فصل سوم – بخش پنجم

نوسانگر ناخطی

۷.۳ نوسانگر ناخطی: روش تقریبهای متوالی

وقتی سیستمی از وضعیت تعادل خود جابه‌جا می‌شود، ممکن است

- نیروی بازگردان به شیوه‌ای غیر از تناسب مستقیم با جابه‌جایی تغییر کند
- فنری دقیقاً از قانون هوک پیروی نکند
- در حالتهای فیزیکی متعدد، تابع نیروی بازگردان ذاتاً غیرخطی است

نیروی بازگردان ناخطی $F(x) = -kx + \epsilon(x)$

ε(x) اختلاف از حالت خطی را نشان می دهد

این تابع برحسب متغیر جابه‌جایی x از مرتبهٔ درجهٔ دوم یا بالاتر

معادلهٔ دیفرانسیل حرکت تحت تأثیر چنین نیرویی

$$m\ddot{x} + kx = \epsilon(x) = e_2 x^2 + \varepsilon_3 x^3 + \cdots$$

حل معادله به کمک روشهای تقریبی

حالت خاص:

$$\left.\begin{array}{r} m\ddot{x} + kx = \epsilon_3 x^3 \\ \text{تقسیم طرفین بر } m \\ \omega_0^2 = k/m \\ \epsilon_3/m = \lambda \end{array}\right\} \quad \ddot{x} + \omega_0^2 x = \lambda x^3$$

روش تقریبهای متوالی

تقریب نخست $x = A\cos\omega t$

قرار دادن جواب در معادله دیفرانسیل

$$-A\omega^{2}\cos\omega t + A\omega_{0}^{2}\cos\omega t = \lambda A^{3}\cos^{3}\omega t = \lambda A^{3}\left(\frac{3}{4}\cos\omega t + \frac{1}{4}\cos 3\omega t\right)$$

در مرحلهٔ آخر، از اتحاد مثلثاتی $\cos^{3}u = \frac{3}{4}\cos u + \frac{1}{4}\cos 3u$ بهره برده‌ایم، که این اتحاد با بهره‌گیری از رابطهٔ $\cos^{3}u = [(e^{iu} + e^{-iu})/2]^{3}$ به‌آسانی حاصل می‌شود.

$$\left(-\omega^{2} + \omega_{0}^{2} - \frac{3}{4}\lambda A^{2}\right)A\cos\omega t - \frac{1}{4}\lambda A^{3}\cos 3\omega t = 0$$

$$\left(-\omega^{2} + \omega_{0}^{2} - \frac{3}{4}\lambda A^{2}\right)A\cos\omega t - \frac{1}{4}\lambda A^{3}\cos 3\omega t = 0$$

الف) جواب بدیهی $A = 0$

به ازای این جواب دو طرف رابطه صفر است. اما این جواب فیزیکی نیست

ب) به‌ازای مقادیر کوچک λ

به شرط صفر شدن عبارت داخل پرانتز، دو طرف معادله صفر می شود.

$$\left(-\omega^{2} + \omega_{0}^{2} - \frac{3}{4}\lambda A^{2}\right) = 0 \longrightarrow \omega^{2} = \omega_{0}^{2} - \frac{3}{4}\lambda A^{2}$$

$$\omega = \omega_{0}\left(1 - \frac{3\lambda A^{2}}{4\omega_{0}^{2}}\right)^{1/2}$$

بسامد نوسانگر آزاد ناخطی متحرک

ω تابعی از دامنهٔ A

ج) جوابی بهتر، شامل هماهنگ سوم $\cos ۳\omega t$

$$\left(-\omega^۲ + \omega_۰^۲ - \frac{۳}{۴}\lambda A^۲\right) A\cos\omega t - \frac{۱}{۴}\lambda A^۳ \cos ۳\omega t = ۰$$ معادلهٔ دیفرانسیل

جواب آزمونی دوم $x = A\cos\omega t + B\cos ۳\omega t$

$$\underbrace{\left(-\omega^۲ + \omega_۰^۲ - \frac{۳}{۴}\lambda A^۲\right)}_{A} A\cos\omega t + \underbrace{\left(-۹B\omega^۲ + \omega_۰^۲ B - \frac{۱}{۴}\lambda A^۳\right)}_{B} \cos ۳\omega t$$

$+(\omega t$ جملات شامل $B\lambda$ و مضربهای بالاتر$) = ۰$

A $= 0 \longrightarrow \omega^۲ = \omega_۰^۲ - \frac{۳}{۴}\lambda A^۲$

B $= 0 \longrightarrow B = \dfrac{\frac{۱}{۴}\lambda A^۳}{-۹\omega^۲ + \omega_۰^۲} = \dfrac{\lambda A^۳}{-۳۲\omega_۰^۲ + ۲۷\lambda A^۲} \simeq -\dfrac{\lambda A^۳}{۳۲\omega_۰^۲}$

$x = A\cos\omega t + B\cos ۳\omega t$

$$x = A\cos\omega t - \frac{\lambda A^۳}{۳۲\omega_۰^۲}\cos ۳\omega t$$

د) تقریب های بالاتر

ویژگی های حل معادله دیفرانسیلی حرکت به کمک روشهای تقریبی:

تحلیل بالا، قطعاً خیلی نارساست

برای نوسان آزاد تحت تأثیر نیروی بازگردان می‌توان فهمید که

زمان تناوب نوسان تابعی از دامنهٔ ارتعاش است

نوسان دقیقاً سینوسی نیست

می‌توان آن را برهم‌نهی آمیخته هماهنگها تلقی کرد

مثال ۱.۷.۳ آونگ ساده به‌عنوان نوسانگر ناخطی

معادلهٔ دیفرانسیل آونگ ساده $\ddot{\theta} + (g/l)\sin\theta = \circ$

بررسی آونگ ساده به‌عنوان نوسانگر هماهنگ خطی

در ساده ترین تقریب $\sin\theta \simeq \theta$

تقریب های بالاتر و دقیقتر $\sin\theta = \underbrace{\theta - \frac{\theta^{۳}}{۳!}} + \frac{\theta^{۵}}{۵!} - \cdots$

$$\ddot{\theta} + \omega_{\circ}^{۲}\theta = \frac{\omega_{\circ}^{۲}}{۳!}\theta^{۳} \quad \omega_{\circ}^{۲} = g/l$$

مقایسه با معادله حرکت

$$\ddot{x} + \omega_\circ^۲ x = \lambda x^۳$$

$$\ddot{\theta} + \omega_\circ^۲ \theta = \frac{\omega_\circ^۲}{۳!}\theta^۳$$

$$\lambda = \omega_\circ^۲/۳! = \omega_\circ^۲/۶$$

بازنویسی رابطه تغییر یافته مربوط به بسامد

$$\omega = \omega_\circ \left(۱ - \frac{۳\lambda A^۲}{۴\omega_\circ^۲}\right)^{۱/۲} \Rightarrow \omega = \omega_\circ \left[۱ - \frac{۳(\omega_\circ^۲/۶)A^۲}{۴\omega_\circ^۲}\right]^{۱/۲} = \omega_\circ \left(۱ - \frac{A^۲}{۸}\right)^{۱/۲}$$

$$T = \frac{۲\pi}{\omega} = ۲\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(۱ - \frac{A^۲}{۸}\right)^{-۱/۲} = T_\circ \left(۱ - \frac{A^۲}{۸}\right)^{-۱/۲}$$

در اینجا، A دامنهٔ نوسان برحسب رادیان است. روش تقریبی ما نشان می‌دهد که زمان تناوب مربوط به دامنهٔ غیرصفر به اندازهٔ ضریب $(۱ - A^۲/۸)^{-۱/۲}$ نسبت به زمان تناوبی که قبلاً با فرض $\sin\theta = \theta$ محاسبه کرده بودیم طولانیتر است. مثلاً، اگر آونگ با دامنهٔ $\pi/۲ = ۹۰^\circ$ نوسان کند (دامنهٔ نسبتاً بزرگ)، این ضریب عبارت است از $۱{,}۲۰۲۵ = (۱ - \pi^۲/۳۲)^{-۱/۲}$. از این‌رو، دورهٔ تناوب حدود ۲۰ درصد طولانیتر از دورهٔ تناوب مربوط به دامنهٔ کوچک است. این زمان تناوب نسبت به افزایش مربوط به میرایی آونگ بیسبال، مثال ۳.۴.۳، به نحو چشمگیری بزرگتر است.