

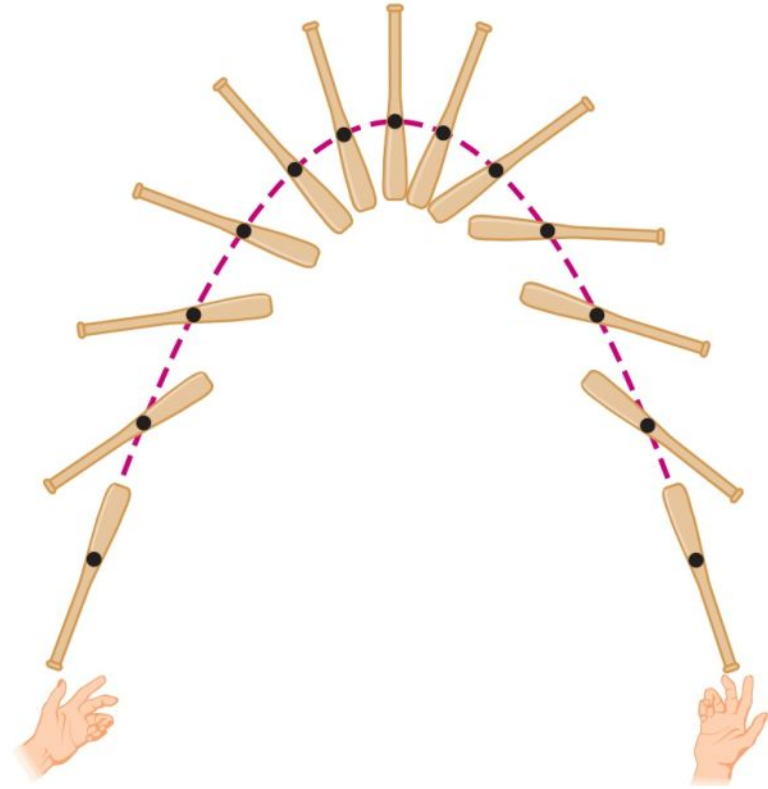


فصل نهم – قسمت اول

تعریف مرکز جرم

مرکز جرم

Richard Megna/Fundamental Photographs



مرکز جرم (Central mass):

رفتار مرکز جرم بیانگر رفتار کلیت یک سیستم ذرات است. یعنی به جای آنکه حرکت تک تک ذرات سیستم را بررسی کنیم می توان حرکت مرکز جرم با جرمی معادل با جرم تمامی ذرات را در نظر گرفت.

یافتن مرکز جرم یک سیستم ذرات = معدل گیری از سیستم ذرات

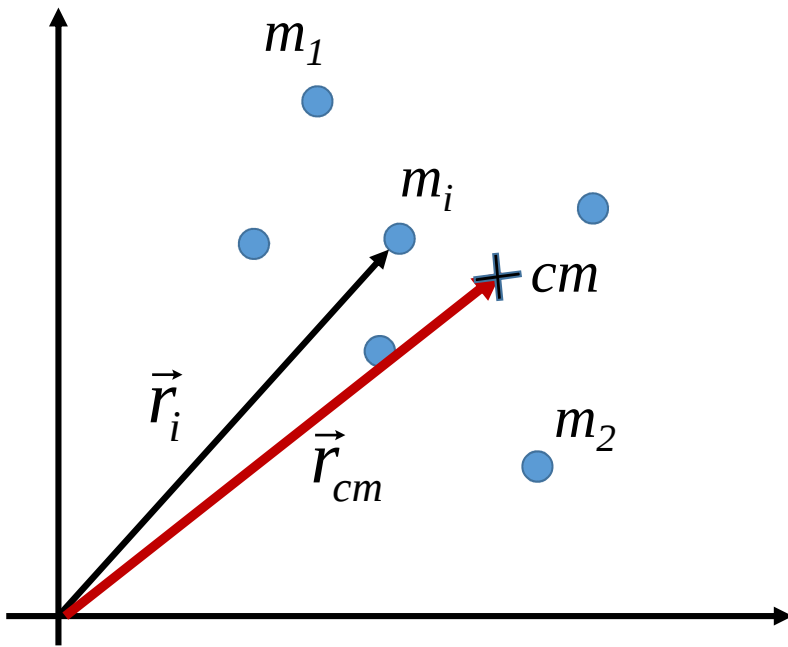
مرکز جرم سیستم شامل مجموعه ای از ذرات گسسته

$$\vec{r}_{cm} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 + \dots}{m_1 + m_2 + \dots}$$

$$\vec{r}_{cm} = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^N m_i} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i$$

$$M = \sum_{i=1}^N m_i$$

$$\vec{r}_i = x_i \hat{i} + y_i \hat{j} + z_i \hat{k}$$

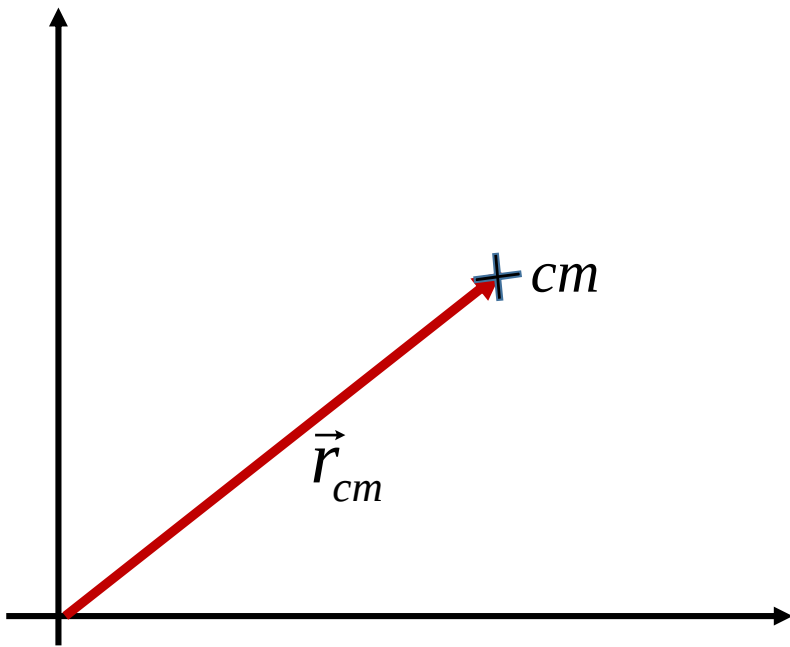


$$\vec{r}_{\text{com}} = x_{\text{com}}\hat{\mathbf{i}} + y_{\text{com}}\hat{\mathbf{j}} + z_{\text{com}}\hat{\mathbf{k}}$$

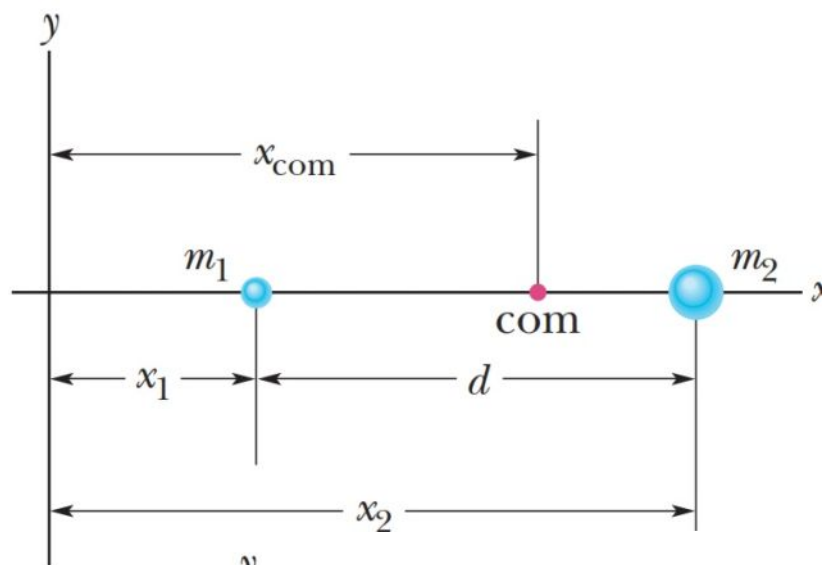
$$x_{cm} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i x_i$$

$$y_{cm} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i y_i$$

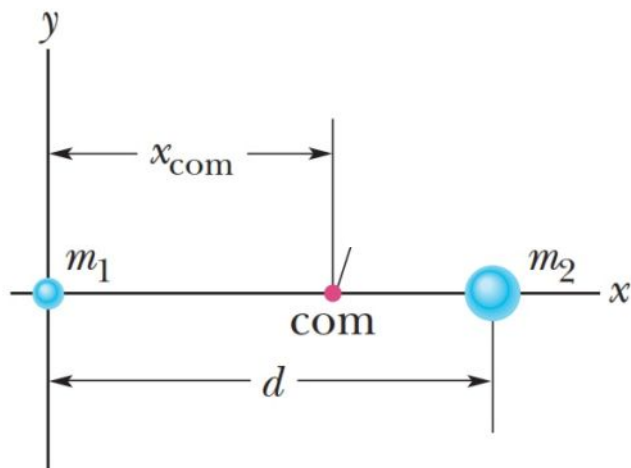
$$z_{cm} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i z_i$$



مرکز جرم سیستم دو ذره ای



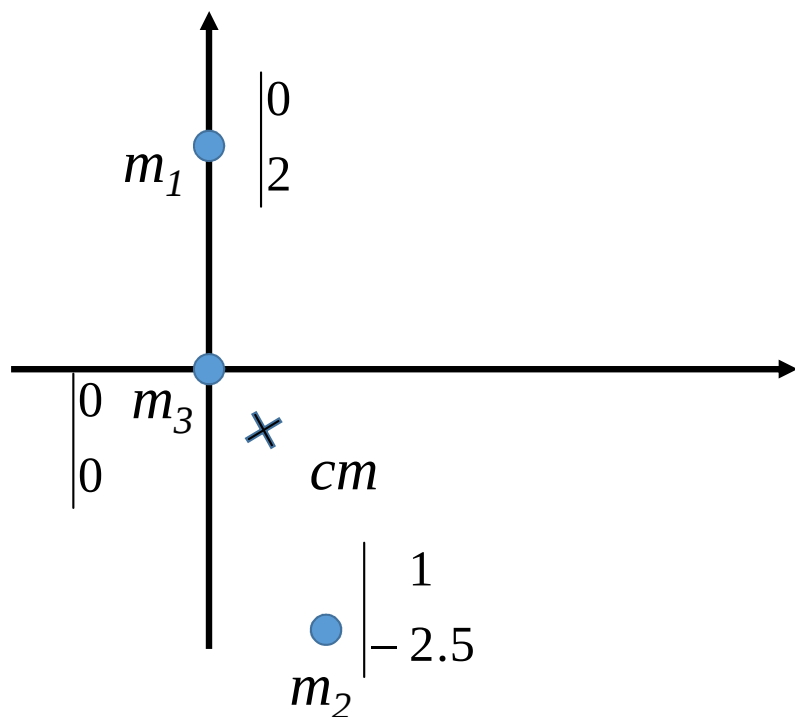
$$x_{\text{com}} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}$$



$$x_{\text{com}} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} d$$

مثال

مرکز جرم سیستم سه ذره ای زیر را بدست آورید ($m_3 = 3\text{kg}$ و $m_2 = 2\text{kg}$ ، $m_1 = 1\text{kg}$)



$$x_{cm} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i x_i$$
$$= \frac{1 \times 0 + 2 \times 1 + 3 \times 0}{1 + 2 + 3} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$y_{cm} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i y_i$$
$$= \frac{1 \times 2 + 2 \times -2.5 + 3 \times 0}{1 + 2 + 3} = \frac{-3}{6} = -\frac{1}{2}$$

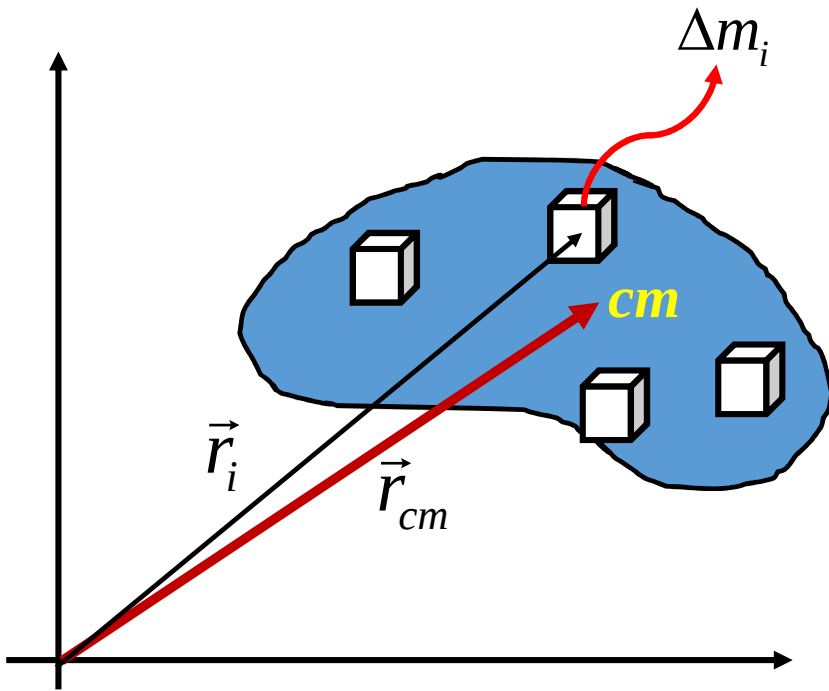
مرکز جرم جسم صلب (سیستم پیوسته)

$$\vec{r}_{cm} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N \Delta m_i \vec{r}_i$$

برای محاسبه دقیق $\Delta m \rightarrow 0$ یا $N \rightarrow \infty$

$$\vec{r}_{cm} = \frac{1}{M} \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N \Delta m_i \vec{r}_i$$

$$\vec{r}_{cm} = \frac{1}{M} \int \vec{r} dm$$



$$\vec{r}_{\text{com}} = x_{\text{com}}\hat{\mathbf{i}} + y_{\text{com}}\hat{\mathbf{j}} + z_{\text{com}}\hat{\mathbf{k}}$$

$$x_{\text{com}} = \frac{1}{M} \int x \, dm$$

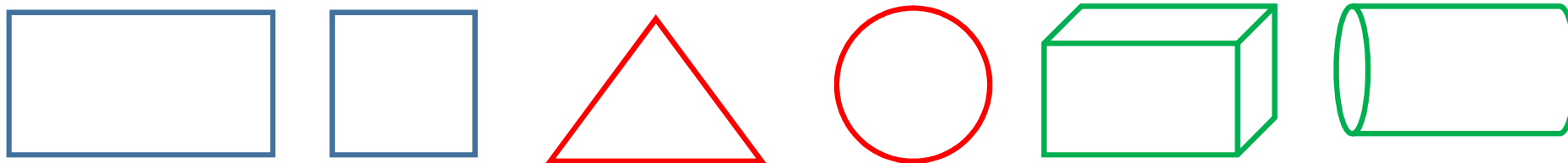
$$y_{\text{com}} = \frac{1}{M} \int y \, dm$$

$$z_{\text{com}} = \frac{1}{M} \int z \, dm$$

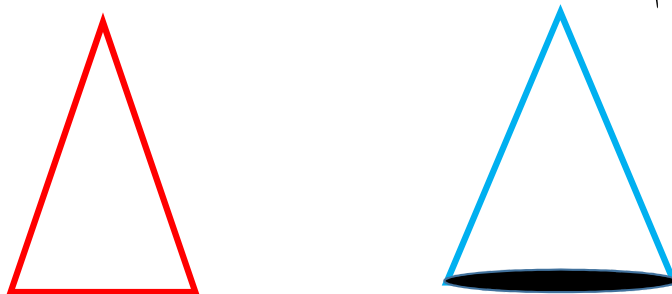
نکات

۱- رابطه انتگرالی برای محاسبه مرکز جرم اجسام مختلف با هر هندسه ای کاربرد دارد

۲- برای اجسام دارای مرکز تقارن و همگن، مرکز جرم همان مرکز تقارن است



۳- برای اجسام دارای محور تقارن، مرکز جرم روی محور تقارن قرار دارد



۴- اگر مرکز جرم مبدا مختصات باشد آنگاه

$$\vec{r}_{cm} = 0 \rightarrow \begin{cases} \sum m_i \vec{r}_i = 0 \\ \int \vec{r} dm = 0 \end{cases}$$

۵- در محاسبه انتگرال مرکز جرم :

المان dm و r با توجه به توزیع جرم تعریف می شوند

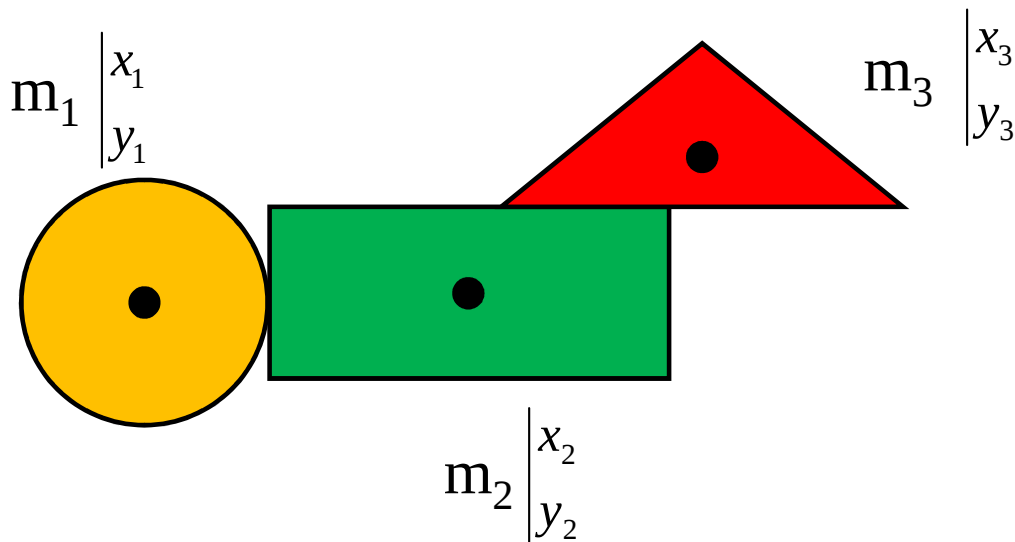
حدود انتگرال براساس حدود جسم مشخص می شود

۶- انواع توزیع های جرم:

خطی - سطحی - حجمی

۷- اجسام مرکب (شامل چند جسم با مرکز جرم مشخص):

در چنین سیستم های اجسام؛ جرم هر بخش در مرکز جرمش در نظر گرفته شده و به صورت یک جرم نقطه ای در نظر گرفته می شود. آنگاه مرکز جرم بین نقاط گسسته را بدست می آوریم



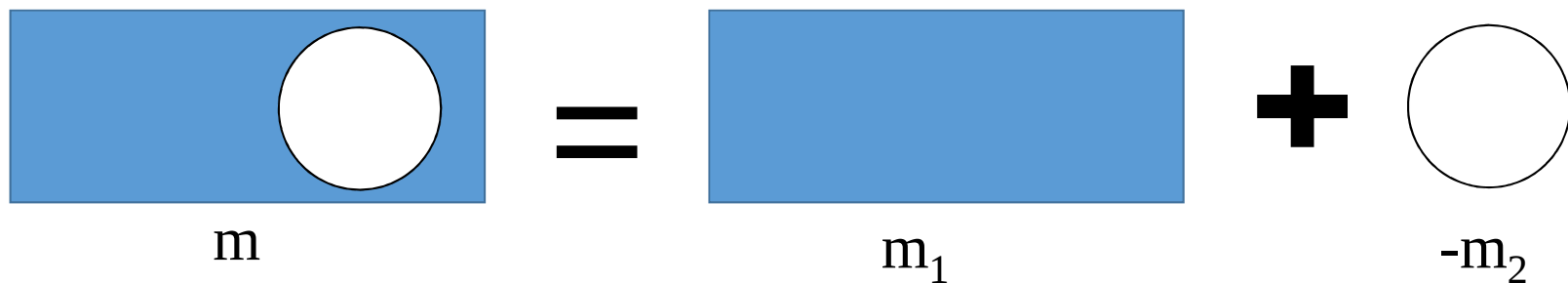
$$x_{cm} = \frac{m_1 \times x_1 + m_2 \times x_2 + m_3 \times x_3}{m_1 + m_2 + m_3}$$

$$y_{cm} = \frac{m_1 \times y_1 + m_2 \times y_2 + m_3 \times y_3}{m_1 + m_2 + m_3}$$

۸- اگر از درون یک جسم با مرکز جرم مشخص بخشی با هندسه و مرکز جرم مشخص خارج شود آنگاه برای محاسبه مرکز جرم حاصل به صورت زیر عمل می شود:

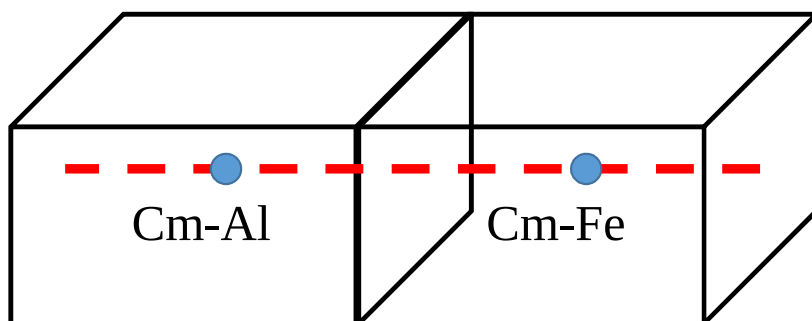
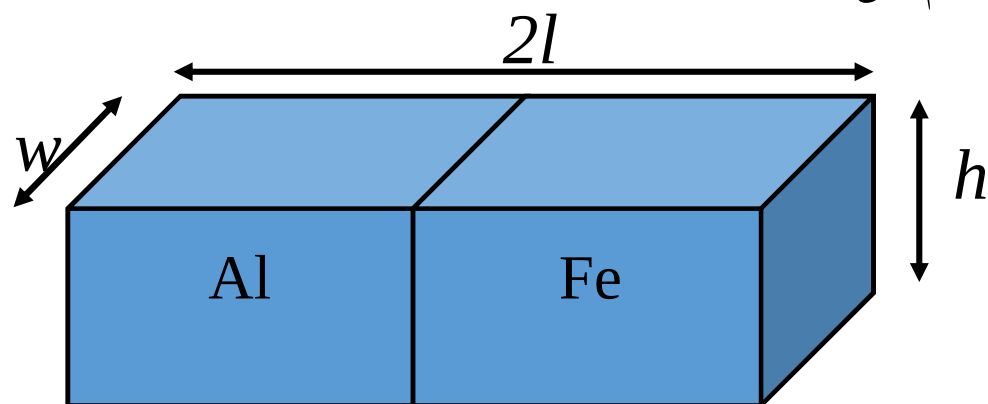
جرم جسم کامل (بدون حذف) با علامت مثبت در مرکز آن در نظر گرفته می شود $(+ m_1, r_1)$
 جرم جسم خارج شده با علامت منفی در مرکز جرم آن در نظر گرفته می شود $(- m_2, r_2)$

$$\vec{R}_{cm} = \frac{1}{m_1 + (-m_2)} (m_1 \vec{r}_1 + (-m_2) \vec{r}_2)$$

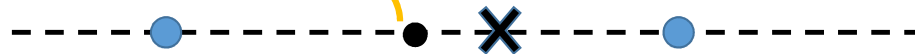


مثال:

حجمی شامل دو تیغه مستطیل شکل با ابعاد یکسان $l \times w \times h$ داریم. یکی از قطعات از جنس آلومینیوم و دیگری از جنس آهن است. مرکز جرم حجم کل را بدست آورید.



مبدأ مختصات



Cm-Al

Cm-Fe

$$x_{Al} = -\frac{l}{2}$$

$$x_{Fe} = +\frac{l}{2}$$

$$m_{Al} = \rho_{Al} lwh$$

$$m_{Fe} = \rho_{Fe} lwh$$

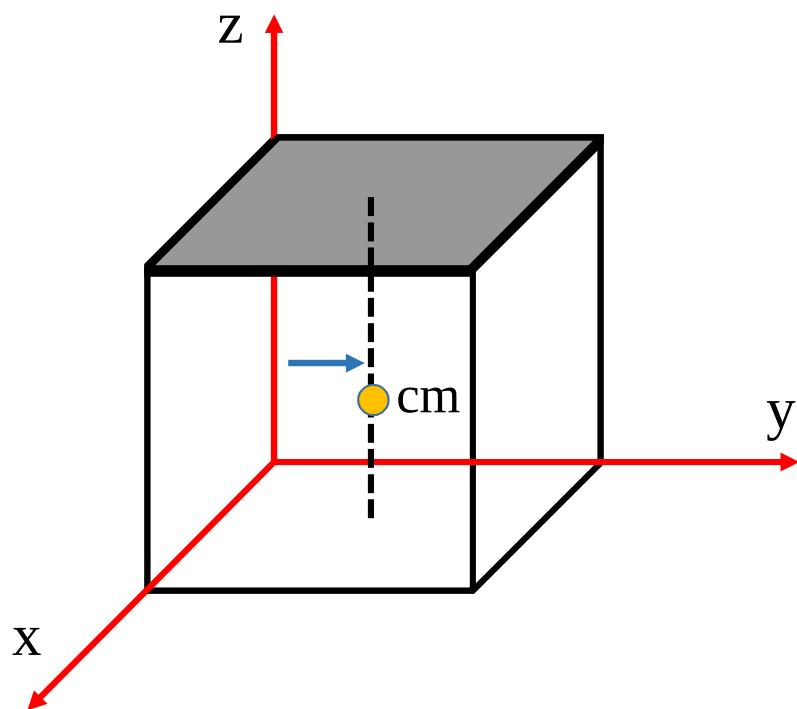
$$x_{cm} = \frac{m_1 \times x_1 + m_2 \times x_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_{Al} \times x_{Al} + m_{Fe} \times x_{Fe}}{m_{Al} + m_{Fe}}$$

مثال:

مکعبی با ابعاد یکسان $a \times a \times a$ داریم. سقف آن برداشته شده است. مرکز جرم کل مکعب را بدست آورید.

چگالی مقوای بکار رفته برای ساخت مکعب σ است

وجه بالایی - مکعب کامل = مکعب بدون سقف



$$m_1 = 6a^2\sigma$$

$$\left| \begin{array}{c} a/2 \\ a/2 \\ a/2 \end{array} \right|$$

$$m_2 = -a^2\sigma$$

$$\left| \begin{array}{c} a/2 \\ a/2 \\ a \end{array} \right|$$

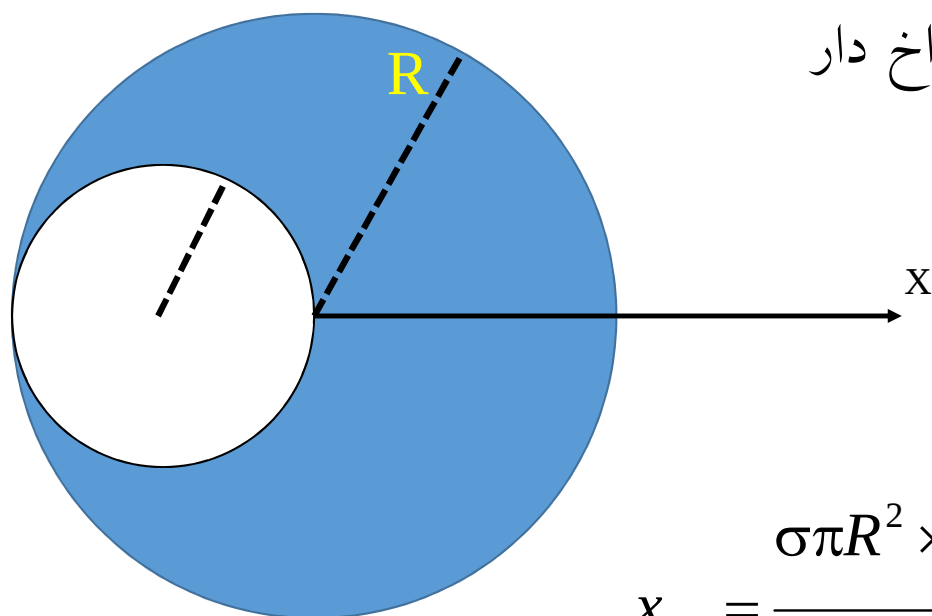
$$x_{cm} = \frac{m_1 \times x_1 + m_2 \times x_2}{m_1 + m_2} = \frac{6a^2\sigma \times \cancel{a/2} + (-a^2\sigma) \times \cancel{a/2}}{6a^2\sigma + (-a^2\sigma)} = \frac{a}{2}$$

$$y_{cm} = \frac{m_1 \times y_1 + m_2 \times y_2}{m_1 + m_2} = \frac{6a^2\sigma \times \cancel{a/2} + (-a^2\sigma) \times \cancel{a/2}}{6a^2\sigma + (-a^2\sigma)} = \frac{a}{2}$$

$$z_{cm} = \frac{m_1 \times z_1 + m_2 \times z_2}{m_1 + m_2} = \frac{6a^2\sigma \times \cancel{a/2} + (-a^2\sigma) \times a}{6a^2\sigma + (-a^2\sigma)} = \frac{2a}{5}$$

مثال:

از درون صفحه دایره ای شکل به شعاع R دایره ای به شعاع $R/2$ به صورت زیر در آورده شده است. مرکز جرم قطعه را بدست آورید.



دایره کوچک - دایره کامل بزرگ = دایره سوراخ دار

$$m_1 = \sigma \pi R^2$$
$$x_1 = 0$$

$$m_2 = -\frac{\sigma \pi R^2}{4}$$
$$x_2 = -\frac{R}{2}$$

$$x_{cm} = \frac{\sigma \pi R^2 \times 0 + \left(-\frac{\sigma \pi R^2}{4}\right) \times -\frac{R}{2}}{\sigma \pi R^2 + \left(-\frac{\sigma \pi R^2}{4}\right)} = \frac{R}{6}$$