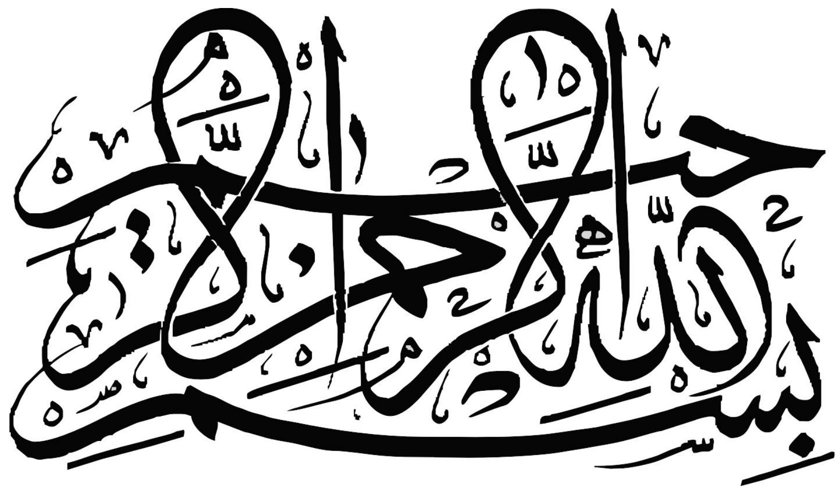


فصل سوم – بخش چهارم

# نوسانگر واداشته میرا

# ۶.۳ حرکت هماهنگ واداشته: تشدید

مطالعه‌حرکت نوسانگر هماهنگ میرایی که دستخوش نیروی محرک دوره‌ای (تناوبی) عاملی خارجی است

نیروی خارجی $F=F_0 \cos \omega t$

$$m\ddot{x} = -\underbrace{kx}_{\text{نیروی بازگرداننده}} - \underbrace{c\dot{x}}_{\text{نیروی میرایی}} + \underbrace{F_\circ \cos\omega t}_{\text{نیروی تناوبی}}$$

**دو ویژگی مهم این نوسانگر:**

نوسانها تابعی از بسامد نیروی محرکه است $x \propto \cos\omega t$

اگر بسامد نیروی محرکه نزدیک بسامد طبیعی نوسانگر $\omega_0$ باشد پدیده تشدید رخ می دهد

نیروهای اتلافی به‌طور اجتناب‌ناپذیر در هر سیستم واقعی برقرارند و بسامد نوسان را به‌طور جزئی از $\omega_\circ$ به $\omega_d$ تغییر می‌دهند و سبب می‌شوند که نوسان آزاد میرا شود

هر نیروی تناوبی محرک دو کار روی نوسانگر انجام می‌دهد: (۱) نوسان «آزادی» را با بسامد طبیعی در نوسانگر راه می‌اندازد، و (۲) نوسانگر را وامی‌دارد که سرانجام در بسامد محرک $\omega$ نوسان کند. به‌مدت زمان کوتاهی حرکت واقعی برهم‌نهی خطی نوسانات در این دو بسامد است، اما یکی از بین می‌رود و دیگری باقی می‌ماند. حرکتی که از بین می‌رود گذرا نامیده می‌شود. حرکتی که نهایتاً باقی می‌ماند، نوسان با بسامد محرک است، که به آن حرکت حالت پایا می‌گویند.

The general solution is

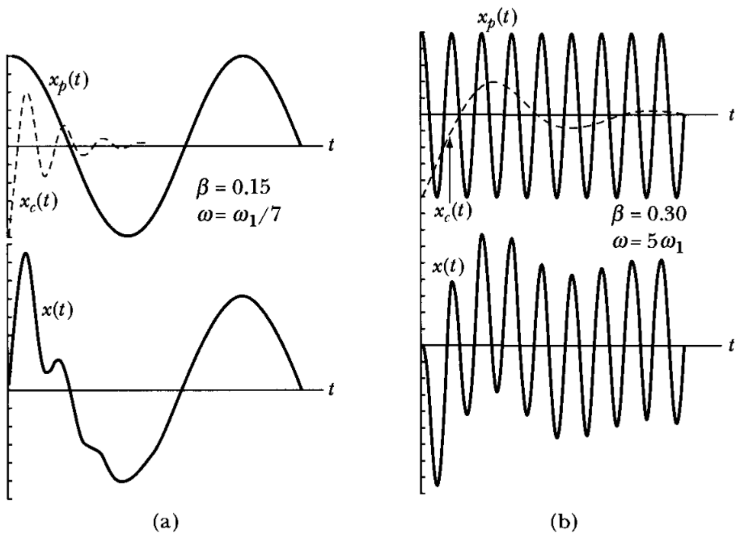
$$x(t) = x_c(t) + x_p(t) \tag{3.62}$$

But $x_c(t)$ here represents *transient* effects (i.e., effects that die out), and the terms contained in this solution damp out with time because of the factor $\exp(-\beta t)$. The term $x_p(t)$ represents the steady-state effects and contains all the information for $t$ large compared with $1/\beta$. Thus,

$$x(t \gg 1/\beta) = x_p(t)$$

The steady-state solution is important in many applications and problems (see Section 3.7).

The details of the motion during the period before the transient effects have disappeared (i.e., $t \leq 1/\beta$) strongly depend on the oscillator's conditions at the time that the driving force is first applied and also on the relative magnitudes of the driving frequency $\omega$ and the damping frequency $\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ in the case of underdamped, undriven oscillations. This can be shown by numerically calculating $x_p(t)$, $x_c(t)$, and the sum $x(t)$ (see Equation 3.62) for different values of $\beta$ and $\omega$ as we have done for Figure 3-15. The student may profit from solving Problems 3-24 (underdamped) and 3-25 (critically damped) where such a procedure is suggested. Figure 3-15 illustrates the transient motion of an underdamped oscillator when driving frequencies less than and greater than $\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ are applied. If $\omega < \omega_1$ (Figure 3-15a), the transient response of the oscillator greatly distorts the sinusoidal shape of the forcing function during the time interval immediately after the application of the driving force, whereas if $\omega > \omega_1$(Figure 3-15b), the effect is a modulation of the forcing function with little distortion of the high-frequency sinusoidal oscillations.




JRE 3-15 Examples of sinusoidal driven oscillatory motion with damping. The steady-state solution $x_p$, transient solution $x_c$, and sum $x$ are shown in (a) for driving frequency $\omega$ greater than the damping frequency $\omega_1 (\omega > \omega_1)$ and in (b) for $\omega < \omega_1$.

$$m\ddot{x} = -kx - c\dot{x} + F_\circ \cos\omega t$$

در غیاب میرایی: $\Rightarrow$ $m\ddot{x} + kx = F_\circ \cos\omega t$

چه جوابی ممکن است در هر حالت بسامدهای خیلی کم‌دامنه ($\omega \ll \omega_\circ$) و خیلی پردامنه ($\omega \gg \omega_\circ$)

الف) در بسامدهای کم‌دامنه

جملهٔ لختی $m\ddot{x}$ در مقایسه با نیروی فنری $-kx$ چشم‌پوشیدنی

فنر کاملاً سفت به‌نظر خواهد آمد، خیلی آهسته متراکم یا منبسط می‌شود.

نوسانگری در فازی خیلی نزدیک با نیروی محرک

$$kx = F_\circ \cos\omega t \quad \longrightarrow \quad x \approx A\cos\omega t \qquad A = \frac{F_\circ}{k}$$

ب) در بسامدهای بالا

شتاب باید زیاد باشد

$m\ddot{x}$ باید بر نیروی فنری $-kx$ غلبه یابد

جواب توسط جرم نوسانگر کنترل می‌شود

جابه‌جایی آن باید کوچک و $180^\circ$ با نیروی محرک اختلاف فاز داشته باشد

$$a \propto -x$$

در غیاب میرایی → $m\ddot{x} + kx = F_\circ \cos\omega t$

$$x(t) = A\cos(\omega t - \phi)$$

جواب پیشنهادی برای معادله

$\phi$ اختلاف فاز بین جابه جایی و نیروی محرکه

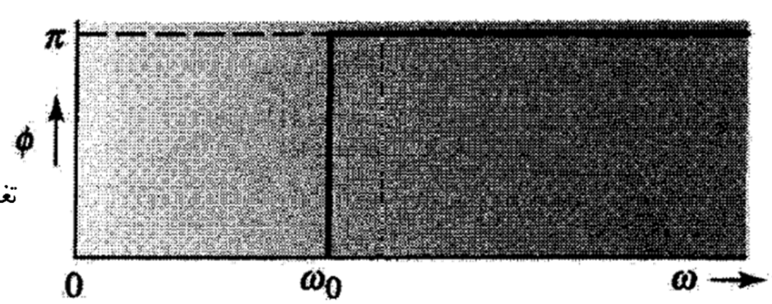
قرار دادن جواب در معادله

$$-m\omega^2 A\cos(\omega t - \phi) + kA\cos(\omega t - \phi) = F_\circ \cos\omega t$$

با حل کردن معادلهٔ بالا به‌ازای $\pi$ و $\phi = \circ$، به ترتیب می‌رسیم به:

$$A = \frac{F_\circ/m}{(\omega_\circ^2 - \omega^2)} \qquad \phi = \circ \qquad \omega < \omega_\circ$$

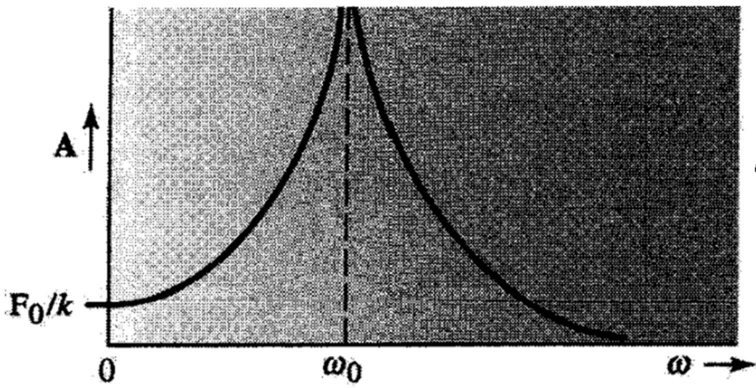
$$= \frac{F_\circ/m}{(\omega^2 - \omega_\circ^2)} \qquad \phi = \pi \qquad \omega > \omega_\circ$$




تغییرات‌زاویهٔ فاز $\phi$ را به‌صورت تابعی از $\omega$

(برای نوسانگر نامیرا)

هنگامی‌که $\omega$ از $\omega_\circ$ عبور می‌کند، دامنه به‌نحوی فوق‌العاده بزرگ می‌شود




تغییرات دامنهٔ $A$ به‌صورت تابعی از $\omega$
(برای نوسانگر نامیرا)

موقعیتهای واقعی اگر سیستم فقط میرایی کمی در $\omega$ نزدیک به $\omega_\circ$ داشته باشد، دامنه زیاد ولی معین و محدود می‌شود. تغییر فاز «از بین می‌رود» و دیگر ناپیوسته نیست، گرچه این تغییر هنوز هم خیلی ناگهانی است.

## نوسانگر هماهنگ میرای واداشته

$$m\ddot{x} = -kx - c\dot{x} + \underbrace{F_\circ \cos\omega t}_{\text{نیروی خارجی}}$$

جای گذاری به جای نیرو در شکل سینوس یا کسینوس $F = F_\circ e^{i\omega t}$

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_\circ e^{i\omega t}$$

جواب به صورت نمایی

متغیر مختلط $x$

جزء حقیقی آن جواب معادلهٔ

جزء حقیقی است که وضعیت فیزیکی را مشخص می‌کند

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_\circ e^{i\omega t}$$

$$x(t) = Ae^{i(\omega t-\phi)}$$

$$m\frac{d^۲}{dt^۲}Ae^{i(\omega t-\phi)} + c\frac{d}{dt}Ae^{i(\omega t-\phi)} + kAe^{i(\omega t-\phi)} = F_\circ e^{i\omega t}$$

$$-m\omega^۲ A + i\omega cA + kA = F_\circ e^{i\phi} = F_\circ(\cos\phi + i\sin\phi)$$

مساوی قراردادن اجزاء حقیقی و موهومی

$$\begin{cases} A(k - m\omega^۲) = F_\circ \cos\phi & (1) \\ c\omega A = F_\circ \sin\phi & (2) \end{cases}$$

الف) محاسبه زاویه $\phi$

$$\frac{2}{1} \Rightarrow \tan\phi = \frac{c\omega}{k - m\omega^۲} \quad (3)$$

ب) محاسبه دامنه **A** :

طرفین معادلهٔ 1 و 2 را به توان دو می‌رسانیم و آنها را با هم جمع می‌کنیم

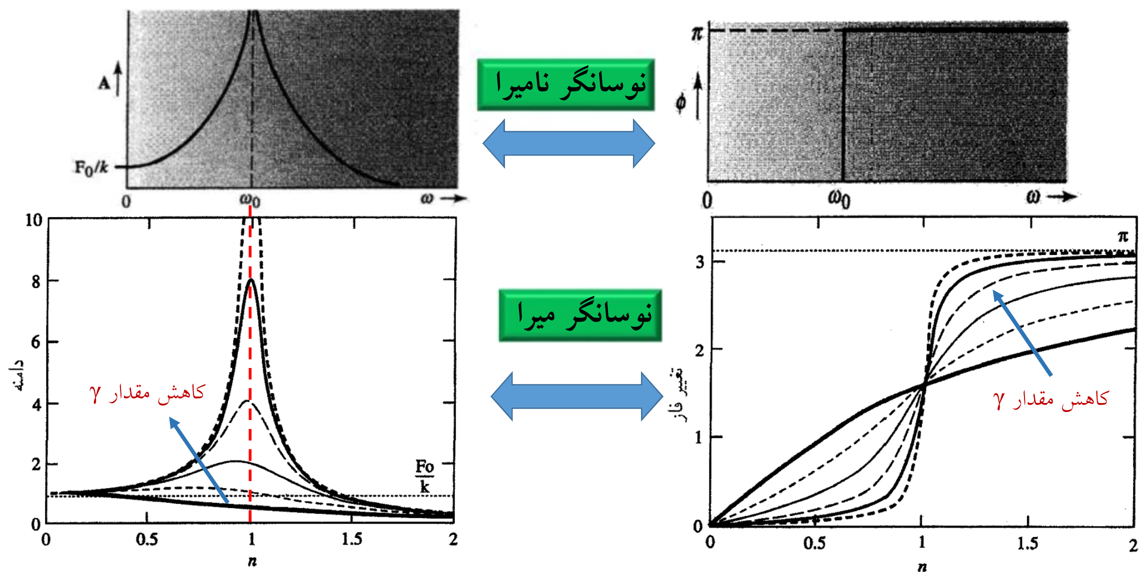
$$A^۲(k - m\omega^۲)^۲ + c^۲\omega^۲A^۲ = F_\circ^۲$$

$$A(\omega) = \frac{F_\circ}{[(k - m\omega^۲)^۲ + c^۲\omega^۲]^{۱/۲}} \quad (4)$$

تغییر متغیر

$$\begin{cases} \omega_\circ^۲ = k/m \\ \gamma = c/۲m \end{cases} \xrightarrow{4\ 3} \quad \tan\phi = \frac{۲\gamma\omega}{\omega_\circ^۲ - \omega^۲}$$

$$A(\omega) = \frac{F_\circ/m}{[(\omega_\circ^۲ - \omega^۲)^۲ + ۴\gamma^۲\omega^۲]^{۱/۲}}$$




**شکل ۲.۶.۳** (الف) دامنهٔ $A/(F_\circ/k)$ و (ب) تغییر فاز $\phi$ برحسب بسامد محرک $(n = \omega/\omega_\circ)$ به‌ازای مقادیر ثابت میرایی $\gamma$ که با $\gamma = ۲^{-i}\omega_\circ (i = ۰, ۱, \cdots, ۵)$ داده می‌شود. کاهش مقادیر $\gamma$ با مقادیر بزرگتر $A$ و تغییرات فاز شدیدتر همراه است.

☑ در غیاب میرایی

$$\gamma = 0 \longrightarrow \quad A = \frac{F_\circ/m}{(\omega_\circ^۲ - \omega^۲)} \qquad \phi = \circ \qquad \omega < \omega_\circ$$

$$= \frac{F_\circ/m}{(\omega^۲ - \omega_\circ^۲)} \qquad \phi = \pi \qquad \omega > \omega_\circ$$

☑ هنگامی‌که جملهٔ میرا به صفر می‌رسد، قلهٔ تشدید بزرگتر و باریکتر خواهد شد
شدت تغییر فاز تیز افزایش می‌یابد

☑ در $\omega_\circ$ قلهٔ تشدید به بینهایت / شدت تغییر فاز به ناپیوستگی نزدیک می‌شوند

☑ در حضور میرایی تشدید دامنه در $\omega_r$، پیش می‌آید نه در $\omega_0$
با مشتق‌گیری از $A(\omega)$ و مساوی صفر قراردادن آن می‌تواند محاسبه شود

**بسامد تشدید در حضور میرایی**

$$A(\omega) = \frac{F_\circ/m}{[(\omega_\circ^2-\omega^2)^2+4\gamma^2\omega^2]^{1/2}}$$

$$\frac{d}{d\omega}A(\omega) = (F_0/m)\times\frac{1}{2}\left[2\times-2(\omega_0^2-\omega^2)+2\times4\gamma^2\omega\right]\left[(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\gamma^2\omega^2\right]^{(-\frac{3}{2})}$$

$$\frac{d}{d\omega}A(\omega=\omega_r)=0 \quad\Rightarrow\quad \omega_r^2=\omega_\circ^2-2\gamma^2$$

اختلاف بسامد تشدید در نوسانگر میرا

وقتی $\gamma$، جملهٔ میرایی، به صفر میل کند، $\omega_r$ به $\omega_\circ$ نزدیک می‌شود

$$\begin{cases}\omega_r^2=\omega_\circ^2-2\gamma^2\\ \omega_d=(\omega_\circ^2-\gamma^2)^{1/2}\end{cases} \Rightarrow \omega_r^2=\omega_d^2-\gamma^2$$

بسامد نوسانگر میرای واداشته — بسامد نوسانگر میرای آزاد

**نکات:**

$$\omega_r^2=\omega_\circ^2-2\gamma^2 \qquad\qquad \omega_r^2=\omega_d^2-\gamma^2$$

- وقتی میرایی ضعیف است $\quad \omega_r\approx\omega_d\approx\omega_0$

- هرگاه $\gamma>\omega_\circ/\sqrt{2}$ در بیشترین میزان میرایی قوی، هیچ تشدید دامنه‌ای رخ نمی‌دهد، زیرا در این صورت دامنه به تابع یکنوای نزولی از $\omega$ تبدیل می‌شود

حالت حدی

$$\omega_r=0 \;\rightarrow\; \gamma^2=\omega_\circ^2/2 \;\Rightarrow\; A(\omega)=\frac{F_\circ/m}{[(\omega_\circ^2-\omega^2)^2+2\omega_\circ^2\omega^2]^{1/2}}=\frac{F_\circ/m}{(\omega_\circ^4+\omega^4)^{1/2}}$$

- **در نقطه تشدید**

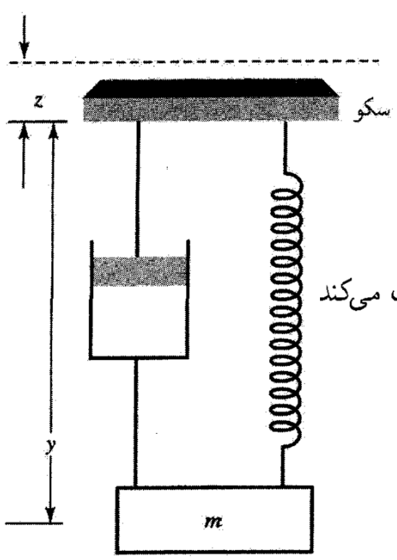
$$\omega_r^2=\omega_0^2-2\gamma^2<0 \;\rightarrow\; \therefore\omega_r^2=-\alpha^2 \;,\alpha>0 \;\rightarrow\; \omega_r=i\alpha$$

$$x(t)=Ae^{i(\omega t-\phi)} \Rightarrow x(t)=Ae^{i(i\alpha t)}e^{-\phi}=Ae^{-\alpha t}e^{-\phi}\boxed{=Ae^{-\alpha t-\phi}}$$

### مثال

می‌توان زلزله‌نگار را به‌صورت جرمی آویخته از فنرهایی و یک کمک‌فنر لوله‌ای آویخته از یک سکوی متصل به زمین ساخت (شکل ۳.۶.۳). نوسانهای زمین از سکو به جرم آویخته منتقل می‌شوند، که آن جرم دارای «عقربه‌ای» است که جابه‌جایی جرم را نسبت به سکو ثبت می‌کند. کمک فنر لوله‌ای نیروی میران را تأمین می‌کند. در حالت آرمانی، جابه‌جایی $A$ مربوط به جرم نسبت به سکو باید دقیقا شبیه به جابه‌جایی زمین، $D$، باشد. معادلهٔ حرکت جرم $m$ را بیابید و پارامترهای $\omega_0$ و $\gamma$ را چنان برگزینید که مطمئن شوید $A$ در محدودهٔ ده درصدی $D$ واقع می‌شود.

فرض کنید در خلال زمین‌لرزه، زمین با حرکت هماهنگ ساده و $f = 10\,\mathrm{Hz}$ نوسان می‌کند.




شکل **۳.۶.۳** الگوی لرزه‌نگار.

فرض ها جهت نوشتن معادله حرکت جرم m :

سکو به اندازهٔ $z$ نسبت به مکان اولش پایین برود

$m$ **نیز به پایین رفته نسبت به سکو به مکان $y$ برسد**

شناور در داخل میران (کمک‌فنر لوله‌ای) به سمت پایین و با سرعت $\dot{z}$ حرکت می‌کند

ظرف حاوی سیال میران با سرعت $\dot{z} + \dot{y}$ به پایین حرکت می‌کند

نیروی میران تأخیردهنده با $c\dot{y}$ بیان می‌شود

$l$ طول طبیعی فنر

$$F = mg - c\dot{y} - k(y-l) = m(\ddot{y} + \ddot{z})$$

$l$ طول اولیه فنر (طول تعادلی در غیاب جرم)

$l$ +mg/k طول تغییر یافته با افزودن جرم m (تعادل ثانویه)

x جابه جایی جرم m از نقطه تعادلش

تغییر متغیر : $y = x + mg/k + l$

?

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = -m\ddot{z}$$

سکو با حرکت هماهنگ ساده با دامنهٔ $D$ و بسامد زاویه‌ای $\omega = ۲\pi f$ نوسان می‌کند

تعریف : $z = De^{i\omega t}$

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = mD\omega^{۲} e^{i\omega t}$$

مقایسه معادله فوق با معادله کلی بیان شده برای نوسانگر واداشته میرا

$$\begin{cases} m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_{\circ} e^{i\omega t} \xrightarrow{\text{جواب}} A(\omega) = \dfrac{F_{\circ}/m}{[(\omega_{\circ}^{۲} - \omega^{۲})^{۲} + ۴\gamma^{۲}\omega^{۲}]^{۱/۲}} \\ m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = mD\omega^{۲} e^{i\omega t} \end{cases}$$

$$\begin{cases} F_0 = mD\omega^2 \rightarrow \dfrac{F_0}{m} = D\omega^2 \\ A = D\omega^{۲}[(\omega_{\circ}^{۲} - \omega^{۲})^{۲} + ۴\gamma^{۲}\omega^{۲}]^{-۱/۲} \end{cases}$$

تقسیم‌کردن صورت و مخرج رابطهٔ بالا بر $\omega^{۲}$ $\longrightarrow$ $A = D\left[\left(\dfrac{\omega_{\circ}^{۲}}{\omega^{۲}} - ۱\right)^{۲} + ۴\dfrac{\gamma^{۲}}{\omega^{۲}}\right]^{-۱/۲}$

بسط‌دادن جمله در مخرج $\longrightarrow$ $A = D\left[1 + \frac{\omega_0^4}{\omega^4} + \frac{2}{\omega^2}(2\gamma^2 - \omega_0^2)\right]^{-1/2}$

به‌ازای مقادیر مناسب $\omega$، با قراردادن $2\gamma^2 - \omega_0^2 = 0$ و $\omega_0/\omega < 0$ داریم $A \approx D$

مثلاً، برای اختلاف کسری بین $A$ و $D$ به اندازهٔ ٪۱۰

$$\frac{D-A}{D} = 1 - \left(1 + \frac{\omega_0^4}{\omega^4}\right)^{-1/2} \approx \frac{1}{2}\frac{\omega_0^4}{\omega^4} < \frac{1}{10} \longrightarrow \omega_0 < 0.84\omega$$

استفاده از بسط تیلور $(1+x)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{4}x^2 - \frac{15}{8}x^3$

بسامد حرکت آزاد نوسانگر $f_0 = \omega_0/2\pi \leq 8\mathrm{Hz}$

پارامتر میرایی $\gamma = \omega_0/\sqrt{2} = 36$

برای تأمین این مقدار، باید از فنرهای «نرم» و جرمی سنگین بهره گرفت

## دامنهٔ نوسان در قلهٔ تشدید

دامنهٔ حالت پایا در بسامد تشدید، که آن را $A_{\max}$ خواهیم نامید

$$A(\omega) = \frac{F_0/m}{[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2]^{1/2}} \quad (1)$$

$\omega_r^2 = \omega_0^2 - 2\gamma^2 \qquad \omega = \omega_r$

$$\Rightarrow A_{\max} = \frac{F_0/m}{2\gamma\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}}$$

در حالت میرایی ضعیف، می‌توانیم از $\gamma^2$ چشم بپوشیم

$$A_{\max} \simeq \frac{F_0}{2\gamma m\omega_0} \quad (2)$$

هرگاه ضریب میرایی $\gamma$ خیلی کوچک باشد، دامنهٔ نوسان واداشته در حالت تشدید خیلی بزرگ می‌شود، و برعکس

## تیزی تشدید: ضریب کیفیت

در حالت میرایی ضعیف، $\gamma \ll \omega_0$

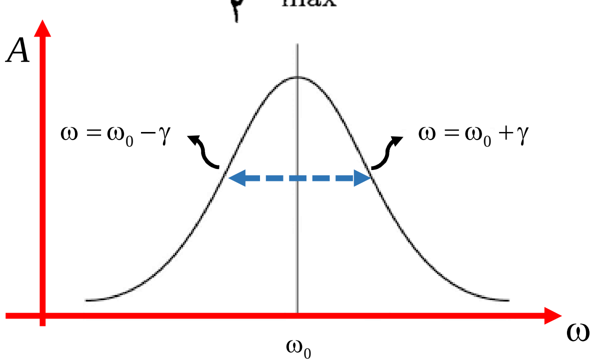
$$\omega_0^2 - \omega^2 = (\omega_0 + \omega)(\omega_0 - \omega) \simeq 2\omega_0(\omega_0 - \omega)$$

$$\left[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2\right]^{\frac{1}{2}} = \left[4\omega_0^2(\omega_0 - \omega)^2 + 4\gamma^2\omega^2\right]^{\frac{1}{2}} = 2\omega_0\left[(\omega_0 - \omega)^2 + \gamma^2\right]^{\frac{1}{2}} \quad 3$$

1 2 3 $\Rightarrow$ $$A(\omega) = \frac{F_0/m}{2\omega_0\left[(\omega_0 - \omega)^2 + \gamma^2\right]^{\frac{1}{2}}} \longrightarrow$$

$$A(\omega) \simeq \frac{A_{\max}\gamma}{\sqrt{(\omega_0 - \omega)^2 + \gamma^2}}$$

$$A^2 = \frac{1}{2}A_{\max}^2$$




- به‌ازای $\gamma = |\omega_0 - \omega|$، یا معادل آن، $\omega = \omega_0 \pm \gamma$
- $\gamma$ معیار پهنای منحنی تشدید است.
- $2\gamma$ عبارت است از اختلاف بسامد بین نقاطی که در آن نقاط انرژی با ضریب $\frac{1}{2}$ کمتر از انرژی تشدید است، زیرا انرژی با $A^2$ متناسب است.

$$E \propto A^2$$

ضریب کیفیت، $Q$

در نوسانگر میرای ناواداشته ← شاخص آهنگ کاهش انرژی

در نوسانگر میرای واداشته ← شاخص تیزی قلهٔ تشدید

در حالت میرایی ضعیف

$$Q = \frac{\omega_d}{2\gamma} \approx \frac{\omega_0}{2\gamma}$$

$$\Delta\omega = 2\gamma \simeq \frac{\omega_0}{Q} \longrightarrow$$ پهنای کل $\Delta\omega$ در نقاط نیم‌انرژی

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{\Delta f}{f_0} \simeq \frac{1}{Q} \longleftarrow \omega = 2\pi f$$

## اختلاف فاز $\phi$

اختلاف فاز، $\phi$ ، بین نیروی محرک واردآمده و جواب حالت پایا

ناشی ا ز زمان تاخیر در عمل نیروی خارجی و پاسخ سیستم به این نیرو

$$\phi = \tan^{-1}\left[\frac{2\gamma\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)}\right]$$

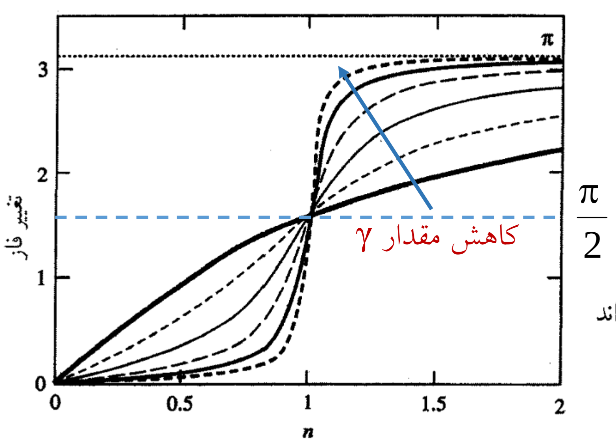
- برای نوسانگر نامیرای واداشته

به‌ازای $\omega < \omega_0$ مقدار $\phi$ صفر

به‌ازای $\omega > \omega_0$ مقدار $\phi$ برابر $180^\circ$

این مقادیر حدود بسامد بالا و پایین بسامد حرکت واقعی‌اند

- تغییر $\phi$ به‌طور ناپیوسته در $\omega = \omega_0$




تغییر فاز $\phi$ برحسب بسامد محرک $(n = \omega/\omega_0)$

☆ برای میرایی خیلی کوچک هنگامی که $\omega$ در میان ناحیه‌ای در محدودهٔ $\pm\gamma$ حول $\omega_0$ از یک حد به حد دیگر عبور می‌کند،تغییر خیلی ناگهان (زیاد) است

☆ در بسامدهای محرک پایین $\omega \ll \omega_0$

$\phi \to 0$ و پاسخ تقریباً با نیروی محرک همفاز است

☆ در بسامدهای محرک پایین $\omega \ll \omega_0$

$$A(\omega \to 0) \approx \frac{F_0/m}{\omega_0^2} = \frac{F_0/m}{k/m} = \frac{F_0}{k}$$

ویژگیهای فنر جواب را کنترل می‌کند نه جرم یا اصطکاک

جرم را نیرویی که برخلاف نیروی تأخیری فنر وارد می‌آید، به‌طور آهسته به جلو و عقب هل می‌دهد

☆ چگونه در حالت تشدید پاسخ می‌تواند بسیار بزرگ باشد. ؟

- نیروی خارجی به گونه ای اعمال می شود تا مستقل از مکان، نیرو و سرعت هم فاز باشند
- لذا نیرو و سرعت و درنتیجه جابه جایی هم جهت خواهند بود لذا کار نیروی خارجی مثبت می شود
- طبق قضیه کار انرژی؛ کار مثبت منجر به افزایش سرعت و لذا انرژی جنبشی جسم می گردد

$$\Delta k = W = \vec{F} \cdot \vec{d}$$

برای هل‌دادن یک کودک، معمولاً در کنار می‌ایستد و هنگامی تاب از مکان تعادلش می‌گذرد، به آن هل کوچکی به طرف جلو می‌دهد، و این هنگامی است که سرعت آن بیشینه و جابه‌جاییش صفر است

**این روش بهینه برای ایجاد شرط تشدید است**

نیرویی نسبتاً جزئی، که از روی تعقل وارد آید، می‌تواند نوسان پردامنه‌ای ایجاد کند.

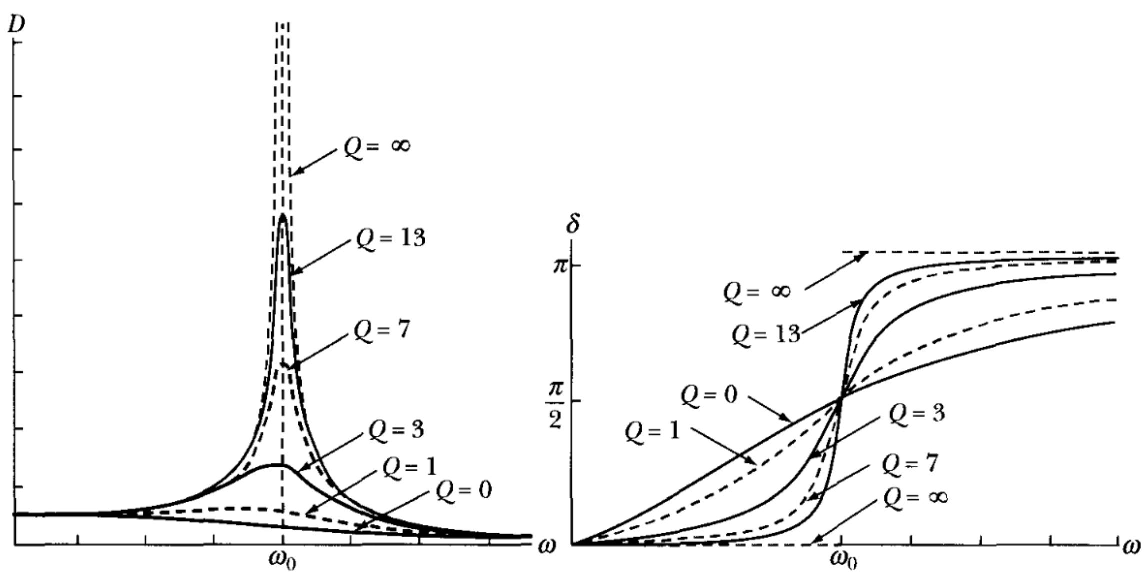
## ارتباط Q با دامنه بیشینه

رابطه کلی رفتار دامنه در نوسانگر میرای واداشته $A(\omega) = \dfrac{F_0/m}{[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2]^{1/2}}$

در حالت میرایی ضعیف $\dashrightarrow$ $A_{\max} \approx F_0/2\gamma m\omega_0$

$\omega \to 0$ $\dashrightarrow$ $A(\omega \to 0) \approx F_0/m\omega_0^2$

$$\frac{A_{\max}}{A(\omega \to 0)} = \frac{F_0/(2\gamma m\omega_0)}{F_0/(m\omega_0^2)} = \frac{\omega_0}{2\gamma} = \omega_0\tau = Q$$




If little damping occurs, then $Q$ is very large and the shape of the resonance curve approaches that for an undamped oscillator. But the resonance can be completely destroyed if the damping is large and $Q$ is very small. Figure 3-16 shows the reso-

☆اختلاف فاز، در $\phi = \pi/۲$ و $\omega = \omega_\circ$،

جابه‌جایی به اندازهٔ $۹۰^\circ$ نسبت به نیروی محرک «تأخیر دارد» یا از آن عقبتر است

گفته شد:

زمان بهینه برای تخلیه‌کردن انرژی به نوسانگر وقتی است که از وضعیت تعادل (صفر) با سرعت بیشینه می‌گذرد

یعنی وقتی توان ورودی $\mathbf{F}\cdot\mathbf{v}$ بیشینه باشد

اما در اختلاف فاز ۹۰ درجه چگونه است؟

$$x(t) = A(\omega) Re(e^{i(\omega t-\phi)}) = A(\omega)\cos(\omega t - \phi)$$

در حالت تشدید، برای میرایی کم‌دامنه، $\phi = \pi/2$

$$x(t) = A(\omega_\circ)\cos(\omega_\circ t - \pi/۲) = A(\omega_\circ)\sin\omega_\circ t$$

$$\dot{x}(t) = -\omega A(\omega)\sin(\omega t - \phi) \xrightarrow{\text{در حالت تشدید،}} \dot{x}(t) = \omega_\circ A(\omega_\circ)\cos\omega_\circ t$$

نیروی محرک در حالت تشدید

$$F = F_\circ Re(e^{i\omega_\circ t}) = F_\circ \cos\omega_\circ t$$

نیروی محرک با سرعت نوسانگر همفاز، یا $۹۰^\circ$ از جابه‌جایی پیش، است

☆ به‌ازای مقادیر بزرگ $\omega$، $\omega \gg \omega_\circ$ و $\phi \to \pi$

جابه‌جایی با نیروی محرک $180^\circ$ اختلاف فاز دارد.

$$A(\omega) = \frac{F_\circ/m}{[(\omega_\circ^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2]^{1/2}} \quad \Rightarrow \quad A(\omega \gg \omega_\circ) \approx \frac{F_\circ}{m\omega^2}$$

در این حالت، دامنه به‌صورت $1/\omega^2$ کاهش می‌یابد

**مثال**

ضریب میرایی نهایی، $\gamma$، در یک سیستم تعلیق فنری یک‌دهم مقدار بحرانی است. اگر بسامد نامیرا $\omega_\circ$ باشد، پیدا کنید: (الف) بسامد تشدید؛ (ب) ضریب کیفیت؛ (ج) زاویهٔ فاز $\phi$ وقتی سیستم با بسامد $\omega = \omega_\circ/2$ واداشته می‌شود؛ و (د) دامنهٔ حالت پایا در این بسامد.

(الف)
$$\gamma = \gamma_{\text{بحرانی}}/10 = \omega_\circ/10$$

$$\omega_r^2 = \omega_\circ^2 - 2\gamma^2 \longrightarrow \omega_r = \left[\omega_\circ^2 - 2(\omega_\circ/10)^2\right]^{1/2} = \omega_\circ(0{,}98)^{1/2} = 0{,}99\omega_\circ$$

(ب) این سیستم را می‌توان ضعیف‌میرا دانست

$$Q = \frac{\omega d}{2\gamma} \approx \frac{\omega_\circ}{2\gamma} \longrightarrow Q \simeq \frac{\omega_\circ}{2\gamma} = \frac{\omega_\circ}{2(\omega_\circ/10)} = 5$$

$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{2\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}\right) = \tan^{-1}\left[\frac{2(\omega_0/10)(\omega_0/2)}{\omega_0^2 - (\omega_0/2)^2}\right] \qquad \text{(ج)}$$

$$= \tan^{-1} 0{,}133 = 7{,}6^\circ$$

$$A(\omega) = \frac{F_0/m}{[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2]^{1/2}} \qquad \text{(د)}$$

$$\text{مخرج تشدید} \quad D(\omega = \omega_0/2) = \left[(\omega_0^2 - \omega_0^2/4)^4 + 4(\omega_0/10)^2(\omega_0/2)^2\right]^{1/2}$$

$$= [(9{,}16) + (1/100)]^{1/2}\,\omega_0^2 = 0{,}7566\omega_0^2$$

$$A(\omega = \omega_0/2) = \frac{F_0/m}{0{,}7566\omega_0^2} = 1{,}322\frac{F_0}{m\omega_0^2} = 1{,}322\,F_0/k$$

دامنهٔ حالت پایا به‌ازای بسامد تحریک صفر