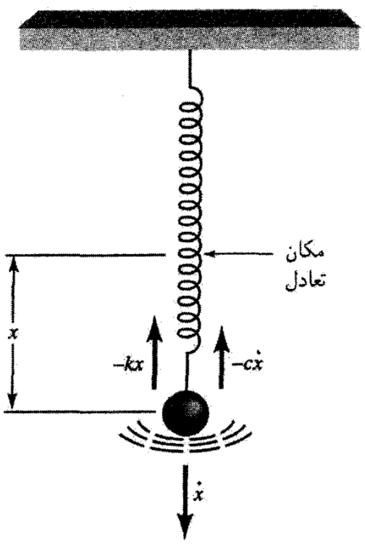
بسم الله الرحمن الرحیم

فصل سوم – بخش دوم

حرکت هماهنگ میرا

Damped Harmonic motion حرکت هماهنگ میرا



حرکت تحت تاثیر **عامل میرا کننده** مانند نیروی اصطکاک

$$\sum F = m\ddot{x} \quad \Rightarrow \quad m\ddot{x} = -kx - c\dot{x}$$

نیروی ترمزی $-c\dot{x}$

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0 \longrightarrow \ddot{x} + \frac{c}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

ضریب میرایی $\gamma \equiv \dfrac{c}{2m}$

$\omega_0^2 (= k/m)$

$$\boxed{\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0}$$

term representing the damping force. It does not seem reasonable that the damping force should, in general, depend on the displacement, but it could be a function of the velocity or perhaps of some higher time derivative of the displacement. It is frequently assumed that the damping force is a linear function of the velocity,*

$$\textit{Damping Force} = F(x, \dot{x}, \ddot{x}, \ldots)$$

$$\textit{Damping Force} = -c\dot{x} \quad , \quad c > 0$$

حل معادله دیفرانسیل حرکت نوسانگر میرا:

$$\ddot{x} + 2\gamma\underset{\substack{\downarrow\\ \text{وابسته به سرعت}}}{\dot{x}} + \omega_0^2 x = 0$$

معادلات دیفرانسیل مرتبهٔ دوم با ضرایب ثابت

$$D = \frac{d}{dt}$$

$$D^2 = \frac{d^2}{dt^2}$$

$$\longrightarrow [D^2 + 2\gamma D + \omega_0^2]x = 0$$

معادلهٔ عملگری

$$\left[D + \gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}\right]\left[D + \gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}\right]x = 0$$

عملیات از مرتبهٔ دوم به حاصلضرب دو عمل مرتبهٔ اول کاهش یافته است

جواب عمومی عبارت است از مجموع جوابهایی که با قرار دادن نتیجه عمل مرتبهٔ اول روی x مساوی صفر، به‌دست آمده باشد. داریم

: جواب پیشنهادی برای معادله ؟

$$x(t) = A_1 e^{-(\gamma - q)t} + A_2 e^{-(\gamma + q)t}$$

$$q = \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$$ حقیقی یا موهومی

سه حالت متمایز پیش می‌آید:

I. $q > 0$ حقیقی — تندمیرایی — $\gamma^2 > \omega_0^2$ — Overdamping:

II. $q = 0$ حقیقی — میرایی بحرانی — $\gamma^2 = \omega_0^2$ — Critical damping:

III. q موهومی — کندمیرایی — $\gamma^2 < \omega_0^2$ — Underdamping:

I. $q > ۰$ حقیقی تندمیرایی (overdamping)

$$x(t) = A_1 e^{-(\gamma - q)t} + A_2 e^{-(\gamma + q)t}$$

هر دو توان حقیقی است

ثابتهای $A_۱$ و $A_۲$، از روی شرایط اولیه تعیین می‌شوند

حرکت از نوع میرا با دو ثابت میرایی متفاوت (γ-q) و (γ+q)

جرمی را که به آن جابه‌جایی اولیه می‌دهیم و از حال سکون رها می‌کنیم، نیروی میران قوی مانع انجام نوسانش می‌شود و به‌آهستگی به وضعیت تعادل باز می‌گردد

II. $q = ۰$ حقیقی میرایی بحرانی (critical damping)

$$q = \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} = 0 \rightarrow \gamma = \omega_0 = \frac{c}{2m} \rightarrow \frac{c}{2m} = \sqrt{\frac{k}{m}} \rightarrow c = 2\sqrt{mk}$$

$$x(t) = A_1 e^{-(\gamma - q)t} + A_2 e^{-(\gamma + q)t}$$

$$\hookrightarrow x(t) = A_1 e^{-\gamma t} + A_2 e^{-\gamma t} = (A_1 + A_2)e^{-\gamma t} = Ae^{-\gamma t}$$

معادلهٔ عملگری $\left[D + \gamma - \sqrt{\gamma^۲ - \omega_۰^۲}\right]\left[D + \gamma + \sqrt{\gamma^۲ - \omega_۰^۲}\right] x = ۰$

$$\hookrightarrow (D + \gamma)(D + \gamma)x = ۰$$

شرایط مرزی مشخص‌شده با مکان و سرعت اولیه

حل معادله

تعریف : $u = (D+\gamma)x$

$$(D+\gamma)(D+\gamma)x = \circ \longrightarrow (D+\gamma)u = \circ$$

جواب برای معادله؟ $u = Ae^{-\gamma t}$

$$u = Ae^{-\gamma t} = (D+\gamma)x \longrightarrow$$

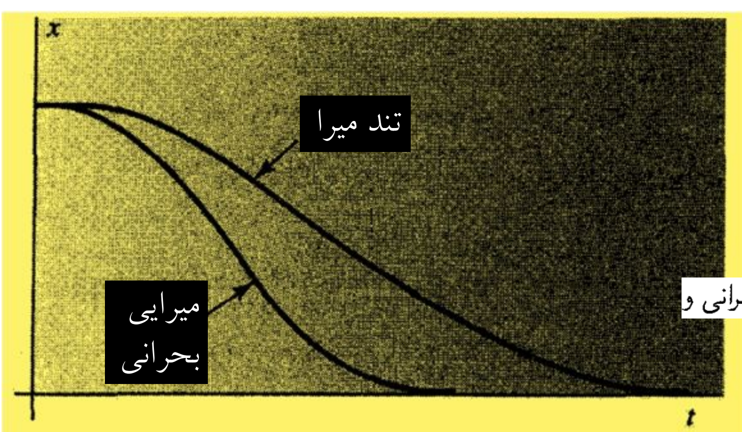
$$A = e^{\gamma t}(D+\gamma)x = D(xe^{\gamma t})$$

$$D(xe^{\gamma t}) = \frac{d}{dt}(xe^{\gamma t}) = e^{\gamma t}\frac{dx}{dt} + \gamma\, e^{\gamma t}x$$

$$\therefore xe^{\gamma t} = At + B$$

$$x(t) = Ate^{-\gamma t} + Be^{-\gamma t}$$

جواب شامل دو تابع متفاوت $e^{-\gamma t}$ و $te^{-\gamma t}$ و دو ثابت انتگرال‌گیری A و B، مطابق نیاز، خواهد بود. مطابق حالت I، اگر جرمی بعد از جابه‌جایی اولیه از حال سکون رها شود، حرکت نانوسانی است و به‌طور مجانبی به وضعیت تعادل باز می‌گردد. این مورد نیز در شکل ۲.۴.۳ نشان داده شده است. میرایی بحرانی در سیستمهای بسیاری، نظیر سیستمهای تعلیق مکانیکی وسایل نقلیهٔ موتوری، خیلی مورد توجه است.



جابه‌جایی برحسب زمان برای حالتهای میرایی بحرانی و
و تندمیرایی نوسانگر هماهنگ که بعد از
جابه‌جایی اولیه از حال سکون رها شده‌اند

III. q موهومی   کندمیرایی (unerdamping)

$$q = \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$$

اگر ثابت γ چندان کوچک باشد که $\gamma^2 - \omega_0^2 < 0$، ضریب q موهومی است.

$$q = \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} = \sqrt{-(\omega_0^2 - \gamma^2)} = \sqrt{-1} \times \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} = i\omega_d$$

$$\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{c^2}{4m^2}} \qquad \omega_d > 0$$

ω_0 و ω_d، به‌ترتیب، بسامدهای زاویه‌ای نوسانگرهای هماهنگ نامیرا و میرا

جواب کلی $x(t) = A_1 e^{-(\gamma - q)t} + A_2 e^{-(\gamma + q)t}$

$q = i\omega_d$

$$x(t) = C_+ e^{-(\gamma - i\omega_d)t} + C_- e^{-(\gamma + i\omega_d)t}$$
$$= e^{-\gamma t}(C_+ e^{i\omega_d t} + C_- e^{-i\omega_d t})$$

C_+ و C_- ثابتهای انتگرال‌اند

جواب مجموعی از جملات نمایی با نمای موهومی

اما جواب باید حقیقی باشد

حقیقی‌بودن ایجاب می‌کند که C_+ و C_- مزدوج مختلط یکدیگر باشند

$$C_+^* = C_- \qquad C_-^* = C_+$$

تا امکان دهد که جواب را برحسب سینوس یا کسینوس بنویسیم.

$$x(t) = e^{-\gamma t}(C_+ e^{i\omega_d t} + C_- e^{-i\omega_d t})$$

مزدوج مختلط معادلهٔ
$i \longrightarrow -i$

$$x^*(t) = e^{-\gamma t}(C_+^* e^{-i\omega_d t} + C_-^* e^{+i\omega_d t}) = x(t)$$

$$C_+^* = C_- = C$$

C عدد موهومی

$$C_-^* = C_+ = C^*$$

$$\therefore x(t) = e^{-\gamma t}(C^* e^{+i\omega_d t} + C e^{-i\omega_d t})$$

برحسب دو ثابت حقیقی A و $\theta_\circ$

$$C_- = C = \frac{A}{۲} e^{-i\theta_\circ}$$

$$C_+ = C^* = \frac{A}{۲} e^{+i\theta_\circ}$$

$$x(t) = e^{-\gamma t}\left(\frac{A}{۲} e^{+i(\omega_d t + \theta_\circ)} + \frac{A}{۲} e^{-i(\omega_d t + \theta_\circ)}\right)$$

$$\frac{A}{۲} e^{+i(\omega_d t + \theta_\circ)} = \frac{A}{۲}\cos(\omega_d t + \theta_\circ) + i\frac{A}{۲}\sin(\omega_d t + \theta_\circ)$$

$$\frac{A}{۲} e^{-i(\omega_d t + \theta_\circ)} = \frac{A}{۲}\cos(\omega_d t + \theta_\circ) - i\frac{A}{۲}\sin(\omega_d t + \theta_\circ)$$

تساوی اویلر که در رابطه
بالا گذارده می شود

$$\boxed{\therefore x(t) = \underbrace{e^{-\gamma t}}_{\text{بخش میراگرمعادله}}\underbrace{(A\cos(\omega_d t + \theta_\circ))}_{\text{بخش تناوبی معادله}}}$$

$$C = \frac{A}{۲} e^{-i\theta_\circ}$$

$$C^* = \frac{A}{۲} e^{+i\theta_\circ}$$

$$\boxed{x(t) = e^{-\gamma t}(A\sin(\omega_d t + \phi_\circ))}$$

پیرامون رابطه جابه جایی نوسانگر کند میرا

۱- ثابت های A ، θ_0 و ϕ_0 توسط شرایط اولیه مسئله بدست می آید

۲- تفاوت معادله نوسانگر کند میرا با نوسانگر نامیرا

نوسانگر نامیرا $x = A\sin(\omega_\circ t + \phi_\circ)$

نوسانگر کند میرا $x(t) = e^{-\gamma t}(A\sin(\omega_d t + \phi_\circ))$

(۱) حضور ضریب نمایی حقیقی $e^{-\gamma t}$ سبب میرایی تدریجی نوسانات می‌شود

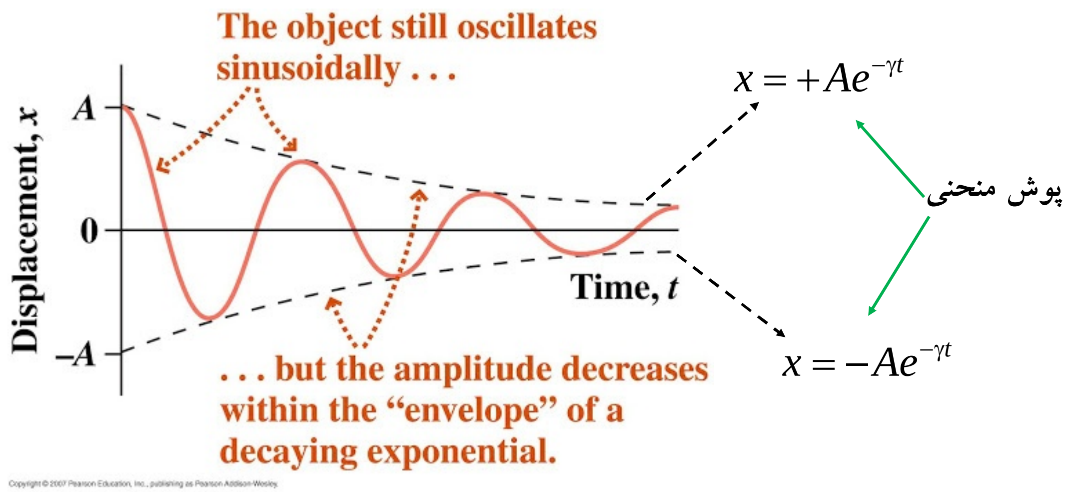
(۲) به‌علت حضور نیروی میران، بسامد زاویه‌ای نوسانگر هماهنگ کندمیرا ω_d است نه $\omega_\circ$

۳-نوسانگر هماهنگ کندمیرا کمی آهسته‌تر از نوسانگر هماهنگ میرا نوسان می‌کند

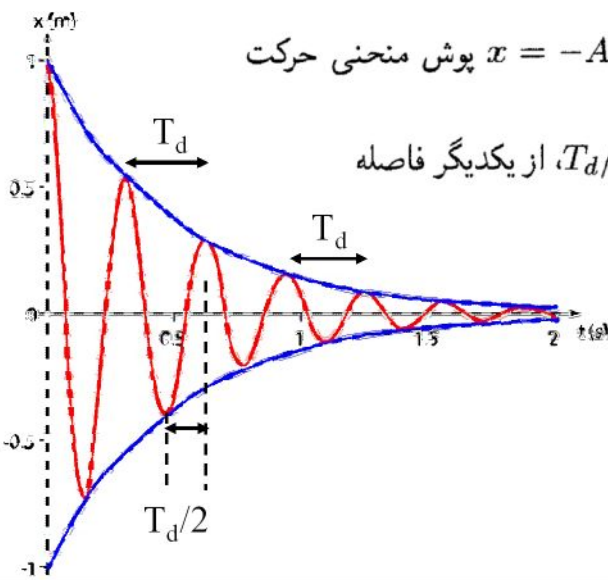
دوره تناوب نوسانگر کند $$T_d = \frac{۲\pi}{\omega_d} = \frac{۲\pi}{(\omega_\circ^۲ - \gamma^۲)^{۱/۲}}$$

$$\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} \quad \rightarrow \quad \omega_d < \omega_0 \quad \rightarrow \quad T_d > T_0$$

٤- نمودار حرکت نوسانی کند میرا



٥- پیرامون نمودار



دو منحنی مشخص‌شده با $x = Ae^{-\gamma t}$ و $x = -Ae^{-\gamma t}$ پوش منحنی حرکت

نقاط تماس با فاصلهٔ زمانی نصف دورهٔ تناوب، $T_d/۲$، از یکدیگر فاصله

۶- بررسی زمانی

در یک زمان تناوب کامل، دامنه با ضریب $e^{-\gamma T_d}$ کاهش می‌یابد

$$e^{-\gamma t} \xrightarrow{t = T_d} e^{-\gamma T_d}$$

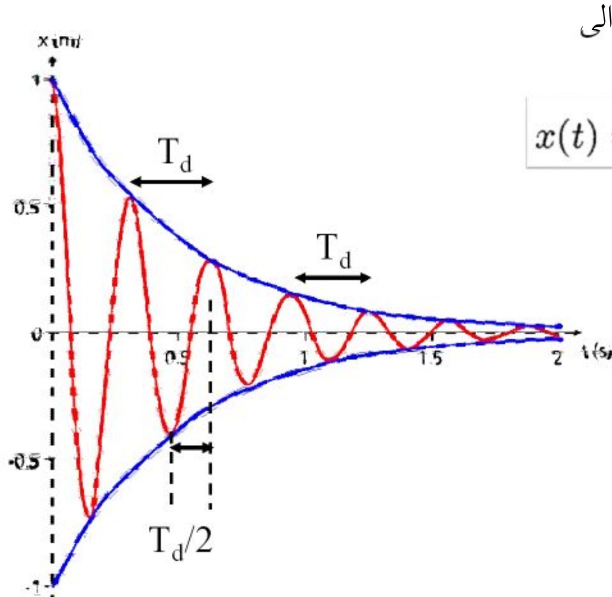
در زمان $۲m/c = \gamma^{-۱}$ دامنه با ضریب ۰٫۳۶۷۹ $= e^{-۱}$ فرو می‌افتد

$$\gamma \equiv \frac{c}{۲m} \qquad e^{-\gamma t} = e^{-1} \quad \rightarrow t = \gamma^{-1} = \frac{2m}{c}$$

به‌طور خلاصه، تحلیل ما از نوسانگر هماهنگی که آزادانه حرکت می‌کند، حاکی از آن است که حضور میرایی از نوع خطی باعث می‌شود این نوسانگر، که حرکت اولیه به آن داده شده است، سرانجام در وضعیت تعادل به سکون برگردد. برگشت به حالت تعادل چه نوسانی باشد چه نباشد، به‌مقدار میرایی بستگی دارد. شرط بحرانی، که با عبارت $\gamma = \omega_۰$ تعیین می‌شود، حالتی حدی از وضعیت نانوسانی، بازگشت را مشخص می‌کند.

۷- نسبت دامنه ها

نسبت دامنه نوسان ها در دو بیشینه متوالی



$$x(t) = e^{-\gamma t}(A\sin(\omega_d t + \phi_۰))$$

$$\frac{Ae^{-\gamma(t+T_d)}}{Ae^{-\gamma t}} = e^{-\gamma T_d}$$

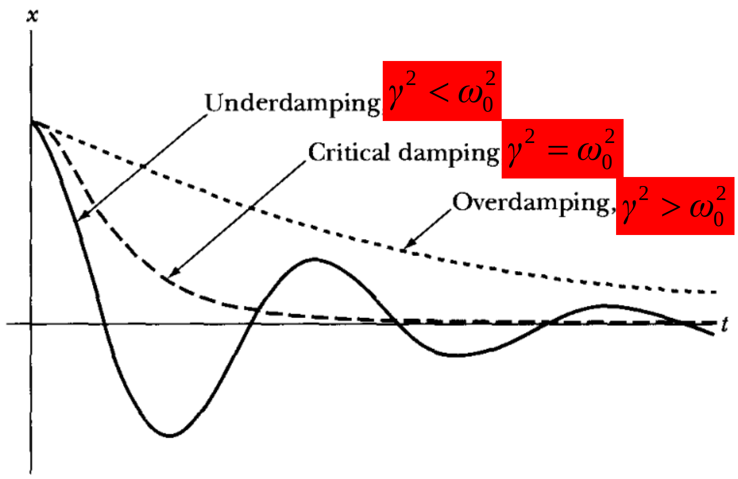


FIGURE 3-6 Damped oscillator motion for three cases of damping.

بررسی حرکت نوسانی میرا از لحاظ انرژی

انرژی کل نوسانگر هماهنگ میرا = مجموع انرژیهای جنبشی و پتانسیل

$$E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2$$

نوسانگر نامیرا E = constant

نوسانگر میرا E= variable

$$\frac{dE}{dt} = m\dot{x}\ddot{x} + kx\dot{x} = (m\ddot{x} + kx)\dot{x}$$

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0 \longrightarrow m\ddot{x} + kx = -c\dot{x}$$

$$\boxed{\frac{dE}{dt} = -c\dot{x}^2}$$

آهنگ زمانی تغییر انرژی کل

مشتق زمانی انرژی کل عبارت است از حاصلضرب نیروی میران و سرعت

کمیت همواره صفر یا منفی است، انرژی کل پیوسته کاهش می‌یابد و، مانند دامنه، سرانجام بسیار ناچیز می‌شود. انرژی به‌صورت گرمای اصطکاکی ناشی از مقاومت چسبنده در مقابل حرکت تلف می‌شود.

ضریب کیفیت (Q)

آهنگ اتلاف انرژی نوسانگر هماهنگ با میرایی ضعیف:

ضریب Q یک ضریب بدون بعد است که درجه میرایی یک نوسانگر را نشان می دهد

می توان ثابت نمود:

عبارت است از 2π برابر انرژی ذخیره‌شده در نوسانگر تقسیم بر اتلاف انرژی در یک زمان تناوب نوسان، T_d

$$Q = 2\pi \frac{\text{energy stored in the oscillator}}{\text{average energy dissipated in one time period}}$$

اثبات:

اگر میرایی نوسانگر ضعیف باشد، اتلاف انرژی در هر چرخه (سیکل) اندک و از این‌رو Q بزرگ است

1 $\dot{E} = -c\dot{x}^2$ یا $\dfrac{dE}{dt} = -c\dot{x}^2$ میانگین آهنگ اتلاف انرژی برای نوسانگر میرا

$$x = Ae^{-\gamma t}\sin(\omega_d t + \phi_\circ) \longrightarrow$$

$$\dot{x} = -Ae^{-\gamma t}(\gamma\sin(\omega_d t + \phi_\circ) - \omega_d\cos(\omega_d t + \phi_\circ))$$

2

اتلاف انرژی در طی مدت یک دورهٔ کامل با زمان تناوب $T_d = 2\pi/\omega_d$

$$\Delta E = \int_0^{T_d} \dot{E} dt$$

تغییر متغیر $\theta = \omega_d t + \phi_0 \xrightarrow[\text{مشتق گیری نسبت به t}]{} dt = d\theta/\omega_d$ 3

4
$$\begin{cases} t = 0 \rightarrow \theta = \phi_0 \\ t = T_d \rightarrow \theta = w_d T_d + \phi_0 \rightarrow \theta = w_d T_d + \phi_0 = (2\pi/T_d) T_d + \phi_0 \\ \quad \rightarrow \theta = 2\pi + \phi_0 \end{cases}$$

مقدار انتگرال روی یک دورهٔ کامل به فاز اولیهٔ ϕ_0 حرکت بستگی ندارد

$$\Delta E = \frac{1}{\omega_d}\int_0^{2\pi} \dot{E} d\theta$$

4 3 2 1

$$= \frac{cA^2}{\omega_d}\int_0^{2\pi} e^{-2\gamma t}[\gamma^2 \sin^2\theta - 2\gamma\omega_d \sin\theta\cos\theta + \omega_d^2 \cos^2\theta]d\theta$$

ضریب نمایی $e^{-2\gamma t}$ را از داخل انتگرال خارج کنیم، زیرا در مورد میرایی ضعیف $(\gamma \ll \omega_d)$ مقدارش در یک دور نوسان، تغییر زیادی نمی‌کند:

$$\Delta E = \frac{-cA^2}{\omega_d} e^{-2\gamma t}\int_0^{2\pi} (\gamma^2 \sin^2\theta - 2\gamma\omega_d \sin\theta\cos\theta + \omega_d^2 \cos^2\theta)d\theta$$

$$\int_{\theta=0}^{2\pi} \sin^2\theta \, d\theta = \int_{\theta=0}^{2\pi} \cos^2\theta \, d\theta = \pi$$

$$\int_{\theta=0}^{2\pi} \sin\theta \cos\theta \, d\theta = 0$$

$$\Delta E = \frac{-cA^2}{\omega_d}\pi e^{-2\gamma t}(\overbrace{\gamma^2+\omega_d^2}^{\omega_0^2}) = cA^2 e^{-2\gamma t}\omega_0^2\left(\frac{\pi}{\omega_d}\right)$$

$$= \gamma m\omega_0^2 A^2 e^{-2\gamma t} T_d$$

$\gamma = c/2m$

اگر ضریب میرایی را با ثابت زمانی τ مشخص کنیم

$$e^{-2\gamma\tau} = e^{-1} \longrightarrow \gamma = (2\tau)^{-1} \longrightarrow \tau = \frac{1}{2\gamma}$$

τ مدت زمانی است که انرژی به میزان $e^{-1} = 0.37$ کاهش می یابد

بزرگی اتلاف انرژی در یک چرخه

$$\Delta E = \left(\underbrace{\frac{1}{2} mA^2\omega_0^2 e^{-t/\tau}}_{E_0}\right)\frac{T_d}{\tau}$$

$$\frac{\Delta E}{E} = \frac{T_d}{\tau}$$

انرژی ذخیره‌شده در نوسانگر در هر زمان t عبارت است از

انرژی نوسانگر میرا $E(t) = \frac{1}{2} m\omega_0^2 A^2 e^{-t/\tau}$

انرژی نوسانگر نامیرا ثابت $E = \frac{1}{2} m\omega_0^2 A^2$

$$E(t) = E_0 e^{-\frac{t}{\tau}} = E_0 e^{-2\gamma t}$$

طبق تعریف $Q = \dfrac{2\pi}{\dfrac{\Delta E}{E}}$

$$\longrightarrow Q = \frac{2\pi}{(T_d/\tau)} = \frac{2\pi\tau}{(2\pi/\omega_d)} = \omega_d\tau = \frac{\omega_d}{2\gamma}$$

در حالت میرایی ضعیف، دورهٔ تناوب نوسان، T_d، خیلی کوتاهتر از ثابت زمانی، τ، است که آهنگ اتلاف انرژی نوسانگر را مشخص می‌کند. Q تحت چنین شرایطی بزرگ است. در جدول ۱.۴.۳ مقادیر Q را برای چند نوع نوسانگر مشاهده می‌کنید.

جدول ۱.۴.۳ مقادیر Q برای چند سیستم فیزیکی

زمین (در زمان زلزله)	۲۵۰ـــ۱۴۰۰
سیم پیانو	۳۰۰۰
بلور در ساعت دیجیتالی	$۱۰^{۴}$
کاواک میکروموجی	$۱۰^{۴}$
اتم برانگیخته	$۱۰^{۷}$
ستارهٔ نوترونی	$۱۰^{۱۲}$
هستهٔ Fe^{57} برانگیخته	۳×۱۰^{۱۲}

If γ is small, Q will be large, and vice versa. Ordinary mechanical systems, such as loudspeakers and rubber bands, are heavily damped and may have Q values from 5 to 100. On the other hand, systems such as tuning forks and violin strings may have a Q value as high as 1000. A typical microwave cavity resonator has a Q value of about 10^4. Systems with extremely light damping are excited atoms ($Q \simeq 10^7$), excited nuclei ($Q \simeq 10^{12}$), and gas lasers ($Q \simeq 10^{14}$).

مثال

سیستم تعلیق اتومبیلی به‌طور بحرانی میرا می‌شود و زمان تناوب نوسان آزاد آن بدون میرایی یک ثانیه است. اگر این سیستم در ابتدا به اندازهٔ $x_\circ$ جابه‌جا شده باشد و با سرعت اولیهٔ صفر رها شود، جابه‌جایی را در $t = ۱\mathrm{s}$ بیابید.

یافتن معادله جابه جایی با زمان

عبارت کلی مربوط به جابه‌جایی در مورد میرایی بحرانی

$$x(t) = (At+B)e^{-\gamma t}$$

$$\dot{x}(t) = (A-\gamma B-\gamma At)e^{-\gamma t}$$

یافتن ضرایب A و B به کمک شرایط مرزی رها شدن از سکون از مکان x_0

$$t = 0 \rightarrow x(t = 0) = B = x_0$$

$$\dot{x}_\circ = A-\gamma B = \circ \quad \Rightarrow \quad A = \gamma B = \gamma x_\circ$$

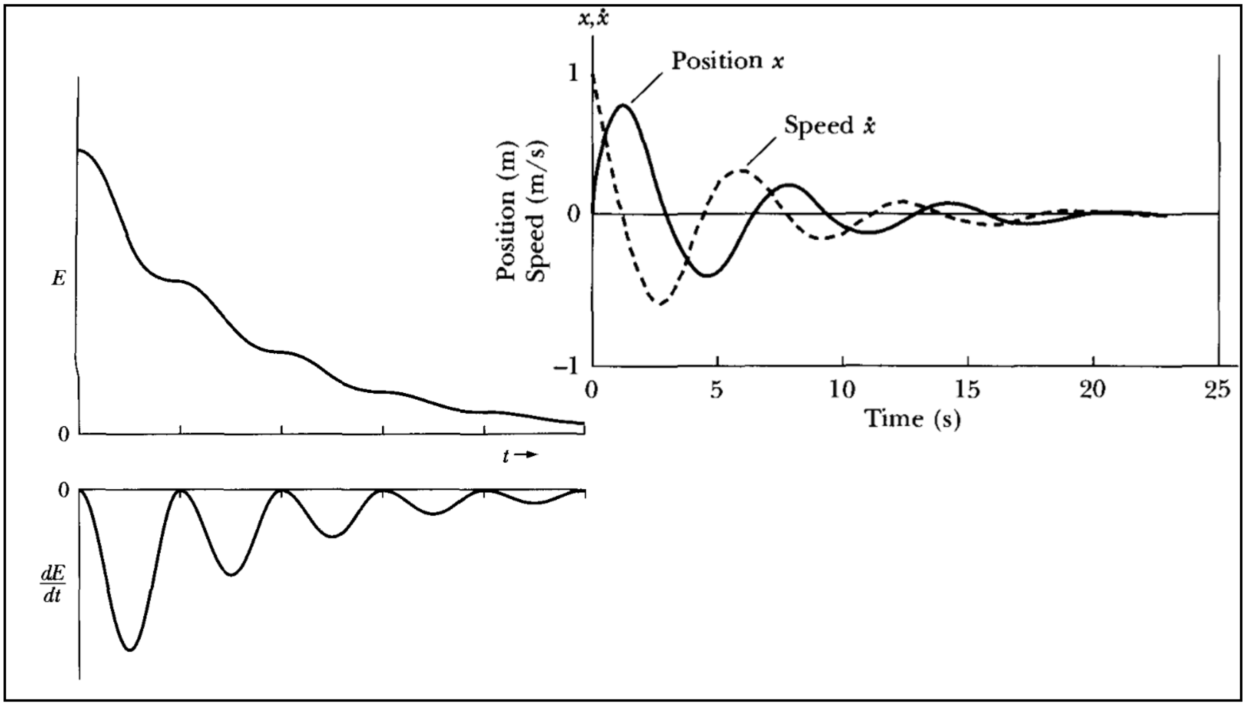
معادله جابه جایی $x(t) = x_\circ(۱+\gamma t)e^{-\gamma t}$

$$\gamma = c/۲m = (k/m)^{۱/۲} = \omega_\circ = ۲\pi/T_\circ \longrightarrow \gamma = 2\pi$$

$$x(t) = x_\circ(۱+۲\pi t)e^{-۲\pi t}$$

به‌ازای $t = ۱\mathrm{s}$، می‌رسیم به

$$x_\circ(۱+۲\pi)e^{-۲\pi} = x_\circ(۷{,}۲۸)e^{-۶{,}۲۸} = \circ{,}\circ ۱۳۶ x_\circ$$



مثال

بسامد نوسانگر هماهنگ میرا نصف بسامد همان نوسانگر بدون میرایی است. نسبت بیشینهٔ نوسانهای متوالی را بیابید.

$$\omega_d = \tfrac{۱}{۲}\omega_\circ = (\omega_\circ^۲ - \gamma^۲)^{۱/۲} \longrightarrow \omega_\circ^۲/۴ = \omega_\circ^۲ - \gamma^۲$$

$$\gamma = \omega_\circ\,(۳/۴)^{۱/۲}$$

$$\gamma T_d = \omega_\circ (۳/۴)^{۱/۲}[\overbrace{۲\pi/(\omega_\circ/۲)}^{2\pi/\omega_d}] = ۱۰{,}۸۸$$

$$x(t) = e^{-\gamma t}(A\cos(\omega_d t + \theta_\circ))$$

(با فاصله یک دوره تناوب) **نسبت بیشینهٔ نوسانهای متوالی** $\dfrac{x_{\max}^2}{x_{\max}^1} = e^{-\gamma T_d} = e^{-10.88} = 0.00002$

نوسانگر با میرایی زیاد

مثال

با فرض خطی بودن مقاومت پس‌کشی هوا، سرعت حدی توپ بیسبالی هنگام سقوط آزاد عبارت است از $۳۰\,\mathrm{m/s}$. اثر مقاومت هوا را بر آونگ ساده‌ای، که به‌جای «گلولهٔ» آن از توپ بیسبال استفاده شده است، محاسبه کنید.

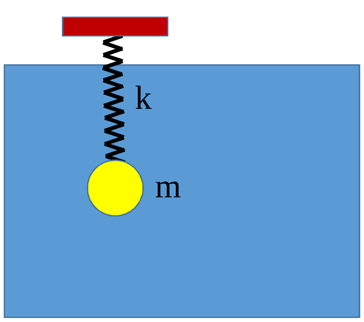
سرعت حدی را در حالتی که مقاومت پس‌کشی هوا خطی بود، به‌صورت $v_t = mg/c_۱$ به‌دست آوردیم

$c_۱$ ضریب مقاومت پس‌کشی خطی است

$$\gamma = \frac{c_۱}{۲m} = \frac{(mg/v_t)}{۲m} = \frac{g}{۲v_t} = \frac{۹٫۸\mathrm{ms}^{-۲}}{۶۰\,\mathrm{ms}^{-۱}} = ۰٫۱۶۳\mathrm{s}^{-۱}$$

مثال

توپی کروی به شعاع $۰٫۰۰۲۶۵\mathrm{m}$ و جرم $۵ \times ۱۰^{-۴}\mathrm{kg}$ به فنری با ثابت نیروی (سفتی فنر) $k = ۰٫۰۵\mathrm{N/m}$ زیر آب، متصل می‌شود، این جرم تحت عمل فنر به نوسان درمی‌آید. ضریب چسبندگی آب، η، عبارت است از $۱۰^{-۳}\mathrm{Ns/m}^۲$. (الف) تعداد نوساناتی را بیابید که این توپ در مدت زمانی اجرا می‌کند که دامنهٔ نوسان آن به نصف مقدار اولیه‌اش افت می‌کند؛ (ب) Q نوسانگر را محاسبه کنید.



$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = ۰$$

c، ثابت تناسب جملهٔ $\dot{x}$ در معادلهٔ حرکت برای نوسانگر میرا، در مورد اشیاء متحرک در محیطی چسبنده (وشکسان) می‌توان از قانون استوکس بهره گرفت

$$c = ۶\pi\eta r = ۵ \times ۱۰^{-۵}\mathrm{Ns/m}$$

کاهش دامنه در نوسانگر میرا $A = A_۰ e^{-t/۲\tau}$

$$\frac{A}{A_۰} = \frac{۱}{۲} = e^{-t/۲\tau}$$

$$t = ۲\tau \ln ۲$$

تعداد نوسانات در این مدت $n = \dfrac{t}{T_d}$

$$n = \omega_d t/۲\pi$$
$$= \omega_d \tau (\ln ۲)/\pi$$
$$= Q(\ln ۲)/\pi$$

$$\omega_۰^۲ = k/m = ۱۰۰\mathrm{s}^{-۲}$$

$$\tau = m/c = ۱۰\mathrm{s}$$

$$\gamma = ۱/۲\tau = ۰٫۰۵\mathrm{s}^{-۱}$$

$$Q = (\omega_۰^۲ - \gamma^۲)^{۱/۲}\tau = (۱۰۰ - ۰٫۰۰۲۵)^{۱/۲} \times ۱۰ = ۱۰۰$$

$$n = Q(\ln ۲)/\pi = ۲۲$$

مثال

Consider a pendulum of length ℓ and a bob of mass m at its end (Figure 3-13) moving through oil with θ decreasing. The massive bob undergoes small oscillations, but the oil retards the bob's motion with a resistive force proportional to the speed with $F_{res} = 2m\sqrt{g/\ell}\ (\ell\dot{\theta})$. The bob is initially pulled back at $t = 0$ with $\theta = \alpha$ and $\dot{\theta} = 0$. Find the angular displacement θ and velocity $\dot{\theta}$ as a function of time. Sketch the phase diagram if $\sqrt{g/\ell} = 10\ \mathrm{s}^{-1}$ and $\alpha = 10^{-2}$ rad.

Solution. Gravity produces the restoring force, and the component pulling the bob back to equilibrium is $mg \sin\theta$. Newton's Second Law becomes

$$\text{Force} = m(\ell\ddot{\theta}) = \text{Restoring force} + \text{Resistive force}$$

$$m\ell\ddot{\theta} = -mg\sin\theta - 2m\sqrt{g/\ell}(\ell\dot{\theta})$$

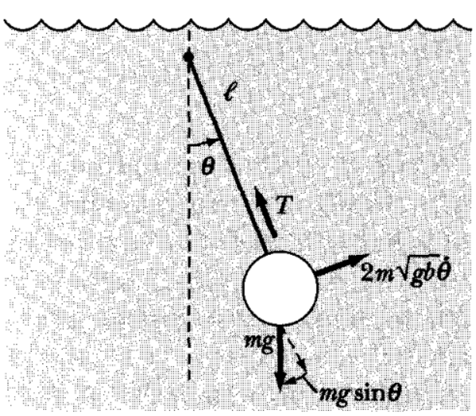


FIGURE 3-13 Example 3.3. The bob is moving with decreasing θ.

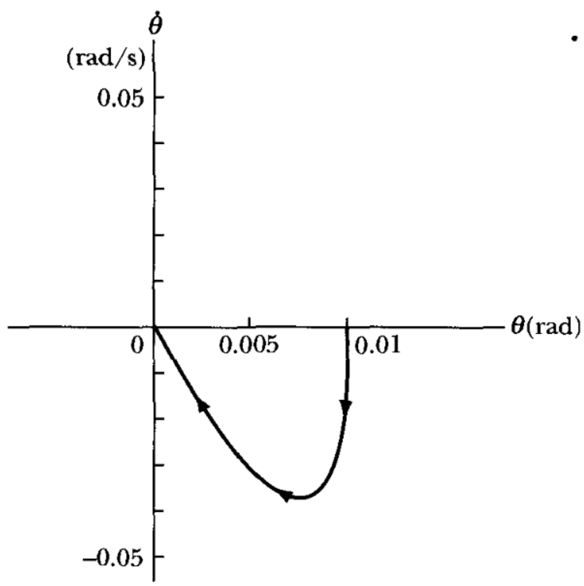


FIGURE 3-14 Phase diagram for Example 3.3.

Check that the force direction is correct, depending on the signs of θ and $\dot{\theta}$. For small oscillations $\sin\theta \approx \theta$, and Equation 3.46 becomes

$$\ddot{\theta} + 2\sqrt{g/\ell}\,\dot{\theta} + \frac{g}{\ell}\theta = 0 \tag{3.47}$$

Comparing this equation with Equation 3.35 reveals that $\omega_0^2 = g/\ell$, and $\beta^2 = g/\ell$. Therefore, $\omega_0^2 = \beta^2$ and the pendulum is critically damped. After being initially pulled back and released, the pendulum accelerates and then decelerates as θ goes to zero. The pendulum moves only in one direction as it returns to its equilibrium position.

The solution of Equation 3.47 is Equation 3.43. We can determine the values of A and B by substituting Equation 3.43 into Equation 3.47 using the initial conditions.

$$\begin{aligned} \theta(t) &= (A + Bt)e^{-\beta t} \\ \theta(t=0) &= \alpha = A \qquad (3.43) \\ \dot{\theta}(t) &= Be^{-\beta t} - \beta(A + Bt)e^{-\beta t} \\ \dot{\theta}(t=0) &= 0 = B - \beta A \\ B &= \beta A = \beta\alpha \qquad (3.48) \\ \theta(t) &= \alpha\left(1 + \sqrt{g/\ell}\;t\right)e^{-\sqrt{g/\ell}\,t} \qquad (3.49) \\ \dot{\theta}(t) &= \frac{-\alpha g}{\ell}\,t e^{-\sqrt{g/\ell}\,t} \qquad (3.50) \end{aligned}$$