بسم الله الرحمن الرحیم

فصل سوم – بخش سوم

بیان حرکت در فضای فاز

۵.۳ فضای فاز

هر سیستم نوسان‌کننده یا چرخان که انرژی تلف نمی‌کند پیکربندی خود را در هر چرخه تکرار می‌کند

فضای فاز برای ذره‌ای که حرکتش در طول یک مختصهٔ فضایی صورت می‌گیرد، شامل تمام نقاط ممکن در «صفحه»ای است که مختصهٔ افقیش، مکان x ذره و مختصهٔ عمودیش سرعت $\dot{x}$ ذره است. بنابراین، «مکان» ذره روی صفحهٔ فضای فاز با «مختصاتش» $(x, \dot{x})$ تعیین می‌شود.

هرگاه مکان و سرعتش به‌طور همزمان، مثلاً شرایط اولیه‌اش، $x(t_\circ)$ و $\dot{x}(t_\circ)$، معلوم باشد. بنابراین، می‌توانیم تکامل تدریجی حرکت یک ذره از آن نقطه را با ترسیم نقاطش در فضای فاز، به تصویر بکشیم
هر نقطه روی چنین نموداری را می‌توان پیشروی برای نقطهٔ بعدی تلقی کرد.

نوسانگر هماهنگ ساده: نیروی نامیران

حرکت فضای فازی یک نوسانگر هماهنگ ساده

$$x(t) = A\sin(\omega_\circ t + \phi_\circ)$$

$$\dot{x}(t) = A\omega_\circ \cos(\omega_\circ t + \phi_\circ)$$

محور افقی در دستگاه مختصات مکان ذره $x = x(t)$ و محور عمودی سرعت ذره $y = \dot{x}(t)$

$$x^2(t) + \frac{y^2(t)}{\omega_\circ^2} = A^2(\sin^2(\omega_\circ t + \phi_\circ) + \cos^2(\omega_\circ t + \phi_\circ)) = A^2$$

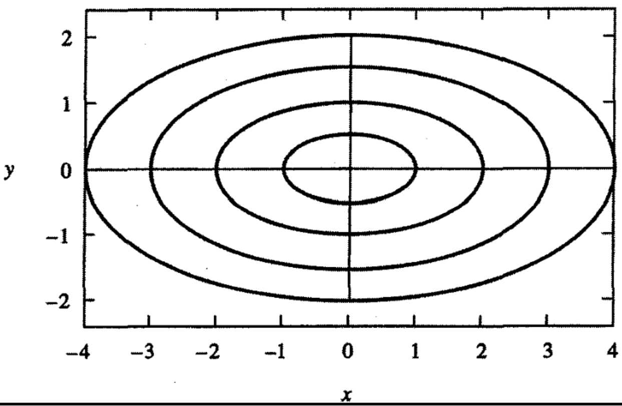
$$\therefore \frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{A^2\omega_\circ^2} = 1$$ معادلهٔ مسیر نوسانگر در فضای فاز

ویژگی معادله نوسانگر ساده فضای فاز

$$\therefore\ \frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{A^2\omega_0^2} = 1$$

معادلهٔ (۲.۵.۳)، معادلهٔ یک بیضی است که نیم‌قطر بزرگ آن A و نیم‌قطر کوچک آن $A\omega_0$ است.

۱ در شکل ۱.۵.۳، چند مسیر فضای فازی برای نوسانگر هماهنگ نشان داده شده است. فقط دامنهٔ نوسان A در این مسیرها متفاوت است.



۲ توجه کنید که مسیرهای فضای فازی هرگز یکدیگر را قطع نمی‌کنند. وجود یک نقطهٔ مشترک در دو مسیر متفاوت صرفاً حاکی از آن است که دو حرکت آتی مختلف از یک تک مجموعهٔ شرایط، $(x(t_i),\ \dot{x}(t_i))$، در زمانی چون t_i، سر برمی‌آورد. این شرایط نمی‌تواند محقق شود زیرا، با مقادیر خاص $x(t_i)$ و $\dot{x}(t_i)$ شروع می‌شود. قوانین حرکت نیوتون به‌طور کامل حالت آیندهٔ منحصر به‌فردی را برای سیستم تعیین می‌کنند.

۳ به این نکته هم توجه کنید که مسیرها در این حالت، مسیرهای بسته‌ای را تشکیل می‌دهند. به بیان دیگر، حرکت خودش را تکرار می‌کند که پیامد پایستاری انرژی کل نوسانگر هماهنگ است. در واقع، معادلهٔ مسیر در فضای فاز چیزی بیشتر از این معنا نیست که انرژی کل پایستار است.

$$\therefore \frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{A^2\omega_0^2} = 1$$
$$E = \tfrac{1}{2}kA^2$$
$$\omega_0^2 = k/m$$

$$\frac{x^2}{2E/k} + \frac{y^2}{2E/m} = 1 \qquad \text{به‌جای } y \text{،} \ \dot{x}$$

$$\frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}^2 = V + T = E$$

معادلهٔ انرژی برای نوسانگر هماهنگ

هر مسیر فضای فاز بسته به مقداری انرژی کل معین و پایسته وابسته است.

مثال

ذره‌ای را به جرم m در نظر بگیرید که تحت تأثیر نیروی $+kx$ است و x جابه‌جایی ذره از حال تعادل را بیان می‌کند. مسیرهای فضای فاز این ذره را محاسبه کنید.

معادلهٔ حرکت ذره $\quad m\ddot{x} = kx$

$\omega^2 = k/m$،

$$\Rightarrow \quad \ddot{x} - \omega^2 x = 0 \qquad 1$$

تغییر متغیر
$$\begin{cases} y = \dot{x} \\ y' = dy/dx \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \dot{y} = \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt} = y'\dot{x} = yy' \qquad 2$$

$$\dot{y} = \frac{d}{dt}\dot{x} = \ddot{x} \qquad 3$$

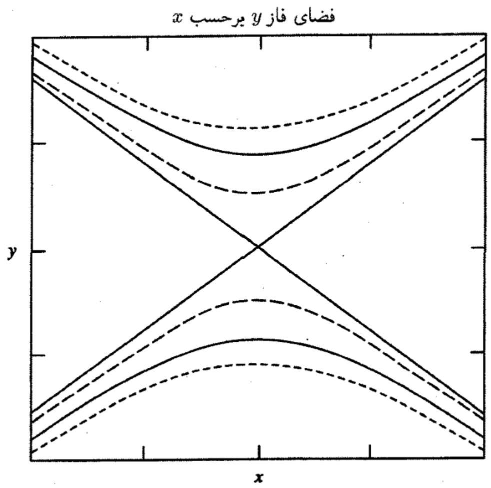
$$3 \ 1 \quad \Rightarrow \quad yy' = \omega^2 x \quad \rightarrow \quad y\frac{dy}{dx} = \omega^2 x \quad \rightarrow ydy = \omega^2 xdx$$

$$ydy = \omega^2 xdx \quad \rightarrow \quad \int ydy = \int \omega^2 xdx \quad \rightarrow \quad \frac{1}{2}y^2 = \frac{1}{2}\omega^2 x^2 + C'$$

$$y^2 - \omega^2 x^2 = C$$

مسیرهای فضای فاز شاخه‌هایی از هذلولی‌اند که مجانبهای آنها عبارت باشند از $y = \pm\omega x$

انتهای مسیرها بازند که از مبدأ، نقطهٔ تعادل ناپایدار، منشعب می‌شوند



نوسانگر هماهنگ کندمیرا

مسیرهای فضای فاز برای نوسانگر هماهنگ تحت تأثیر نیروی میران ضعیف

ویژگیها

مسیرها بسته نخواهند بود

حرکت خودش را تکرار نمی‌کند

انرژی دائماً تلف می‌شود

نوسانگر از حال سکون در مکان $x_\circ$ شروع به اجرا کند

$$x = Ae^{-\gamma t}\sin(\omega_d t + \phi_\circ)$$

$$\dot{x} = -Ae^{-\gamma t}(\gamma \sin(\omega_d t + \phi_\circ) - \omega_d \cos(\omega_d t + \phi_\circ))$$

زاویهٔ فاز اولیه، $\phi_\circ$، با شرط $\dot{x}_\circ = \circ$ به‌دست می‌آید

$\phi_\circ = \tan^{-1} \omega_d/\gamma$.

یافتن معادله برای ارتباط مکان با سرعت ⟵ حذف t در معادلات پارامتری

$$\left.\begin{aligned}\rho &= Ae^{-\gamma t}\\ \theta &= \omega_d t + \phi_\circ\end{aligned}\right\} \text{تغییر متغیر}$$

$$x = Ae^{-\gamma t}\sin(\omega_d t + \phi_\circ) \longrightarrow x = \rho\sin\theta$$

$$\dot{x} = -Ae^{-\gamma t}(\gamma\sin(\omega_d t + \phi_\circ) - \omega_d\cos(\omega_d t + \phi_\circ))$$

$$\longrightarrow \dot{x} = -\rho(\gamma\sin\theta - \omega_d\cos\theta)$$

تغییر متغیر $y = \dot{x} + \gamma x$

$$\dot{x} = -\rho(\gamma\sin\theta - \omega_d\cos\theta) \longrightarrow y = \omega_d\rho\cos\theta$$

$$y = \omega_d\rho\cos\theta \xrightarrow{\text{توان دو}} y^{۲} = \omega_d^{۲}\rho^{۲}(۱ - \sin^{۲}\theta)$$

$$\xrightarrow{x = \rho\sin\theta} y^{۲} = \omega_d^{۲}(\rho^{۲} - x^{۲})$$

$$\boxed{\frac{x^{۲}}{\rho^{۲}} + \frac{y^{۲}}{\omega_d^{۲}\rho^{۲}} = ۱}$$

ویژگیهای فضای فاز (x,y) تعریف شده توسط معادله بالا:

۱- y ترکیبی خطی از x و $\dot{x}$ که بیانگر فضای فاز اصلاح شده است (در نوسانگر نامیرا $y = \dot{x}$)

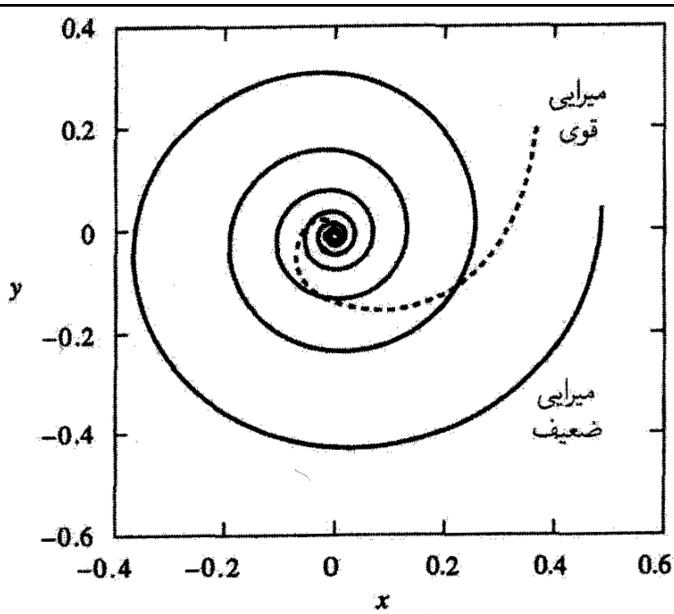
۲- مسیر نوسانگر در این فضا، یک بیضی است که قطرهای کوچک و بزرگ آن، به‌ترتیب، با ρ و $\omega_d \rho$ نموده می‌شوند

۳- قطرها به‌طور نمایی با زمان کاهش ($\rho = Ae^{-\gamma t}$)

٤- این مسیر با مقدار بیشینهٔ ($x_\circ (= A \sin \phi_\circ)$ شروع می‌شود

۵- مسیر به‌طور مارپیچ به‌سمت داخل به‌سوی مبدأ می‌رود

٦- معادلهٔ (۶.۵.۳) جز معادلهٔ انرژی برای نوسانگر هماهنگ میرا نیست



نمودار فضای فاز اصلاح‌شده (متن درس را ببینید) برای نوسانگر هماهنگ ساده

حالت کندمیرایی: (۱) میرایی ضعیف ($\gamma =$ ۰٫۰۵ s^{-1}) (۲) میرایی قوی ($\gamma =$ ۰٫۲۵ s^{-1})

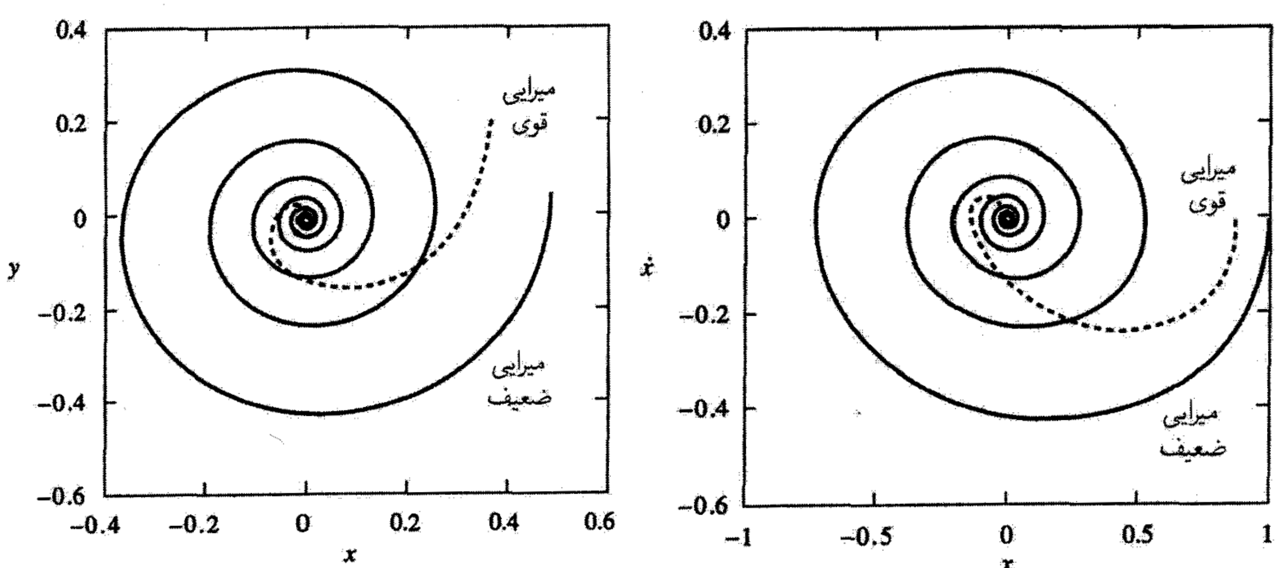
در حالت میرایی ضعیف، ضریب میرایی γ در مقایسه با $\omega_\circ$، بسامد زاویه‌ای نوسانگر نامیرا، کوچک است

$$\omega_d = \sqrt{\omega_\circ^2 - \gamma^2} = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{c^2}{4m^2}} \longrightarrow \omega_d \approx \omega_\circ$$

$$y = \dot{x} + \gamma x \longrightarrow y \approx \dot{x}$$

$$\frac{x^2}{\rho^2} + \frac{y^2}{\omega_d^2 \rho^2} = 1 \longrightarrow \frac{x^2}{\rho^2} + \frac{\dot{x}^2}{\rho^2 \omega_\circ^2} = 1$$

مسیر مشاهده‌شده در صفحهٔ $\dot{x} - x$ برای حالت کندمیرایی، در واقع با مسیر فضای فاز اصلاح‌شدهٔ نوسانگر کندمیرا یکسان است



(الف) (ب)

شکل ۳.۵.۳ (الف) نمودار فضای فاز اصلاح‌شده (متن درس را ببینید) برای نوسانگر هماهنگ ساده.
(ب) نمودار فضای فاز ($\omega_\circ = ۰٫۵\,\mathrm{s}^{-1}$). حالت کندمیرایی: (۱) میرایی ضعیف ($\gamma = ۰٫۰۵\,\mathrm{s}^{-1}$) (۲) میرایی قوی ($\gamma = ۰٫۲۵\,\mathrm{s}^{-1}$).

معادله انرژی برای نوسانگر هماهنگ میرا

$$\left.\begin{aligned} &\frac{x^2}{\rho^2}+\frac{\dot{x}^2}{\rho^2\omega_0^2}=1 \\ &\omega_0=\sqrt{\frac{k}{m}} \\ &\rho^2=A^2e^{-2\gamma t}\end{aligned}\right\}$$

$$\frac{1}{2}kx^2+\frac{1}{2}m\dot{x}^2=\frac{1}{2}kA^2e^{-2\gamma t}$$
$$=\frac{1}{2}m\omega_0^2A^2e^{-2\gamma t}$$

معادل با : $V(t)+T(t)=E(t)$

$E(t)=\frac{1}{2}m\omega_0^2A^2e^{-2\gamma t}$ انرژی کل باقیمانده در نوسانگر در هر لحظهٔ بعدی t

انرژی نوسانگر هماهنگ با میرایی ضعیف زوال نمایی با ثابت زمانی $\tau=(2\gamma)^{-1}$ دارد. ماهیت مارپیچی مسیر فضای فاز آن، این واقعیت را منعکس می‌کند.

$\therefore t=\tau \quad : \quad e^{-2\gamma\tau}=e^{-1} \quad \rightarrow \quad \tau=\frac{1}{2\gamma}$

نوسانگر هماهنگ با میرایی بحرانی

$$(D+\gamma)(D+\gamma)x=0$$

$$\therefore xe^{\gamma t}=At+B$$

$x=(At+B)e^{-\gamma t}$ جواب معادلهٔ برای نوسانگر با میرایی بحرانی

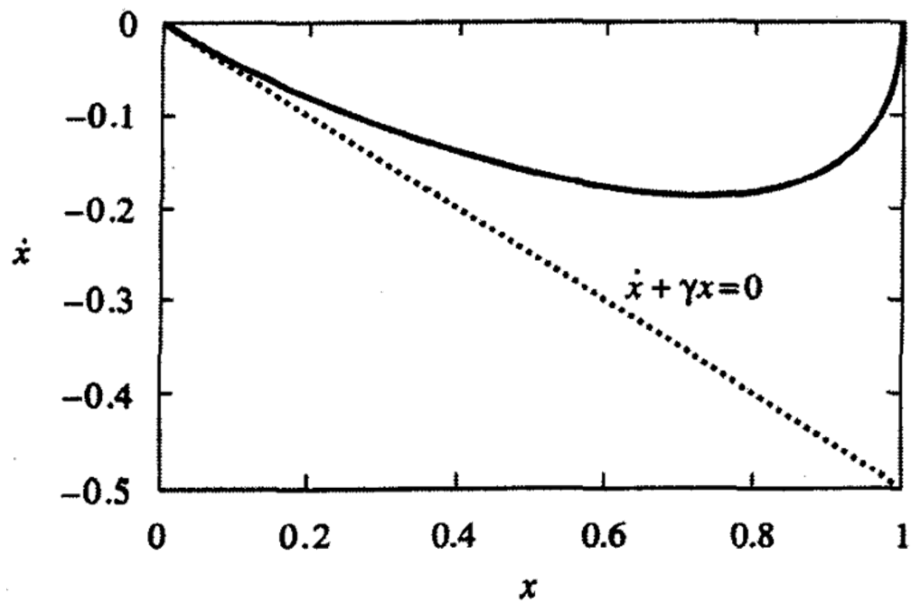
مشتق گیری

$$\dot{x}=-\gamma\underbrace{(At+B)e^{-\gamma t}}_{x}+Ae^{-\gamma t}$$

$$\dot{x}+\gamma x\doteq Ae^{-\gamma t}$$

مسیر فضای فاز باید به خطی مستقیم نزدیک شود که مکان قطع آن صفر و شیبش $-\gamma$ است.

$\therefore t\rightarrow\infty \quad \rightarrow \quad \dot{x}=-\gamma x$



شکل ۴.۵.۳ نمودار فضای فاز برای نوسانگر هماهنگ ساده ($\omega_۰ = ۰{,}۵\mathrm{s}^{-۱}$). میرایی بحرانی ($\gamma = ۰{,}۵\mathrm{s}^{-۱}$). با شرایط اولیهٔ $(x_۰, \dot{x}_۰) = (۱, ۰)$

نوسانگر تندمیرا

تندمیرایی وقتی پیش می‌آید که پارامتر میرایی، γ، از بسامد زاویه‌ای، $\omega_۰$، بزرگتر باشد.

$$\ddot{x} + ۲\gamma\dot{x} + \omega_۰^۲ x = ۰ \qquad [D^۲ + ۲\gamma D + \omega_۰^۲]x = ۰$$

$$\left[D + \gamma - \sqrt{\gamma^۲ - \omega_۰^۲}\right]\left[D + \gamma + \sqrt{\gamma^۲ - \omega_۰^۲}\right]x = ۰$$

$$x(t) = A_۱ e^{-(\gamma - q)t} + A_۲ e^{-(\gamma + q)t}$$

جواب معادله عملگری
با توان های حقیقی

مشتق گیری

$$\dot{x}(t) = -\gamma x + q e^{-\gamma t}(A_۱ e^{qt} - A_۲ e^{-qt})$$

شرایط مرزی:

در لحظه اولیه $t = 0$ حرکت از $x = x_0$ و با سرعت اولیه صفر (سکون) شروع می شود

بنابراین برای ضرایب A_1 و A_2 داریم:

$$\xrightarrow{?} \qquad A_۱ = \frac{(\gamma + q)}{۲q} x_\circ \qquad A_۲ = -\frac{(\gamma - q)}{۲q} x_\circ$$

برای دو ترکیب خطی متفاوت x و $\dot{x}$:

$$\dot{x} + (\gamma - q)x = (\gamma - q)x_\circ e^{-(\gamma+q)t}$$

$$\dot{x} + (\gamma + q)x = (\gamma + q)x_\circ e^{-(\gamma-q)t}$$

جملهٔ سمت راست هر یک از معادلات بالا با زمان، زوال نمایی دارد

$$\therefore t \to \infty \quad \to \quad e^{-\alpha t} = 0$$

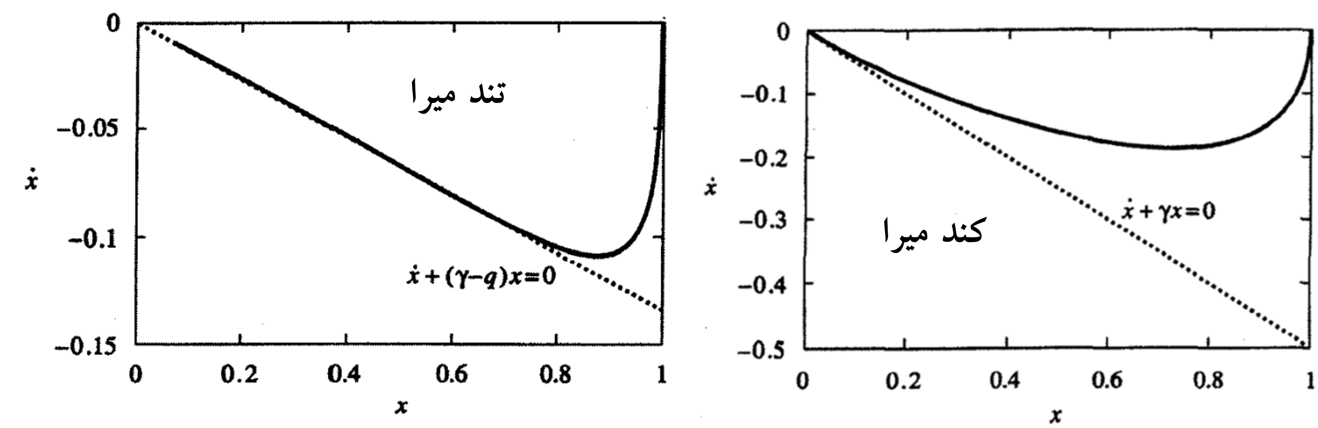
بنابراین، مجانبهای فضای فاز با جفت خطوط مستقیم زیر داده می‌شوند:

$$\begin{aligned} \dot{x} + (\gamma - q)x &= 0 \\ \dot{x} + (\gamma + q)x &= 0 \end{aligned} \longrightarrow \begin{aligned} \dot{x} &= -(\gamma - q)x \\ \dot{x} &= -(\gamma + q)x \end{aligned}$$

جز در حالتهای خاص، مسیرهای فضای فاز حرکت، همیشه در طول مجانبی که شیب آن $-(\gamma - q)$ است به صفر نزدیک می‌شوند. آن مجانب همواره «ناگهانی و یکباره به وجود می‌آید» خیلی سریعتر از حالتهای دیگر، زیرا ضریب فروافت نمایی آن عبارت است از $(\gamma + q)$ (معادلهٔ ۱۷.۵.۳)، یعنی بزرگتر از دو.

$$(\gamma + q) > (\gamma - q)$$

نمودار فضای فاز را برای یک نوسانگر تندمیرا و میرایی بحرانی شروع حرکت با مقادیر $(x_{\circ},\dot{x}_{\circ}) = (۱,\circ)$



مسیر سریعاً روی مجانب قرار می‌گیرد که با میرایی بحرانی که فقط در انتهای حرکتش به مجانب می‌رسد، بی‌شباهت است

تندمیرایی مؤثرترین راه برای حذف کردن نوسان از حرکت نوسانی است

مثال

ذره‌ای به جرم واحد (یکه) دستخوش نیروی میران $-\dot{x}$ و نیرویی است که به جابه‌جایی x از مبدأ بستگی دارد و به‌صورت $+x - x^{۳}$ تغییر می‌کند. (الف) نقاط تعادل ذره را بیابید و مشخص کنید که آیا تعادل پایدارند یا ناپایدار.

معادله حرکت ذره تحت نیروی میرایی $-c\dot{x}$ و نیروی بازگرداننده -kx

$$m\ddot{x} = -kx - c\dot{x} \qquad m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = \circ$$

شبیه سازی

$$\ddot{x} + \dot{x} - x + x^{۳} = \circ$$

$$\ddot{x} + \dot{x} - x + x^{۳} = ۰$$

$$\xrightarrow{\text{تغییر متغیر} \;:\; y = \dot{x}} \quad \dot{y} = -y + x - x^{۳}$$

اعمال شرایط مرزی:

در وضعیت تعادل، $y = ۰$ و $\dot{y} = ۰$

$$x - x^{۳} = x(۱ - x^{۲}) = x(۱ - x)(۱ + x) = ۰$$

سه نقطهٔ تعادل $x = ۰$ و $x = \pm ۱$ وجود دارد.

روش تعیین پایداری یا ناپایداری:

با خطی‌سازی معادلهٔ حرکت برای جابه‌جاییهای کوچک از آن نقاط، می‌توانیم تعیین کنیم که تعادل در آن نقاط پایدار است یا ناپایدار.

$x_۰$ نقطهٔ تعادل

u جابه‌جایی کم‌دامنهٔ ذره از نقطهٔ تعادل

$$\left.\begin{aligned} x &= x_۰ + u \\ \dot{y} &= -y + x - x^{۳} \end{aligned}\right\}$$

$y = \dot{u}$ و $\dot{y} = -y + (x_۰ + u) - (x_۰ + u)^{۳}$

$$\Big\downarrow \, ?$$

$$\dot{y} = -y + (۱ - ۳x_۰^{۲})u + x_۰(۱ - x_۰^{۲})$$

$$\dot{y} = -y + (1 - 3x_0^2)u + x_0(1 - x_0^2)$$

جمله سوم برابر با صفر

$$\begin{cases} x(1 - x^2) = x(1 - x)(1 + x) = 0 \\ x = x_0 \end{cases}$$

$$\dot{y} = -y + (1 - 3x_0^2)u$$

اگر $(1 - 3x_0^2) < 0$، حرکت پایدار و نوسان میراست که سرانجام در $x = x_0$ باز می‌ایستد.

اگر $(1 - 3x_0^2) > 0$، ذره از x_0 دور می‌شود و تعادل ناپایدار است.

$x = \pm 1$، عبارت‌اند از نقاط تعادل پایدار و $x_0 = 0$ یک نقطهٔ ناپایدار است.