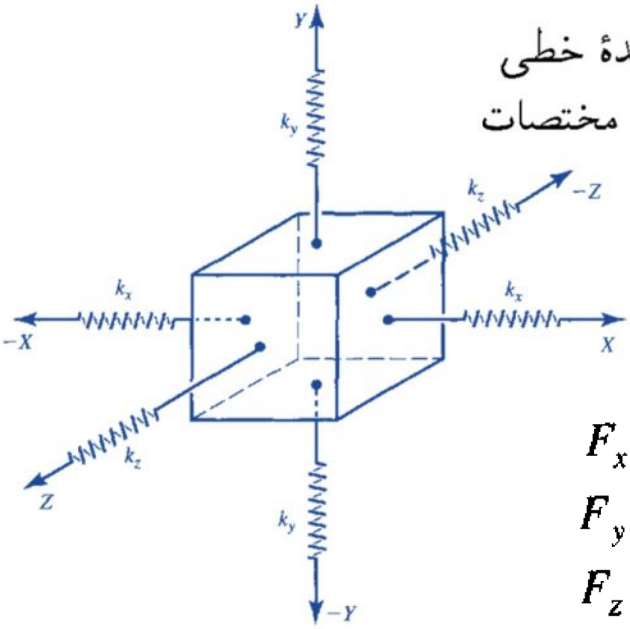
بسم الله الرحمن الرحيم

فصل چهارم – بخش سوم

نوسانگر هماهنگ دو و سه بعدی

۴.۴ نوسانگر هماهنگ در دو و سه بعد



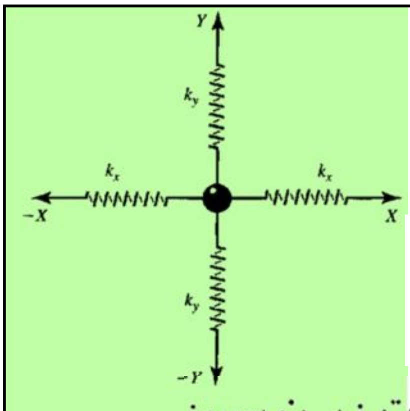
حرکت ذره‌ای تحت تأثیر نیروی بازگردانندۀ خطی
همواره به‌سوی نقطۀ ثابت، مبدأ دستگاه مختصات

$$\mathbf{F} = -k\mathbf{r}$$

$$m\frac{d^{۲}\mathbf{r}}{dt^{۲}} = -k\mathbf{r}$$

$$F_x = -k_x x,$$
$$F_y = -k_y y,$$
$$F_z = -k_z z$$

نوسانگر همسانگرد دوبعدی



حرکت در یک تک‌صفحه

معادله دیفرانسیلی حاکم بر حرکت نوسانگر به جرم m و
تحت دو نیروی بازگشتی دردو راستای x و y

$$m\ddot{x} = -kx$$
$$m\ddot{y} = -ky$$

معادلات از یکدیگر جدایند و می‌توانیم بلافاصله جوابها را به‌صورت زیر بنویسیم:

$$x = A\cos(\omega t + \alpha) \qquad y = B\cos(\omega t + \beta)$$

$$\omega = \left(\frac{k}{m}\right)^{۱/۲}$$

A، B، α، و β ثابتهای انتگرال‌گیری‌اند که در هر حالت از روی شرایط اولیه تعیین می‌شوند.

به‌دست آوردن معادلهٔ مسیر

$$y = B\cos(\omega t+\beta) \xrightarrow{\Delta=\beta-\alpha} y = B\cos(\omega t+\alpha+\Delta)$$

$$y = B[\cos(\omega t+\alpha)\cos\Delta - \sin(\omega t+\alpha)\sin\Delta]$$

$$y = \frac{B}{A}[\underbrace{A\cos(\omega t+\alpha)}_{x}]\cos\Delta - B[1-\frac{1}{A^2}\underbrace{A^2\cos^2(\omega t+\alpha)}_{x^2}]^{\frac{1}{2}}\sin\Delta$$

$$\frac{y}{B} = \frac{x}{A}\cos\Delta - \left(1-\frac{x^2}{A^2}\right)^{1/2}\sin\Delta$$

به توان دو

معادلهٔ درجهٔ دومی برحسب x و y

$$\frac{x^2}{A^2} - xy\frac{2\cos\Delta}{AB} + \frac{y^2}{B^2} = \sin^2\Delta$$

معادلهٔ درجهٔ دوم کلی

$$ax^2+bxy+cy^2+dx+ey=f$$

نمایانگر بیضی، سهمی، یا هذلولی

ملاک تشخیص

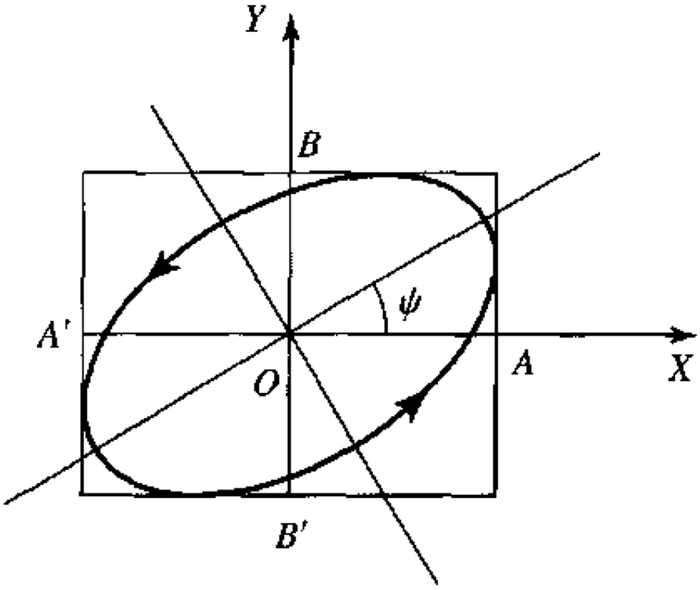
b^2-4ac

$$b^2-4ac\begin{cases}\text{منفی} \longrightarrow \text{بیضی}\\ \text{صفر} \longrightarrow \text{سهمی}\\ \text{مثبت} \longrightarrow \text{هذلولی}\end{cases}$$

$$\underbrace{\frac{1}{A^2}}_{a}x^2 - \underbrace{\frac{2\cos\Delta}{AB}}_{b}xy + \underbrace{\frac{1}{B^2}}_{c}y^2 = \sin^2\Delta$$

$$\left(-\frac{2\cos\Delta}{AB}\right)^2 - 4\times\frac{1}{A^2}\times\frac{1}{B^2} = \frac{4}{A^2B^2}(\cos^2\Delta-1) = \frac{-8}{A^2B^2}\sin^2\Delta < 0$$

مسیر بیضی است.



? $\tan ۲\psi = \frac{۲AB\cos\Delta}{A^۲ - B^۲}$ محور مسیر بیضوی با محور x زاویهٔ ψ را می‌سازد

$$\frac{x^۲}{A^۲} - xy\frac{۲\cos\Delta}{AB} + \frac{y^۲}{B^۲} = \sin^۲\Delta$$

$if: \quad \Delta = \frac{\pi}{2}$

$$\frac{x^۲}{A^۲} + \frac{y^۲}{B^۲} = ۱$$

معادلهٔ بیضی با محورهایی منطبق بر محورهای مختصات

$if: \quad \Delta = 0$

$$(\frac{x}{A} - \frac{y}{B})^2 = 0 \quad \rightarrow \quad y = +\frac{B}{A}x$$

معادلهٔ مسیر به معادلهٔ خط راست تبدیل می‌شود

$if: \quad \Delta = \pi$

$$(\frac{x}{A} + \frac{y}{B})^2 = 0 \quad \rightarrow \quad y = -\frac{B}{A}x$$

معادلهٔ مسیر به معادلهٔ خط راست تبدیل می‌شود

More accurately, the resultant motion of two simple harmonic motions at right angles to each other can result in any one of many graphs, depending on the relative amplitudes and the phase differences between the two motions: a circle, an ellipse, an oriented ellipse, or a straight line.

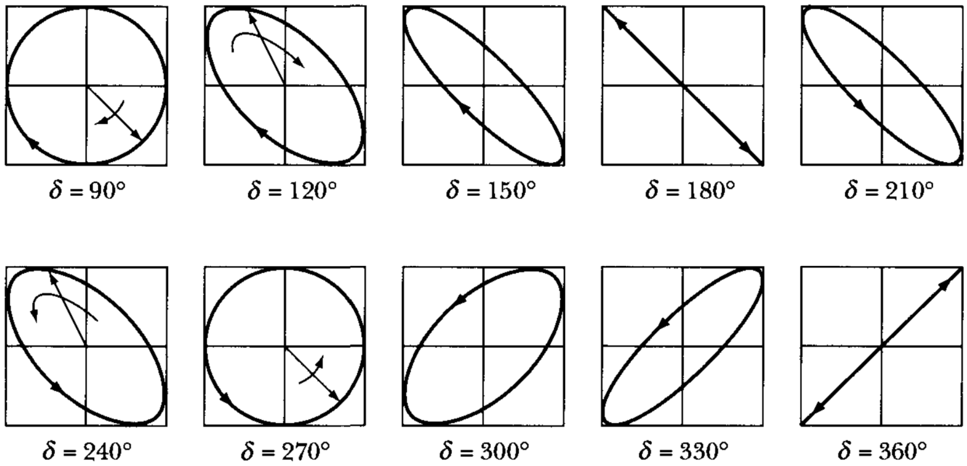
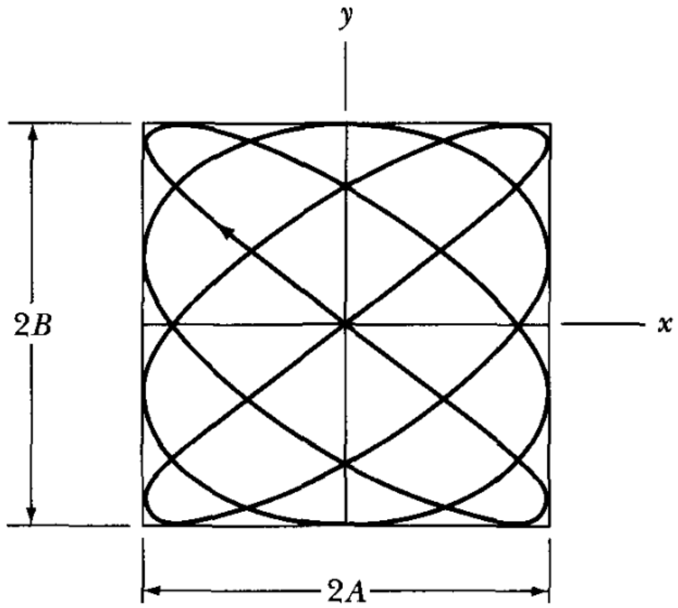


FIGURE 3-2 Two-dimensional harmonic oscillation motion for various phase angles $\delta = \alpha - \beta$.

In the *general* case of two-dimensional oscillations, the angular frequencies for the motions in the x- and y-directions need not be equal, so that Equation 3.19 becomes

$$\left.\begin{aligned} x(t) &= A\cos(\omega_x t - \alpha) \\ y(t) &= B\cos(\omega_y t - \beta) \end{aligned}\right\} \qquad (3.27)$$

The path of the motion is no longer an ellipse but a **Lissajous curve.*** Such a curve will be *closed* if the motion repeats itself at regular intervals of time. This will be possible only if the angular frequencies ω_x and ω_y are *commensurable*, that is, if ω_x/ω_y is a rational fraction. Such a case is shown in Figure 3-3, in which $\omega_y = \frac{3}{4}\omega_x$ (also $\alpha = \beta$). If the ratio of the angular frequencies is not a rational fraction, the curve will be *open*; that is, the moving particle will never pass twice through the same point with the same velocity. In such a case, after a sufficiently long time has elapsed, the curve will pass arbitrarily close to any given point lying within the rectangle $2A \times 2B$ and will therefore "fill" the rectangle.†



Closed two-dimensional oscillatory motion (called *Lissajous curves*) occurs under certain conditions for the x and y coordinates.

If the angular frequencies for the motions in the x- and y-directions are different, the shape of the resulting Lissajous curve strongly depends on the phase difference $\delta \equiv \alpha - \beta$. Figure 3-4 shows the results for the case $\omega_y = 2\omega_x$ for phase differences of 0, $\pi/3$, and $\pi/2$.

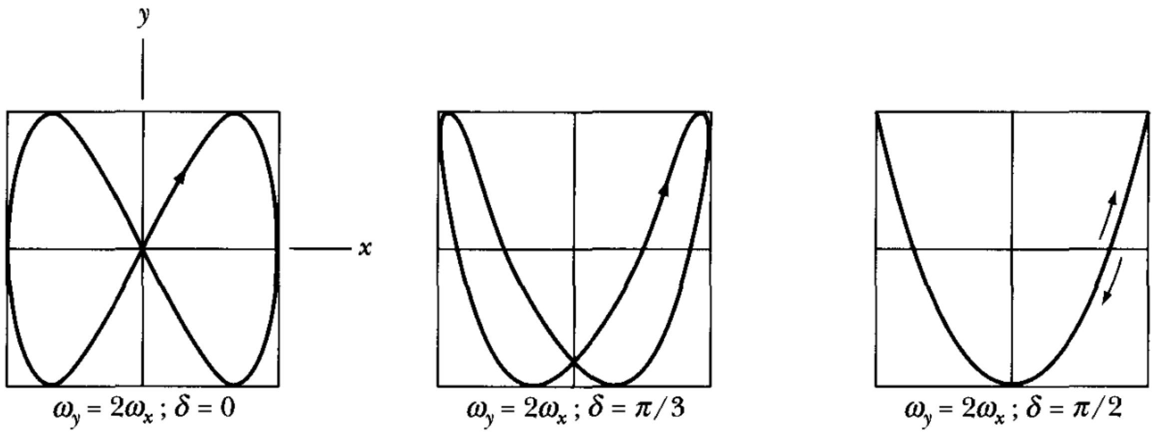


FIGURE 3-4 Lissajous curves depend strongly on the phase differences of the angle δ.

نوسانگر هماهنگ همسانگرد سه‌بعدی

بسامد زاویه ای یکسان

معادلهٔ دیفرانسیل حرکت، در حالت حرکت سه‌بعدی

$$\begin{cases} m\ddot{x} = -kx & \longrightarrow \quad x = A_1 \sin \omega t + B_1 \cos \omega t \\ m\ddot{y} = -ky & \longrightarrow \quad y = A_2 \sin \omega t + B_2 \cos \omega t \\ m\ddot{z} = -kz & \longrightarrow \quad z = A_3 \sin \omega t + B_3 \cos \omega t \end{cases}$$

شش ثابت انتگرال‌گیری با استفاده از مکان و سرعت اولیهٔ ذره تعیین می‌شوند

شکل برداری توابع حرکت:

$$\mathbf{r} = \mathbf{A} \sin \omega t + \mathbf{B} \cos \omega t$$

بردار

۱– A_1، A_2 و A_3 مؤلفه‌های $\mathbf{A}$

۲– B_1 ، B_2 و B_3 مولفه های بردار $\mathbf{B}$

۳ـ حرکت کاملاً در یک صفحه، صفحهٔ مشترک دو بردار ثابت $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$، صورت می‌گیرد

٤ـ مسیر ذره در این صفحه مانند حالت دوبعدی، بیضی است

To determine the path or the trajectory of the particle we eliminate t and express z in terms of x and y. The result is

$$z = K_1 x + K_2 y$$

نوسانگر ناهمسانگرد

نوسانگر همسانگرد در آن نیروی بازگرداننده مستقل از راستای جابه‌جایی است

نوسانگر ناهمسانگرد بزرگی مؤلفه‌های نیروی بازگرداننده به راستای جابه‌جایی بستگی داشته باشد

$$m\ddot{x} = -k_۱ x \qquad \omega_۱ = \sqrt{k_۱/m} \qquad x = A\cos(\omega_۱ t + \alpha)$$

$$m\ddot{y} = -k_۲ y \qquad \omega_۲ = \sqrt{k_۲/m} \qquad y = B\cos(\omega_۲ t + \beta)$$

$$m\ddot{z} = -k_۳ z \qquad \omega_۳ = \sqrt{k_۳/m} \qquad z = C\cos(\omega_۳ t + \gamma)$$

- شش ثابت انتگرال‌گیری در معادلات بالا به‌کمک شرایط اولیه تعیین می‌شوند
- نوسان کل ذره کاملاً در داخل جعبهٔ مکعب‌مستطیل‌شکل (به ابعاد $۲A$، $۲B$، و $۲C$) به مرکز مبدأ انجام می‌شود
- اگر در حالتی که $\omega_۱$، $\omega_۲$، و $\omega_۳$ متناسب باشند

$$\frac{\omega_۱}{n_۱} = \frac{\omega_۲}{n_۲} = \frac{\omega_۳}{n_۳}$$

که $n_۱$، $n_۲$، و $n_۳$ اعداد صحیح‌اند؛ مسیر، به‌نام شکل لیساژو، بسته خواهد بود

بعد از گذشت زمان $\underbrace{۲\pi n_۱/\omega_۱}_{n_1 T_1} = ۲\pi n_۲/\omega_۲ = ۲\pi n_۳/\omega_۳$ ذره به موضع اولیه‌اش مراجعت خواهد کرد

حرکت تکرار می‌شود

- اگر ωها متناسب نباشند، مسیر بسته نیست

مسیر، جعبهٔ مکعب‌مستطیل یادشده را به‌طور کامل پر می‌کند

then the path of the mass m in space is closed, and the motion is periodic. If (n_x, n_y, n_z) are chosen so that they have no common integral factor, then the period of the motion is

$$\tau = \frac{2\pi n_x}{\omega_x} = \frac{2\pi n_y}{\omega_y} = \frac{2\pi n_z}{\omega_z}. \tag{3.153}$$

During one period, the coordinate x makes n_x oscillations, the coordinate y makes n_y oscillations, and the coordinate z makes n_z oscillations, so that the particle returns at the end of the period to its initial position and velocity. In the two-dimensional case, if the path of the oscillating particle is plotted for various combinations of frequencies ω_x and ω_y, and various phases θ_x and θ_y, many interesting and beautiful patterns are obtained. Such patterns are called *Lissajous figures* (Fig. 3.28), and may be produced mechanically by a mechanism designed to move a pencil or other writing device according to Eqs. (3.151). Similar patterns may be obtained electrically on a cathode-ray oscilloscope by sweeping horizon-

ملاحظات مربوط به انرژی

انرژی پتانسیل نوسانگر هماهنگ یک‌بعدی $V(x) = \frac{1}{2}kx^2$

انرژی پتانسیل نوسانگر هماهنگ سه‌بعدی $V(x,y,z) = \frac{1}{2}k_1x^2 + \frac{1}{2}k_2y^2 + \frac{1}{2}k_3z^2$

$$F_x = -\frac{\partial V}{\partial x} = -k_1 x \quad , \quad F_y = -\frac{\partial V}{\partial y} = -k_2 y \quad , \quad F_z = -\frac{\partial V}{\partial z} = -k_3 z$$

حالت همسانگرد $k_1 = k_2 = k_3 = k$

$$V(x,y,z) = \frac{1}{2}k(x^2+y^2+z^2) = \frac{1}{2}kr^2$$

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kr^2 = E$$

مثال ۱.۴.۴

ذره‌ای به جرم m در دو بعد تحت تأثیر تابع انرژی پتانسیل، به‌صورت زیر، حرکت می‌کند:

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{2}k(x^2 + 4y^2)$$

با معلوم‌بودن شرایط اولیه در $t = 0$: $x = a$، $y = 0$، $\dot{x} = 0$، و $\dot{y} = v_0$، حرکت حاصل را بیابید.

پتانسیل نوسانگر ناهمسانگرد

$$\mathbf{F} = -\nabla V = -\mathbf{i}kx - \mathbf{j}4ky = m\ddot{\mathbf{r}} \quad \begin{cases} m\ddot{x} + kx = 0 \\ m\ddot{y} + 4ky = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} m\ddot{x} + kx = 0 \\ m\ddot{y} + 4ky = 0 \end{cases}$$

$$\omega_x = \sqrt{\frac{k}{m}} = \omega \qquad \omega_y = \sqrt{\frac{4k}{m}} = 2\omega$$

$$x = A_1 \cos \omega t + B_1 \sin \omega t$$

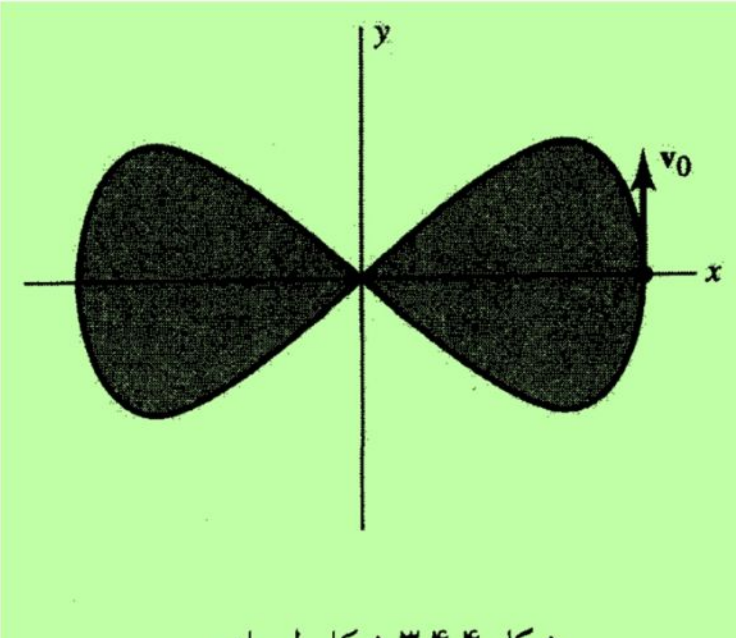
$$y = A_2 \cos 2\omega t + B_2 \sin 2\omega$$

مؤلفه‌های سرعت

$$\dot{x} = -A_1 \omega \sin \omega t + B_1 \omega \cos \omega t$$

$$\dot{y} = -2A_2 \omega \sin 2\omega t + 2B_2 \omega \cos 2\omega t$$

$$t = 0 \begin{cases} x = A_1 = a \\ y = A_2 = 0 \\ \dot{x} = B_1\omega = 0 \\ \dot{y} = 2B_2\omega = v_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_1 = a \\ A_2 = B_1 = 0 \\ B_2 = v_0 / 2\omega \end{cases}$$



شکل ۳.۴.۴ شکل لیساژو.

$$x = a \cos \omega t$$

$$y = \frac{v_0}{2\omega} \sin 2\omega t$$