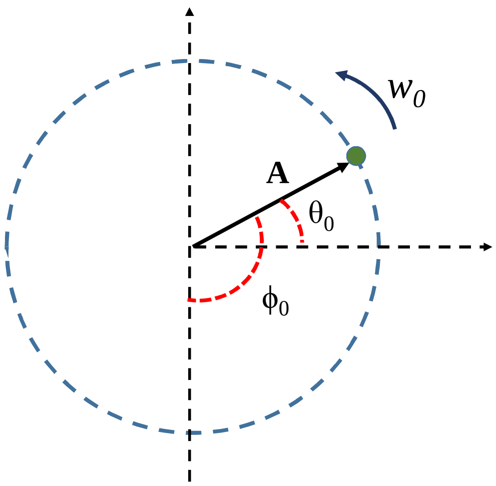
$$\theta = \omega_\circ t + \theta_\circ$$

تصویر P روی محور x

$$x = A\cos\theta = A\cos(\omega_\circ t + \theta_\circ)$$

هنگامی که P پیرامون دایره‌ای حرکت زاویه‌ای یکنواخت اجرا می‌کند، این نقطه در حرکت هماهنگ ساده نوسان می‌کند.

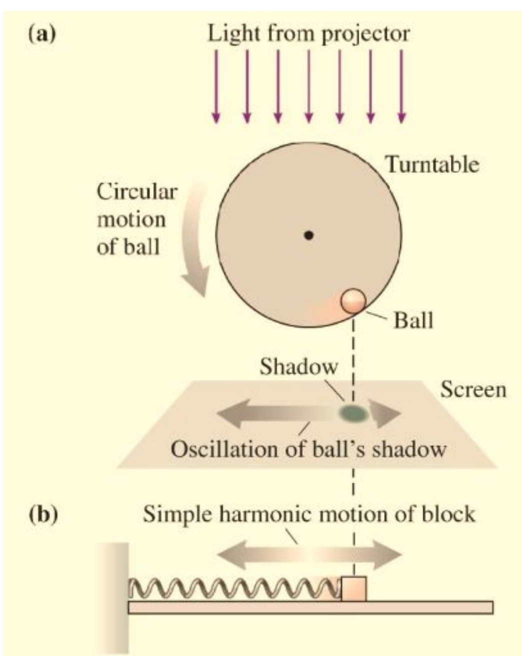
تصویر $\mathbf{A}$ روی محور x



$$x = A\sin(\omega_\circ t + \phi_\circ)$$

$$\phi_\circ - \theta_\circ = \frac{\pi}{۲}$$

$$\cos(\omega_\circ t + \theta_\circ) = \cos\left(\omega_\circ t + \phi_\circ - \frac{\pi}{۲}\right)$$
$$= \sin(\omega_\circ t + \phi_\circ)$$



معادله حرکت هماهنگ ساده

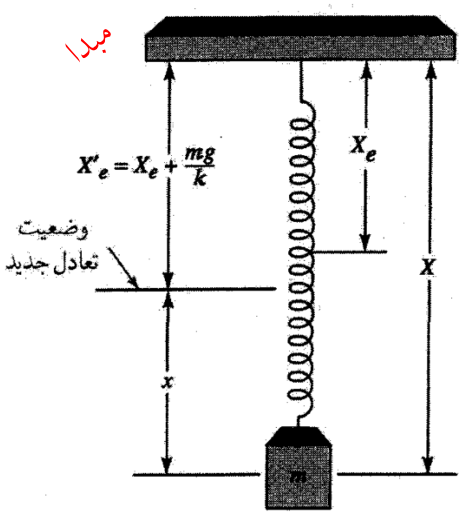
تابع سینوسی

تابع کسینوسی

مجموع توابع سینوسی و کسینوسی

$$x(t) = A\sin(\omega_\circ t + \phi_\circ) = A\sin\phi_\circ \cos\omega_\circ t + A\cos\phi_\circ \sin\omega_\circ t$$
$$= C\cos\omega_\circ t + D\sin\omega_\circ t$$

$$\tan\phi_\circ = \frac{C}{D} \qquad A^{2} = C^{2} + D^{2}$$



اثر نیروی ثابت خارجی بر نوسانگر هماهنگ

$$F = -k(\underbrace{X - X_e}) + mg$$

تغییر طول فنر نسبت به حالت تعادل اولیه $\rightarrow X$

$$F = -kx + mg$$

وضعیت تعادل جدید X'_e

$$F = \circ \xrightarrow[X = X'_e]{} \circ = -k(X'_e - X_e) + mg$$

$$X'_e = X_e + mg/k$$

تعریف تغییر طول فنر نسبت به حالت تعادل جدید

$$x = X - X'_e = X - X_e - \frac{mg}{k}$$

$$\boxed{F = -kx}$$

$$m\ddot{x} + kx = ۰$$

هرگاه نیروی خارجی ثابتی بر نوسانگر هماهنگ وارد آید، فقط مکان تعادل را جابه‌جا می‌کند.
هرگاه جابه‌جایی x از مکان تعادل جدید اندازه‌گیری شود، معادلهٔ حرکت بدون تغییر باقی می‌ماند

مثال ۱.۲.۳

وقتی به فنر سبکی قطعه‌جسمی به جرم m به‌طور قائم آویخته شود، طول فنر به‌اندازهٔ $D_۱$ افزایش می‌یابد. اگر قطعه‌جسم به‌اندازهٔ $D_۲$ از وضعیت تعادل به پایین کشیده و در لحظهٔ $t = ۰$ رها شود، پیدا کنید: (الف) حرکت حاصل، (ب) سرعت قطعه‌جسم وقتی به نقطهٔ تعادل بازگشته و در حال عبور از آن نقطه است، و (ج) شتاب قطعه‌جسم در بالای حرکت نوسانی آن را.

x مثبت پایین‌سو

در حالت تعادل $F_x = ۰ = -kD_۱ + mg$

$$k = \frac{mg}{D_۱}$$

بسامد زاویه‌ای نوسان $\omega_۰ = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{g}{D_۱}}$

معادلة حرکت

$$x(t) = A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t$$

$$\dot{x} = -A\omega_0 \sin\omega_0 t + B\omega_0 \cos\omega_0 t$$

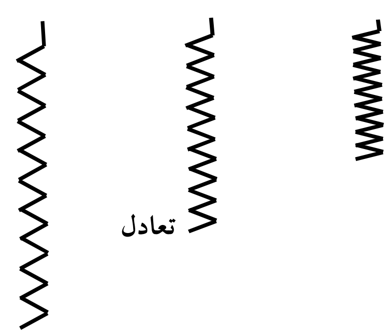
در لحظه اولیه نوسان $x_0 = D_2 = A$

$$\dot{x}_0 = 0 = B\omega_0 \longrightarrow B = 0$$

$$x(t) = D_2 \cos\left(\sqrt{\frac{g}{D_1}}t\right)$$ معادله مکان نوسانگر

معادله سرعت نوسانگر $$\dot{x}(t) = -D_2\sqrt{\frac{g}{D_1}}\sin\left(\sqrt{\frac{g}{D_1}}t\right)$$

معادله شتاب نوسانگر $$\ddot{x}(t) = -D_2\frac{g}{D_1}\cos\left(\sqrt{\frac{g}{D_1}}t\right)$$



تعادل

$t= 0$ $\quad t = \frac{T}{4}, (\frac{\pi}{2})$ $\quad t = \frac{T}{2}, (\pi)$

سرعت در هنگام عبور از نقطه تعادل $$\dot{x} = -D_2\sqrt{\frac{g}{D_1}}$$

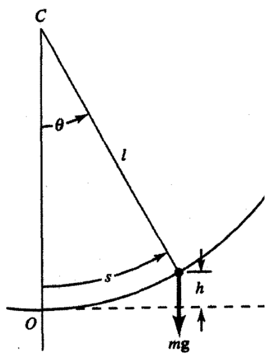
اگر $D_1 = D_2 = D$ $\quad \dot{x} = \sqrt{Dg}$

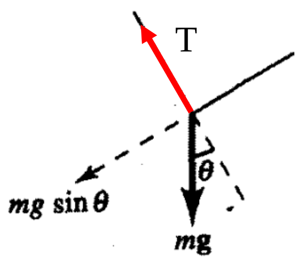
شتاب در بالاترین نقطه $$\ddot{x} = D_2\frac{g}{D_1}$$

اگر $D_1 = D_2 = D$ $\quad \ddot{x} = g$

آونگ ساده

آونگ به اصطلاح ساده، شامل گوی کوچکی است به جرم m که در انتهای نخ سبکی به طول l که کش نمی‌آید، تاب می‌خورد (شکل ۶.۲.۳). حرکت در امتداد کمانی از دایره صورت می‌گیرد که مطابق شکل، با زاویهٔ θ مشخص می‌شود. نیروی بازگرداننده عبارت است از مؤلفهٔ وزن mg که در راستای افزایش θ در امتداد مسیر حرکت وارد می‌آید: $F_s = -mg\sin\theta$. اگر گوی را یک ذره بگیریم، معادلهٔ دیفرانسیل حرکت عبارت است از





$$\begin{cases} r & T - mg\cos\theta = m\dfrac{v^2}{l} \\ t & m\ddot{s} = -mg\sin\theta \end{cases}$$

$$m\ddot{s} = -mg\sin\theta$$

$$\ddot{s} + \frac{g}{l}s = \text{۰}$$

به‌ازای مقادیر کوچک θ $\quad \sin\theta = \theta$

$$s = l\theta \;\Rightarrow\; \ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = \text{۰}$$

جواب معادله دیفرانسیل مرتبه دوم

$$\theta = \theta_0 \sin(w_0 t + \phi_0)$$

$$\omega_\circ = \sqrt{\frac{g}{l}} \qquad T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

«آونگ ثانیه‌ای» با قرار دادن $T_\circ = \text{۲s}$ در معادلهٔ بالا و حل آن برحسب l، طول دقیق این آونگ به‌دست می‌آید

$$g = \text{۹٫۸۰۶۲}\,\mathrm{m/s}^{\text{۲}} \longrightarrow l = \text{۰٫۹۹۳۶}\,\mathrm{m}$$

۳.۳ ملاحظات مربوط به انرژی در حرکت هماهنگ

الف) محاسبه کار نیروی خارجی برای منحرف کردن ذره از حالت تعادل به اندازه x

ذره را خیلی آهسته حرکت دهیم، به‌طوری که انرژی جنبشی کسب نکند
بزرگی نیروی خارجی وارد بر آن به‌زحمت از نیروی برگردانندهٔ $-kx$ بزرگتر شود

$$F_{\text{ext}} = -F_x = kx$$

$$W = \int_{۰}^{x} F_{\text{ext}} dx = \int_{۰}^{x} kx dx = \frac{k}{۲} x^{۲}$$

ب) ذخیره کار انجام شده برای غلبه بر نیروی فنر به صورت انرژی پتانسیل در آن ذخیره می شود

$W = V(x)$ ⇨ $V(x) = \frac{۱}{۲} kx^{۲}$ ⇨ $F_x = -dV/dx = -kx$

انرژی نوسانگر هماهنگ ساده

$$E = T + U$$

$$T = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 = \frac{1}{2} m\omega_0^2 A^2 \cos^2(\omega_0 t - \delta)$$

$$= \frac{1}{2} kA^2 \cos^2(\omega_0 t - \delta)$$

$$U = \frac{1}{2} kx^2 = \frac{1}{2} kA^2 \sin^2(\omega_0 t - \delta)$$

$$E = T + U = \frac{1}{2} kA^2 [\cos^2(\omega_0 t - \delta) + \sin^2(\omega_0 t - \delta)]$$

$$\boxed{E = T + U = \frac{1}{2} kA^2}$$

ج) محاسبه انرژی مکانیکی کل حاصل جمع انرژیهای جنبشی و پتانسیل

$$E = \frac{۱}{۲}m\dot{x}^۲ + \frac{۱}{۲}kx^۲$$

این معادله مظهر حرکت نوسانگر هماهنگ به‌طریقی نسبتاً بنیادی است

انرژی جنبشی برحسب متغیر سرعت از درجهٔ دوم

انرژی پتانسیل برحسب متغیر تغییر مکان از درجهٔ دوم

اگر بجز نیروی بازگرداننده نیروهای دیگری بر ذره وارد نیایند، انرژی کل ثابت است.

حل معادله حرکت مبتنی بر انرژی:

$$E = \frac{۱}{۲}m\dot{x}^۲ + \frac{۱}{۲}kx^۲ \longrightarrow \dot{x} = \pm\left(\frac{۲E}{m} - \frac{kx^۲}{m}\right)^{۱/۲}$$

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} \longrightarrow t = \int \frac{dx}{\pm[(۲E/m) - (k/m)x^۲]^{۱/۲}} = \mp(m/k)^{۱/۲}\cos^{-۱}(x/A) + C$$

از انتگرال روبه رو استفاده شده است

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \mp\cos^{-1}(\frac{x}{a})$$

C ثابت انتگرال‌گیری

A دامنه

$$A = \left(\frac{۲E}{k}\right)^{۱/۲}$$

$$t = \mp(m/k)^{۱/۲}\cos^{-۱}(x/A) + C$$

$$\cos^{-1}(x/A) = \mp\sqrt{\frac{k}{m}}(t-C) \quad \rightarrow \quad x = A\cos(\sqrt{\frac{k}{m}}t - C')$$

$$\boxed{x = A\cos(\omega_0 t - C') \quad , \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}}$$

۱- نقاط برگشت حرکت (عطف)

$$\dot{x} = ۰ \qquad \dot{x} = \pm\left(\frac{۲E}{m} - \frac{kx^۲}{m}\right)^{۱/۲} = ۰$$

$$\frac{k}{m}x_m^2 = \frac{2E}{m} \quad \rightarrow \quad x_m = \sqrt{\frac{2E}{k}} = A$$ دامنه حرکتی نوسانگر

۲- مقدار x باید بین $\pm A$ باشد تا $\dot{x}$ حقیقی بماند

$$-A = -x_m < x < +x_m = +A$$

شرط حقیقی بودن $\dot{x}$

$$\left(\underbrace{\frac{۲E}{m}}_{A^2k} - \frac{kx^۲}{m}\right)^{۱/۲} \geq 0 \quad \rightarrow \quad A^2 - x^2 \geq 0$$

۳- حداکثر مقدار سرعت، که آن را $v_{\max}$ می‌نامیم، در $x = ۰$ رخ می‌دهد

$$\dot{x} = \pm\left(\frac{۲E}{m} - \frac{kx^۲}{m}\right)^{۱/۲}$$

$$\frac{d\dot{x}}{dx} = 0 \quad \rightarrow \quad \pm\left(\frac{-2k}{m}x\right)\left(\frac{2E}{m} - \frac{kx^2}{m}\right)^{-1/2} = 0 \quad \rightarrow \quad x = 0$$ در مرکز

۴- نوشتن انرژی کل برحسب سرعت ماکزیمم

$$\dot{x} = \pm\left(\frac{2E}{m} - \frac{kx^2}{m}\right)^{1/2} \quad \Rightarrow \quad v_{max} = \left(\frac{2E}{m}\right)^{1/2}$$

$$\dot{x}(x=0) = \pm v_{max}$$

$$E = \frac{1}{2} m v_{max}^2$$

۵- نوشتن انرژی کل برحسب دامنه حرکت

$$E = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 + \frac{1}{2} kx^2 \quad \Rightarrow \quad E = \frac{1}{2} kA^2$$

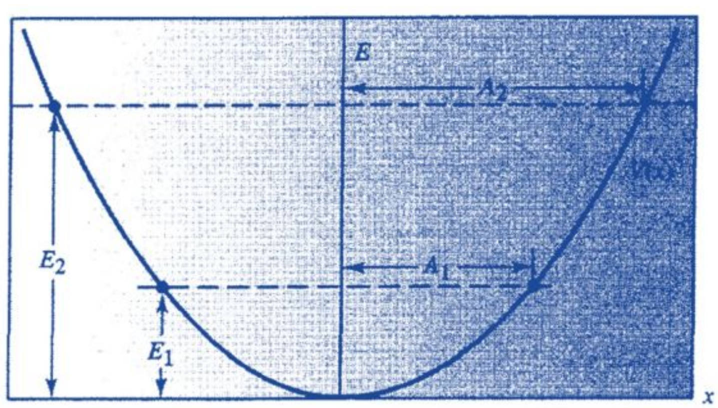
$$at \quad x = \pm A \quad \to \quad \dot{x}(x = A) = 0$$

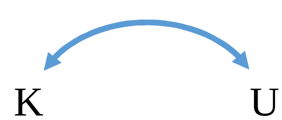
$$E = \frac{1}{2} m v_{max}^2 = \frac{1}{2} kA^2$$

۶- تبدیل انرژی پتانسیل و جنبشی در حین نوسان

$$E = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 + \frac{1}{2} kx^2$$

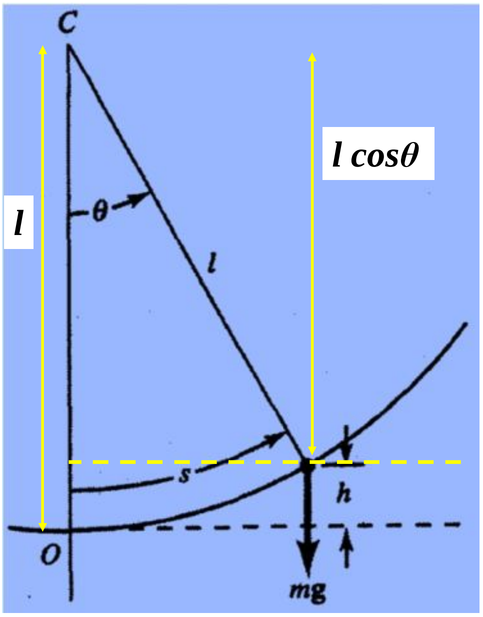
همچنان که ذره نوسان می‌کند، انرژی جنبشی و پتانسیل به‌طور پیوسته تغییر می‌کنند. انرژی کل ثابت در مرکز $x = 0$ و $\dot{x} = \pm v_{max}$، تماماً به شکل انرژی جنبشی و در نقاط مرزی $\dot{x} = 0$، $x = \pm A$ تماماً به‌صورت انرژی پتانسیل است.





نمودار تغییرات انرژی پتانسیل نوسانگر در دو انرژی مختلف

مثال ۱.۳.۳ تابع انرژی آونگ ساده



انرژی پتانسیل آونگ ساده $V = mgh$

h فاصله قائم از تراز مرجع

$h = l - l\cos\theta$

$V(\theta) = mgl(۱ - \cos\theta)$

رابطه بسط تیلر $f(x) = \sum \frac{1}{n!} f^{n}(x)(x - x_0)^n$

بسط تیلر تابع کسینوس حول $x_0 = 0$ $\cos\theta = ۱ - \theta^۲/۲! + \theta^۴/۴! - \cdots$

به ازاء مقادیر کوچک θ : $\cos\theta = ۱ - \theta^۲/۲$

$V(\theta) = mgl(۱ - \cos\theta) \longrightarrow V(\theta) = \frac{۱}{۲} mgl\theta^۲$

$s = l\theta$ $V(s) = \frac{۱}{۲}\frac{mg}{l}s^۲$

$E = K + V \xrightarrow{\text{با تقریب اول}} E = \frac{۱}{۲}m\dot{s}^۲ + \frac{۱}{۲}\frac{mg}{l}s^۲$

با گزارهٔ کلی مربوط به انرژی نوسانگر هماهنگ‌سازگار است

مثال ۲.۳.۳

میانگین انرژیهای جنبشی، پتانسیل، و میانگین انرژی کل نوسانگر هماهنگ را محاسبه کنید. (در اینجا نماد k را برای انرژی جنبشی و $T_\circ$ را برای دورهٔ تناوب به‌کار می‌بریم.)

مرحله اول) محاسبه متوسط انرژی جنبشی

تعریف متوسط یک تابع در یک دوره تناوب

$$\langle K\rangle = \frac{1}{T_\circ}\int_\circ^{T_\circ} K(t)dt = \frac{1}{T_\circ}\int_\circ^{T_\circ} \frac{1}{2}m\dot{x}^2 dt$$

$$x = A\sin(\omega_\circ t + \phi_\circ) \longrightarrow \dot{x} = \omega_\circ A\cos(\omega_\circ t + \phi_\circ)$$

$$\phi_\circ = \circ \longrightarrow \langle K\rangle = \frac{1}{T_\circ}\left[\frac{1}{2}m\omega_\circ^2 A^2 \int_\circ^{T_\circ} \cos^2(\omega_\circ t)dt\right]$$

تغییر متغیر

$$u = \omega_\circ t = (2\pi/T_\circ)\cdot t \qquad = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{1}{2}m\omega_\circ^2 A^2 \int_\circ^{2\pi} \cos^2 u du\right]$$

از طرفی داریم:

$$\frac{1}{2\pi}\int_\circ^{2\pi}(\sin^2 u + \cos^2 u)du = \frac{1}{2\pi}\int_\circ^{2\pi} du = 1$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_\circ^{2\pi} \cos^2 u du = \frac{1}{2}$$

$$\langle K\rangle = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{1}{2}m\omega_\circ^2 A^2 \int_\circ^{2\pi} \cos^2 u du\right] \Rightarrow \langle K\rangle = \frac{1}{4}m\omega_\circ^2 A^2$$

مرحله دوم) محاسبه متوسط انرژی پتانسیل

محاسبهٔ انرژی پتانسیل میانگین به‌طریق مشابه انجام می‌شود

$$V = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2 \sin^2 \omega_0 t$$

$$\langle V \rangle = \frac{1}{2}kA^2 \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} \sin^2 \omega_0 t dt$$

$$= \frac{1}{2}kA^2 \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sin^2 u du \qquad u = \omega_0 t = (2\pi/T_0)\cdot t$$

$$= \frac{1}{4}kA^2$$

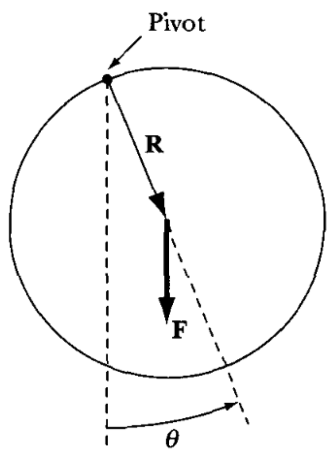
$$k = m\omega_0^2 \text{ یا } k/m = \omega_0^2 \quad \Rightarrow \quad \langle V \rangle = \frac{1}{4}kA^2 = \frac{1}{4}m\omega_0^2 A^2 = \langle K \rangle$$

$$\boxed{\langle E \rangle = \langle K \rangle + \langle V \rangle = \frac{1}{2}m\omega_0^2 A^2 = \frac{1}{2}kA^2 = E}$$

میانگین انرژیهای جنبشی و پتانسیل برابرند: بنابراین، میانگین انرژی نوسانگر مساوی با انرژی کل لحظه‌ای آن است

Example

Find the angular velocity and period of oscillation of a solid sphere of mass m and radius R about a point on its surface. See Figure 3-1.



$$\ddot{\theta} + \frac{Rmg}{I}\theta = 0$$

$$I_p = I_{cm} + mR^2 = \frac{2}{5}mR^2 + mR^2 = \frac{7}{5}mR^2$$

$$\omega = \sqrt{\frac{Rmg}{I}} = \sqrt{\frac{Rmg}{\frac{7}{5}mR^2}} = \sqrt{\frac{5g}{7R}}$$

$$\tau = 2\pi\sqrt{\frac{I}{Rmg}} = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{7}{5}mR^2}{Rmg}} = 2\pi\sqrt{\frac{7R}{5g}}$$