



فصل چهارم - بخش دوم

نیروهای جدایی پذیر

۳.۴ نیروهایی از نوع جداپذیر: حرکت پرتابی

تعریف نیروی جداپذیر:

مولفه نیرو در هر راستا تابعی از مختصه در آن راستا است

$$\mathbf{F} = \mathbf{i}F_x(x) + \mathbf{j}F_y(y) + \mathbf{k}F_z(z) \longrightarrow \nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ F_x(x) & F_y(y) & F_z(z) \end{vmatrix} = \mathbf{0}$$

میدان پایستار است زیرا هر مشتق جزئی از نوع آمیخته است و به این جهت عیناً صفر می‌شود، زیرا مختصات x ، y ، و z متغیرهای مستقل‌اند.

$$m\ddot{x} = F_x(x, \dot{x}, t)$$

$$\mathbf{\rightarrow} m\ddot{y} = F_y(y, \dot{y}, t)$$

$$m\ddot{z} = F_z(z, \dot{z}, t)$$

حرکت پرتابه در میدان گرانشی یکنواخت

الف) بدون مقاومت هوا:

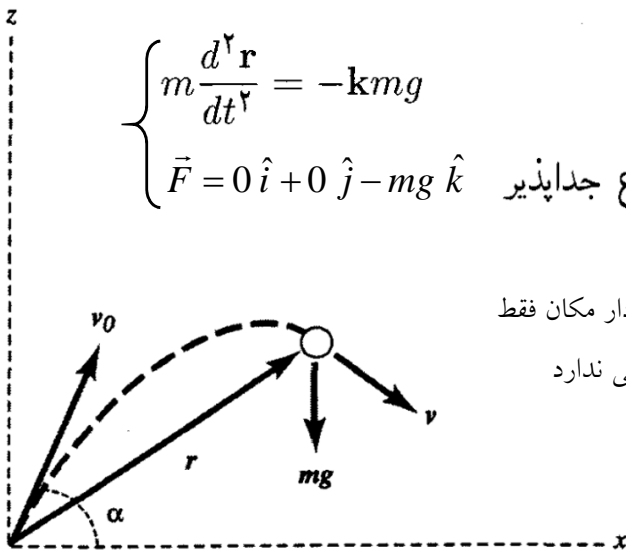
$$\begin{cases} m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = -kmg \\ \vec{F} = 0\hat{i} + 0\hat{j} - mg\hat{k} \end{cases}$$

نیرو پایستار و از نوع جداپذیر

سرعت اولیه در صفحه XZ و نیرو در راستای Z پس بردار مکان فقط

محدود به صفحه XZ خواهد شد و در راستای Y حرکتی ندارد

$$\mathbf{r} = \mathbf{i}x + \mathbf{k}z$$



تغییرات سرعت با مکان و زمان

نیرو پایستار $\rightarrow E(x,z) = E(0,0)$

$$\frac{1}{2}m(\underbrace{\dot{x}^2 + \dot{z}^2}_{v^2}) + mgz = \frac{1}{2}mv_0^2$$

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = -\mathbf{k}mg$$

انتگرال گیری

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = -\mathbf{k}gt + \mathbf{v}_0$$

$$v^2 = v_0^2 - 2gz$$

$$v_0 \begin{cases} v_{0x} = \dot{x}_0 = v_0 \cos \alpha & v_x = \dot{x} = v_0 \cos \alpha \\ v_{0y} = \dot{y}_0 = v_0 \sin \alpha & v_y = \dot{y} = v_0 \sin \alpha - gt \end{cases}$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{i}v_0 \cos \alpha + \mathbf{k}(v_0 \sin \alpha - gt)$$

معادله مکان و مسیر

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = -\mathbf{k}gt + \mathbf{v}_0 \quad \text{انتگرال گیری} \rightarrow \mathbf{r} = -\mathbf{k}\frac{1}{2}gt^2 + \mathbf{v}_0 t + \mathbf{r}_0$$

مکان اولیه پرتابه، \mathbf{r}_0 که مساوی صفر

$$\mathbf{r} = \mathbf{i}(v_0 \cos \alpha)t + \mathbf{k}\left((v_0 \sin \alpha)t - \frac{1}{2}gt^2\right)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \dot{x} \cdot t = (v_0 \cos \alpha)t \rightarrow t = \frac{x}{v_0 \cos \alpha} \\ y = \dot{y} \cdot t \equiv 0 \\ z = \dot{z} \cdot t - \frac{1}{2}gt^2 = (v_0 \sin \alpha)t - \frac{1}{2}gt^2 \end{array} \right.$$

$$z = (\tan \alpha)x - \left(\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha}\right)x^2$$

(۱) ارتفاع بیشینه، z_{\max}

در ارتفاع بیشینه مؤلفه قائم سرعت پرتابه صفر است

$$\mathbf{v} = \underbrace{i v_0 \cos \alpha}_{v_x} + \underbrace{\mathbf{k}(v_0 \sin \alpha - gt)}_{v_z = 0}$$

$$v^2 = v_0^2 - 2gz$$

$$v^2 = v_x^2 + v_z^2 \xrightarrow{\text{in max height}} v^2 = v_0^2 \cos^2 \alpha$$

$$\hookrightarrow v_0^2 \cos^2 \alpha = v_0^2 - 2gz_{\max} \longrightarrow z_{\max} = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}$$

(۲) زمانی، t_{\max} ، که طول می‌کشد تا به ارتفاع بیشینه برسد

در ارتفاع بیشینه، مؤلفه قائم سرعت صفر

$$v_0 \sin \alpha - gt_{\max} = 0 \longrightarrow t_{\max} = \frac{v_0 \sin \alpha}{g}$$

(۳) زمان پرواز، T ، پرتابه!

$$\begin{cases} z = \dot{z} \cdot t - \frac{1}{2}gt^2 = (v_0 \sin \alpha)t - \frac{1}{2}gt^2 \\ z = 0 \end{cases} \longrightarrow T = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g}$$

این مدت زمان دو برابر زمانی است که طول می‌کشد تا پرتابه به ارتفاع بیشینه برسد و نشان می‌دهد که پرواز پرتابه به بالا تا نقطه اوج مسیرش، با پرواز آن به پایین و در جهت مخالف آن اول، متقارن است.

(۴) برد، R ، و برد بیشینه، R_{\max} ، پرتابه

$$\begin{cases} x = \dot{x} \cdot t = (v \cdot \cos \alpha)t \\ T = \frac{2v \cdot \sin \alpha}{g} \end{cases} \quad \rightarrow \quad R = x = \frac{v^2 \sin \cdot 2\alpha}{g}$$

$$R \text{ بیشینه} \quad \frac{dR}{d\alpha} = 0 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \alpha = 45^\circ \\ R_{\max} = v^2/g \end{cases}$$

(ب) با در نظر گرفتن مقاومت خطی هوا:

در این حالت، انرژی کل در حین حرکت پایسته نمی ماند، و در خلال پرواز پرتابه پیوسته کاهش می یابد.

نیروی مقاوم به طور خطی با سرعت تغییر می کند $f(v) = -m\gamma v$

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = -m\gamma \mathbf{v} - \mathbf{k}mg$$

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = -\gamma \mathbf{v} - \mathbf{k}g \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \ddot{x} = -\gamma \dot{x} \\ \ddot{y} = -\gamma \dot{y} \\ \ddot{z} = -\gamma \dot{z} - g \end{cases}$$

معادلات از هم جدا شده اند!

حل مسئله در راستای X و Y با مقایسه با مثال ۲-۴-۱:

مثال ۲-۴-۱

$$\begin{cases} F_0 = 0 \\ -c_1 v = m \frac{dv}{dt} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} v = v_0 e^{-c_1 t/m} \\ x = \frac{mv_0}{c_1} (1 - e^{-c_1 t/m}) \end{cases}$$

نیروی ترمزی

در این مسئله $\gamma = c_1/m$

$$\begin{cases} \dot{x} = \dot{x}_0 e^{-\gamma t} \\ \dot{y} = \dot{y}_0 e^{-\gamma t} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = \frac{\dot{x}_0}{\gamma} (1 - e^{-\gamma t}) \\ y = \dot{y}_0 = 0 \end{cases}$$

حل مسئله در راستای Z با مقایسه با مثال سقوط قائم به داخل شاره:

مثال سقوط

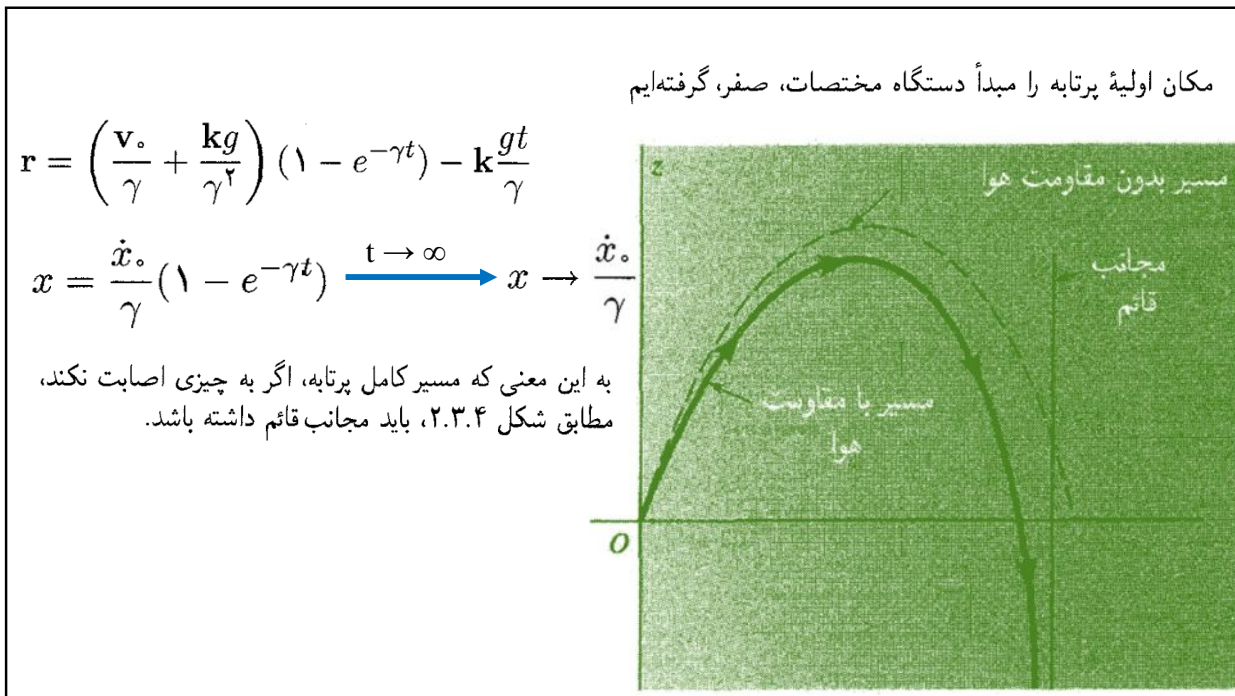
$$\begin{cases} -mg - c_1 v = m \frac{dv}{dt} \\ v = -v_t (1 - e^{-t/\tau}) + v_0 e^{-t/\tau} \end{cases}$$

در این مسئله

$$\ddot{z} = -\gamma \dot{z} - g$$

$$\begin{cases} \gamma = c_1/m \\ v_t = \frac{mg}{c_1} = \frac{g}{\gamma} \\ \tau = \frac{m}{c_1} = \frac{1}{\gamma} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dot{z} = \dot{z}_0 e^{-\gamma t} - \frac{g}{\gamma} (1 - e^{-\gamma t}) \\ z = \left(\frac{\dot{z}_0}{\gamma} + \frac{g}{\gamma^2} \right) (1 - e^{-\gamma t}) - \frac{g}{\gamma} t \end{cases}$$

	$t = 0$	$t = \infty$
$\dot{x} = \dot{x}_0 e^{-\gamma t}$	$\dot{x} = \dot{x}_0$	$\dot{x} = 0$
$x = \frac{\dot{x}_0}{\gamma} (1 - e^{-\gamma t})$	$x = 0$	$x = \frac{\dot{x}_0}{\gamma}$
$\dot{z} = \dot{z}_0 e^{-\gamma t} - \frac{g}{\gamma} (1 - e^{-\gamma t})$	$\dot{z} = \dot{z}_0$	$\dot{z} = -\frac{g}{\gamma}$
$z = \left(\frac{\dot{z}_0}{\gamma} + \frac{g}{\gamma^2} \right) (1 - e^{-\gamma t}) - \frac{g}{\gamma} t$	$z = 0$	$z = -\infty$



برد افقی

$$x = \frac{\dot{x}_0}{\gamma} (1 - e^{-\gamma t}) \rightarrow 1 - \gamma x / \dot{x}_0 = e^{-\gamma t}$$

$$\rightarrow t = -\gamma^{-1} \ln(1 - \gamma x / \dot{x}_0)$$

برای بدست آوردن برد افقی؛ t را در رابطه Z گذارده و برابر با صفر قرار می دهیم

$$z = \left(\frac{\dot{z}_0}{\gamma} + \frac{g}{\gamma^2} \right) \underbrace{(1 - e^{-\gamma t})}_{\frac{\gamma x_{\max}}{\dot{x}_0}} - \frac{g}{\gamma} t = 0$$

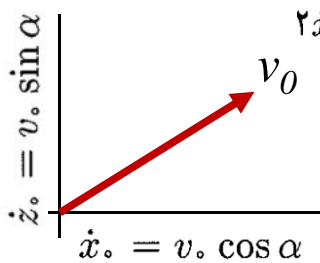
$$\rightarrow \left(\frac{\dot{z}_0}{\gamma} + \frac{g}{\gamma^2} \right) \frac{\gamma x_{\max}}{\dot{x}_0} = \frac{g}{\gamma^2} \ln \left(1 - \frac{\gamma x_{\max}}{\dot{x}_0} \right)$$

$$\left(\frac{\dot{z}_0}{\gamma} + \frac{g}{\gamma^2} \right) \frac{\gamma x_{\max}}{\dot{x}_0} = \frac{g}{\gamma^2} \ln \left(1 - \frac{\gamma x_{\max}}{\dot{x}_0} \right)$$

$$\ln(1 - u) = -u - \frac{u^2}{2} - \frac{u^3}{3} - \dots$$

به ازای $u = \gamma x_{\max} / \dot{x}_0$

$$x_{\max} = \frac{2\dot{x}_0 \dot{z}_0}{g} - \frac{4\dot{x}_0 \dot{z}_0^2}{3g^2} \gamma + \dots$$



$$2\dot{x}_0 \dot{z}_0 = 2v_0^2 \sin \alpha \cos \alpha = v_0^2 \sin 2\alpha$$

$$x_{\max} = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g} - \frac{4v_0^3 \sin 2\alpha \sin \alpha}{3g^2} \gamma + \dots$$

کاهش برد ناشی از مقاومت هوا. برد در غیاب مقاومت هوا.

مثال ۱.۳.۴ برد افقی توپ گلف

مقاومت پس‌کشی هوا بر حسب v ، به‌جای خطی بودن به درجهٔ دوم نزدیکتر است

$$\mathbf{F}(\mathbf{v}) = -\mathbf{v}(c_1 + c_2|\mathbf{v}|)$$

«خطی‌سازی» تابع نیرو

$|\mathbf{v}|$ را با سرعت اولیه، v_0 ، مساوی قرار می‌دهیم ←

$$F(v) = -v(c_1 + c_2v_0) \quad \leftarrow$$

$$\gamma = \frac{c_1 + c_2v_0}{m} \quad \text{تعریف} \quad \leftarrow$$

$$F(v) = -\gamma v \quad \leftarrow$$

توپ گلف به قطر $D = 0.042 \text{ m}$ و جرم $m = 0.046 \text{ kg}$

می‌توان از c_1 چشم پوشید

$$\gamma = \frac{c_2v_0}{m} = \frac{0.22D^2v_0}{m} = \frac{0.22(0.042)^2v_0}{0.046} = 0.0084v_0$$

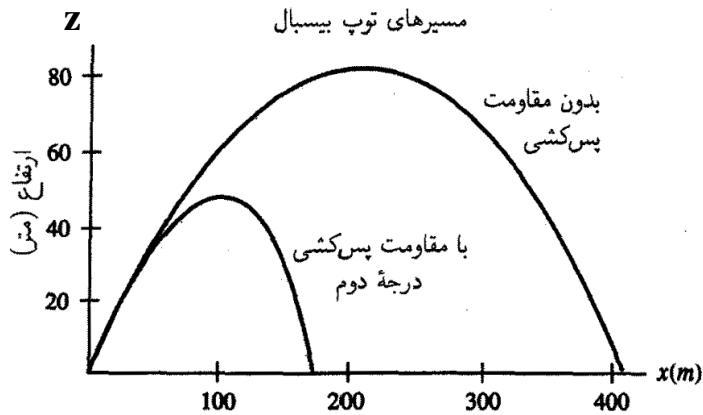
برای مثال $v_0 = 20 \text{ m/s}$ → $\gamma = 0.0084 \times 20 = 0.17 \text{ s}^{-1}$

$$\begin{aligned} x_{\max} &= \frac{(20)^2 \sin 60^\circ}{9.8} \text{ m} - \frac{4(20)^3 \sin 60^\circ \sin 30^\circ \times 0.17}{3(9.8)^2} \text{ m} \\ &= 35.3 \text{ m} - 8.2 \text{ m} = 27.1 \text{ m} \end{aligned}$$

مثال) ضربه به توپ بیسبال

نیروی مقاومت پس‌کشی هوای وارد بر توپ بیسبال اساساً با مجذور سرعت توپ متناسب است:

$$\mathbf{F}_D(v) = -c_2|v|\mathbf{v}$$



$$m\ddot{\mathbf{r}} = -c_2|v|\mathbf{v} - mg\mathbf{k}$$

$$m\ddot{x} = -c_2|v|\dot{x}$$

$$m\ddot{z} = -c_2|v|\dot{z} - mg$$

$$m\ddot{x} = -c_2|v|\dot{x}$$

$$m\ddot{z} = -c_2|v|\dot{z} - mg$$

$$\gamma = c_2/m$$

$$\ddot{x} = -\gamma(\dot{x}^2 + \dot{z}^2)^{1/2}\dot{x}$$

$$\ddot{z} = -\gamma(\dot{x}^2 + \dot{z}^2)^{1/2}\dot{z} - g$$

$$D = 0.728 \text{ m} \text{ و } m = 0.145 \text{ kg}$$

$$\gamma = \frac{c_2}{m} = \frac{0.15 D^2}{m} = \frac{0.15 (0.728)^2}{0.145} \text{ m}^{-1} = 0.055 \text{ m}^{-1}$$

حل معادله دیفرانسیل درجه دوم ناخطی به کمک کامپیوتر