فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
سال ۳۹، شمارهٔ ۶۷ (پاییز و زمستان ۱۳۹۹) صص. ۱۰۷ تا ۱۲۳

فضاهای ضرب داخلی: از اتحاد متوازی‌الاضلاع تا سه‌گانهٔ جیمز

مهدی دهقانی

چکیده

ارتباط مفاهیم هندسیِ طول، زاویه و تعامد در فضاهای اُقلیدسیِ دو بُعدی (سه‌بُعدی) شناخته شده است امّا در فضاهای اقلیدسی با بُعد بالاتر، مفهومِ ضرب داخلی است که ارتباط آنها را معلوم می‌کند. در طول قرن بیستم، تلاش‌های بسیاری برای یافتن شرایط معادلی که تحت آنها نرم یک فضای نرمدار از یک ضرب داخلی القا شود، صورت گرفت. این تلاش‌ها منجر به ارائهٔ مشخصه‌سازی‌های بسیاری از فضاهای ضرب داخلی شده است. در این مقاله، بررسی می‌کنیم که چگونه اتحاد متوازی‌الاضلاع و قضیهٔ تصویر کاکوتانی به منشأ بسیاری از مشخصه‌سازی‌های فضاهای ضرب داخلی تبدیل شده‌اند. سپس ضمن مرور چگونگی گسترش مفهوم تعامد به فضاهای نرمدار، تشریح می‌کنیم که چگونه تعامد در فضاهای نرمدار به ابزاری مهم برای شناسایی ویژگی‌های هندسی فضاهای نرمدار و توصیف فضاهای ضرب داخلی تبدیل شده است. در این راستا، تعامد بِرکُف-جیمز را معرفی و علاوه بر مرور ویژگی‌های اساسی آن، مشخصه‌سازی‌های فضاهای ضرب داخلی را که بر اساس این تعامد به‌دست آمده است، بازخوانی می‌کنیم.

۱. سرآغاز

هندسهٔ فضاهای اقلیدسیِ $\mathbb{R}^n$ ($n \geq ۲$)، بر دو مفهوم طول و زاویه استوار است که در بُعد ۳ و کمتر، شهود هندسیِ مناسبی از این دو در دست داریم. در فضاهای اقلیدسی با بُعد بالاتر، ابزاری جبری به‌نام ضرب داخلی برای توصیف ویژگی‌های هندسیِ این فضاها به‌کار برده می‌شود. این مفهوم در اوایل قرن بیستم

عبارات و کلمات کلیدی. فضای ضرب داخلی؛ فضای نرمدار؛ اتحاد متوازی‌الاضلاع؛ تعامد بِرکُف-جیمز؛ تعامد فیثاغورسی؛ تعامد متساوی‌الساقین؛ فضاهای نرمدار اکیداً محدّب.

توسط داوید هیلبرت[۱]، ریاضیدان مشهور آلمانی مطرح شد. او در فرآیند حل معادلات انتگرالی مفهوم ضرب داخلی را به فضاهای برداری از بعدِ نامتناهی گسترش داد. موریس فرِشه[۲]، آنالیزدان فرانسوی، در سال ۱۹۰۶ در رسالهٔ دکتری‌اش با معرفی فضاهای متری، مفهوم فاصله در فضاهای اقلیدسی را معرفی کرد. یکسال بعد، او به همراه اِرهارت اشمیت[۳] که یکی از شاگردان هیلبرت بود، مطالعات هیلبرت را دنبال کردند. آنها فضاهای ضرب داخلی را به‌عنوان تعمیمی از فضاهای اقلیدسی معرفی کردند. همچنین موفق شدند مفاهیم هندسی مانند طول، زاویه و تعامد را در فضاهای ضرب داخلی معرفی کنند. شکل امروزیِ نظریهٔ فضاهای ضرب داخلی و فضاهای هیلبرت که با آن آشنایی داریم، توسط جان فون‌نویمان[۴] [۲۷] در فاصلهٔ سال‌های ۱۹۲۰ تا ۱۹۳۰ ارائه شده است. ضرب داخلی بردارهای $x = (x_1, \dots, x_n)$ و $y = (y_1, \dots, y_n)$ در $\mathbb{R}^n$ با دستور

$$\langle x, y\rangle := \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$$

تعریف می‌شود. آگوستن لویی کُشی[۵] در سال ۱۸۲۱ ثابت کرد که برای هر دو بردار $x, y \in \mathbb{R}^n$ نامساوی

$$|\langle x, y\rangle| \le \|x\|\|y\| \tag{۱.۱}$$

برقرار است. در این نامساوی، $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle} = \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right)^{\frac{1}{2}}$ طول بردار x است. این نامساوی به ما کمک می‌کند تا مفهوم مجرّد زاویهٔ بین دو بردار را نیز تعریف کنیم. به‌عبارت دقیق‌تر، اگر θ زاویهٔ بین دو بردار x و y باشد، آن‌گاه

$$\cos\theta = \frac{\langle x, y\rangle}{\|x\|\|y\|}.$$

در حالت کلی‌تر، نگاشت

$$\langle \cdot, \cdot\rangle : X \times X \to \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto \langle x, y\rangle$$

یک *ضرب داخلی* روی فضای برداریِ حقیقی X نامیده می‌شود اگر شرایط زیر برقرار باشند:

(آ) $\langle x, x\rangle \ge 0$ و $\langle x, x\rangle = 0$ اگر و تنها اگر $x = 0$؛

(ب) به‌ازای هر $x, y \in X$، $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$؛

(پ) به‌ازای هر $x, y \in X$ و هر $\alpha \in \mathbb{R}$، $\langle \alpha x, y\rangle = \alpha\langle x, y\rangle$؛

(ت) به‌ازای هر $x, y, z \in X$، $\langle x + y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$.

---

[1] David Hilbert [2] Maurice Fréchet [3] Erhard Schmidt [4] John von Neumann [5] Augustin-Louis Cauchy

در این صورت، جفت $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ فضای ضرب داخلی نامیده می‌شود.

مفهوم نرم در فضاهای برداری، به‌عنوان تعمیم طبیعیِ طول بردارها در فضاهای اقلیدسی توسط اِستفان باناخ[۱] در سال ۱۹۳۲ معرفی شد (البته اولین تلاش‌ها در این زمینه به‌طور مستقل توسط هانس هان[۲] و باناخ در سال ۱۹۲۲ صورت گرفت. بعد از آن، باناخ در کتاب معروف خودش این نظریه را شرح و بسط داد). برای مشاهدهٔ شرح مبسوطی از زندگی باناخ و فعالیت‌های علمی او، مطالعهٔ [۱، ۹] و منابع مورد اشاره در آنها، پیشنهاد می‌شود. فرض کنیم X یک فضای برداری حقیقی باشد. نگاشت $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ که به هر $x \in X$ مقدار $\|x\|$ را نسبت می‌دهد، یک *نرم* روی X نامیده می‌شود اگر در شرایط زیر صدق کند:

(آ) به‌ازای هر $x \in X$، $\|x\| \geq 0$؛

(ب) $\|x\| = 0$ اگر و تنها اگر $x = 0$؛

(پ) به‌ازای هر $x \in X$ و هر $\lambda \in \mathbb{R}$، $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$؛

(ت) نامساوی مثلثی: به‌ازای هر $x, y \in X$، $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

در این صورت، دوتایی $(X, \|\cdot\|)$ فضای نرمدار نامیده می‌شود.

کارل هرمان آماندوس شوارتس[۳] در سال ۱۸۸۸ نامساوی (۱.۱) را به مجموع‌های نامتناهی و توابع مربع‌-انتگرال‌پذیر گسترش داد. با الهام از ایدهٔ شوارتس، ثابت می‌شود که نامساوی (۱.۱) برای هر دو بردار در فضاهای ضرب داخلی نیز برقرار است. با توجه به این سابقه، (۱.۱) را نامساوی کُشی-شوارتس نامیده‌اند. برای کامل شدن بحث، اجازه دهید اثبات این نامساوی در فضاهای ضرب داخلی را نیز خاطرنشان کنیم. اگر x و y دو بردار ناصفر (اگر x یا y بردار صفر باشد، آن‌گاه دو طرف (۱.۱) صفر خواهد شد) در فضای ضرب داخلی $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ باشند، آن‌گاه با فرضِ $x' = \frac{x}{\|x\|}$ و $y' = \frac{y}{\|y\|}$، خواهیم داشت

$$0 \leq \langle x' \pm y', x' \pm y' \rangle = \|x'\|^2 \pm 2\langle x', y' \rangle + \|y'\|^2 = 2 \pm 2\langle x', y' \rangle$$

که این نتیجه می‌دهد $|\langle x', y' \rangle| \leq 1$ و لذا $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\|\|y\|$.

همان‌طور که مشاهده کردیم، طول یک بردار در فضاهای اقلیدسی، برابر مجذور ضرب داخلی آن بردار در خودش است. در حالت کلی‌تر، از نامساوی کُشی-شوارتس نتیجه می‌شود که رابطهٔ $\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$ $(x \in X)$ روی فضای ضرب داخلی $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ یک نرم تعریف می‌کند که به *نرم القایی* از ضرب داخلی مشهور است. ساختار هندسیِ فضاهای ضرب داخلی بسیار شبیه به فضاهای اقلیدسی است امّا هر ریاضیدانی که هندسهٔ فضاهای نرمدار را مطالعه می‌کند، به‌تجربه دریافته است که بسیاری از ویژگی‌های

[۱] Estefan Banach [۲] Hans Hahn [۳] Karl Hermann Amandus Schwarz

هندسیِ فضاهای اقلیدسی (فضاهای ضرب داخلی) در فضاهای نرمداری که نرم آنها از یک ضرب داخلی القا نمی‌شود (مثال ۱.۱ را ببینید)، برقرار نیستند. از این‌رو پس از معرفی فضاهای نرمدار به‌وسیله باناخ، ریاضیدانان بسیاری برای به‌دست آوردن شرایطی که تحت آنها نرم یک فضای نرمدار از یک ضرب داخلی القا شود، تلاش کرده‌اند. این تلاش‌ها منجر به ارائهٔ مشخصه‌سازی‌های فراوانی از فضاهای ضرب داخلی شده است. از هندسهٔ مقدماتی می‌دانیم در فضای اقلیدسی $\mathbb{R}^۲$ مجموعِ مربعات قطرهای یک متوازی‌الاضلاع با مجموعِ مربعات ضلع‌های آن برابر است. با الهام از این واقعیت، نخستین و مشهورترین مشخصه‌سازی فضاهای ضرب داخلی در سال ۱۹۳۵ توسط پاسکال ژُردان[۱] و جان فون‌نویمان به‌دست آمد. آنها در [۱۶] ثابت کردند که شرط لازم و کافی برای این‌که نرم یک فضای نرمدار حقیقی توسط یک ضرب داخلی القا شود، برقراری تساوی متوازی‌الاضلاع است. به عبارت دقیق‌تر، فضای نرمدار حقیقی $(X, \|\cdot\|)$ یک فضای ضرب داخلی است اگر و تنها اگر برای هر $x, y \in X$ تساوی زیر که *اتحاد متوازی‌الاضلاع* نام دارد، برقرار باشد:

$$\|x-y\|^۲ + \|x+y\|^۲ = ۲(\|x\|^۲ + \|y\|^۲).$$

نتیجهٔ مستقیم این حقیقت، این است که فضای نرمدار حقیقی X یک فضای ضرب داخلی است اگر و تنها اگر هر زیرفضای دو بُعدی آن یک فضای ضرب داخلی باشد. این مشخصه‌سازی از فضاهای ضرب داخلی بسیار ساده و کاربردی است. در مثال زیر با استفاده از اتحاد متوازی‌الاضلاع با نمونه‌هایی از فضاهای نرمدار که نرم آنها از یک ضرب داخلی القا نمی‌شود، آشنا خواهیم شد.

مثال ۱.۱. (الف) اگر $C[۰,۱]$ فضای نرمدار همهٔ توابع پیوستهٔ حقیقی مقدار روی بازهٔ $[۰,۱]$ باشد که به نرم

$$\|f\| := \sup_{t\in[۰,۱]} |f(t)| \qquad (f \in C[۰,۱])$$

مجهز شده است، آنگاه به‌ازای $f(t) = t$ و $g(t) = ۱ - t$ داریم

$$۲ = ۱^۲ + ۱^۲ = \|f+g\|^۲ + \|f-g\|^۲ \neq ۲(\|f\|^۲ + \|g\|^۲) = ۲(۱^۲ + ۱^۲) = ۴.$$

بنابراین اتحاد متوازی‌الاضلاع برای نرم تعریف شده روی $C[۰,۱]$ برقرار نیست. پس نتیجه می‌گیریم که این نرم نمی‌تواند از یک ضرب داخلی القا شود.

[۱] Pascual Jordan

(ب) اگر فضای برداری $L^{۱}[۰,۱]$، شامل همهٔ توابع حقیقی انتگرال‌پذیر روی بازهٔ $[۰,۱]$، به نرم

$$\|f\| = \int_{۰}^{۱} |f(t)|dt \qquad (f \in L^{۱}[۰,۱])$$

مجهز شود، آن‌گاه به‌طور مشابه می‌توان نشان داد که این نرم از یک ضرب داخلی القا نمی‌شود.

در سال ۱۹۳۹ کوبوتا[۱] [۲۰] مشخصه‌سازی جالب دیگری برای فضاهای ضرب داخلی بر اساس شکل ظاهری کرهٔ واحد آنها به‌دست آورد. او به روشی جالب ثابت کرد که فضای نرمدار حقیقی دو بُعدی (سه‌بُعدی) X یک فضای ضرب داخلی است اگر و تنها اگر کرهٔ واحد آن:

$$\mathbb{S}_X := \{x \in X : \|x\| = ۱\}$$

بیضی (بیضی‌گون) باشد. نتایج به‌دست آمده توسط ژُردان، فون‌نویمان و کوبوتا از این نظر اهمیت دارند که در بسیاری از مشخصه‌سازی‌های فضاهای ضرب داخلی، مسئله به زیرفضاهای دو بُعدی (سه‌بُعدی) کاهش می‌یابد. برای مثال، دِی در [۱۰] با به‌کارگیری این واقعیت‌ها، مشخصه‌سازی‌های دیگری برای فضاهای ضرب داخلی ارائه کرد. به‌ویژه ثابت کرد که فضای نرمدار حقیقی $(X, \|\cdot\|)$ یک فضای ضرب داخلی است اگر و تنها اگر برای هر $x, y \in X$،

$$\|x\| = \|y\| = ۱ \Rightarrow \|x - y\|^{۲} + \|x + y\|^{۲} = ۴. \qquad (۲.۱)$$

در واقع، او ثابت کرد که کرهٔ واحد هر زیرفضای دو بعُدی Y از X بیضی است اگر و تنها اگر رابطهٔ (۲.۱) برای هر دو بردار دلخواه از Y برقرار باشد. توجه کنید که (۲.۱)، شکل ضعیف‌تری از اتحاد متوازی‌الاضلاع است. کاکوتانی[۲] [۱۷] در سال ۱۹۳۹ با استفاده از قضیهٔ هان–باناخ، مشخصه‌سازی دیگری از فضاهای ضرب داخلی به‌دست آورد که خود منشأ بسیاری از توصیف‌هایی است که تاکنون برای فضاهای ضرب داخلی ارائه شده است. یک سال بعد، در سال ۱۹۴۰ اثباتی ساده‌تر و کامل‌تر از قضیهٔ کاکوتانی در [۲۴] توسط فیلیپس[۳] ارائه شد. به‌دلیل اهمیت این نتیجه، آن را در اینجا بیان می‌کنیم.

قضیه ۲.۱. *(کاکوتانی) فضای نرمدار حقیقی X که بُعد آن حداقل ۳ است، یک فضای ضرب داخلی است اگر و تنها اگر برای هر زیر فضای دو بعُدی (سه‌بُعدی) Y از X تصویری با نرم یک از X به‌توی Y وجود داشته باشد، یعنی نگاشت خطی و کراندار $P : X \to Y$ وجود داشته باشد که $P^{۲} = P$ و $\|P\| = ۱$.*

---
[۱] Kubota [۲] Kakutani [۳] Phillips

برای مطالعهٔ بحثی مشروح‌تر در این باره، [۷، ۲۳] پیشنهاد می‌شود. در [۷] امیر[۱] بیش از ۳۵۰ مشخصه‌سازی برای فضاهای نرمدار را گردآوری کرده است. این مشخصه‌سازی‌ها به دو دسته تقسیم می‌شوند. دستهٔ اوّل، آنهایی هستند که با کاهش مسئله به زیرفضاهای دو بُعدی و با به‌کارگیریِ اتحاد متوازی‌الاضلاع به‌دست می‌آیند و دستهٔ دوّم، مشخصه‌سازی‌هایی هستند که به‌طور مستقیم از قضیهٔ تصویر کاکوتانی حاصل می‌شوند. در طول قرن بیستم، روش‌های بسیاری برای توصیف فضاهایی که نرم آنها از یک ضرب داخلی به‌دست می‌آید، توسط ریاضیدانان ارائه شده است. یکی از مهم‌ترینِ این روش‌ها، مشخصه‌سازی فضاهای ضرب داخلی به‌وسیلهٔ مفهوم تعامد است. در هندسهٔ مقدماتی، واژهٔ عمود رابطهٔ دو خط را توصیف می‌کند که با زاویهٔ قائمه با یکدیگر تقاطع می‌کنند. یعنی زمانی گفته می‌شود یک خط بر خط دیگر عمود است که آن دو خط با یکدیگر زاویه قائمه بسازند. در فضای اقلیدسی $\mathbb{R}^n$ ($n > ۳$) با توجه به تعریف زاویه، دو بردار بر هم عمودند اگر و تنها اگر ضرب داخلی آنها صفر باشد. مفهوم تعامد ابزاری قدرتمند در آنالیز تابعی، نظریهٔ تقریب و سایر علوم وابسته به آنها است. همچنین این مفهوم در شناخت ویژگی‌های هندسیِ فضاهای نرمدار مانند هموراری و اکیداً محدّب بودن، نقشی مهم ایفا می‌کند. همان‌طور که می‌دانیم، در فضای ضرب داخلی $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ تنها یک رابطهٔ تعامد وجود دارد که از ضرب داخلی حاصل می‌شود. به عبارت دقیق‌تر، بردارهای $x, y \in X$ عمود هستند اگر $\langle x, y\rangle = ۰$ (در این صورت، می نویسیم $x \perp y$). برخی ویژگی های اساسی تعامد در فضاهای ضرب داخلی عبارت‌اند از

(آ) ناتباهیدگی: $x \perp x$ اگر و تنها اگر $x = ۰$؛

(ب) همگنی: اگر $x \perp y$، آنگاه برای هر $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$، $\alpha x \perp \beta y$؛

(پ) تقارن: اگر $x \perp y$، آنگاه $y \perp x$؛

(ت) پیوستگی: اگر دنباله‌های $\{x_n\}$ و $\{y_n\}$ در X چنان باشند که برای هر $n \in \mathbb{N}$، $x_n \perp y_n$ و $x_n \to x$ و $y_n \to y$، آنگاه $x \perp y$؛

(ث) ویژگی وجودی: برای هر دو بردار ناصفر و مستقل خطی $x, y \in X$، عدد $\alpha \in \mathbb{R}$ وجود دارد به‌طوری که $x \perp (\alpha x + y)$. در واقع $x \perp (\alpha x + y)$ اگر و تنها اگر $\alpha = -\frac{\langle x,y\rangle}{\|x\|^۲}$. این ویژگی تضمین می‌کند که در هر زیرفضای دوبعدی از X، دو بردار ناصفر عمود بر هم وجود دارد؛

(ج) جمعی بودن: اگر $x \perp y$ و $x \perp z$، آنگاه $x \perp (y+z)$ (اگر $y \perp x$ و $z \perp x$، آنگاه $(y+z) \perp x$).

فرض کنیم $(X, \|\cdot\|)$ یک فضای نرمدار روی میدان اعداد حقیقی است. سؤال طبیعی که مطرح می‌شود، این است که در یک فضای نرمدار دلخواه که نرم آن توسط یک ضرب داخلی القا نمی‌شود، مفهوم تعامد چگونه تعریف می‌شود؟ در حقیقت، وقتی که نرم X از یک ضرب داخلی القا نمی‌شود، مفهوم تعامد روی

[۱] Amir

X یکتا نیست. از سال ۱۹۳۴ تاکنون تلاش‌های زیادی برای گسترش مفهوم تعامد از فضاهای ضرب داخلی به فضاهای نرمدار انجام شده است. نخست روبرتز[1] [۲۵] در سال ۱۹۳۴ تعامدی را معرفی کرد که به *تعامد روبرتز* مشهور شده است. بردارهای $x, y \in X$ به معنای روبرتز بر هم عمود هستند اگر

$$\|x - \lambda y\| = \|x + \lambda y\| \qquad (\forall \lambda \in \mathbb{R}).$$

در این صورت، می‌نویسیم $x \perp_R y$. جیمز[2] در [۱۴] مثالی از یک فضای نرمدار ارائه کرد که در آن، شرط لازم و کافی برای اینکه دو بردار بر هم به مفهوم تعریف‌شده توسط روبرتز عمود باشند، این است که یکی از آنها صفر باشد. در واقع، او نشان داد که اگر X فضای برداری شامل همهٔ چندجمله‌ای‌های درجه‌دو به‌شکل $ax^۲ + bx$ با ضرایب حقیقی روی بازهٔ $(۰, ۱)$ باشد و $f, g \in X$، آن‌گاه $f \perp_R g$ اگر و تنها اگر $fg = ۰$. به‌علاوه، جیمز ثابت کرد که تعامد روبرتز در فضای نرمدار حقیقی X ویژگی وجودی دارد اگر و تنها اگر X فضای ضرب داخلی باشد. این مطلب در گزارهٔ بعد به‌طور دقیق‌تر بیان شده است.

گزاره ۳.۱. [۱۴، نتیجهٔ ۴.۷] *فرض کنیم $(X, \|\cdot\|)$ فضای نرمدار حقیقی، Y زیرفضای دو بُعدی دلخواهی از X باشد و $x \in Y \neq ۰$. اگر بردار ناصفر $y \in Y$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که $x \perp_R y$، آن‌گاه X فضای ضرب داخلی است.*

فرض کنیم $L_۱$ و $L_۲$ خط‌هایی در فضای اقلیدسی $\mathbb{R}^۲$ هستند که در نقطهٔ p یکدیگر را قطع می‌کنند. در این صورت، $L_۱$ و $L_۲$ بر هم عمود هستند اگر و تنها اگر فاصلهٔ هر نقطه از $L_۲$ تا نقطهٔ دلخواه $q \in L_۱$ از فاصلهٔ p تا q کوچکتر نباشد. بِرکُف[3] در سال ۱۹۳۵ در [۸] با الهام از این واقعیت اشاره‌ای به مفهوم دیگری از تعامد در فضاهای نرمدار داشت [۲]. یک دهه بعد، جیمز [۱۴] با توجه به ایده‌های بِرکُف، این مفهوم جدید از تعامد در فضاهای نرمدار را گسترش داد و ویژگی‌های بیشتری از آن ارائه کرد و به‌وسیلهٔ آن مشخصه‌سازی‌های فراوانی از فضاهای ضرب داخلی، فضاهای نرمدار هموار و اکیداً محدّب به‌دست آورد. این تعامد به‌افتخار بِرکُف و جیمز، *تعامد بِرکُف–جیمز* نامیده شده است. بردار $x \in X$ بر بردار $y \in X$ متعامد بِرکُف–جیمز است اگر

$$\|x + \lambda y\| \geq \|x\| \qquad (\forall \lambda \in \mathbb{R}).$$

فرض کنیم x و y بردارهایی متعامد در صفحهٔ اقلیدسیِ $\mathbb{R}^۲$ باشند. در این صورت، x و y را می‌توان دو ساق از یک مثلث قائم‌الزاویه دانست که وترِ آن، بردار $x - y$ است. از رابطهٔ فیثاغورس نتیجه می‌گیریم که $\|x - y\|^۲ = \|x\|^۲ + \|y\|^۲$. از طرفی، چون بردار x بر بردار $-y$ نیز عمود است، خواهیم داشت $\|x + y\|^۲ = \|x\|^۲ + \|y\|^۲$. همچنین به‌سادگی دیده می‌شود که بردارهای $x - y$ و $x + y$ قطرهای

[1] Roberts [2] James [3] Birkhoff

مستطیلی هستند که بر بردارهای x و y بنا شده است که این نتیجه می‌دهد $\|x+y\| = \|x-y\|$.
با الهام از این ویژگی‌های هندسیِ تعامد در صفحهٔ اقلیدسی $\mathbb{R}^۲$، جیمز در [۱۵]، تعامدهای فیثاغورسی و متساوی‌الساقین را به‌صورت زیر معرفی کرد:

- بردارهای $x, y \in X$ *متعامدِ متساوی‌الساقین* هستند اگر $\|x+y\| = \|x-y\|$. در این صورت، می‌نویسیم $x \perp_I y$.
- بردارهای $x, y \in X$ *متعامدِ فیثاغورسی* هستند اگر $\|x\|^۲ + \|y\|^۲ = \|x+y\|^۲$. در این صورت، می‌نویسیم $x \perp_P y$.

در حالت کلی‌تر، به‌سادگی دیده می‌شود که در فضای ضرب داخلی $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ تعامدهای فیثاغورسی و متساوی‌الساقین با تعامد حاصل از ضرب داخلی معادل هستند، زیرا برای هر $x, y \in X$ داریم

$$\|x \pm y\|^۲ = \|x\|^۲ \pm ۲\langle x, y\rangle + \|y\|^۲.$$

به بیان دیگر، در فضاهای ضرب داخلی داریم $\perp_P = \perp_I = \perp$. توجه به این نکته ضروری است که این تعامدها متقارن هستند و ویژگی‌های ناتباهیدگی و پیوستگی را نیز دارند امّا ممکن است برخی از ویژگی‌های تعامد حاصل از یک ضرب داخلی را نداشته باشند. جیمز در [۱۳] ثابت کرد که این تعامدها ویژگی وجودی دارند امّا همگن (جمعی) نیستند. با توجه به این واقعیت، ثابت کرد که تعامد فیثاغورسی (متساوی‌الساقین) در فضای برادری نرمدار حقیقی $(X, \|\cdot\|)$ همگن (جمعی) است اگر و تنها اگر X فضای ضرب داخلی باشد. در واقع، او ثابت کرد که اگر تعامد فیثاغورسی (متساوی‌الساقین) در X همگن (جمعی) باشد، آنگاه اتحاد متوازی‌الاضلاع در X برقرار است. برای مطالعهٔ بیشتر دربارهٔ انواع تعامد در فضاهای نرمدار و نقش آنها در شناسایی ویژگی‌های هندسیِ فضاهای نرمدار، مطالعهٔ [۳، ۴، ۶، ۷، ۱۱، ۱۲، ۲۲، ۲۸] پیشنهاد می‌شود.

روبرت جیمز[۱] (۱۹۱۸–۲۰۰۴) در فاصلهٔ سال‌های ۱۹۴۵ تا ۱۹۴۷ در سه‌گانهٔ خودش [۱۳، ۱۴، ۱۵] به مطالعهٔ تعامد بِرکُف–جیمز پرداخت و مشخصه‌سازی‌هایی برای ویژگی‌های هندسی مانند هموراری، اکیداً محدّب بودن و به‌طور یکنواخت محدّب بودنِ فضاهای نرمدار به‌دست آورد. او مشخصه‌سازی‌هایی برای فضاهای ضرب داخلی بر اساس این تعامد ارائه کرد. جیمز در سال ۱۹۴۶ از رسالهٔ دکتری خود در همین زمینه، با عنوان «تعامد در فضاهای نرمدار» دفاع کرد. شهرت جیمز بیشتر به‌دلیل تلاش‌هایش در هندسهٔ فضاهای باناخ و به‌ویژه مشخصه‌سازی دقیقی است که از فضاهای باناخ بازتابی ارائه کرده است. پس از انتشار سه‌گانهٔ جیمز، تعامد بِرکُف–جیمز به‌سرعت به‌عنوان یکی از مهم‌ترین مفاهیم تعامد در فضاهای نرمدار به یک ابزار توانمند برای شناسایی ویژگی‌های هندسیِ فضاهای نرمدار تبدیل شد. از این‌رو در

[۱] Robert C. James

این مقاله، پس از مرور ویژگی‌های اساسی این تعامد، مشخصه‌سازی‌هایی از فضاهای ضرب داخلی را که توسط جیمز ارائه شده است، بازخوانی می‌کنیم. در واقع این نوشتار، مکملی برای [۲] است.

۲. فضاهای ضرب داخلی و تعامد بِرکُف-جیمز

در این بخش، ویژگی‌های اساسی تعامد بِرکُف-جیمز و مشخصه‌سازی‌هایی از فضاهای ضرب داخلی را که بر اساس این تعامد توسط جیمز به‌دست آمده است، مرور خواهیم کرد. با توجه به اهمیتِ روش‌های به‌کار برده شده توسط جیمز در به‌دست آوردن این مشخصه‌سازی‌ها، سعی می‌کنیم برهان برخی از آنها را به زبان ساده‌ای بیان کنیم. در عین حال، برای پرهیز از اطالهٔ کلام، برخی از نتایج را نیز بدون بیان برهان آورده‌ایم. بی‌شک با مطالعهٔ آنچه که در اینجا آورده‌ایم، خوانندهٔ علاقه‌مند خواهد توانست جزئیات بیشتر را با مراجعه به [۱۳، ۱۴، ۱۵] دنبال کند. قبل از هر چیز، فرض می‌کنیم همهٔ فضاهای نرمدار در این فصل، حقیقی هستند.

ابتدا به این نکته توجه می‌کنیم که در فضای ضرب داخلی $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ تعامد بِرکُف-جیمز و تعامد حاصل از ضرب داخلی با هم معادل هستند، زیرا اگر $x, y \in X$ و $\langle x, y\rangle = ۰$، آن‌گاه برای هر $\lambda \in \mathbb{R}$ داریم

$$\|x + \lambda y\|^۲ = \langle x + \lambda y, x + \lambda y\rangle = \|x\|^۲ + \lambda^۲\|y\|^۲ \geq \|x\|^۲.$$

این یعنی $x \perp_B y$. از سوی دیگر، فرض کنیم $x \perp_B y$ امّا $\langle x, y\rangle \neq ۰$. در این صورت، به‌ازای $\lambda = -\frac{\langle x,y\rangle}{\langle y,y\rangle}$ داریم

$$\begin{aligned}\|x + \lambda y\|^۲ &= \langle x - \frac{\langle x, y\rangle}{\langle y, y\rangle} y, x - \frac{\langle x, y\rangle}{\langle y, y\rangle} y\rangle \\ &= \langle x, x\rangle - ۲\frac{\langle x, y\rangle^۲}{\langle y, y\rangle} + \frac{\langle x, y\rangle^۲}{\langle y, y\rangle^۲}\langle y, y\rangle \\ &= \langle x, x\rangle - \frac{\langle x, y\rangle^۲}{\langle y, y\rangle} < \langle x, x\rangle = \|x\|^۲.\end{aligned}$$

پس x بر y متعامد بِرکُف-جیمز نیست که با فرض در تناقض است.

همان‌طور که قبلاً اشاره کردیم، تعامد بِرکُف-جیمز ناتباهیده است. در حقیقت، اگر $x \perp_B x$، آن‌گاه به‌ازای هر $\lambda \in \mathbb{R}$ داریم $\|x + \lambda x\| \geq \|x\|$. کافی است $\lambda = -۱$ را در نظر بگیریم تا به‌دست آوریم $\|x\| \leq \|x - x\| = ۰$. پس $\|x\| = ۰$ و لذا $x = ۰$. همچنین تعامد بِرکُف-جیمز همگن است، زیرا اگر فرض کنیم $x \perp_B y$، $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ و $\alpha \neq ۰$ (حالت $\alpha = ۰$ بدیهی است)، آن‌گاه برای هر $\lambda \in \mathbb{R}$

داریم $\|x+\frac{\lambda\beta}{\alpha}y\|\geq\|x\|$. از این‌رو

$$\|\alpha x+\lambda(\beta y)\|=\|\alpha(x+\frac{\lambda\beta}{\alpha}y)\|=|\alpha|\|x+\frac{\lambda\beta}{\alpha}y\|\geq|\alpha|\|x\|=\|\alpha x\|.$$

بنابراین $\alpha x\perp_B\beta y$. به‌علاوه، از پیوستگی تابع نرم به‌سادگی نتیجه می‌شود که تعامد بِرکُف–جیمز ویژگی پیوستگی را نیز دارد.

اجازه دهید قبل از بیان نتایج بیشتر، دو مفهوم اَبَرفضا و اَبَرصفحه را که نقشی مهم در توصیف ویژگی‌های هندسی فضاهای نرمدار دارند، یادآوری کنیم. فرض کنیم H یک زیرفضای سَره از فضای برداری X باشد. H یک اَبَرفضا است اگر $u_\circ\in X\setminus H$ وجود داشته باشد که $X=\operatorname{span}(\{u_\circ,H\})$؛ یعنی X برابر با فضای برداری تولید شده توسط بردار $u_\circ$ و زیرفضای H است. اَبَرصفحه در فضای برداری X مجموعه‌ای است به‌شکل $P=x_\circ+H$ که در آن، $x_\circ\in X$ و H یک اَبَرفضا است. به‌عبارت دیگر، اَبَرصفحه‌ها انتقال یافتهٔ اَبَرفضاها هستند. گزارهٔ بعد نشان می‌دهد که تناظری یک‌به‌یک بین اَبَرفضاهای یک فضای برداری و تابعک‌های خطی روی آنها وجود دارد.

گزاره ۱.۲ ([۲۱]). *فرض کنیم X یک فضای برداری و H یک زیرفضای سره از X است. در این صورت، H اَبَرفضا است اگر و تنها اگر تابعک خطی ناصفری مانند $f:X\to\mathbb{R}$ موجود باشد به‌طوری که $H=\ker f:=\{x\in X: f(x)=\circ\}$.*

فرض کنیم $(X,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ یک فضای ضرب داخلی باشد. همان‌طور که در بخش نخست اشاره کردیم، تعامد حاصل از ضرب داخلی ویژگی وجودی دارد، زیرا برای هر $x,y\in X$ که $x\neq\circ$، به‌ازای مقدار $\alpha=-\frac{\langle x,y\rangle}{\|x\|^{۲}}$ داریم $x\perp(\alpha x+y)$. همچنین اگر $x\perp y$، آنگاه اَبَرفضای H از X وجود دارد به‌طوری که $x\in H$ و $H\perp y$. در واقع، $H=\ker f$ که در آن، تابعک خطی $f:X\to\mathbb{R}$ با ضابطه $f(z)=\langle z,y\rangle$ تعریف می‌شود. توجه کنید که در این صورت، $f(y)=\|f\|\|y\|$ و $f(x)=\circ$. از طرفی، چون تعامد در فضاهای ضرب داخلی متقارن است، از اینکه $y\perp x$ به‌طور مشابه نتیجه می‌گیریم که اَبَرفضای H وجود دارد که $y\in H$ و $x\perp H$. در این حالت، $H=\ker f$ که در آن، تابعک خطی $f:X\to\mathbb{R}$ با ضابطهٔ $f(z)=\langle z,x\rangle$ تعریف می‌شود و $f(x)=\|f\|\|x\|$ و $f(y)=\circ$. جیمز با اثبات قضیهٔ بعدی که رابطهٔ تعامد بِرکُف–جیمز با تابعک‌های خطی کراندار و اَبَرفضاها را معلوم می‌کند، موفق شد نشان دهد که این تعامد نیز ویژگی وجودی دارد.

قضیه ۲.۲. [۱۴، نتیجهٔ ۲.۲] *فرض کنیم $(X,\|\cdot\|)$ فضای نرمدار باشد. اگر $f:X\to\mathbb{R}$ یک تابعک خطی ناصفر و کراندار روی X باشد و $x\in X$، آنگاه*

(آ) $x \perp_B \ker f$ اگر و تنها اگر $f(x) = \|f\|\|x\|$ ($x \perp_B \ker f$ یعنی برای هر $y \in \ker f$ داریم $x \perp_B y$)؛

(ب) فرض کنیم L زیرفضای سره‌ای از X باشد. در این صورت، $x \perp_B L$ (یعنی برای هر $y \in L$، $x \perp_B y$) اگر و تنها اگر تابعک خطی ناصفر و کراندار مانند $f : X \to \mathbb{R}$ وجود داشته باشد به‌طوری که $f(x) = \|f\|\|x\|$ و برای هر $y \in L$ داشته باشیم $f(y) = ۰$.

یکی از چهار قضیهٔ اساسی آنالیز تابعی، قضیهٔ هان-باناخ[۱] است که نشان می‌دهد روی هر فضای نرمدار ناصفر، به‌اندازهٔ کافی تابعک خطی پیوستهٔ ناصفر وجود دارد. این قضیه در واقع، شرایط کافی برای توسیع یک عملگر خطی از یک زیرفضا به کل فضا را برای ما فراهم می‌کند. از جملهٔ نتایج مهم این قضیه این است که اگر $(X, \|\cdot\|)$ یک فضای نرمدار و $x \in X$، آن‌گاه تابعک خطی و کراندار $f : X \to \mathbb{R}$ وجود دارد که $f(x) = \|f\|\|x\|$ [۲۱]. بنابر این نتیجه، از قضیهٔ هان-باناخ و قضیهٔ ۲.۲ و گزارهٔ ۱.۲، نتیجهٔ زیر به‌دست می‌آید.

نتیجه ۳.۲. *برای هر بردار ناصفر x در فضای نرمدار $(X, \|\cdot\|)$، اَبَرفضای H در X وجود دارد به‌طوری که $x \perp_B H$.*

در قضیهٔ بعدی خواهیم دید که تعامد بِرکُف-جیمز، ویژگی وجودی را احراز می‌کند.

قضیه ۴.۲. *فرض کنیم $(X, \|\cdot\|)$ فضای برداری نرمدار و $x, y \in X$ که $x \neq ۰$. در این صورت، $\alpha \in \mathbb{R}$ وجود دارد به‌طوری که*

$$x \perp_B (\alpha x + y).$$

اثبات. بنابر قضیهٔ هان-باناخ، تابعک خطی و کراندار $f : X \to \mathbb{R}$ هست که $\|f\| = ۱$ و $f(x) = \|x\|$. اکنون قرار می‌دهیم $\alpha = -\frac{f(y)}{f(x)}$. در این صورت، برای هر $\lambda \in \mathbb{R}$ داریم

$$\|x + \lambda(\alpha x + y)\| = \|x + \lambda(\frac{-f(y)}{f(x)} x + y)\| \geq \|x\| - |\lambda| \frac{|f(y)|}{\|x\|} \|x\| - \|\lambda y\|.$$

چون $|f(y)| \leq \|f\|\|y\| = \|y\|$، نتیجه می‌گیریم $-|f(y)| \geq -\|y\|$. از این‌رو

$$\|x + \lambda(\alpha x + y)\| = \|x + \lambda(\frac{-f(y)}{f(x)} x + y)\| \geq \|x\| + |\lambda|\|y\| - |\lambda|\|y\| = \|x\|.$$

بنابراین $x \perp_B (\alpha x + y)$. □

[۱] Hahn-Banach

برخلاف تعامد حاصل از ضرب داخلی و تعامدهای فیثاغورسی و متساوی‌الساقین، تعامد بِرکُف–جیمز، متقارن نیست. برای مثال، فضای نرمدار $(\mathbb{R}^۲, \|.\|_۱)$ را با نرم

$$\|x\|_۱ = |x_۱| + |x_۲|, \qquad x = (x_۱, x_۲) \in \mathbb{R}^۲$$

در نظر بگیرید. اگر $x = (۲, ۱)$ و $y = (۱, -۱)$، آنگاه به‌ازای هر $\lambda \in \mathbb{R}$ داریم

$$\|x + \lambda y\|_۱ = |۲ + \lambda| + |۱ - \lambda| \geq ۳ = \|x\|_۱.$$

بنابراین $x \perp_B y$. امّا برای $\lambda = \frac{۱}{۲}$ داریم

$$\|y + \lambda x\|_۱ = \|(۲, -\frac{۱}{۲})\|_۱ = \frac{۳}{۲} \ngeq ۲ = \|y\|_۱.$$

بنابراین $y \not\perp_B x$. با توجه به این واقعیت، قضیهٔ ۴.۲ وجودِ عدد حقیقی β را به‌طوری که

$$(\beta x + y) \perp_B x$$

تضمین نمی‌کند. در حقیقت، قضیهٔ ۴.۲ فقط نشان می‌دهد که تعامد بِرکُف–جیمز از راست وجودی است. در قضیهٔ بعدی خواهیم دید که این تعامد از چپ نیز وجودی است.

قضیه ۵.۲. *فرض کنیم $(X, \|.\|)$ فضای نرمدار حقیقی باشد و $x, y \in X$ که $x \neq ۰$. در این صورت، عدد حقیقی β وجود دارد به‌طوری که $(\beta x + y) \perp_B x$. در واقع، β مقداری است که تابع*

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(t) = \|tx + y\|$$

مینیمم مطلق خود را در آن اختیار می‌کند؛ یعنی $\beta = \min\{\|tx + y\| : t \in \mathbb{R}\}$. به علاوه، اگر اعداد حقیقی γ, γ' چنان باشند که $(\gamma x + y) \perp_B x$ و $(\gamma' x + y) \perp_B x$، آن‌گاه برای هر عدد β که بین γ و γ' قرار دارد نیز داریم $(\beta x + y) \perp_B x$.

اثبات. نگاشت $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ را با ضابطهٔ $f(t) = \|tx + y\|$ در نظر بگیرید. از نامساوی مثلثی نتیجه می‌شود که f محدّب است. به‌علاوه f روی $\mathbb{R}$ پیوسته است و $\lim_{t \to \pm\infty} f(t) = +\infty$. بنابراین f مقدار مینیمم مطلق خود را اختیار می‌کند، یعنی $\beta \in \mathbb{R}$ وجود دارد به‌طوری که برای هر $t \in \mathbb{R}$،

$$\|\beta x + y\| \leq \|tx + y\|.$$

لذا به‌ازای هر $\lambda \in \mathbb{R}$،

$$\|\beta x + y\| \leq \|(\beta + \lambda)x + y\| = \|(\beta x + y) + \lambda x\|.$$

در نتیجه $(\beta x + y) \perp_B x$. اکنون فرض کنیم $(\gamma x + y) \perp_B x$ و $(\gamma' x + y) \perp_B x$ و $\gamma < \beta < \gamma'$. بنابر آنچه گفته شد، مقدارهای $\|\gamma x + y\|$ و $\|\gamma' x + y\|$ مینیمم تابع f هستند و چون تابع f محدب و پیوسته است و $\lim_{t\to\pm\infty} f(t) = +\infty$، نتیجه می‌گیریم که $f(\gamma) = f(\gamma')$. از سوی دیگر، چون $\gamma < \beta < \gamma'$، پس $\lambda \in [۰, ۱]$ وجود دارد به‌طوری که $\beta = \lambda\gamma + (۱ - \lambda)\gamma'$. بنابراین

$$f(\beta) = f(\lambda\gamma + (۱ - \lambda)\gamma') \le \lambda f(\gamma) + (۱ - \lambda) f(\gamma') = f(\gamma).$$

از این‌رو $f(\beta) = \min_{t\in\mathbb{R}} f(t)$ و لذا $(\beta x + y) \perp_B x$. □

در نتیجهٔ ۳.۲ مشاهده کردیم که برای هر بردار x در فضای نرمدار X، همواره اَبَرفضایی مانند H در X وجود دارد به‌طوری که $x \perp_B H$. جالب است بدانیم که در فضای نرمدار X که بُعد آن حداقل ۳ باشد، اگر برای هر بردار $x \in X$، اَبَرفضای H وجود داشته باشد که $H \perp_B x$، آن‌گاه X یک فضای ضرب داخلی است. این واقعیت توسط جیمز در [۱۵] ثابت شده است.

کرهٔ واحد فضای اقلیدسی $\mathbb{R}^۲$ مرز دایره‌ای به مرکز مبدأ مختصات و شعاع یک است. به‌سادگی دیده می‌شود که کرهٔ واحد $\mathbb{R}^۲$ حاوی هیچ پاره‌خطی نیست. به عبارت دیگر، اگر x و y دو نقطهٔ متمایز روی کرهٔ واحد $\mathbb{R}^۲$ باشند، آن‌گاه خط واصلِ این نقاط، کرهٔ واحد را تنها در نقاط x و y قطع می‌کند (توجه کنید که اگر $\mathbb{R}^۲$ را به $\|\cdot\|_۱$ مجهز کنیم، آن‌گاه کرهٔ واحد آن با این نرم، یک مربّع است که این ویژگی را ندارد). همین واقعیت در مورد کرهٔ واحد فضای اقلیدسی n–بُعدیِ $\mathbb{R}^n$ ($n \ge ۳$) و در حالت کلی‌تر، در مورد کرهٔ واحدِ فضاهای ضرب داخلی نیز صادق است. بر اساس این واقعیت‌ها، فضاهای نرمداری را که کرهٔ واحد آنها شامل هیچ پاره‌خطی نباشد، فضاهای *اکیداً محدّب* نامیده‌اند. به عبارت دقیق‌تر، فضای نرمدار $(X, \|\cdot\|)$ را اکیداً محدّب گوییم اگر برای بردارهای $x, y \in X$ که $x \ne y$ از اینکه $\|x\| = \|y\| = ۱$ بتوانیم نتیجه بگیریم $\|\frac{x+y}{۲}\| < ۱$. روشن است که فضاهای اقلیدسی $\mathbb{R}^n$ و فضاهای ضرب داخلی، اکیداً محدّب هستند. جیمز در قضیهٔ بعدی بر اساس ویژگی وجودی تعامد بِرکُف–جیمز، یک مشخصه‌سازی برای فضاهای نرمدار اکیداً محدب ارائه کرده است.

قضیه ۶.۲. [۱۴، قضیهٔ ۴] *فرض کنیم $(X, \|\cdot\|)$ فضای نرمدار باشد. گزاره‌های زیر هم‌ارز هستند:*

(آ) X اکیداً محدّب است.

(ب) تعامد بِرکُف–جیمز از چپ یکتا است؛ یعنی برای هر $x, y \in X$ که $x \ne ۰$ مقدار یکتای $\beta \in \mathbb{R}$ وجود دارد به‌طوری که $(\beta x + y) \perp_B x$.

بر اساس آنچه اِشمولین[۱] در [۲۶] ثابت کرده است، فضای نرمدار X اکیداً محدّب است اگر و تنها اگر هر تابعک خطی و کراندار $f : X \to \mathbb{R}$ تنها در یک نقطه از کرهٔ واحد X ماکسیمم خود را اختیار کند. به بیان دیگر، X اکیداً محدّب است اگر و تنها اگر برای هر تابعک خطی و کراندار $f : X \to \mathbb{R}$، تنها یک $x \in \mathbb{S}_X$ وجود داشته باشد که $f(x) = \|f\|$. جالب است بدانیم که این حقیقت، از قضیهٔ ۶.۲ به‌طور ساده‌تری به‌دست می‌آید. فرض کنیم X اکیداً محدّب است و تابعک خطی و کراندار $f : X \to \mathbb{R}$ با $\|f\| = ۱$ ماکسیمم خود را در نقاط متمایز $x_۱, x_۲ \in \mathbb{S}_X$ اختیار می‌کند. در این صورت، $f(x_۱) = \|x_۱\| = ۱$ و $f(x_۲) = \|x_۲\| = ۱$. از این‌رو $f(x_۱ - x_۲) = ۰$ و لذا برای هر $\lambda \in \mathbb{R}$ داریم $f(x_۱ + \lambda(x_۲ - x_۱)) = ۱$. بنابراین برای هر $\lambda \in \mathbb{R}$ داریم $\|x_۱ + \lambda(x_۲ - x_۱)\| \geq \|x_۱\| = ۱$. این یعنی $x_۱ \perp_B (x_۲ - x_۱)$. به روش مشابه، نتیجه می‌گیریم که $x_۲ \perp_B (x_۲ - x_۱)$. پس از قضیهٔ ۵.۲ نتیجه می‌شود که برای هر $\beta \in [۰, ۱]$،

$$(x_۱ + \beta(x_۲ - x_۱)) \perp_B (x_۲ - x_۱)$$

و این با یکتایی از چپ تعامد بِرکُف–جیمز و در نتیجه با اکیداً محدب بودنِ X در تناقض است. به‌عکس، فرض کنیم X اکیداً محدب نباشد. در این صورت، بنابر قضیهٔ ۶.۲، تعامد بِرکُف–جیمز از چپ یکتا نیست. پس بردارهای $x, y \in X$ و عدد حقیقی α وجود دارند به‌طوری که $y \perp_B x$ و $(\alpha x + y) \perp_B x$. قضیهٔ ۲.۲ تضمین می‌کند که تابعک خطی و کراندار $f : X \to \mathbb{R}$ وجود دارد که $f(y) = \|f\|\|y\|$ و $f(x) = ۰$. از طرفی، از قضیهٔ ۵.۲ نتیجه می‌شود که $\|y\| = \|\alpha x + y\|$. از این‌رو تابعک خطی و کراندار f ماکسیمم خود را در دو نقطهٔ متمایز $\frac{y}{\|y\|}$ و $\frac{\alpha x+y}{\|\alpha x+y\|}$ از کرهٔ واحد X اختیار می‌کند که این امکان ندارد. بنابراین X اکیداً محدّب است.

در ادامه، مشخصه‌سازی‌های فضاهای ضرب داخلی را که بر اساس تعامد بِرکُف–جیمز به‌دست آمده است، بیان و اثبات می‌کنیم. جیمز در اثبات آنها از مشخصه‌سازیِ فضاهای ضرب داخلی که توسط کاکوتانی در قضیهٔ ۲.۱ ارائه شد، استفاده کرده است. برای این منظور، به تعمیمی از قضیهٔ ۲.۲ نیاز داریم.

قضیه ۷.۲. [۱۴، قضیهٔ ۷.۱] *فرض کنیم $(X, \|\cdot\|)$ فضای نرمدار و H زیرفضای سَره و بسته‌ای از آن باشد. در این صورت، بردار $y \in X$ وجود دارد به‌طوری که $H \perp_B y$ اگر و تنها اگر برای هر تابعک خطی و کراندار $f : X \to \mathbb{R}$ بردار $x \in X$ وجود داشته باشد که $f(x) = \|f\|\|x\|$.*

قضیه ۸.۲. *تعامد بِرکُف–جیمز در فضای نرمدار حداقل سه‌بُعدیِ $(X, \|\cdot\|)$ متقارن است اگر و تنها اگر X یک فضای ضرب داخلی باشد.*

[۱] Šmulian

اثبات. فرض کنیم $X_\circ$ یک زیرفضای سه‌بُعدی از X باشد و x_1 و x_2 دو بردار در $X_\circ$ باشند. چون بُعد $X_\circ$ متناهی است، پس بنابر مشخصه‌سازی اِشمولین از فضاهای نرمدار اکیداً محدّب، شرایط قضیهٔ ۷.۲ برقرار است. بنابراین اگر $H_\circ := \operatorname{span}\{x_1, x_2\}$ زیرفضای تولید شده به‌وسیلهٔ x_1 و x_2 باشد، آن‌گاه بنابر قضیهٔ ۷.۲، بردار $y \in X_\circ$ وجود دارد که $H_\circ \perp_B y$ و لذا اگر تعامد بِرکُف–جیمز متقارن باشد، آن‌گاه $y \perp_B H_\circ$. اکنون فرض کنیم $P : X_\circ \to H_\circ$ نگاشت تصویر از $X_\circ$ به‌توی زیرفضای دو بُعدی $H_\circ$ باشد که برای هر $z \in X_\circ$، $z = P(z) + a_z y$. به‌سادگی دیده می‌شود که برای هر $z \in X_\circ$، $\|P(z)\| \leq \|z\|$ و $\|P\| = 1$. این یعنی تصویری از نرم یک روی هر زیرفضای سه‌بُعدی $X_\circ$ از X وجود دارد. بنابراین قضیهٔ تصویر کاکوتانی (قضیهٔ ۲.۱) تضمین می‌کند که X فضای ضرب داخلی است. $\square$

با توجه به اینکه تعامد بِرکُف–جیمز متقارن نیست، گوییم در فضای نرمدار $(X, \|\cdot\|)$ تعامد بِرکُف–جیمز *از چپ جمعی* است اگر برای هر $x, y, z \in X$ از اینکه $y \perp_B x$ و $z \perp_B x$ بتوان نتیجه گرفت $(y+z) \perp_B y$. اما فضاهای نرمداری وجود دارند که در آنها تعامد بِرکُف–جیمز از چپ جمعی نیست. برای مثال، فضای نرمدار $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_1)$ را در نظر بگیرید و فرض کنید $x = (1, 1)$، $y = (1, 0)$ و $z = (-1, 1)$. در این صورت، برای هر $\lambda \in \mathbb{R}$ داریم

$$\|y + \lambda x\|_1 = |1 + \lambda| + |\lambda| \geq 1 = \|y\|_1$$

و

$$\|z + \lambda x\|_1 = |1 - \lambda| + |1 + \lambda| \geq 2 = \|z\|_1$$

بنابراین $y \perp_B x$ و $z \perp_B x$؛ در حالی که به‌سادگی دیده می‌شود که $(y+z) \not\perp_B x$، زیرا به‌ازای $\lambda = 0$ داریم $\|(y+z) + \lambda x\|_1 = 1 < \|x\|_1 = 2$. جیمز با توجه به این واقعیت، مشخصه‌سازی دیگری از فضاهای ضرب داخلی ارائه کرد که در قضیهٔ پایانی این بخش آن را بیان می‌کنیم.

قضیه ۹.۲. *تعامد بِرکُف–جیمز در فضای نرمدار حداقل سه‌بُعدیِ $(X, \|\cdot\|)$ از چپ جمعی است اگر و تنها اگر X یک فضای ضرب داخلی باشد.*

اثبات. فرض کنیم $x_1, x_2 \in X$. بنابر نتیجهٔ ۳.۲، اَبَرفضاهای H_1 و H_2 در X وجود دارند به‌طوری که $x_1 \perp_B H_1$ و $x_2 \perp_B H_2$. چون تعامد بِرکُف–جیمز از چپ جمعی و همگن است، پس اگر $M := H_1 \cap H_2$، آن‌گاه برای هر $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$، $\alpha x_1 + \beta x_2 \perp_B M$. از سوی دیگر، هر $z \in X$ نمایشی یکتای به‌صورت $z = P(z) + y$ دارد که در آن، $y \in M$ و $P(z) = \alpha x_1 + \beta x_2$. به این ترتیب، $P : X \to \operatorname{span}\{x_1, x_2\}$ یک تصویر به‌توی فضای دو بُعدی تولید شده توسط x_1 و

x_2 تعریف می‌کند که $\|P\| = 1$. بنابراین از قضیهٔ ۲.۱ نتیجه می‌شود که X یک فضای ضرب داخلی است. □

شرط حداقل سه‌بُعدی بودنِ فضای نرمدار X در قضیهٔ ۸.۲ الزامی است. در واقع، جیمز در [۱۵] فضاهای نرمدار دو بُعدی را معرفی کرده است که در آنها تعامد بِرکُف-جیمز متقارن است امّا نرم آن از ضرب داخلی القا نمی‌شود. همچنین جیمز در [۱۵] ثابت کرده است که در فضای نرمدار دو بُعدیِ X، تعامد بِرکُف-جیمز در X فقط وقتی از چپ جمعی است که X اکیداً محدّب باشد.

تشکر و قدردانی: از دکتر روح‌الله جهانی‌پور، سردبیر محترم فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی و از داوران محترم که با نظرات ارزشمند خود، بر غنای علمی مقاله افزودند، تشکر و قدردانی می‌کنم.

مراجع

[۱] صال مصلحیان، محمد، اسماعیل زاده، حامد، (۱۳۸۶)، استفان باناخ، فرهنگ و اندیشه ریاضی، ۲۶(شمارهٔ ۳۸)، صص. ۶۷-۷۴.

[۲] صال مصلحیان، محمد، عبدالله زاده گنابادی، فاطمه، (۱۳۹۶)، تعامد بِرکُف-جیمز در فضاهای برداری نرمدار، فرهنگ و اندیشه ریاضی، ۳۶(شمارهٔ ۶۰)، صص. ۱۲۱-۱۳۰.

[3] Alonso, J., Beníitez C., Orthogonality in normed linear spaces: a survey. Part I: main properties. *Extracta Math.,* **3** (1988), 1–15.

[4] Alonso, J., Beníitez C., Orthogonality in normed linear spaces: a survey. II. Relations between main orthogonalities. *Extracta Math.*, **4** (1989), no. 3, 121–131.

[5] Alonso, J., Martini H., Wu S., On Birkhoff orthogonality and isosceles orthogonality in normed linear spaces, *Aequationes Math*., **83** (2012), no. 1, 153–189.

[6] Alsina, C., Sikorska, J., Tomás, M. S., *Norm Derivatives and Characterizations of Inner Product Spaces*, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Hackensack, NJ, 2010.

[7] Amir, D., *Characterizations of Inner Product Spaces*. Operator Theory: Advances and Applications, vol. **20**, Birkhäuser, Basel, 1986.

[8] Birkhoff, G., Orthogonality in linear metric spaces, *Duke Math. J.*, **1** (1935), no. 2, 169–172.

[9] Ciesielski, K., Moslehian, M. S., Some remarks on the history of functional analysis, *Ann. Funct. Anal.* **1** (2010), no. 1, 1–12.

[10] Day, M. M., Some characterizations of inner-product spaces, *Trans. Amer. Math. Soc.* **62**, (1947), 320–337.

[11] Dehghani, M., Abed, M., Jahanipur, R., A generalized orthogonality relation via norm derivatives in real normed linear spaces, *Aequationes Math.*, **93** (2019), no. 4, 651–667.

[12] Dehghani, M., Zamani, A., Characterization of real inner product spaces by Hermite–Hadamard type orthogonalities, *J. Math. Anal. Appl.*, **479** (2019) 1364–1382.

[13] James, R. C., Orthogonality in normed linear spaces, *Duke Math. J.*, **12** (1945), no. 2, 291–302.

[14] James, R. C., Orthogonality and linear functionals in normed linear spaces, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **61** (1947), no. 2, 265–292.

[15] James, R. C., Inner product in normed linear spaces, *Bull. Am. Math. Soc.*, **53** (1947), 559–566.

[16] Jordan, P., von Neumann, J., On inner products in linear metric spaces, *Ann. of Math.*, **36** (1935), no. 2, 719–723.

[17] Kakutani, S., Some Characterizations of Euclidean Spaces, *lap, loum. Math.*, **16** (1939), 93–97.

[18] Kapoor, O. P., Prasad, J., Orthogonality and characterizations of inner product spaces, *Bull. Austral. Math. Soc.*, **19** (1978), 403–416.

[19] Kapoor, O. P., Mathur, S. B., Some geometric characterizations of inner product spaces. *Bull. Austral. Math. Soc.*, **24** (1981), no. 2, 239–246.

[20] Kubota, T., Ein neuer Aufbau der euklidischen Geometrie in der affinen Ebene, (German) *Monatsh. Math. Phys.*, **48** (1939), 96–102.

[21] Megginson, E., *An Introduction to Banach Space Theory*, Springer-Verlag, New York, 1991.

[22] Moslehian, M. S., Zamani, A., Dehghani, M., Characterizations of smooth spaces by ρ_*-orthogonality, *Houston J. Math.*, **43** (2017), no. 4, 1187–1208.

[23] Oman, J. A., *Characterizations of inner product spcses*, Ph. D. Thesis, Michigan State University, Ann Arbor, MI, 1969. 125 pp.

[24] Phillips, R. S., A characterization of Euclidean spaces, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **46** (1940), 930–933.

[25] Roberts, B. D., On the geometry of abstract vector spaces, *Tôhoku Math. J.*, **39** (1934), 42–59.

[26] Šmulian, V., On some geometrical properties of the unit sphere in the space of the type (B), *Rec. Math. (Mat. Sbornik) N. S.*, **48** (1938), 90–94.

[27] von Neumann, J., *Mathematical Foundations of Quantum Mechanics,* Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1967.

[28] Zamani, A., Dehghani, M., On Exact and Approximate Orthogonalities Based on Norm Derivatives, In: Brzdęk J., Popa, D., Rassias, T. (eds.), *Ulam Type Stability*, Springer-Verlag, 2019.

تاریخ ارسال: ۱۳۹۷/۴/۲۴؛ تاریخ بازنگری: ۱۳۹۸/۸/۱۴؛ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۸/۹/۲

مهدی دهقانی: دانشگاه کاشان، دانشکدهٔ علوم ریاضی

رایانامه: m.dehghani@kashanu.ac.ir