

اللهم
الرحمن

فصل چهارم - بخش چهارم

حرکت ذره در میدان الکتریکی و مغناطیسی -
حرکت مقید

۵.۴ حرکت ذرات باردار در میدانهای الکتریکی و مغناطیسی

الف) حرکت ذره در حضور میدان الکتریکی

وقتی ذره باردار الکتریکی در مجاورت بارهای الکتریکی دیگر قرار گیرد، نیرویی بر آن وارد می‌آید. می‌گویند این نیروی \mathbf{F} ناشی از میدان الکتریکی \mathbf{E} است که از بارهای دیگر پدید آمده است.

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} \quad \longrightarrow \quad m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = q\mathbf{E}$$

$$m\ddot{x} = qE_x$$

$$m\ddot{y} = qE_y$$

$$m\ddot{z} = qE_z$$

مؤلفه‌های میدان توابعی از مختصات مکانی x ، y ، و z هستند

مؤلفه‌های میدان شامل t ← میدانهای متغیر با زمان

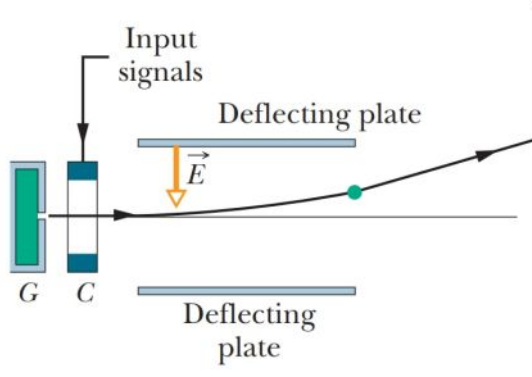
میدان الکتریکی ثابت یکنواخت:

$$E = E_z \text{ و } E_x = E_y = 0 \quad \longrightarrow \quad \vec{E} = E_z \hat{k}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} m\ddot{x} = qE_x \\ m\ddot{y} = qE_y \\ m\ddot{z} = qE_z \end{array} \right. \quad \longrightarrow \quad \begin{array}{l} \ddot{x} = 0 \\ \ddot{y} = 0 \\ \ddot{z} = \frac{qE}{m} = \text{ثابت} \end{array}$$

این معادلات دقیقاً با معادلات پرتابه در میدان گرانشی یکنواخت همسان‌اند.

اگر \dot{x} و \dot{y} هر دو در ابتدا صفر نباشند، مسیر سهمی است در غیر این صورت، مانند مسیر جسمی است که به طور قائم سقوط می‌کند.



Ink-jet printer. Drops shot from generator G receive a charge in charging unit C . An input signal from a computer controls the charge and thus the effect of field on where the drop lands on the paper.

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0 \quad \longrightarrow \quad \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & E_z \end{vmatrix} = 0$$

نیروی الکتریکی نیروی پایسته

\mathbf{E} ناشی از بارهای ساکن

حرکت در چنین میدانی پایسته

تابع پتانسیل Φ چنان وجود دارد که $\mathbf{E} = -\nabla\Phi$

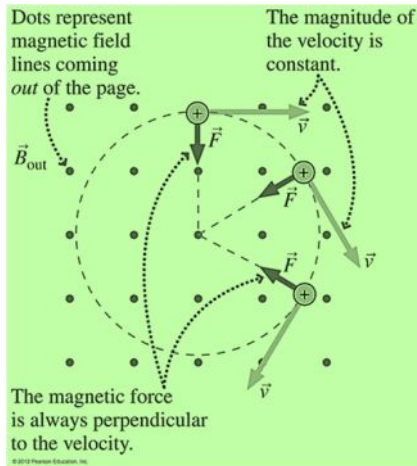
انرژی پتانسیل ذره‌ای به بار q در چنین میدانی $q\Phi$

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + q\Phi \quad \text{انرژی کل ثابت}$$

(ب) حرکت ذره در حضور میدان مغناطیسی

v سرعت و q بار ذره

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \longrightarrow m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = q(\mathbf{v} \times \mathbf{B})$$



شتاب ذره همواره بر جهت حرکت عمود است

مؤلفه مماسی شتاب (\dot{v}) صفر است

ذره با سرعت ثابت حرکت می‌کند

حتی اگر \mathbf{B} تابع متغیری از مکان \mathbf{r} باشد، تا هنگامی که با زمان تغییر نکند، باز هم این موضوع صادق است

مثال ۱.۵.۴

حرکت ذره باردار را در میدان مغناطیسی ثابت یکنواخت بررسی می‌کنیم. فرض کنید محور z

را در جهت میدان اختیار کنیم؛ یعنی خواهیم نوشت:

$$\mathbf{B} = kB \hat{z}$$

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = q(\mathbf{v} \times kB \hat{z}) = qB \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{i} \ddot{x} + \mathbf{j} \ddot{y} + \mathbf{k} \ddot{z} = qB(\mathbf{i} \dot{y} - \mathbf{j} \dot{x})$$

$$m \ddot{x} = qB \dot{y}$$

$$m \ddot{y} = -qB \dot{x}$$

$$\ddot{z} = 0$$

معادلاتی نیستند که از هم مجزا باشند:

$$m\ddot{x} = qB\dot{y} \rightarrow m \int \ddot{x} dt = qB \int \dot{y} dt \rightarrow m\dot{x} = qBy + c_1$$

$$m\ddot{y} = -qB\dot{x} \rightarrow m \int \ddot{y} dt = -qB \int \dot{x} dt \rightarrow m\dot{y} = -qBx + c_2$$

$$\ddot{z} = 0 \rightarrow \int \ddot{z} dt = 0 \rightarrow \dot{z} = \text{ثابت} = \dot{z}_0$$

تغییر متغیر $\omega = qB/m$

$$\dot{x} = \omega y + C_1 \quad \dot{y} = -\omega x + C_2 \quad \dot{z} = \dot{z}_0$$

$$C_2 = c_2/m \text{ و } C_1 = c_1/m$$

$$\dot{x} = \omega y + C_1 \xrightarrow{\text{مشتق گیری}} \ddot{x} = \omega \dot{y} = \omega(-\omega x + C_2)$$

$$\rightarrow \ddot{x} = -\omega^2 x + \omega C_2 \rightarrow \ddot{x} = -\omega^2 x + \omega^2 \frac{C_2}{\omega}$$

معادله مجزای بر حسب x $\ddot{x} + \omega^2 x = \omega^2 a$ $a = C_2/\omega$

جواب معادله $x = a + A \cos(\omega t + \theta_0)$

$$\left. \begin{array}{l} \dot{x} = -A\omega \sin(\omega t + \theta_0) \\ m\dot{y} = -qBx + c_2 \end{array} \right\} \begin{array}{l} y = b - A \sin(\omega t + \theta_0) \\ b = -C_1/\omega \end{array}$$

شکل مسیر حرکت

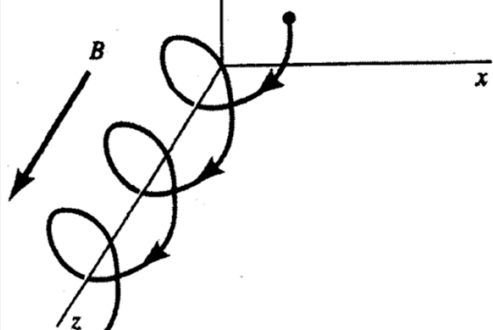
$$\left. \begin{aligned} x &= a + A \cos(\omega t + \theta_0) \\ y &= b - A \sin(\omega t + \theta_0) \end{aligned} \right\} (x - a)^2 + (y - b)^2 = A^2$$

تصویر مسیر حرکت بر صفحه xy دایره‌ای است به شعاع A و به مرکز (a, b)

سرعت در جهت z ثابت $\dot{z} = \text{ثابت}$

مسیر مارپیچ است

محور مارپیچی در امتداد میدان مغناطیسی واقع است



شعاع مارپیچ

$$x = a + A \cos(\omega t + \theta_0)$$

$$\dot{x} = -A\omega \sin(\omega t + \theta_0)$$

$$y = b - A \sin(\omega t + \theta_0)$$

$$\dot{y} = -A\omega \cos(\omega t + \theta_0)$$

$$\underbrace{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}_{v_1^2} = A^2 \omega^2 = A^2 \left(\frac{qB}{m} \right)^2$$

$$\text{شعاع مارپیچ } A = \frac{v_1}{\omega} = v_1 \frac{m}{qB}$$

اگر مؤلفه سرعتی در جهت محور z نداشته باشد، مسیر عبارت خواهد بود از دایره‌ای به شعاع A

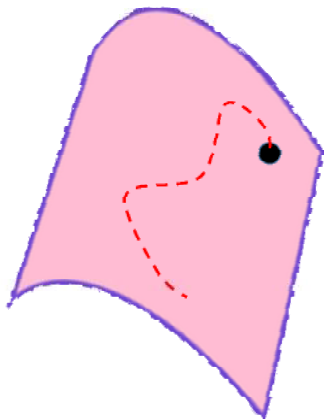
A با سرعت v_1 تناسب مستقیم دارد

بسامد زاویه‌ای حرکت در مسیر دایره‌ای از سرعت مستقل است

بسامد زاویه‌ای ω را بسامد سیکلوترونی می‌گویند

۶.۴ حرکت مقید ذره

وقتی ذره متحرک از لحاظ هندسی محدود می‌شود، به این معنی که باید روی روی سطح یا منحنی تعریف شده معینی باقی بماند، می‌گویند حرکت مقید است



مثال ۱: قطعه یخی که داخل ظرف نیمکره‌ای

مثال ۲:

دانه تسبیحی که روی سیمی می‌لغزد

قیدها ممکن است ثابت باشند یا متحرک

معادله انرژی در مورد قیدهای هموار

نیروی کل وارد بر ذره متحرک تحت تأثیر قید را می‌توان به صورت جمع برداری نیروی خارجی خالص \mathbf{F} و نیروی قیدی \mathbf{R} بیان کرد

\mathbf{R} = واکنش عامل مقیدکننده روی ذره

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F} + \mathbf{R}$$

ضرب اسکالر طرفین این معادله در \mathbf{v}

$$\mathbf{v} \cdot m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{R} \cdot \mathbf{v}$$

در مورد قید هموار، مثلاً سطح بدون اصطکاک، واکنش \mathbf{R} بر سطح یا بر منحنی عمود است، در حالی که \mathbf{v} بر سطح مماس است. از این رو، $\mathbf{R} \cdot \mathbf{v}$ بر \mathbf{v} عمود است

$\mathbf{R} \cdot \mathbf{v}$ صفر می‌شود

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} + \underbrace{\mathbf{R} \cdot \mathbf{v}}_0$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \right) = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}$$

اگر \mathbf{F} پایسته باشد می‌توانیم از آن انتگرال بگیریم

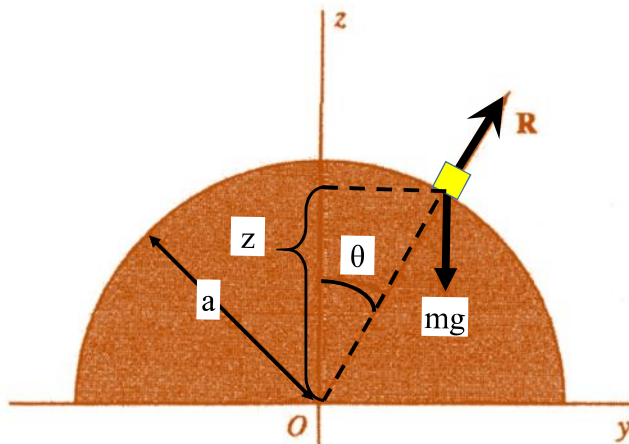
حتی اگر ذره مقید باشد که روی سطح یا منحنی حرکت کند، انرژی کل آن ثابت باقی می‌ماند

$$\frac{1}{2} m v^2 + V(x, y, z) = \text{ثابت} = E$$

این حالت برای قیدهای بدون اصطکاک برقرار باشد.

مثال

ذره‌ای بر بالاترین نقطه کره همواری به شعاع a قرار داده شده است. اگر وضعیت آن اندکی به هم بخورد، در چه نقطه‌ای از کره جدا می‌شود؟



$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = m\mathbf{g} + \mathbf{R}$$

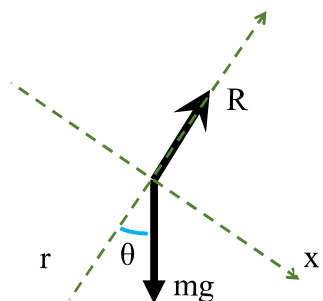
$$\frac{1}{2} m v^2 + mgz = E$$

بررسی انرژی مکانیکی:

شرایط اولیه (به ازای $z = a$, $v = 0$) $\longrightarrow E = mga$

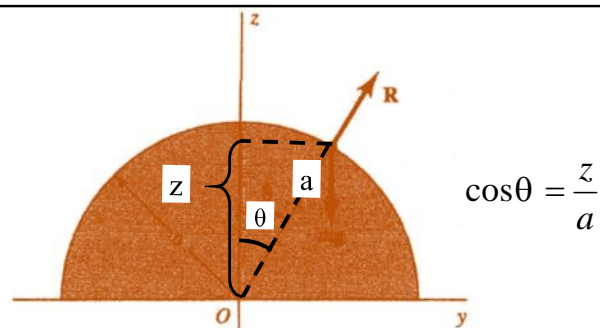
$$E(z=a) = E(z) \rightarrow \frac{1}{2}mv_0^2 + mga = \frac{1}{2}mv^2 + mgz$$

$$0 + mga = \frac{1}{2}mv^2 + mgz \rightarrow v^2 = 2g(z-a) \quad \textcircled{1}$$



تحلیل نیروها:

$$\begin{cases} r & -mg \cos\theta + R = -m \frac{v^2}{a} \quad \textcircled{2} \\ x & mg \sin\theta = ma_x \end{cases}$$



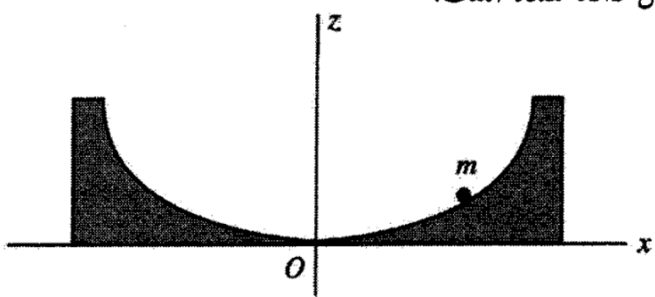
$$\textcircled{2} \quad -mg \cos\theta + R = -m \frac{v^2}{a} \rightarrow -mg \frac{z}{a} + R = -m \frac{v^2}{a} \quad \textcircled{3}$$

$$\textcircled{1} \quad \textcircled{3} \quad R = mg \frac{z}{a} - \frac{mv^2}{a} = mg \frac{z}{a} - \frac{m}{a} 2g(a-z)$$

$R=0$ در لحظه جدا شدن جسم از سطح نیم کره $\longrightarrow z = \frac{2}{3}a = a$

مثال ۲.۶.۴ حرکت مقید روی چرخزاد (سیکلوئید)

ذره‌ای لغزان را تحت تأثیر نیروی گرانش در داخل یک تشت هموار چرخزادی در نظر بگیرید. شکل ۲.۶.۴، به وسیله معادلات پارامتری زیر نشان داده شده است:



$$x = A(2\phi + \sin 2\phi)$$

$$z = A(1 - \cos 2\phi)$$

که ϕ پارامتر است. اکنون معادله انرژی حرکت، به فرض آنکه حرکتی در امتداد y وجود نداشته

باشد، عبارت است از

$$E = \frac{m}{2}v^2 + V(z) = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{z}^2) + mgz$$

$$x = A(2\phi + \sin 2\phi)$$

$$z = A(1 - \cos 2\phi)$$



$$\dot{x} = 2A\dot{\phi}(1 + \cos 2\phi)$$

$$\dot{z} = 2A\dot{\phi} \sin 2\phi$$

$$E = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{z}^2) + mgz$$




$$E = 4mA^2\dot{\phi}^2 \underbrace{(1 + \cos 2\phi)}_{2\cos^2\phi} + mgA \underbrace{(1 - \cos 2\phi)}_{2\sin^2\phi}$$



$$E = 4mA^2\dot{\phi}^2 \cos^2\phi + 2mgA \sin^2\phi$$

تغییر متغیر $s = 4A \sin \phi$

$$E = \frac{1}{2} m A^2 \dot{\phi}^2 \cos^2 \phi + 2mgA \sin^2 \phi$$



$$E = \frac{m}{2} \dot{s}^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{mg}{4A} \right) s^2$$

این معادله دقیقاً همان معادله انرژی حرکت هماهنگ برحسب تک‌متغیر s است